

柔軟で薄いシートの高速気流中における挙動に関する研究*

(第1報, 微小擾乱的挙動の理論的評価法)

山口信行^{*1}, 横田和彦^{*2}, 辻本良信^{*2}

Fluttering Behavior of a Flexible Thin Sheet in High-Speed Flow (1st Report, Theoretical Method for Prediction of the Sheet Behavior for Small Perturbed Motion)

Nobuyuki YAMAGUCHI, Kazuhiko YOKOTA and Yoshinobu TSUJIMOTO

A theoretical method has been proposed for prediction of the fluttering of a flexible thin sheet or web of such as paper blown in high speed flow of fluid. It assumes self-excited aeroelastic oscillation of the sheet with infinitesimally small amplitude. The flow and the sheet motion are expressed in terms of discretized vortices over the sheet and the wake, and motions of a number of short segments of flexible beams connected each other. The connecting conditions yield a homogeneous linear simultaneous equations concerning the unknowns including the strength of vortices and the sheet motions at each connecting points. The coefficient matrix of the equations determines the oscillation modes, the frequencies, the amplifying/damping rates, and thus the modes and the stability/instability of the system. The method is particularly suited to solve the situation where the oscillation modes are far from those in vacuum and progressive waves are predominant.

Key Words: Flow Induced Vibration, Flutter, Vortex, Numerical Analysis, Flexible Sheet, Progressive Wave

1. 前書き

印刷機や各種の情報機器、またフィルム製造機等の産業機械では、薄くかつ柔軟な枚葉シートあるいは連続帶状のウェブ（紙、プラスティック・フィルム、布、等）を空气中で高速走行させ、あるいは高速でハンドリングする操作が多く、その際ばたつきが発生しやすく、品質に重大な影響が出やすい。これをコントロールすることができれば、例えば印刷機を例にとれば、印刷の品質の向上、高速化、印刷された紙の折れやしわの減少、等の大きな改善が得られる。この種の機械の高速化や製品品質の向上にとってシート挙動の安定化は不可欠である。

情報機器や媒体の多様化と高速化に伴い、シートやウェブの挙動の予測に対する必要性は非常に高まっている。しかし、シートやウェブの剛性、慣性力、空気力、運動様式、等が複雑に干渉し合う現象であるため、

取り扱いが困難であり、これまで現場的対応によって状況の改善や改良が進められてきたにすぎなかった。

この問題の特異な点は、気流の影響を受けつつシートあるいはウェブの断面自体が大きく変形し、またその変形が気流に影響を与える、という極端な空力弾性的現象にある。従来の流力弹性解析は航空機やターボ機械の翼や構造物等の比較的剛性の高いものに対して行われることが多く、断面形を保持したまま平行移動あるいは回転運動、あるいはそれらが組み合わされた運動が行われるか、または断面の変形が発生する場合でも真空中での固有モードに近い変形が想定されるかのいずれかであった（例えば1、2）。

それに対しここで取り上げる物体は非常に剛性が低く、かつ流体に対する質量比が小さいため、断面自体の運動形態が真空中での固有モードから著しく変化し、さらに進行波の影響が大きく現れる。このため従来の方法のままでは対処が困難である。これらについての研究は実験的にも比較的少なく⁽³⁾、理論解析も数例見られるが、いずれも振動モードについては真空中での基本モードの重ねあわせに基づき時間進行法解析（大変形・粘性解析⁽³⁾、微小変形・非粘性解析⁽⁴⁾）

* 原稿受付 1998年7月22日。

*1 正員、明星大学理工学部（〒191-8506 日野市程久保2-1-1）。

*2 正員、大阪大学大学院基礎工学研究科（〒560-8531 豊中市待兼山町1-3）。

E-mail: yamaguchi@me.meisei.u.ac.jp

あるいは複素固有値解析⁽⁵⁾が行われている状況である。計算精度についても計算時間の上からも利用しやすい手法が確立しているとは言い難い。

このような観点から、著者らは気流中で吹き流されている柔軟なシートについてその振動的挙動とフラッター限界、そしてそれに影響する因子を明らかにするため実用的な理論的予測法の構築を試みている⁽⁶⁾⁻⁽¹¹⁾。本報告では、その第一段階として、一様気流中にその前縁を保持され、吹き流されている二次元のシートの微小擾乱運動としての空力的な自励振動的挙動に着目して、その運動の基礎式と解法を導く。

2. 記号

$B_{n,i}$	方程式系(66)における定数項
$C_{n,i,j,k}$	方程式系(66)における係数項
E_s	シート材のヤング率(Pa)
f	周波数 (Hz)
$f_B(x,t)$	単位幅当たり剪断力(N/m)
$f_B^*(x^*)$	規準化された剪断力 (複素数)
I_p	単位幅当たりシート断面回転慣性モーメント(kg·m ² /m)
I_s	単位幅当たりシートの断面二次モーメント(m ⁴ /m)
j	虚数単位
L_s	シート全長(m)
$M(x,t)$	単位幅当たり曲げモーメント(N·m/m)
N	シート分割個数
p	シート面圧力(Pa)
$p^*(x^*)$	無次元圧力振幅 (複素数)
$T(x)$	単位幅当たり張力(N/m)
t	時刻、時間(s)
t_s	シート厚み(m)
u	x 方向誘起速度(m/s)
U_a	主流速度(m/s)
v	y 方向誘起速度(m/s)
v_B	束縛渦誘起 y 方向速度成分(m/s)
v_F	放出渦誘起 y 方向誘起速度成分(m/s)
x	主流方向座標(m)
y	主流に垂直方向の座標(m)
$y_s(x,t)$	シートの y 方向変位(m)
$y^*(x^*)$	シート規準化振幅 (複素数)
$z_{j,k}$	方程式系(66)における変数項
β	シート剛性／空力比
$\Gamma(x,t)$	非定常シート面渦の強さ
$\gamma^*(x^*)$	シート面渦の規準化振幅 (複素数)
$\Gamma_w(x,t)$	非定常流出渦の強さ(m/s)
$\gamma_w^*(x^*)$	流出渦の規準化振幅 (複素数)
$\Delta p(x,t)$	シート上下面圧力差(Pa)
Δx	シート要素長さ(m)

$\Theta(x,t)$	シート面傾斜
$\theta^*(x^*)$	規準化シート面傾斜振幅 (複素数)
ρ_a	流体密度(kg/m ³)
ρ_s	シート密度(kg/m ³)
σ	固有値の増幅／減衰成分
$\tau(x)$	シート要素にかかる張力の無次元量
μ	質量比
ν	無次元周波数
ω	円周波数(1/s)
上添字 $*$	規準化された量
c	要素中点における量
下添字 l	シート下面
u	シート上面
i, j, k	要素あるいは節点の番号

3. 計算対象の概要と前提

紙やプラスチックシート等のように薄くて多少の曲げ剛性を持つ材質の二次元的シートまたはウェブ面が流れの中におかれた場合のばたつきに関する理論的計算手法を次の前提で導く(図1および2参照)。(1)この運動は微小であり、その2次以上の項は無視できるものとする。(2)シートの長さは L_s 、厚み t_s で一様、幅は一定で十分広いとし、単位幅で代表される二次元的状況とする。(3)主流は一様で x 方向、速度は U_a とする。これに垂直な方向を y 方向とする。流れの状況も二次元的とし、両側端の影響は無視できるものとする。(4)シート面は平均的には主流方向に直線状に吹き流されつつ、 y 方向にごく微小振幅の振動を行い、その変位を y_s とする。シート前縁は $x=0$ 、後縁は $x=L_s$ にあるとする。(5)シート密度を ρ_s 、空気密度を ρ_a とする。

この状況を次のように取り扱う。(a)シートの変位、質量、剛性等や流体力は連続な分布系であるが、これらを区間分割して、各節点での量により折れ線近似す

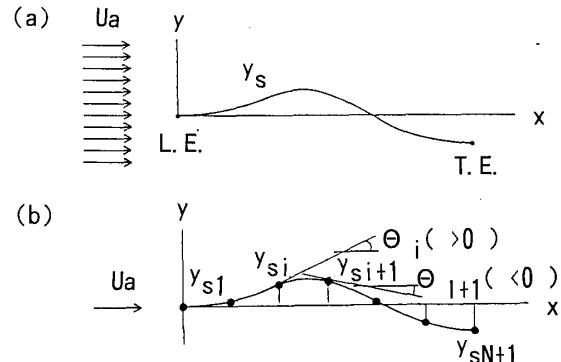


Fig.1 A Fluttering Sheet (a) and Distribution of the Displacements and Inclinations of the Sheet (b)

る。(b)流れはポテンシャル的とし、その流れ場は微小振動するシートの上に存在する非定常渦と後縁からの非定常流出渦の分布によって表現する。(c)シートの運動は微小振動する柔軟な梁の運動として取り扱う。シートは剛性を持つが、流れの上では厚みは無視できるとする。(d)渦もシートも x 軸上に存在するものとする。(e)シートに作用する力は、渦により誘起されるシート上下面の圧力差、シート弾性力、シート要素の運動による慣性力、そして流れの摩擦その他により発生する張力とする。(f)流れとシート運動の整合性は、各シート要素の代表点（例えば中点）においてシートの傾斜と相対流れ方向が x 軸上で一致するという条件により満足させる。(g)各変数は座標 x と時刻 t の関数であるが、 x のみおよび t のみの関数の積として変数分離して表現できるものとする。

次節以降でこれらの詳細な式を導く。

4. 流れの記述

4.1 流れの状況と近似 流れはポテンシャル的とし、シート面渦と後縁からの放出渦の分布によって流れ場を決定する。まずそれらの渦の分布と強さを想定し、それにより誘起される流れ場を導く。

図1(a)に示される運動をしているシートを図1(b)に示されるようなN個の微小要素に分割する。各要素は等しい長さを持つものとする。隣り合う要素との接続点を節点と呼ぶことにする。各要素には前縁側から順次1, 2, …, Nと名付ける。要素“i”的前端と後端の節点の番号は、各々、 i と $i+1$ である。節点番号1はシートの前縁、 $N+1$ は後縁を示す。

渦はシートの全面にわたって連続的に分布しているが、各節点における渦強さをつないだ折れ線による分布で近似する(図2)。シート変位 y_s は非常に小さいと想定されているので、これらの渦は x 軸上に存在すると近似され、後に述べる境界条件も x 軸上で適用される。

4.2 シート面渦 シート面非定常渦の強度分布を $\Gamma(x, t)$ と表す。これはシート面の束縛渦とそれに沿って掃過する自由渦(放出渦)を加え合わせた強さである。これを時間 t のみの関数と x のみの関数に変数分離し、さらに U_a で無次元化し、次の形に規準化表示する。

$$\Gamma(x, t) = U_a \gamma^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (1)$$

