Ricci curvature and almost spherical multi-suspension(Abstract_要旨)

Honda, Shouhei

学位審査報告書

新制	
理	
1508	

（ふりがな）	ほんだ　しょうへい
氏名	本多　正平
学位（専攻分野）	博士（理学）
学位記番号	理博　　第 3470 号
学位授与の日付	平成21年11月24日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻

（学位論文題目）

RICCI CURVATURE AND ALMOST SPHERICAL MULTI-SUSPENSION
（リッチ曲率と概球面的多重懸垂）

論文調査委員	教授　深谷　賢治 教授　河野　明 教授　加藤　毅

理学研究科

氏　名	本多　正平

（論文内容の要旨）

本多正平氏の博士申請論文は，リッチ曲率のリーマン幾何学に関するものである．

本多氏の研究は，Colding と Cheeger による，リッチ曲率が下から有界な空間族の Gromov-Hausdorff 距離についての一連の研究（1990 年代後半から 2000 年代前半におけるリーマン幾何学の（Perelman のリッチ流の研究を除いて）最大の成果と見なされている）の出発点となった，L^2比較定理やそれに関わる球面定理の研究を，その自然な到達点まで推し進めるものである．

その最初の結果は，多重懸垂定理である．Grove-塩浜は断面曲率が 1-epsilon 以上であり，直径が球面の直径より大きいリーマン多様体は球面と同相である，という定理を示している．Colding はリッチ曲率が n+1-epsilon 以上で，球面の直径より大きいリーマン多様体は，ある空間の懸垂と同相であるという形の一般化を行っている．（球面と同相にならない例がある．）
一方で，塩浜らは，「直径がある数より大きい」という条件（空間上の２点の組に（=点対）関する条件と見なせる）を，空間上の複数の点対についての条件に一般化し，断面曲率についての球面定理を得ている．この条件は，ストレーナーという Alexandrov 空間の幾何学の基本概念とも関わり，また，球面のラプラス作用素の第一固有値とも関わる，自然な概念である．

本多氏は，リッチ曲率が n+1-epsilon 以上という条件のもとで，空間上の k 個の点対であって，(0,...0,+1,0,....0)，(0,...0,-1,0,....0)なる点対と，距離の意味で近いという性質をもつものが存在するとき，リーマン多様体がある空間の k 重懸垂と同相であるという結果を得た．これは，両者を融合させ自然な到達点にまで一般化した結果である．

さらに，上記の k が n-1（=次元）のときは，自動的に n 個まで増やせるという結果も得ている．

すでに述べたように，上記の点対の存在はラプラス作用素の固有値と深い関係にある．球面のラプラス作用素の第一固有関数は，n-1 次元球面を n 次元ユークリッド空間に標準的に埋め込んだ場合の座標関数であり，その重複度は n である．塩浜らがすでに観察しているように，上記点対の存在は，これら n 個の固有関数の存在と密接に関わっており，Colding による L^2比較定理の証明もこの観察に基づいている．

本多氏はこれを推し進め，リッチ曲率が n+1-epsilon 以上という条件のもとで，ラプラス作用素の第 k 固有値が球面の第 k 固有値（=第１固有値）以上であれば，リーマン多様体には k 個の上記の条件を満たす点対が存在し，したがって，ある空間の k 重懸垂と同相であるという結果を得た．

これらの結果はリッチ曲率が正であるリーマン多様体を理解する上で，基本的な役割を果たすものであると考えられる．

氏　名	本多　正平

（論文審査の結果の要旨）

断面曲率のリーマン幾何学については，Rauch や Toponogov による３角形の比較定理が古くからしられており，球面定理，有限性定理，直積分解定理，Gromov-Hausdorff 距離についての収束定理などの，断面曲率のリーマン幾何学について，重要な役割を果たしている．

15年ぐらい前に，Colding によって，積分型の比較定理である L^2 比較定理が断面曲率より弱い，リッチ曲率についての条件のもとで証明され，球面定理（たとえば，リッチ曲率が n+1-epsilon 以上で体積が球面に近いならば，Gromov-Hausdorff 距離の意味で球面に近い）などが得られた．L^2 比較定理は定理そのものやその証明において，リッチ曲率の下限とラプラス作用素の第一固有値の間の関係を与える小畠-Lichnerowicz の定理と深いかかわりがある．

本多氏の論文は，これらの研究の出発点である，L^2 比較定理とその球面定理やラプラス作用素の固有値の関係についての研究を，理想的な到達点まで高めたものであり，リッチ曲率のリーマン幾何学において重要な意味を持つものである．

申請論文の内容については，前ページで述べたので，繰り返さない．その後も本多氏は，リッチ曲率のリーマン幾何学について研究を進め，重要な結果を得ている．

最近得られた重要な結果は，リッチ曲率が下から有界なリーマン多様体の極限のハウスドルフ次元についてのものである．

前記の Cheeger-Colding の研究では，リッチ曲率が下から有界なリーマン多様体の Gromov-Hausdorff 極限について，極限の次元がもとのリーマン多様体と同一である場合（non collapsing case）については，多くの決定的な結果が得られているが，極限の次元がもとのリーマン多様体より小さくなる場合（collapsing case）についての結果はまだ不満足なものである．たとえば，極限の空間の Hausdorff 次元が整数であるかどうかも未解決である．これを Hausdorff 次元が小さい方あら順番に考えてみると，１あるいはそれ以下の場合が Cheeger-Colding によって，明らかにされた．

本多氏は最近これを推し進め，Hausdorff 次元が２以下の場合にほぼ満足すべき結果を得た．たとえば，Hausdorff 次元が２未満１より真に大という事はあり得ない．

このように，本多正平氏のリーマン幾何学のついての結果は重要であり，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるもの認める．また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた．