BULLETIN DE LA S. M. F.

F. BRUHAT

J. TITS

Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II : groupes unitaires

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 141-195

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__141_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 141-195.

SCHÉMAS EN GROUPES ET IMMEUBLES DES GROUPES CLASSIQUES SUR UN CORPS LOCAL
Deuxième Partie : GROUPES UNITAIRES

PAR

F. BRUHAT et J. TITS (*)

RÉSUMÉ. — On donne dans le cas d'un groupe classique G des constructions concrètes, c'est-à-dire liées à la représentation naturelle de G, de l'immeuble et des schémas en groupes de la théorie générale des groupes réductifs sur un corps local ([3], [4]). Le cas des groupes linéaires généraux ou spéciaux ayant été traité dans une première partie [5], on s'intéresse aux autres groupes, c'est-à-dire aux groupes unitaires.

ABSTRACT. — The building and group-schemes associated by the general theory ([3], [4]) to a reductive group over a local field are given a concrete interpretation in the case of a classical group G; here, "concrete" means "related to the natural representation of G". The case of the general and special linear groups has been handled in a first part [5]; here, we deal with the other classical groups, i. e. the unitary groups.

Introduction

Ce travail est la suite de notre article [5] (noté III dans la suite) et vise, comme lui, à donner dans le cas des groupes classiques des interprétations concrètes des immeubles et schémas en groupes associés à un groupe réductif défini sur un corps local K, que nous avons introduits dans nos mémoires [3] et [4] (notés I et II respectivement dans la suite). Le cas des groupes linéaires généraux et spéciaux ayant été traité dans III, nous nous

---

(*) Texte reçu le 17 février 1986, révisé le 7 juillet 1986.

F. BRUHAT, Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques, 75251 Paris Cedex 05.
J. TITS, Collège de France, 11, place Marcelin-Berthelot, 75231 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/02 141 55/$ 7.50

intéressons ici aux groupes unitaires. Nous prions le lecteur de se reporter à l'introduction de III pour plus de motivation.

Le premier paragraphe est consacré au rappel de la classification des K-formes des groupes classiques SL_n, Sp_{2n} et SO_n. Nous avons dû y consacrer pas mal de pages, pour deux raisons. D'une part, nous avons voulu établir une présentation et un système de notations uniques, couvrant tous les cas même en caractéristique 2 : elle fait apparaître tout groupe classique qui n'est pas le groupe spécial linéaire $SL_n(D)$ d'un corps gauche D, comme le stabilisateur dans un tel $SL_n(D)$ du couple (f, q) formé d'une forme sesquilinéaire ε-hermitienne et d'une forme pseudo-quadratique (en un sens convenable) associées. D'autre part, nous avons eu besoin (voir paragraphe 4) de préciser comment on passe *explicitement* de la « représentation naturelle » d'un groupe unitaire G sur K à la « représentation naturelle » de G comme groupe classique sur une extension de K. Dans les premiers numéros (jusqu'à 1.14), le corps K est un corps commutatif quelconque.

A partir de 1.15, le corps K est supposé muni d'une valuation discrète (nous avons ajouté quelques remarques sur le cas de valuation dense) et nous supposons que K et G satisfont à des hypothèses qui permettent de construire dans $G(K)$ une donnée radicielle valuée et un immeuble affine, hypothèses automatiquement réalisées lorsque K est *hensélien*, par exemple complet. Le paragraphe 2 est essentiellement consacré à la démonstration d'un théorème établissant une bijection canonique entre l'immeuble de G et l'ensemble des normes « maximinorantes » pour le couple (f, q) définissant G; ce théorème, annoncé dans I (note ajoutée aux épreuves), nous a été suggéré par André Weil. Le paragraphe 3 associe à tout point p de l'immeuble de G un schéma en groupes $\mathfrak{G}_p$ sur l'anneau des entiers de K, plat, de fibre générique G, admettant une « grosse cellule » et défini de manière simple à partir de la représentation naturelle de G et de la norme correspondant à p. Le paragraphe 4 étudie l'effet d'un « changement de base étale », ce qui permet, au paragraphe 5, la comparaison des schémas du paragraphe 3 avec ceux introduits dans II. La conclusion est la suivante : si K est hensélien à corps résiduel $\bar{K}$ parfait (et même sous des hypothèses un peu plus larges), le schéma $\mathfrak{G}_p$ est lisse et coïncide avec le schéma $\hat{\mathfrak{G}}_p$ de II, *sauf* lorsque car $\bar{K}=2$ et que G est une forme du groupe orthogonal en dimension paire non déployée sur l'hensélisé strict de K. Dans ce dernier cas, le schéma « naturel » $\mathfrak{G}_p$ n'est pas lisse.

1.1. Dans ce travail, la lettre K désigne un corps commutatif et la lettre G désigne une K-forme de l'un des groupes classiques *au sens strict*, c'est-à-dire des groupes algébriques SL_n, Sp_{2n} ou SO_n (et non de groupes isogènes à ceux-ci : en particulier, il n'y a pas lieu de considérer des formes trialitaires de D_4, qui sont nécessairement des formes de Spin_8 ou de PSO_8 ([11], p. 31); d'autre part, nous désignons par SO_n la *composante neutre* du groupe orthogonal O_n (même lorsque $\operatorname{car} K=2$ et $n=2m$: tous les éléments de O_n sont alors de déterminant 1, mais la composante neutre de O_n est le sous-groupe d'indice 2 noyau de l'invariant de Dickson).

On sait ([13], [10], [11]) que G est K-isomorphe à l'un des groupes suivants :

(I) le groupe spécial linéaire $SL_n(D)$, où D est un corps de centre K de dimension finie sur K (ces groupes ont fait l'objet de notre article III et nous n'en reparlerons pratiquement pas);

(II) le groupe spécial unitaire $SU(f)$ d'une forme sesquilinéaire hermitienne ou antihermitienne, non dégénérée et tracique.

Lorsque $\operatorname{car} K\neq 2$, les types (I) et (II) épuisent à isomorphisme près les K-formes considérées. Mais, lorsque $\operatorname{car} K=2$, il faut y ajouter pour obtenir les formes du groupe orthogonal le type suivant :

(III) le groupe spécial orthogonal d'une forme pseudo-quadratique non dégénérée de défaut $\leqslant 1$.

1.2. Pour expliciter les vocables utilisés ci-dessus, pour unifier les notations des types (II) et (III) et pour des raisons plus sérieuses qui apparaîtront plus tard (*cf.* 2.16), nous nous placerons dans le cadre suivant. On désigne par D un corps de centre L, par σ une involution de D (i.e. un antiautomorphisme de carré l'identité), tels que K soit le corps des points fixes de σ dans L, et par ε un élément de D égal à ± 1. On pose

$$D_{\sigma,\varepsilon}=\{\xi-\varepsilon\xi^\sigma \mid \xi\in D\}, \qquad D^{\sigma,\varepsilon}=\{\xi\in D \mid \xi^\sigma=-\varepsilon\xi\},$$

de sorte que $D_{\sigma,\varepsilon}\subset D^{\sigma,\varepsilon}$. Si $\operatorname{car} K\neq 2$ ou si $L\neq K$ (involution « de deuxième espèce »), alors $D_{\sigma,\varepsilon}=D^{\sigma,\varepsilon}$: en effet, il existe alors $\lambda\in L$ tel que

$$\lambda+\lambda^\sigma=1 \tag{1}$$

et l'on a $\xi=\lambda\xi-\varepsilon(\lambda\xi)^\sigma\in D_{\sigma,\varepsilon}$ pour tout $\xi\in D^{\sigma,\varepsilon}$. Par contre, si $\operatorname{car} K=2$ et $L=K$, on a $D_{\sigma,\varepsilon}=\operatorname{Tr} D$ et $D^{\sigma,\varepsilon}$ est l'ensemble des invariants de σ, de sorte qu'en général $D_{\sigma,\varepsilon}\neq D^{\sigma,\varepsilon}$.

On désigne désormais par D^0 l'un ou l'autre de ces deux sous-K-espaces vectoriels de D, ce choix étant fait une fois pour toutes (lorsqu'ils sont distincts, le choix $D^0 = D^{\sigma, \varepsilon}$ correspond aux formes du groupe symplectique et le choix $D^0 = D_{\sigma, \varepsilon}$ à celles du groupe orthogonal). Notons que $\eta^\sigma \xi \eta \in D^0$ quels que soient $\xi \in D^0$ et $\eta \in D$.

On désigne par X un espace vectoriel *à droite* sur D (non nécessairement de dimension finie), on pose $M = \mathrm{End}_D X$ et l'on note B le K-espace vectoriel des formes σ-sesquilinéaires sur X, c'est-à-dire l'ensemble des applications biadditives $b : X \times X \to D$ satisfaisant à

$$b(x\xi, y\eta) = \xi^\sigma b(x, y)\eta \qquad \text{pour} \quad x, y \in X \quad \text{et} \quad \xi, \eta \in D.$$

Il est canoniquement muni de deux structures commutant de M-module à *droite*. Pour les distinguer, nous écrivons l'une d'elles à *gauche* et posons pout $b \in B$, u, $v \in M$ et x, $y \in X$:

$$(ubv)(x, y) = b(ux, vy), \tag{2}$$

de sorte que $v(ub) = (uv)b$.

Si X est de dimension finie, B s'identifie canoniquement à $(X^\sigma)^* \otimes_D X^*$ (où X^σ désigne le D-espace vectoriel à gauche déduit de X grâce à σ, c'est-à-dire le groupe additif X muni de la loi d'opération $(\xi, x) \mapsto x\xi^\sigma$ de $D \times X$ dans X, et où X^* désigne le dual $\mathrm{Hom}_D(X, D)$ de X). Si (e_i) est une base de X, on associe à $x = \sum e_i x_i \in X$ la matrice *colonne* $\mathbf{x} = (x_i)$, à $u \in M$ la matrice carrée $\mathbf{u}$ telle que $ue_j = \sum e_i u_{ij}$, d'où $\mathbf{y} = \mathbf{ux}$ si $y = ux$, et à $b \in B$ la matrice carrée $\mathbf{b} = (b(e_i, e_j))$, de sorte que $b(x, y) = {}^t\mathbf{x}^\sigma \mathbf{by}$ et que la matrice de ubv est ${}^t\mathbf{u}^\sigma \mathbf{bv}$ [où bien entendu $({}^t\mathbf{u}^\sigma)_{ij} = u_{ji}^\sigma$].

On dit que b est ε-hermitienne si

$$b(y, x) = \varepsilon\, b(x, y)^\sigma \qquad \text{pour} \quad x, y \in X, \tag{3}$$

d'où $b(y, x) \equiv b(x, y) \bmod D^0$, et que b est *tracique* si de plus il existe pour tout $x \in X$ un $\xi \in D$ tel que

$$b(x, x) = \xi + \xi^\sigma. \tag{4}$$

Notons que (4) résulte de (3) lorsque car $K \neq 2$ (prendre $\xi = (1/2)\, b(x, x)$!); lorsque $\sigma = \mathrm{id}$ (c.-à-d. $D = K$) et $\varepsilon = -1$, (4) signifie que b est une forme bilinéaire *alternée*.

On désigne par Q l'ensemble des applications de X dans le K-espace vectoriel quotient D/D^0 de la forme $q : x \mapsto b(x, x)+D^0$ pour un $b \in B$, de sorte que

$$q(x\xi)=\xi^\sigma q(x)\xi \quad \text{pour} \quad x \in X \quad \text{et} \quad \xi \in D, \tag{5}$$

$$q(x+y)=q(x)+q(y)+f(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in X, \tag{6}$$

où f est la forme sesquilinéaire ε-hermitienne tracique sur X définie par

$$f(x, y)=b(x, y)+\varepsilon b(y, x)^\sigma \quad \text{pour} \quad x, y \in X. \tag{7}$$

Autrement dit, Q s'identifie au K-espace vectoriel quotient de B par le sous-espace N formé des $b \in B$ tels que $b(x, x) \in D^0$ pour tout $x \in X$. On vérifie aisément que si $D^0 \neq D$, le noyau N se compose des b de la forme $(x, y) \mapsto g(x, y)-\varepsilon g(y, x)^\sigma$ avec $g \in B$ lorsque $D^0=D_{\sigma, \varepsilon}$ et des formes $(-\varepsilon)$-hermitiennes lorsque $D^0=D^{\sigma, \varepsilon}$.

Notons que

$$f(x, x)=\xi+\varepsilon\xi^\sigma \quad \text{pour} \quad x \in X \quad \text{et} \quad \xi \in q(x). \tag{8}$$

En particulier,

$$q(x)=0 \quad \textit{entraîne} \quad f(x, x)=0 \quad (x \in X). \tag{9}$$

Un élément q de Q est appelé une *forme pseudo-quadratique* sur X (relativement à σ, ε, D^0) et une forme sesquilinéaire ε-hermitienne tracique f satisfaisant à (6) est dite *associée* à q (on dit aussi que q est associée à f). On note C l'espace des couples (f, q) de formes ainsi associées.

Si $D^0=D$, c'est-à-dire si l'on a $\sigma=\mathrm{id}$ (d'où $D=K$) et ou bien $\varepsilon \neq 1$, ou bien car $K=2$ et $D^0=D^{\sigma, \varepsilon}$, alors Q est réduit à $\{0\}$ et les formes sesquilinéaires traciques sont les formes alternées.

Si $D^0 \neq D$, alors q *détermine* f. Plus précisément, il existe, pour tout $q \in Q$, un unique $f \in B$ satisfaisant à (6) : cela résulte aussitôt de ce que l'image d'une forme sesquilinéaire non nulle est D tout entier.

Dans les deux cas, on voit qu'*une forme f associée à q satisfait toujours à* (8) *et* (9).

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base du D-espace vectoriel X. Munissons I d'un ordre total et donnons-nous des $\alpha_i \in D/D^0$ $(i \in I)$ et des $\beta_{ij} \in D$ (pour $i, j \in I$, $i<j$). Alors, *il existe un couple (f, q) de formes associées et un seul tel que $q(e_i)=\alpha_i$ et $f(e_i, e_j)=\beta_{ij}$ pour $i<j$.* C'est évident si $D^0=D$ (on a $q=0$ et f

alternée). Si $D^0 \neq D$, l'unicité de (f, q) est immédiate : q détermine f et on doit avoir

$$(6\,bis)\qquad q\left(\sum_i e_i \xi_i\right) = \sum_i \xi_i^\sigma \alpha_i \xi_i + \sum_{i<j} \xi_i^\sigma \beta_{ij} \xi_j + D^0,$$

quels que soient les $\xi_i \in D$ nuls sauf un nombre fini. Pour montrer l'existence de (f, q), définissons un élément $b \in B$ en choisissant pour $b(e_i, e_i)$ un élément de α_i et en posant $b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$ pour $i<j$, $b(e_i, e_j) = 0$ pour $i>j$. Alors, $q : x \mapsto b(x, x) + D^0$ et f définie par (7) répondent à la question.

On en déduit que *toute application q de X dans D/D^0 satisfaisant à* (5) *et* (6) *avec $f \in B$ (non nécessairement ε-hermitienne) appartient à Q*. En effet, posons $\alpha_i = q(e_i)$ et $\beta_{ij} = f(e_i, e_j)$ pour $i<j$. Alors (5) et (6) entraînent (6 *bis*) et q coïncide avec la forme pseudo-quadratique définie à l'alinéa précédent.

Désormais, nous notons (f, q) le couple formé d'un $f \in B$ et d'un $q \in Q$ associés.

1.3. *Remarques*. — (1) Si $D^0 = D_{\sigma, \varepsilon}$, alors Q est l'ensemble des formes pseudo-quadratiques au sens de I, 10.1.1. Si de plus $D_{\sigma, \varepsilon} \neq D$, c'est-à-dire si l'on n'a pas $\sigma = \mathrm{id}$ et $\varepsilon \neq 1$, alors Q est aussi l'ensemble des formes quadratiques au sens de [11] (*voir* p. 23). Si de plus $D_{\sigma, \varepsilon} = \{0\}$, c'est-à-dire $\sigma = \mathrm{id}$ et $\varepsilon = 1$, alors Q est l'ensemble des formes quadratiques au sens usuel.

(2) Si $D^0 = D^{\sigma, \varepsilon}$ (par exemple si car $K \neq 2$ ou si $L \neq K$), alors *f détermine q* : on a en effet d'après (8)

$$(10)\qquad q(x) = \{\xi \in D \mid \xi + \varepsilon\xi^\sigma = f(x, x)\} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

S'il existe $\lambda \in L$ satisfaisant à (1), on a aussi

$$(10\,bis)\qquad q(x) = \lambda f(x, x) + D^0 \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On pourrait donc penser que la considération de q est alors oiseuse : on verra qu'il n'en est rien. On sait d'ailleurs depuis EICHLER [7] que l'étude des formes quadratiques, par exemple sur un corps de nombres, nécessite la considération simultanée de la forme bilinéaire symétrique f et de la forme quadratique $q(x) = (1/2) f(x, x)$.

(3) Le *théorème de Witt* est valable sous la forme suivante : *soit Y un sous-espace vectoriel de dimension finie de X tel que pour tout $y \in Y - \{0\}$, il existe $x \in X$ avec $f(x, y) \neq 0$; alors, toute application linéaire u de Y dans X telle que $f(u(y), u(z)) = f(y, z)$ et $q(u(y)) = q(y)$ pour tous $y, z \in Y$, se*

prolonge en un automorphisme de X conservant f et q. La démonstration du théorème de Witt « classique » donnée dans [2], § 4, n° 3 est valable presque sans changements.

1.4. Les définitions précédentes se généralisent au cas d'un anneau à involution : voir [12]. Les seuls cas qui nous intéresseront par la suite sont celui d'une L-algèbre centrale simple, où L est un corps commutatif extension de K tel que K soit l'ensemble des points fixes de la restriction de l'involution σ à L, et celui d'un produit direct de deux K-algèbres centrales simples antiisomorphes muni de l'involution $(u, v) \mapsto (v^{\sigma}, u^{\sigma})$. Les définitions et résultats de 1.2 se généralisent alors, avec les deux correctifs suivants. Pour montrer que toute application de X dans D/D^0 satisfaisant à (5) et (6) appartient à Q, il faut supposer que X est un D-module projectif (p. ex. un D-module de type fini) : la démonstration de 1.2 est valable sans changement dans le cas libre et le passage au cas projectif est immédiat. D'autre part, pour montrer que q détermine f lorsque $D^0 \neq D$, il faut remarquer que le sous-groupe additif engendré par l'image d'une forme sesquilinéaire non nulle est un idéal bilatère $\neq \{0\}$ et que, avec nos hypothèses, un tel idéal ne peut être contenu dans D^0 lorsque $D^0 \neq D$.

1.5. Avec ces notations, on peut préciser les assertions de 1.1. Une fois écartées les formes de type (I), une K-forme G d'un groupe classique est obtenue à K-isomorphisme près de la manière suivante. On considère D, σ, ε, D^0, X, f et q comme ci-dessus et l'on suppose de plus que D est un *corps de dimension finie* d^2 sur son centre L, que X est de *dimension finie* n sur D, avec $nd[L : K] \geqslant 3$, et que le couple (f, q) est *non-dégénéré* (c'est-à-dire que le seul élément $x \in X$ satisfaisant aux relations $f(x, y) = 0$ pour tout $y \in X$ et $q(x) = 0$ est l'élément nul) et de *défaut* $\leqslant 1$ (c'est-à-dire que la dimension *sur* K du noyau de f est $\leqslant 1$: autrement dit, ou bien f est non dégénérée, ou bien $\operatorname{car} K = 2$, $D = K$, $n = 2p+1$, $D^0 = \{0\}$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$). Alors, *$G$ est la composante neutre du sous-groupe algébrique G' de $GL(X)$ défini par les équations* $\operatorname{Nrd} g = 1$, $g.f = f$ et $g.q = q$ (où Nrd désigne le polynôme norme réduite, à valeurs dans L, et où $g.f$ et $g.q$ désignent les transformés par transport de structure de f et q respectivement par $g \in GL(X)$). On sait que G' est connexe sauf lorsque $\operatorname{car} K = 2$, $L = K$, $D^0 = \operatorname{Tr} D$ et $nd \in 2\mathbf{Z}$ (formes du groupe orthogonal en dimension paire) et que sa composante neutre G est définie sur K, autrement dit est un K-schéma absolument réduit ([11], p. 30). Rappelons à ce propos qu'en caractéristique 2, le groupe orthogonal en dimension impaire n'est pas réduit, car les équations $g.q=q$ entraînent $(\operatorname{Nrd} g)^2=1$ mais non $\operatorname{Nrd} g=1$.

1.6. Les résultats rappelés ci-dessus sont établis dans [13] et [11] par des méthodes « intrinsèques » : par exemple, lorsque $\operatorname{car} K \neq 2$, A. Weil associe canoniquement à un groupe classique $G=SL_n$, Sp_n ou SO_n une algèbre à involution et montre que les K-formes de G correspondent aux K-formes de celle-ci. Ces méthodes ne répondent pas immédiatement à la question simple suivante : comment passe-t-on de la représentation « naturelle » de G comme groupe spécial unitaire du couple (f, q) à la représentation « naturelle » de G sur la clôture séparable de K comme groupe SL_n, Sp_n ou SO_n ? Or, nous aurons besoin plus loin de ce passage, et même plus généralement du passage de la représentation « naturelle » de G sur K à la représentation « naturelle » de G sur une extension de K (ces expressions n'étant d'ailleurs pas définies sans ambiguïté comme nous le préciserons) et nous allons l'expliciter.

1.7. Pour cela, il nous faut rappeler et compléter les résultats classiques sur les algèbres simples à involution [1]. Soit M une K-algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution σ, telle que K soit l'ensemble des points fixes de σ dans le centre L de M. Soit E un M-module à droite simple. Notons D le corps commutant de E, de sorte que E est un D-espace vectoriel *à gauche* de dimension finie et que M s'identifie à $\operatorname{Hom}_D(E, E)$ et L au centre de D. Soit (a_i) une base du D-espace vectoriel E. Elle permet d'identifier M et l'algèbre des matrices $M_r(D)$ en identifiant $u \in M$ à la matrice $\mathbf{u}=(u_{ij})$ définie par

$$a_i u = \sum_j u_{ij} a_j.$$

On sait ([1], th. 12, p. 156) que l'on peut trouver une involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ de D, coïncidant avec σ sur L, et un élément inversible $\mathbf{s}$ de $M_r(D)$ tels que l'on ait, pour tout $u \in M$,

$$\mathbf{u}^\sigma = \mathbf{s}\,.\,{}^t\bar{\mathbf{u}}\,.\,\mathbf{s}^{-1}, \tag{11}$$

et

$$ {}^t\bar{\mathbf{s}} = \eta\,\mathbf{s} \qquad \text{avec} \quad \eta = \pm 1, \tag{12}$$

où ${}^t\bar{\mathbf{u}}$ est la matrice définie par $({}^t\bar{\mathbf{u}})_{ij} = \bar{u}_{ji}$.

Soit $E^* = \mathrm{Hom}_D(E, D)$ le dual de E, muni de la base duale (a_i^*). C'est un D-espace vectoriel à droite et un M-module à gauche simple dont le commutant est l'ensemble des applications $y \mapsto y\lambda$ pour $\lambda \in D$ et s'identifie canoniquement au corps opposé D^{op}. Soit E^σ le M-module à gauche simple déduit de E grâce à σ (c'est-à-dire le groupe additif E muni de la loi d'opération $(u, x) \mapsto xu^\sigma$ de $M \times E$ dans E). La matrice inversible $\mathbf{s} = (s_{ij})$ définit une bijection semilinéaire s de E dans E^* telle que

$$s(\lambda x) = s(x)\bar{\lambda} \quad \text{pour} \quad x \in E, \quad \lambda \in D, \tag{13}$$

$$s(a_i) = \textstyle\sum_j a_j^* s_{ji} \quad \text{pour tout } i, \tag{14}$$

et un calcul immédiat montre que la formule (11) signifie que s *est un morphisme, donc un isomorphisme, de* M*-modules à gauche de* E^σ *sur* E^*.

D'autre part, on sait que M, considéré comme bimodule sur lui-même, s'identifie canoniquement à $E^* \otimes_D E$ (à l'élément $x' \otimes x \in E^* \otimes_D E$ correspond l'élément $u \in M$ tel que $yu = x'(y).x$ pour tout $y \in E$ et à $u \in M$ de matrice $\mathbf{u} = (u_{ij})$ correspond $\sum_{i,j} a_i^* u_{ij} \otimes a_j$). Par suite, le M-module à gauche $\mathrm{Hom}_M(E, M)$ des homomorphismes de M-modules à droite de E dans M s'identifie canoniquement à E^* (*cf.* III,1.16 : à $x' \in E^*$ correspond l'homomorphisme $x \mapsto x' \otimes x$).

Considérons enfin l'ensemble B des formes σ-sesquilinéaires sur E (à valeurs dans M). Il s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_M(E^\sigma, \mathrm{Hom}_M(E, M))$, d'où, d'après ce qui précède, une identification canonique

$$B \simeq \mathrm{Hom}_M(E^\sigma, E^*). \tag{15}$$

Il en résulte aussitôt que *la donnée de l'isomorphisme* $s : E^\sigma \to E^*$ *fournit une bijection* K*-linéaire* $\lambda \mapsto b_\lambda$ *de* D *sur* B*, donnée par*

$$b_\lambda(x, y) = s(x)\lambda \otimes y = s(x) \otimes \lambda y, \tag{16}$$

d'où

$$b_{\lambda\mu}(x, y) = b_\lambda(x, \mu y) = b_\mu(\bar{\lambda} x, y), \tag{17}$$

pour $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in D$. Matriciellement, si à $x = \sum x_i e_i \in E$ on associe la matrice *ligne* $\mathbf{x} = (x_i)$ (et de même pour y), on a

$$b_\lambda(x, y) = \mathbf{s}.{}^t\bar{\mathbf{x}}.\lambda.\mathbf{y}, \tag{18}$$

(où le scalaire $\lambda \in D$ est considéré comme matrice à une ligne et une colonne), d'où aussitôt

$$b_\lambda(y, x) = \eta\, b_{\bar{\lambda}}(x, y)^\sigma. \tag{19}$$

En particulier, b_λ est η-hermitienne si et seulement si $\bar{\lambda} = \lambda$.

Donnons-nous maintenant $\varepsilon = \pm 1$ et considérons l'ensemble Q des formes pseudo-quadratiques sur E relativement à $M^0 = M^{\sigma, \varepsilon}$ (resp. $M^0 = M_{\sigma, \varepsilon}$). Notons τ l'involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ de D et posons $D^0 = D^{\tau, \varepsilon\eta}$ (resp. $D^0 = D_{\tau, \varepsilon\eta}$). Alors, *l'application de D dans Q qui à $\lambda \in D$ fait correspondre l'image q_λ de b_λ dans Q est K-linéaire, surjective, de noyau D^0.* En effet, lorsque $M^0 = M^{\sigma, \varepsilon}$, la relation $q_\lambda = 0$ équivaut à $\mathbf{s}\,{}^t\bar{\mathbf{x}}\,\lambda\,\mathbf{x} = -\varepsilon(\mathbf{s}\,{}^t\bar{\mathbf{x}}\,\lambda\,\mathbf{x})^\sigma = -\varepsilon\eta\,\mathbf{s}\,{}^t\bar{\mathbf{x}}\,\bar{\lambda}\,\mathbf{x}$ pour tout $x \in E$, donc à $\bar{\lambda} = -\varepsilon\eta\lambda$. Lorsque $M^0 = M_{\sigma, \varepsilon}$, la relation $q_\lambda = 0$ équivaut à l'existence pour tout $x \in E$ d'une matrice $\mathbf{h}$ telle que $\mathbf{s}\,{}^t\bar{\mathbf{x}}\,\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{sh} - \varepsilon(\mathbf{sh})^\sigma$, ou encore

$${}^t\bar{\mathbf{x}}\,\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{h} - \varepsilon\,{}^t\overline{(\mathbf{sh})}\,\mathbf{s}^{-1} = \mathbf{h} - \varepsilon\eta\,{}^t\bar{\mathbf{h}},$$

et l'on en déduit trivialement que $q_\lambda = 0$ équivaut à $\lambda \in D_{\tau, \varepsilon\eta}$. Ceci permet de définir q_λ pour $\lambda \in D/D^0$. D'autre part, un calcul simple montre que $b_{\lambda + \varepsilon\eta\bar{\lambda}}$ est associée à q_λ.