ここで j :虚数単位、 ω :複素円周波数($=2\pi f - j\sigma$)、 $2\pi f$: ω の周波数実成分、 σ : ω の複素数成分、 $\gamma^*(x^*)$:規準化渦強度分布(複素数)、 U_a :主流速度(この場合の無次元化の基準量)、そして

$$x^* = x/L_s \quad \text{無次元 } x \text{ 座標} \quad (2)$$

シート面渦 $\gamma^*(x^*)$ を、節点 i ($i=1, 2, \dots, N+1$)における渦強さ γ_i^* で代表させる。

$$\gamma_i^* = \gamma^*(x^*) \quad (i=1, 2, 3, \dots, N+1) \quad (3)$$

また区間長さ(要素長さ)として

$$\Delta x_i^* = x_{i+1}^* - x_i^* \quad (4)$$

と表記する。このとき要素“i”的上での渦強度分布は次のように近似的に表現される。

$$\gamma^*(x^*) = \gamma_i^* + (\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*)(x^* - x_i^*)/\Delta x_i^* \quad (x_i^* \leq x^* \leq x_{i+1}^* \text{に対し}) \quad (5)$$

この時の渦強度の分布の様子を図2に示す。

4.3 放出渦 後縁からの流出渦を $\Gamma_w(x, t)$ と表記する。この渦の後縁における強さは、渦の保存則からシート面渦の強さと次の関係がある。

$$\Gamma_w(L_s, t) = -(1/U_a)(\partial / \partial t) \int_0^{L_s} \Gamma(x, t) dx \quad (6)$$

(1)式と同様の形式に規準化して(6)式は次式になる。

$$\gamma_w^*(1) = -j \nu \int_0^1 \gamma^*(x^*) dx^* \quad (7)$$

ここで無次元周波数を次式で定義している。

$$\nu = \omega L_s / U_a \quad (8)$$

微小振動を仮定していることからシート面渦の内の束縛渦が後縁ではゼロになる(Kutta-Joukowskiの定理)とおくことができる。

$$\gamma_w^*(1) = \gamma_{N+1}^* \quad (9)$$

さらに放出渦が主流に乗って運ばれるとして次の式が成り立つ。

$$\Gamma_w(x, t) = \Gamma_w(L_s, t - ((x - L_s)/U_a)) \quad (10)$$

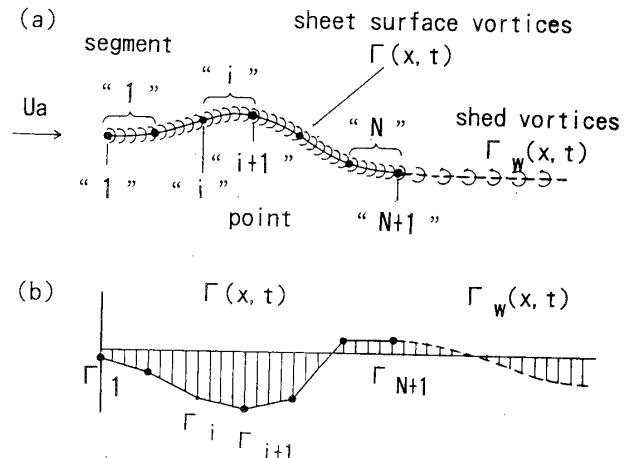


Fig.2 Simulation of the Flow by Vortices (a) and the Distribution of the Vortices (b)

これを規準化表示して(9)式を適用すると次式を得る。

$$\gamma_w^*(x^*) = \gamma^{*N+1} \exp(-j\nu(x^*-1)) \quad (11)$$

4・4 誘起速度 誘起速度 v についても次のように規準化表示する。

$$v(x,t) = U_a v^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (12)$$

要素“i”の中点 i^c に誘起される y 方向の速度 $v_{i^c}^*$ は、シート面渦による誘起速度 v_{B^*i} と放出渦による誘起速度 v_{F^*i} との和として次式で与えられる。

$$v_{B^*i} = -1/(2\pi) \int_0^\infty \gamma^*(x^*) / (x^* - x_{i^c}^*) dx^* \quad (13)$$

$$v_{F^*i} = -1/(2\pi) \int_1^\infty \gamma_w^*(x^*) / (x^* - x_{i^c}^*) dx^* \quad (14)$$

$$v_{i^c}^* = v_{B^*i} + v_{F^*i} \quad (15)$$

ここで i^c 点の x 座標は次式で与えられる。

$$x_{i^c}^* = (1/2)(x_{i^c} + x_{i^c+1}) \quad (16)$$

区間近似を利用し、要素 k の寄与による誘起速度を次式で表現できる。

$$v_{B^*i,k} = -(1/2\pi) \int_{x_k^*}^{x_{k+1}^*} \gamma^*(x^*) / (x^* - x_{i^c}^*) dx^* \quad (17)$$

とおくと(14)式は次式で与えられる。

$$v_{B^*i} = \sum_{k=1}^N v_{B^*i,k} \quad (18)$$

4.4.1 シート面渦誘起速度 v_{Bi} は x_{i^c} 点に特異性を持つから、次のように分けて考える。

(a) 要素 “k” ($k \neq i$) 上のシート面渦による寄与 $v_{B^*i,k}$ は、(5)式で与えられる渦強度分布で直線近似すると、次式で与えられる。

$$v_{B^*i,k} = -(1/2\pi) [\{ (x_{i^c}^* - x_{k+1}^*) \gamma_{k+1}^* - (x_{i^c}^* - x_{k+1}^*) \gamma_k^* \} / \Delta x_{k+1}^*] \times \\ \ln | (x_{i^c}^* - x_{k+1}^*) / (x_{i^c}^* - x_{k+1}^*) | + \\ (\gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*) \quad (19)$$

(b) 要素 “i” 上の束縛渦による寄与 v_{Bi,i^*} は、中央の i^c 点に特異性がある。そこで渦強度分布を次のように表現しなおす。

$$\gamma^*(x^*) = \gamma_{i^c}^* + (\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*)(x^* - x_{i^c}^*) / \Delta x_{i^c}^* \\ (x_{i^c}^* \leq x^* \leq x_{i+1}^* \text{ に対して}) \quad (20)$$

ここで

$$\gamma_{i^c}^* = (\gamma_i^* + \gamma_{i+1}^*)/2 \quad (21)$$

これより(17)式から

$$v_{B^*i,i} = -(1/2\pi) (\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*) \quad (22)$$

4.4.2 流出渦誘起速度 後縁からの放出渦によって i^c 点に誘起される速度 v_{F^*i} は(14)式に(11)式

を代入して次式で与えられる。

$$v_{F^*i} = -1/(2\pi) \gamma^{*N+1} \int_1^\infty \{ \exp(-j\nu(x^*-1)) / (x^* - x_{i^c}^*) \} dx^* \quad (23)$$

4.5 シート面上圧力分布 1次元の Euler 方程式 (x 方向) を利用し、圧力の式を求めるとき主流 U_a に乗った微小擾乱 u と圧力擾乱 p について次の関係式を得る。

$$p(x) = p_\infty - \rho_a \int_{-\infty}^x (\partial u / \partial t) dx - \rho_a U_a u \quad (24)$$

これよりシート上下面での圧力と速度をそれぞれ添字 U と L で表すと、圧力差として

$$\Delta p = p_L - p_U \quad (25)$$

さらにシート渦の強さと上下面速度差の関係(図3)から

$$u_L - u_U = \Gamma(x,t) \quad (26)$$

従って(24)式を上下面それぞれに適用し、それらの式の差をとって次式を得る。また $-\infty$ から前縁までは渦は存在しないことも利用する。

$$\Delta p(x,t) = -\rho_a \int_0^x (\partial \Gamma(x,t) / \partial t) dx \\ - \rho_a U_a \Gamma(x,t) \quad (27)$$

圧力差を次の形に規準化表示する。

$$\Delta p(x,t) = (1/2) \rho_a U_a^2 p^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (28)$$

これにより(27)式は次のように書ける。

$$p^*(x^*) = -j2\nu \int_0^{x^*} \gamma^*(x^*) dx^* - 2\gamma^*(x^*) \quad (29)$$

上式を離散化すると、前縁($i=1$)においては

$$p_{i=1}^* = -2\gamma_{i=1}^* \quad (30)$$

要素 “i” に対して

$$p_{i+1}^* - p_i^* = -j\nu(\gamma_{i+1}^* + \gamma_i^*) - 2(\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*) \quad (31)$$

後縁 ($i=N+1$) に対しては Kutta-Joukowski の定理から

$$p_{N+1}^* = 0 \quad (32)$$

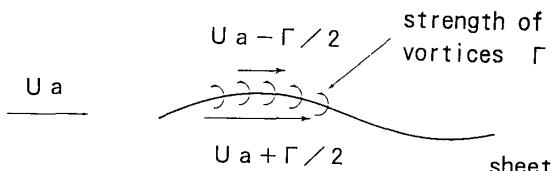


Fig.3 Relation between the Surface Vortices and the Velocity Difference across the Sheet

となる。これは(7)および(9)式と矛盾しない。

4・6 張力 シートにかかる張力 T はここで注目している現象に対して重要な役割を果たしている。ここでは各要素にかかる張力を時間に依存しない、 x 座標のみの関数として考慮する。

$$T(x) = (1/2) \rho_a U a^2 L_s \tau(x^*) \quad (33)$$

$\tau(x^*)$ が無次元化された張力の係数であり、要素 “i” に対して τ_i と表されるとする。

$$T_i = (1/2) \rho_a U a^2 L_s \tau_i \quad (34)$$

張力はシート後縁ではゼロで、上流にむかって増えてゆく。これを次式で近似する。

$$\tau_i = \tau_{i+1} + 2c_{f,i} \Delta x^* \quad (35)$$

ここで $c_{f,i}$ は要素 “i” での表面摩擦係数で、倍数の 2 はシート両面の寄与を表している。

5. 弾性体としてのシートの運動

5・1 分布力と基本式 分割された短いシート要素の両端の節点間に梁の関係式を適用する。図 4 に示すように節点間に作用している垂直分布力をまとめて次式で表す。

$$F_D(x, t) = \Delta p(x, t) - \rho_s t_s (\partial^2 y_s(x, t) / \partial t^2) + T(x) (\partial \Theta(x, t) / \partial x) \quad (36)$$

ここで第 1 項は上下面圧力差、第 2 項はシート慣性力、そして第 3 項は張力の寄与分を示している。ここで Θ はシートの傾斜を表す。また次の規準化表示を行う。

$$y_s(x, t) = L_s y^*(x^*) \exp(j \omega t) \quad (37)$$

$$\Theta(x, t) = \theta^*(x^*) \exp(j \omega t) \quad (38)$$

これらを(36)式に代入して整理すると次式が得られる。

$$F_D(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 [p^*(x^*) + 2 \mu v^2 y^*(x^*) + \tau(x^*) (\partial \theta^*(x^*) / \partial x^*)] \exp(j \omega t) \quad (39)$$