1.8. *Remarques.* — (1) Pour écrire 1.7 nous avons fait des *choix.* Tout d'abord, le corps D n'est déterminé qu'à isomorphisme près et pour le fixer nous avons choisi un M-module à droite simple E. Ensuite, tout revient à choisir un isomorphisme $s \in \mathrm{Hom}_M(E^\sigma, E^*)$ *convenable* : il détermine l'involution de D par (13), la matrice $\mathbf{s}$, donc le scalaire η, par (14) [quelle que soit la base (a_i)], et la bijection de D (resp. D/D^0) sur B (resp. Q) par (16).

Mais, choisir un élément $s \neq 0$ de $\mathrm{Hom}_M(E^\sigma, E^*)$ revient, d'après (15), à choisir un élément $b \neq 0$ de B.

Or, le K-espace vectoriel B est naturellement muni d'un automorphisme involutif, à savoir l'application qui à $b \in B$ fait correspondre la forme $\bar{b} : (x, y) \mapsto b(y, x)^\sigma$ et l'on vérifie aisément que *un isomorphisme $s \in \mathrm{Hom}_M(E^\sigma, E^*)$ est convenable si et seulement si la forme b correspondante est η-hermitienne,* avec $\eta = \pm 1$. Ceci permet d'ailleurs de démontrer l'existence d'isomorphismes convenables et donc toutes les assertions de 1.7, car l'existence de formes η-hermitiennes non nulles est immédiate : on part d'une forme $b \in B$ non nulle et l'on note que si b n'est pas hermitienne, la forme (-1)-hermitienne $b - \bar{b}$ n'est pas nulle.

(2) Reprenons les notations de 1.7. On montre aisément, soit directement soit en utilisant la remarque (1), que les isomorphismes convenables de E^σ sur E^* sont ceux de la forme $s\alpha$, avec $\alpha \in D^\times$ et $\bar{\alpha} = \pm\alpha$. L'involution de D associée à un tel $s\alpha$ est l'application $\lambda \mapsto \alpha^{-1}\bar{\lambda}\alpha$ et η est remplacé par $(\bar{\alpha}/\alpha)\eta$. En particulier, si $D \neq K$, on peut toujours supposer que $\eta = -1$ (ou que $\eta = 1$).

1.9. *Désormais, nous adoptons les notations et hypothèses de* 1.5. *De plus, on désigne par* $\tilde{K}$ *une extension de* K.

On pose $\tilde{D} = D \otimes_K \tilde{K}$. C'est une $\tilde{K}$-algèbre semi-simple, de centre $\tilde{L} = L \otimes_K \tilde{K}$, munie d'une involution $\sigma \otimes \mathrm{id}$, notée encore σ. On pose $\tilde{D}^0 = D^0 \otimes_K \tilde{K} \subset \tilde{D}$, de sorte que $\tilde{D}^0 \cap D = D^0$ et que D/D^0 s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $\tilde{D}/\tilde{D}^0$. En utilisant une base (k_j) de $\tilde{K}$ sur K et l'écriture unique d'un élément de $\tilde{D}$ sous la forme $\sum \xi_j \otimes k_j$ avec $\xi_j \in D$, on voit aussitôt que $\tilde{D}^0 = \tilde{D}_{\sigma,\varepsilon}$ (resp. $\tilde{D}^0 = \tilde{D}^{\sigma,\varepsilon}$) lorsque $D^0 = D_{\sigma,\varepsilon}$ (resp. $D^0 = D^{\sigma,\varepsilon}$). De même, $\tilde{K}$ est l'ensemble de points fixes de σ dans $\tilde{L}$.

On note $\tilde{X}$ le $\tilde{D}$-module à droite $X \otimes_K \tilde{K}$, de sorte que les $\tilde{K}$-algèbres $\mathrm{End}_{\tilde{D}} \tilde{X}$ et $\mathrm{End}_D X \otimes_K \tilde{K}$ sont canoniquement isomorphes. On note $\tilde{B}$ (resp. $\tilde{Q}$, resp. $\tilde{C}$) le $\tilde{K}$-espace vectoriel des formes sesquilinéaires $g : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \tilde{D}$ [resp. des formes pseudo-quadratiques $r : \tilde{X} \to \tilde{D}/\tilde{D}^0$, resp. des couples $(g, r) \in \tilde{B} \times \tilde{Q}$ de formes associées]. Pour $g \in B$, on note $\tilde{g} \in \tilde{B}$ le prolongement canonique de g.

On vérifie aisément que $\tilde{f}$ est ε-hermitienne tracique et qu'il existe une forme pseudo-quadratique $\tilde{q} : \tilde{X} \to \tilde{D}/\tilde{D}^0$ et une seule prolongeant q, à laquelle est associée $\tilde{f}$ [*cf.* I,10.1.1(10)]. Le couple $(\tilde{f}, \tilde{q})$ est non-dégénéré de défaut $\leqslant 1$ en ce sens que ou bien $\mathrm{Ker}\,\tilde{f} = \{x \in \tilde{X} \mid \tilde{f}(x, y) = 0$ pour tout $y \in \tilde{X}\}$ est réduit à $\{0\}$, ou bien $\mathrm{car}\,K = 2$, $\tilde{D} = \tilde{K}$, $\tilde{D}^0 = \{0\}$, $\dim \mathrm{Ker}\,\tilde{f} = 1$ et $\tilde{q}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,\tilde{f}$, $x \neq 0$: on a en effet $\mathrm{Ker}\,\tilde{f} = \mathrm{Ker}\,f \otimes \tilde{K}$.

Comme L est une extension séparable de degré $\leqslant 2$ de K, ou bien $\tilde{L}$ est une extension de degré $\leqslant 2$ de $\tilde{K}$, ou bien $\tilde{L} \simeq \tilde{K}^2$. Nous allons étudier séparément les deux cas.

1.10. *Premier cas : $\tilde{L}$ est un corps.* Alors, $\tilde{D}$ est une $\tilde{L}$-algèbre centrale simple et l'on peut reprendre les notations et résultats de 1.7, avec des modifications évidentes : notamment, on choisit un $\tilde{D}$-module à droite simple E, on note D' son commutant, (a_i) une base de E sur D' et l'on choisit un $\tilde{D}$-isomorphisme « convenable » s de E^σ sur E^*, d'où une involution τ de D' induisant σ sur $\tilde{L}$ et un scalaire $\eta = \pm 1$. On pose $D'^0 = D'_{\tau,\varepsilon\eta}$ (resp. $D'^0 = D'^{\tau,\varepsilon\eta}$) lorsque $D^0 = D_{\sigma,\varepsilon}$ (resp. $D^0 = D^{\sigma,\varepsilon}$).

Posons $X'=\mathrm{Hom}_{\tilde{D}}(E, \tilde{X})$. C'est un D'-espace vectoriel à droite de dimension finie et l'on sait (*cf.* III,1.16) que l'application $(x', a)\mapsto x'(a)$ définit un isomorphisme de $\tilde{D}$-modules à droite, dit canonique, de $X'\otimes_{D'}E$ sur $\tilde{X}$.

On note B' le $\tilde{K}$-espace vectoriel des formes τ-sesquilinéaires sur X' à valeurs dans D', on note Q' le $\tilde{K}$-espace vectoriel des formes pseudo-quadratiques relativement à τ, $\varepsilon\eta$, D'^0 sur X' et l'on note C' le sous-espace de $B'\times Q'$ composé des couples de formes associées.