ここで質量比として次の量を定義している。

$$\mu = \rho_s t_s / \rho_a L_s \quad (40)$$

要素 “i” に関する図 4 を参照して、ごく短い区間にに関する垂直力の釣り合いを求めるとき次式が成り立つ。

$$\partial f_B(x, t) / \partial x = F_D(x, t) \quad (41)$$

ここで f_B は断面剪断力を表す。

さらにこのごく短い区間の回転運動に関して、 M を断面曲げモーメント、 I_P を断面の回転慣性モーメントとして次式を得る。ここで分布力の影響は小さいとする。

$$\partial M(x, t) / \partial x = f_B(x, t) + I_P (\partial^2 \Theta(x, t) / \partial t^2) \quad (42)$$

通常の梁の式では、回転運動無しという考え方の下に右辺第 2 項は無視される。ここでは付加項としてこの影響をある程度保持しておくことにする。

5・2 剪断力と分布力の関係 剪断力を次式で規準化表示する。

$$f_B(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 L_s f_B^*(x^*) \exp(j \omega t) \quad (43)$$

これにより(39)および(41)式から次式を得る。

$$df_B^*(x^*) / dx = p^*(x^*) + 2 \mu v^2 y^*(x^*) + \tau(x^*) (\partial \theta^*(x^*) / \partial x^*) \quad (44)$$

この関係を要素 “i” (断面 “i” から “i+1” の間) に適用する。ただしこの区間では各量は両節点におけるそれぞれの値の間を直線的に変化し、またシート面傾斜は一定であるとして、次式で近似する。

$$p^*(x^*) = p_i^* + (x^* - x_i^*) (p_{i+1}^* - p_i^*) / \Delta x_i^* \quad (45)$$

$$y^*(x^*) = y_i^* + (x^* - x_i^*) (y_{i+1}^* - y_i^*) / \Delta x_i^* \quad (46)$$

$$(\partial \theta^*(x^*) / \partial x^*) = (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) / \Delta x_i^* \quad (47)$$

これらの式を(44)式に代入して $x^* = x_i^*$ から積分することにより断面 “i” から “i+1” の間における $f_B^*(x^*)$ の分布を次のように評価できる。

$$f_B^*(x^*) - f_{B,i}^* = \\ (p_i^* + 2 \mu v^2 y_i^*) (x^* - x_i^*) + \\ \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) (x^* - x_i^*) / \Delta x_i^* + \\ [(1/2) \{ (p_{i+1}^* - p_i^*) + 2 \mu v^2 (y_{i+1}^* - y_i^*) \} \times \\ (x^* - x_i^*)^2 / \Delta x_i^*] \\ (x_i^* \leq x^* \leq x_{i+1}^* \text{ に対して}) \quad (48)$$

ここで $f_{B,i}^*$ は $x^* = x_i^*$ における規準化剪断力で積分定数であるが、未知数の一つである。

(48)式に $x^* = x_{i+1}^*$ を代入することで断面 “i” と “i+1” における断面剪断力 $f_{B,i}^*$ と $f_{B,i+1}^*$ について次の関係が成り立つことがわかる。

$$f_{B,i+1}^* - f_{B,i}^* = \\ (p_i^* + 2 \mu v^2 y_i^*) \Delta x_i^* + \\ \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) + \\ (1/2) \{ (p_{i+1}^* - p_i^*) + 2 \mu v^2 (y_{i+1}^* - y_i^*) \} \quad (49)$$

5・3 曲げモーメントの表示式 曲げモーメントを次のように規準化表示する。

$$M(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 L_s^2 M^*(x^*) \exp(j \omega t) \quad (50)$$

また(42)式右辺第 2 項(付加項)を次式で近似する。

$$\text{付加項} = (1/2) \rho_a U a^2 L_s \times \\ (-\varepsilon \mu v^2 (t_s/L_s)^2/6) (y_{i+1}^* - y_i^*) / \Delta x_i^* \quad (51)$$

ここで ε はこの因子の影響を適切に反映させるための修正係数として導入した。これより(42)式は次のように表示される。

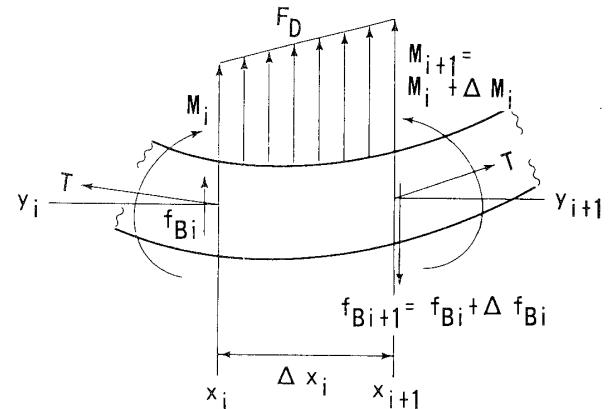


Fig.4 Balance of Forces and Moments on Short Segment “i”

$$\begin{aligned} dM^*(x^*)/dx^* &= f_B^*(x^*) + \\ &(-\varepsilon \mu v^2 (t_s/L_s)^2/6) (y_{i+1}^* - y_i^*) / \Delta x_i^* \end{aligned} \quad (52)$$

上式に(48)式を代入し、前節と同様にして $x^* = x_i^*$ から積分することにより断面 "i" から "i+1" の間における $M^*(x^*)$ の分布を評価できる。最終的に断面 "i" と "i+1" における曲げモーメント M^*_{i+1} と M^*_{i+1} について次の関係が成り立つ。

$$M^*_{i+1} - M^*_{i+1} =$$

$$\begin{aligned} &(1/2) (p_i^* + 2\mu v^2 y_i^*) \Delta x_i^{*2} + \\ &(1/2) \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \Delta x_i^{*2} + f_B^* \Delta x_i^* + \\ &(1/6) \{(p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu v^2 (y_{i+1}^* - y_i^*)\} \Delta x_i^{*2} + \\ &(-\varepsilon \mu v^2 (t_s/L_s)^2/6) (y_{i+1}^* - y_i^*) \end{aligned} \quad (53)$$