PROPOSITION. — (i) *Il existe une bijection $\tilde{K}$-linéaire δ de $\tilde{B}$ sur B' et une seule telle que*

$$g(x'(x), y'(y))=b_{\delta g(x', y')}(x, y) \tag{20}$$

quels que soient $g\in\tilde{B}$, $x, y\in E$ et $x', y'\in X'$. Pour que g soit ε-hermitienne (resp. et tracique), il faut et il suffit que δg soit $\varepsilon\eta$-hermitienne (resp. et tracique).

(ii) *Il existe une bijection $\tilde{K}$-linéaire δ_2 de $\tilde{C}$ sur C' et une seule telle que, quel que soit $(g, r)\in\tilde{C}$, l'on ait $\delta_2(g, r)=(\delta g, r')$ où $r'\in Q'$ satisfait à*

$$r(x'(x))=q_{r'(x')}(x) \tag{21}$$

quels que soient $x\in E$ et $x'\in X'$.

Si le couple $(g, r)\in\tilde{C}$ est non-dégénéré de défaut $\leqslant 1$, il en est de même du couple $\delta_2(g, r)$.

Démontrons (i). Si f' est une forme τ-sesquilinéaire sur X', il existe une et une seule application biadditive $g:\tilde{X}\times\tilde{X}\to\tilde{D}$ satisfaisant à (20) (avec $\delta g=f'$), puisque, d'après (17), on a

$$b_{f'(x'\lambda, y')}(x, y)=b_{\lambda^\tau f'(x', y')}(x, y)=b_{f'(x', y')}(\lambda x, y),$$

et g est σ-sesquilinéaire puisque $x'(a).u=x'(au)$ pour $x'\in X'$, $a\in E$ et $u\in\tilde{D}$.

Inversement, si g est une forme σ-sesquilinéaire sur X, alors l'application $(x, y)\mapsto g(x'(x), y'(y))$ (pour $x', y'\in X'$) est une forme σ-sesquilinéaire sur E et, vu 1.7, il existe un unique élément $\delta g(x', y')\in D'$ satisfaisant à (20). Les formules (16) et (17) montrent que δg est τ-sesquilinéaire et (19) montre que δg est $\varepsilon\eta$-hermitienne si et seulement si g est ε-hermitienne. Enfin, si g est de plus tracique, alors pour tout $x'\in X'$ et tout $a\in E$, il existe $u\in\tilde{D}$ tel que $g(x'(a), x'(a))=u+\varepsilon u^\sigma$. Écrivant ceci matriciellement, on obtient $\mathbf{s}.{}^t\mathbf{a}^\tau.\delta g(x', y').\mathbf{a}=\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{u}^\sigma=\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{s}.{}^t\mathbf{u}^\tau.\mathbf{s}^{-1}$, d'où

${}^t\mathbf{a}^\tau.\,\delta g(x', y').\,\mathbf{a}=(\mathbf{s}^{-1}.\,\mathbf{u})+\varepsilon\eta\,{}^t(\mathbf{s}^{-1}.\,\mathbf{u})^\tau$. Prenant $a=a_1$, on en tire $\delta g(x', x')=v+\varepsilon\eta\, v^\tau$ avec $v=(\mathbf{s}^{-1}.\,\mathbf{u})_{11}$, et δg est bien tracique. La réciproque est immédiate.

Démontrons (ii). Partons d'un couple $(g, r)\in\tilde{C}$. Pour tout $x'\in X'$, l'application $a\mapsto r(x'(a))$ est une forme pseudo-quadratique sur E, d'où, vu 1.7, l'existence d'un $r'(x')\in D'/D'^0$ unique satisfaisant à (21) et l'on vérifie aisément que r' est une forme pseudo-quadratique associée à δg. Inversement, partons d'un couple $(f', r')\in C'$ et soit $g\in\tilde{B}$ tel que $f'=\delta g$. Il existe une forme pseudo-quadratique r sur $\tilde{X}$ et une seule, associée à g et satisfaisant à (21). En effet, considérons une base $(x_j')_{1\leq j\leq m}$ du D'-espace vectoriel X', de sorte que tout élément $\tilde{x}\in\tilde{X}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum x_j'(a_j)$ avec $a_j\in E$. Posons

$$r(\tilde{x})=\sum\nolimits_{1\leq j\leq m} q_{r'(x_j')}(a_j)+\sum\nolimits_{1\leq j<k\leq m} g(x_j'(a_j),\, x_k'(a_k))+\tilde{D}^0.$$

Un calcul simple montre que r est une forme pseudo-quadratique associée à g et si l'on considère le couple (f', r'') défini par (g, r) comme ci-dessus, on a $r''(x_j')=r'(x_j')$ pour tout j, d'où $r''=r'$, ce qui achève la démonstration de la première assertion de (ii).

Enfin, on a $\operatorname{Ker}\delta g=\{x'\in X' \mid x'(E)\subset \operatorname{Ker} g\}$. Par suite, si g est non dégénérée, il en est de même de δg. Si (g, r) est non dégénéré de défaut 1, on a $D=K$, d'où $X'=\tilde{X}$, $\delta g=g$ et $\delta_2(g, r)=(g, r)$.

Remarque. — Si $\tilde{D}^0=\tilde{D}$, c'est-à-dire si $D^0=D$, alors $D=K$, $\sigma=\mathrm{id}$ et ou bien $\varepsilon\neq 1$, ou bien $\operatorname{car} K=2$ et $D^0=D^{\sigma,\varepsilon}$. Par suite, on a $D'=\tilde{K}$, $\tau=\mathrm{id}$, $\eta=1$ et ou bien $\varepsilon\eta\neq 1$, ou bien $\operatorname{car}\tilde{K}=2$ et $D'^0=D'^{\tau,\varepsilon\eta}$. On a donc $D'^0=D'$ et Q', comme Q et $\tilde{Q}$, est réduit à $\{0\}$.

Si $D'^0\neq D'$, on a donc $\tilde{D}^0\neq\tilde{D}$ et une forme pseudo-quadratique sur $\tilde{X}$ (resp. X') détermine sa forme associée. Par suite, (ii) fournit une bijection de $\tilde{Q}$ sur Q', qui s'obtient d'ailleurs par passage aux quotients à partir de la bijection $\delta:\tilde{B}\to B'$; on la note encore δ_2.

Remarquons que l'on peut avoir $D'^0=D'$ et $D^0\neq D$ (cas d'une forme non déployée du groupe symplectique se déployant sur $\tilde{K}$).

1.11. Posons $(f', q')=\delta_2(\tilde{f}, \tilde{q})$.

COROLLAIRE. — *Le groupe algébrique G est $\tilde{K}$-isomorphe au groupe spécial unitaire G' du couple (f', q').*

C'est évident. Plus précisément, on sait que la $\tilde{K}$-algèbre $\mathrm{End}_{\tilde{D}}\tilde{X}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{End}_{D'}X'$ (*cf.* III,1.16), d'où un isomorphisme de $(\mathrm{End}_D X)\otimes_K \tilde{K}$ sur $\mathrm{End}_{D'}X'$ qui transporte G sur G'.

Remarques. — (1) Précisons la dépendance de (f', q') par rapport aux choix faits. Celui du $\tilde{D}$-module simple E (qui détermine D' et X') est sans conséquence puisque E est unique à isomorphisme près. Par contre, on a vu qu'on peut remplacer l'isomorphisme $s \in \mathrm{Hom}_{\tilde{D}}(E^\sigma, E^*)$ par $s\alpha$, avec $\alpha \in D'^\times$, $\alpha^\tau = \eta'\alpha$, $\eta' = \pm 1$. L'involution τ est alors remplacée par $\lambda \mapsto \alpha^{-1}\lambda^\tau\alpha$, η par $\eta\eta'$, D'^0 par $\alpha D'^0$, la forme f' par $\alpha f'$ et q' par $\alpha q'$: autrement dit, (f', q') est déterminé à un « changement de coordonnées » près au sens de I,10.1.3.

(2) Si $D\otimes_K \tilde{K}$ est un *corps*, on a $D' = \tilde{D}$, $X' = \tilde{X}$, $f' = \tilde{f}$ et $q' = \tilde{q}$.

1.12. Supposons que l'extension $\tilde{K}$ de K soit *galoisienne* de groupe de Galois Γ. Alors, Γ opère sur $\tilde{D}$ en commutant avec σ et opère sur $\tilde{X}$, donc opère sur l'ensemble des formes sesquilinéaires (resp. pseudo-quadratiques) sur $\tilde{X}$. De 1.10 on déduit une loi d'opération de Γ sur l'ensemble des formes sesquilinéaires (resp. pseudo-quadratiques) sur X' (bien que Γ n'opère ni sur X', ni sur D' !) et il est immédiat que les couples (f', q') obtenus à partir de couples (f, q) comme en 1.11 sont exactement ceux qui sont invariants par Γ. De même, Γ opère sur $\mathrm{End}_{D'}X' = \mathrm{End}_{\tilde{D}}\tilde{X}$.

1.13. *Deuxième cas :* $\tilde{L} = \tilde{K}^2$. Autrement dit, $[L : K] = 2$ (l'involution σ est « de deuxième espèce ») et L est à K-isomorphisme près contenu dans $\tilde{K}$, ce que nous supposons dans la suite de ce numéro. Rappelons que l'image canonique de $\lambda \in L$ dans $\tilde{L} = \tilde{K}^2$ est $(\lambda, \lambda^\sigma)$. On note encore σ le prolongement canonique $\sigma\otimes\mathrm{id}$ à $\tilde{L}$ de la restriction de σ à L, de sorte que $(a, b)^\sigma = (b, a)$ pour $a, b \in \tilde{K}$.

Si Y est un L-espace vectoriel, on note $Y\otimes_L^1 \tilde{K}$ le produit tensoriel ordinaire $Y\otimes_L \tilde{K}$, pour L opérant de manière naturelle sur $\tilde{K}$, et l'on note $Y\otimes_L^2 \tilde{K}$ le produit tensoriel « tordu par σ », c'est-à-dire le produit tensoriel sur L de Y et de $\tilde{K}$ considéré comme espace vectoriel sur L par l'application $(\lambda, k) \mapsto \lambda^\sigma k$ de $L \times \tilde{K}$ dans $\tilde{K}$. Alors on a

$$Y\otimes_K \tilde{K} = (Y\otimes_L L)\otimes_K \tilde{K} = Y\otimes_L \tilde{L} = (Y\otimes_L^1 \tilde{K}) \times (Y\otimes_L^2 \tilde{K}).$$

En particulier, notons M_i la K-algèbre centrale simple $D\otimes_L^i \tilde{K}$ $(i = 1, 2)$, de sorte que $\tilde{D} = D\otimes_K \tilde{K} = M_1 \times M_2$ (en tant que $\tilde{K}$-algèbre). On voit sans peine que $\sigma\otimes\mathrm{id}$ est un anti-isomorphisme de M_1 sur M_2 (resp. de M_2 sur

M_1), qu'on note encore σ. On a $(u^\sigma)^\sigma = u$ pour tout $u \in M_i$. Notons toujours σ l'extension canonique $\sigma \otimes_K \mathrm{id}$ de σ à $\tilde{D}$: c'est une involution de $\tilde{D}$ et l'on vérifie aussitôt qu'en identifiant $\tilde{D}$ à $M_1 \times M_2$, on a

$$(u, v)^\sigma = (v^\sigma, u^\sigma) \qquad \text{pour} \quad u \in M_1 \quad \text{et} \quad v \in M_2.$$

Soient $p_1 = (1, 0)$ et $p_2 = (0, 1)$ les deux idempotents minimaux de $\tilde{L}$, ou encore les deux idempotents centraux minimaux de $\tilde{D}$. Pour $i = 1, 2$, on a $M_i = \tilde{D} p_i = p_i \tilde{D}$. On pose $\tilde{X}_i = \tilde{X} p_i$: c'est un sous-$\tilde{D}$-module de $\tilde{X}$ et un M_i-module libre de type fini qui s'identifie naturellement à $X \otimes_L^i \tilde{K}$. De plus, $\tilde{X}$ est somme directe de $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ qui sont invariants par tout $g \in \mathrm{End}_{\tilde{D}} \tilde{X}$. Par suite, $\mathrm{End}_{\tilde{D}} \tilde{X}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{End}_{M_1} \tilde{X}_1 \times \mathrm{End}_{M_2} \tilde{X}_2$.

Choisissons un M_1-module à droite simple E (c'est aussi un $\tilde{D}$-module simple puisque M_1 est un quotient de $\tilde{D}$), notons D' le corps commutant de E et posons $X' = \mathrm{Hom}_{M_1}(E, \tilde{X}_1)$: c'est un D'-espace vectoriel à droite de dimension finie et $\tilde{X}_1$ s'identifie canoniquement à $X' \otimes_{D'} E$.

Puisque $L \neq K$, la forme f détermine q (1.3.2), que l'on peut provisoirement oublier. De plus, f est non dégénérée, donc définit un σ-isomorphisme de X sur $\mathrm{Hom}_D(X, D)$. Par suite, $\tilde{f}$ définit par extension des scalaires un σ-isomorphisme de $\tilde{X}$ sur $\mathrm{Hom}_{\tilde{D}}(\tilde{X}, \tilde{D}) = \mathrm{Hom}_D(X, D) \otimes_K \tilde{K}$. Comme $p_1^\sigma = p_2$ et que $p_1 p_2 = 0$, on a, pour $i = 1, 2$ et $x, y \in \tilde{X}_i$

$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(xp_i, xp_i) = p_i^\sigma \tilde{f}(x, y) p_i = p_i^\sigma p_i \tilde{f}(x, y) = 0$$