5・4 シート面の傾斜 曲げモーメントとたわみの関係から次の式が成り立つ。

$$M(x, t) = E_s I_s (\partial^2 y_s(x, t) / \partial x^2) \quad (54)$$

ここでシートの剛性と空力力の比を表す無次元数

$$\beta = E_s I_s / \{(1/2) \rho_a U_a^2 L_s^3\} \quad (55)$$

を剛性比として定義し、整理すると次の式を得る。

$$M^*(x^*) = \beta (d^2 y^*(x^*) / dx^{*2}) \quad (56)$$

(52)式の積分結果を(56)式に代入して $x^* = x_i^*$ から積分することにより断面 "i" から "i+1" の間におけるシート傾斜

$$dy^*(x^*)/dx^* = \theta^*(x^*) \quad (57)$$

の分布を評価できる。

最終的に断面 "i" と "i+1" におけるシート傾斜 θ_i^* と θ_{i+1}^* について次の関係が成り立つ。

$$\beta (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) =$$

$$\begin{aligned} &(1/6) (p_i^* + 2\mu v^2 y_i^*) \Delta x_i^{*3} + \\ &(1/6) \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \Delta x_i^{*2} + \\ &(1/24) \{(p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu v^2 (y_{i+1}^* - y_i^*)\} \Delta x_i^{*3} + \\ &(1/2) (-\varepsilon \mu v^2 (t_s/L_s)^2/6) (y_{i+1}^* - y_i^*) \Delta x_i^* + \\ &(1/2) f_B^* \Delta x_i^{*2} + M^*_{i+1} \Delta x_i^* \end{aligned} \quad (58)$$

5・5 シート面座標 (56)式の積分結果をさらに $x^* = x_i^*$ から積分することにより断面 "i" から "i+1" の間ににおけるシート変位 $y^*(x^*)$ の分布を評価できる。

最終的に断面 "i" と "i+1" におけるシート面座標 y_i^* と y_{i+1}^* について次の関係が成り立つ。

$$\beta (y_{i+1}^* - y_i^*) =$$

$$\begin{aligned} &(1/24) (p_i^* + 2\mu v^2 y_i^*) \Delta x_i^{*4} + \\ &(1/24) \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \Delta x_i^{*3} + \\ &(1/120) \{(p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu v^2 (y_{i+1}^* - y_i^*)\} \Delta x_i^{*4} + \\ &(1/6) (-\varepsilon \mu v^2 (t_s/L_s)^2/6) (y_{i+1}^* - y_i^*) \Delta x_i^* + \\ &+(1/6) f_B^* \Delta x_i^{*3} + (1/2) M^*_{i+1} \Delta x_i^{*2} + \beta \theta_i^* \Delta x_i^* \end{aligned} \quad (59)$$

6. 流れとシート面の整合性

以上2節にて行った計算をまとめて、流れとシート面の整合性をはかる。

(17)式で与えられる各シート要素の中点 x_i^c において流れがシートに沿うとする（図5）。この条件は、

微小振動の仮定から、 x 軸上でシートに対する相対流れの方向がシート面の傾斜に一致するものとする。すなわち図6に示すように

$$(v_i^c - (\partial y_i^c / \partial t)) / (U_a + u_i^c) = \Theta_i^c \quad (60)$$

ところで

$$U_a \gg |u_i^c|$$

であるから、(60)式は2次以上の微小量を無視できて次のようになる。

$$v_i^c - (\partial y_i^c / \partial t) = U_a \Theta_i^c \quad (61)$$

ここで変数分離し、規準化表示を利用すると

$$v_i^c - j \nu y_i^c = \theta_i^c \quad (62)$$

ここで中点における y_i^c と θ_i^c の値を節点 i および $i+1$ 点での座標と傾斜とから近似的に評価する。シート要素の形態は、両節点での y 座標と傾斜の値を満足させる3次式に近似して次の評価式を得る。

$$y_i^c = (3/4) y_i^* + (1/4) y_{i+1}^*$$

$$(1/8) \Delta x_i^* \theta_i^* - (1/4) \Delta x_i^* \theta_{i+1}^* \quad (63)$$

$$\theta_i^c = (3/2) (y_{i+1}^* - y_i^*) / \Delta x_i^* - (1/4) (\theta_{i+1}^* + \theta_i^*) \quad (64)$$

(63)および(64)式を(62)式に代入して整理し、次式を得る。

$$\begin{aligned} &v_i^c + \{-j \nu (3/4) + (3/2) / \Delta x_i^*\} y_i^* + \\ &\{-j \nu (1/4) - (3/2) / \Delta x_i^*\} y_{i+1}^* + \\ &\{-j \nu (1/8) \Delta x_i^* + (1/4)\} \theta_i^* + \\ &\{j \nu (1/4) \Delta x_i^* + (1/4)\} \theta_{i+1}^* \\ &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

7. 解法

前節までに導かれた方程式において各節点 "i" における渦度 γ_i^* 、圧力差 p_i^* 、シート座標 y_i^* 、シート傾斜 θ_i^* 、曲げモーメント M_i^* 、剪断力 f_B^* の6種類の変数はまだ定まらないまま残っている。これらを未知数として上に導いた方程式を利用して解くことによってこの系を決定できる。

前節までに次の6種類の式が各要素 "i" に対して導か

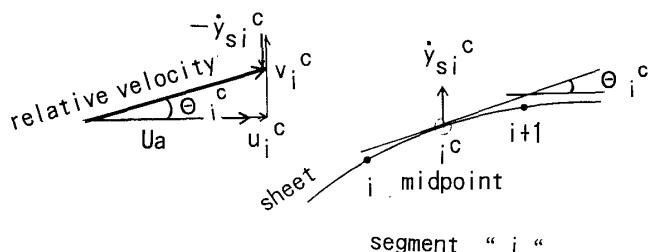


Fig.5 Matching Condition of the Flow and the Sheet Surface at Point "i^c"

れた。（1）4.4節において導かれたシート面上誘起速度の各式を介してシート面渦および流出渦とシートの運動状況を関係づける(65)式、（2）シート面上の圧力差と渦の関係を与える(31)式、（3）シートの運動と剪断力の関係を与える(49)式、（4）シートの運動と曲げモーメントの関係を与える(53)式、（5）シートの運動と面傾斜の関係を与える(58)式、そして（6）シートの運動と面変位の関係を与える(59)式。これらの関係式がシート要素 $i = 1, 2, \dots, N$ の各々に対して成立する。

これらの式を連立させると(66)式の形式になる。ここで $z_{j,k}$ は節点（番号 $k (=1 \sim N+1)$ ）における未知変数で $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$ はそれぞれ $\gamma^*, p^*, y^*, \theta^*, M^*, f_B^*$ に対応する。 $C_{n,i,j,k}$ と $B_{n,i}$ は上記の 6 種類の式の内の(n)番目に対する第 i シート要素($i=1 \sim N$)に関する式における $z_{j,k}$ の係数と定数項の値をそれぞれ表す。

$$\left(\begin{array}{cccccc} C_{1,1,1,1} & C_{1,1,1,2} & \dots & C_{1,1,1,N+1} & C_{1,1,2,1} & \dots & C_{1,1,6,N+1} \\ C_{1,2,1,1} & C_{1,2,1,2} & \dots & C_{1,2,1,N+1} & C_{1,2,2,1} & \dots & C_{1,2,6,N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1,N,1,1} & C_{1,N,1,2} & \dots & C_{1,N,1,N+1} & C_{1,N,2,1} & \dots & C_{1,N,6,N+1} \\ C_{2,1,1,1} & C_{2,1,1,2} & \dots & C_{2,1,1,N+1} & C_{2,1,2,1} & \dots & C_{2,1,6,N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{6,1,1,1} & C_{6,1,1,2} & \dots & C_{6,1,1,N+1} & C_{6,1,2,1} & \dots & C_{6,1,6,N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{6,N,1,1} & C_{6,N,1,2} & \dots & C_{6,N,1,N+1} & C_{6,N,2,1} & \dots & C_{6,N,6,N+1} \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ \vdots \\ z_{1,N+1} \\ z_{2,1} \\ \vdots \\ z_{6,1} \\ \vdots \\ z_{6,N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{1,2} \\ \vdots \\ B_{1,N} \\ B_{2,1} \\ \vdots \\ B_{6,1} \\ \vdots \\ B_{6,N} \end{pmatrix} \quad (66)$$

さらに境界条件として前縁剛支持で後縁自由吹き流しの場合には次の条件が考えられる。

(1) 後縁 Kutta-Joukowski の定理成立：式(32)

(2) シート前縁で剛支持： $y^{*1}=0$ (67)

かつ $\theta^{*1}=0$ (68)

(3) 後縁自由(吹き流し)：

剪断力ゼロ： $f_B^{*N+1}=0$ (69)

曲げモーメントゼロ： $M^{*N+1}=0$ (70)

(4) 前縁での渦強さと圧力の関係：式(30)

その他の場合には状況に応じて適切な境界条件を適用すれば良い。

結局、方程式は $6 \times N$ 式、境界条件 6 個、未知数 $6 \times (N+1)$ 個の同次線形連立方程式になり、(66)式に上記境界条件を適用して再構成すると解に必要な方程式系となり、解くことができる。

この系の係数には無次元複素円周波数 ν が未定のまま含まれている。係数マトリックスのデータミナントをゼロとする特性根 ν をサーベイしてこれらを決定し、その根の虚部 (σ) の正負によって安定判別を行う。すなわち

$$\begin{aligned} > & \text{ 不安定} \\ \sigma = 0 & \text{ 中立} \\ < & \text{ 安定} \end{aligned} \quad (71)$$

さらに系の周波数を実部 $(2\pi f)$ から決定できる。これらが求まるとさらに系の振動モードを計算することができる。

8. 本方式の特長と計算例

質量比が小さい柔軟なシートの吹き流し状態でのフラッターの場合には、真空中での固有モードからのずれが大きくなり、さらに進行波の卓越が予想され、モードが予想し難い。このためモードを想定せずに直接的に弾性力と流体力を取り扱うことが望ましい。本手法はこれを行ったもので、これにより広範囲の質量比における任意のフラッターモードに対して良い精度で解を得ることができ、シートの運動と流れ場両状況の同時観察と対比を行い易い。またシート面に沿う各量の複素振幅を離散的に表現しているので振幅の変化に加えて相互の位相変化を直接比較でき、進行波の状況を明らかにすることができる。

本手法では多種の変数を同時に解くことになり計算上厄介ではあるが、境界条件を適切に与え易く、例えば支持条件の影響の比較などが容易に行える。またシートの長手方向にパラメーターが変化する場合（たとえば厚みや密度の変化、局所摩擦係数の変化、等）にも容易に対応できる。

本手法の適用の例として前縁を保持され吹き流された柔軟なシートに関する解析結果を、大小二つの質量比の場合について図 6(a), (b) に示す。その入力データと巨視的な結果を表 1 に示す。結果は風速を変化させて中立状態と判定された状態である。図 6 は上から 1/8 周期時間毎の状況を示し、左図はシート変位、中図は圧力差、右図は渦強さのシートに沿う分布を各々示している。これらの分布は 1 周期の間で最大となる振幅で規格化して示されており、縦方向に拡大されている。

いずれの結果も進行波が明らかであるが、特に低質

Table 1 Input Data and Results on the Examples
Analyzed by the Method Proposed here

Sheet	Material	Paper
Young's Modulus(E_s)	3×10^9 (Pa)	
Density(ρ_s)	0.7×10^3 (kg/m ³)	
Length(L_s)	1.0 (m)	
Thickness(t_s)	(a) 0.005(m) (b) 6.86×10^{-5} (m)	
Flow	Air	
Density(ρ_a)	1.2 (kg/m ³)	
Surface Friction Coefficient(cf)	0.05	
Sheet Support Conditions		
Leading Edge	Rigid Support	
Trailing Edge	Freely Blown	
Number of Sheet Segments(N)	50	
RESULTS	(a)	(b)
Mass Ratio(μ)	2.92	0.004
Flutter Speed	16.0(m/s)	0.532(m/s)
Relative Stiffness(β)	0.203	4.75×10^{-4}
Frequency	9.17(Hz)	0.431(Hz)
Reduced Frequency	0.573	0.810

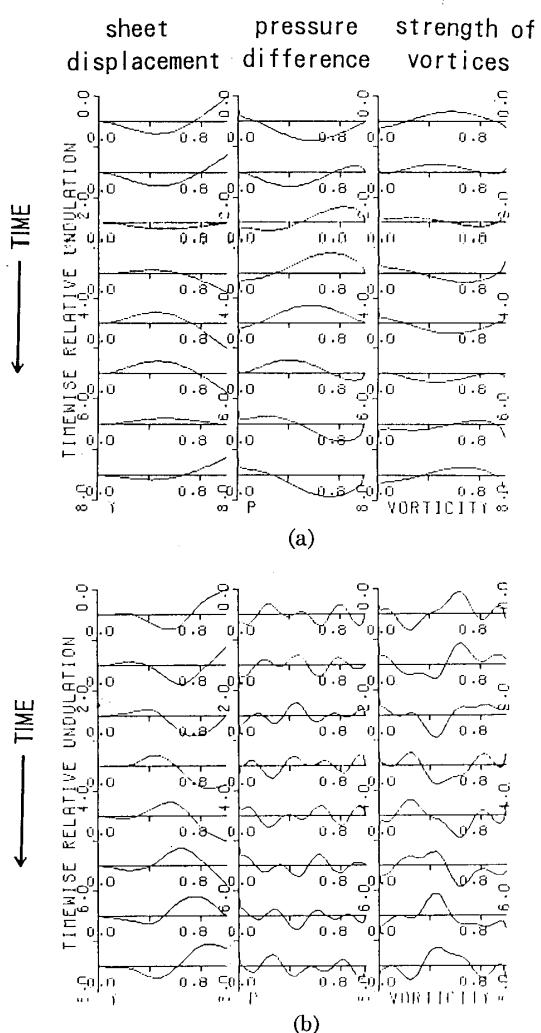


Fig.6 Calculated Results on Fluttering Behaviors
for Flutter Limits for Mass Ratios of 2.92 (a)
and 0.04(b)

量比の結果には振動モードの高次化に加えて表面摩擦による張力の影響が現れており、圧力分布とシート変位の分布の対応が単純ではなくなっていることが注目される。

ここでは図6(a)(b)の両者とも厚さ以外は同じ計算環境で得られており、特別な配慮は加えていない。予想されたメリットが実際に達成されており、実用的な手法であると考えられる。

9. 結 語

柔軟で薄いシートの高速気流中におけるばたつきの発生と挙動を予測する実用的な理論的予測手法を開発し、その基本的内容と解法を報告した。この手法は従来の手法に比して多くの利点があることが予想される。

本手法を紙その他のシートのフラッターに適用し、実測データと対比した結果を次報⁽¹²⁾に報告する。

なお本研究の一部は平成8—9年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）課題番号08650225を受けたことをここに記し、謝意を表する。

10.引用文献

- (1) Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., Halfman, R.L., Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, Mass.U.S.A., (1955)
- (2) Dowell, E.H.(Editor), et al., A Modern Course in Aeroelasticity, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, (1989)
- (3) 渡部洋八郎、他2名、機講論、No.95-10(V), (1995), p.145-146
- (4) Huang, L. Journal of Fluids and Structures, No.9, (1995), p.127-147
- (5) 鈴木雄一、金子成彦、機講論、No.97-10(B), (1997), p.115-116
- (6) 山口信行、機講論、No.95-1, (1995), p.189-190
- (7) 山口信行、機講論、No.96-1-III, (1996), p.105-106
- (8) 山口信行、明星大学理工学部紀要、第32号、(1996), p.19-36
- (9) Yamaguchi, N. JSME, ICF-E-97-1109, No.97-203, Vol.1, (1997), p.527-532
- (10) 山口信行、機講論、No.98-1(III), (1998), p.17-18
- (11) 横田和彦、他5名、機講論、No.98-1(III), (1998), p.117-118
- (12) 山口信行、他、機論(B), Vol.65, No.632, (1999), p.1232-1239