(les $\tilde{X}_i$ sont donc des sous-modules totalement isotropes maximaux). Il en résulte que $\tilde{f}$ définit un σ-isomorphisme φ du M_1-module à droite $\tilde{X}_1$ sur le M_2-module à gauche $\mathrm{Hom}_{M_2}(\tilde{X}_2, M_2)$ et un calcul simple montre qu'un élément $g \in \mathrm{End}_{\tilde{D}} \tilde{X}$ conserve $\tilde{f}$ (donc $(\tilde{f}, \tilde{q})$) si et seulement si il est de la forme (g_1, g_2) avec $g_i \in \mathrm{Aut}_{M_i} \tilde{X}_i$ et

$$g_2 = {}^t\varphi^{-1} \circ {}^t g_1^{-1} \circ {}^t\varphi.$$

Par suite, l'homomorphisme de $\tilde{K}$-algèbres de $\mathrm{End}_{\tilde{D}} \tilde{X}$ sur $\mathrm{End}_{D'} X'$ composé de la restriction à $\tilde{X}_1$ suivie de l'isomorphisme canonique de $\mathrm{End}_{M_1} \tilde{X}_1$ sur $\mathrm{End}_{D'} X'$ fournit un isomorphisme de groupes algébriques définis sur $\tilde{K}$ du groupe $\mathrm{Is}(\tilde{f}, \tilde{q})$ des isométries de $(\tilde{f}, \tilde{q})$ sur $GL_{D'}(X')$. De plus, l'application polynomiale norme réduite $\mathrm{Nrd} : \mathrm{End}_D X \to L$ devient par extension des scalaires l'application polynomiale

$$(\mathrm{Nrd}, \mathrm{Nrd}) : \quad \mathrm{End}_{M_1} \tilde{X}_1 \times \mathrm{End}_{M_2} \tilde{X}_2 \to \tilde{K}^2$$

et l'isomorphisme de $\mathrm{Is}(\tilde{f}, \tilde{q})$ sur $GL_{D'}(X')$ fournit par restriction un isomorphisme de groupes algébriques définis sur $\tilde{K}$ de $\tilde{G}=G_{\tilde{K}}$ sur $SL_{D'}(X')$, d'où :

PROPOSITION. — *Le groupe algébrique G est $\tilde{K}$-isomorphe à $SL_{D'}(X')$.*

Remarque. — Supposons $\tilde{K}$ galoisienne sur K, de groupe de Galois Γ. Pour tout L-espace vectoriel Y, Γ opère sur $Y\otimes_K \tilde{K}$ et le sous-groupe $\Gamma'=\mathrm{Gal}(\tilde{K}/L)$ opère sur les $Y\otimes_L^i \tilde{K}$. Si $\gamma\in\Gamma-\Gamma'$, c'est-à-dire si la restriction de γ à L est σ, alors $\mathrm{id}\otimes\gamma$ est un γ-isomorphisme de $Y\otimes_L^1 \tilde{K}$ sur $Y\otimes_L^2 \tilde{K}$ (ou inversement), que l'on note simplement γ. On voit facilement que, si $y_i\in Y\otimes_L^i \tilde{K}$, de sorte que $(y_1, y_2)\in Y\otimes_K \tilde{K}$, alors

$$(y_1, y_2)^\gamma=(y_1^\gamma, y_2^\gamma) \quad \text{si} \quad \gamma\in\Gamma',$$
$$(y_1, y_2)^\gamma=(y_2^\gamma, y_1^\gamma) \quad \text{si} \quad \gamma\in\Gamma-\Gamma'.$$

Notamment, Γ' opère sur $\mathrm{End}_{M_1}\tilde{X}_1$ donc sur $\mathrm{End}_{D'}X'$ (mais non sur X', *cf.* 1.12). Si $\gamma\in\Gamma-\Gamma'$ et si $g=(g_1, g_2)\in Is(\tilde{f}, \tilde{q})$, alors

$$g^\gamma=(g_2^\gamma, g_1^\gamma)=(({}^t\varphi^{-1}\circ{}^t g_1^{-1}\circ{}^t\varphi)^\gamma, g_1^\gamma),$$

ce qui explicite l'opération de Γ sur $GL_{D'}(X')$ et $SL_{D'}(X')$.

1.14. Continuant à garder les hypothèses et notations de 1.5, nous reprenons de plus désormais celles de I, 10.1.1 à 10.1.12 (compte tenu de II, E9), dont nous allons rappeler les principales en y remplaçant cependant la lettre K par D pour désigner le corps gauche « de base ».

Un sous-espace vectoriel Y de X est dit *totalement singulier* si $f(Y, Y)=\{0\}$ et $q(Y)=\{0\}$; l'indice de Witt r de (f, q) est le maximum de la dimension d'un sous-espace totalement singulier. Posons

$$I=\{\pm 1, \ldots, \pm r\}, \qquad I_0=\{(0, k)\,|\,k=1, \ldots, n-2r\}.$$

On choisit une « décomposition de Witt » de X, c'est-à-dire deux sous-espaces totalement singuliers maximaux X_+ et X_- en dualité par f, des bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de X_+, $(e_{-i})_{1\leqslant i\leqslant r}$ de X_- et $(e_i)_{i\in I_0}$ de l'orthogonal X_0 de $X_+ + X_-$ de telle sorte que :

$$q(e_i)=0 \qquad \text{pour } i\in I,$$
$$f(e_i, e_j)=0 \qquad \text{pour } \ i, j\in I \ \text{ et } j\neq -i \text{ et pour } i\in I, j\in I_0,$$
$$f(e_i, e_{-i})=1 \qquad \text{pour } \ i\in I, i>0,$$

$$q(x)\neq 0 \qquad \text{pour} \quad x\in X_0,\ x\neq 0.$$

On pose $\varepsilon(i)=f(e_i, e_{-i})$ pour $i\in I$, c'est-à-dire $\varepsilon(i)=1$ pour $i\in I$, $i>0$ et $\varepsilon(i)=\varepsilon$ pour $i\in I$, $i<0$.

De plus, *nous supposons que l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

(22 *a*) $$\varepsilon=-1 \qquad \text{et} \qquad 1\in D_{\sigma,\varepsilon};$$

(22 *b*) $$\sigma=\mathrm{id},\quad \varepsilon=1 \qquad \text{et} \qquad 1\in q(X_0);$$

(22 *c*) $$\sigma=\mathrm{id},\quad \varepsilon=1 \qquad \text{et} \qquad X_0=\{0\}.$$

On sait (*cf.* 1.11, I, 10.1.3 et II, E 9) que l'on peut toujours se ramener à l'un de ces trois cas par un « changement de coordonnées » (I, 10.1.3), ce qui remplace G par un groupe K-isomorphe.

A cette décomposition de Witt est associé un tore K-déployé maximal S du K-groupe algébrique G, de dimension r, défini par les équations

$$s.e_i\in e_i K \qquad \text{pour} \quad i\in I,$$
$$(s-\mathrm{id}).X_0=\{0\}.$$

(Prises au sens strict, ces équations définissent le groupe des points rationnels sur K de S; il faut aussi les entendre comme signifiant que le groupe algébrique S est l'intersection de G avec les sous-groupes algébriques de $GL_K(X)$ stabilisateurs des droites engendrées par les e_i et fixateur du sous-espace vectoriel X_0. Nous nous permettrons des abus de langage analogues dans ce qui suit.)

Le centralisateur Z de S dans G (noté T en *I*, § 10) est défini par les équations

$$z.e_i\in e_i D \qquad \text{pour} \quad i\in I,$$

qui entraînent $z.X_0=X_0$.

Pour $i\in I$, on note $a_i : Z\to D^\times$ le morphisme de groupes algébriques défini par

$$z.e_i=e_i a_i(z)^{-1},$$

de sorte que

$$a_i(z)^\sigma=a_{-i}(z)^{-1}.$$

Par abus de notation, on note aussi $a_i : S \to K^\times$ le caractère de S obtenu par restriction. On a alors $a_{-i} = -a_i$ dans le groupe $X^*(S)$ des caractères de S noté additivement. Les a_i pour $i \in I$, $i>0$ forment une base de $X^*(S)$. Pour $i, j \in I$, $i \neq \pm j$, on pose $a_{ij} = a_i + a_j$.

Pour $i \in I$, $x \in X_0$ et $\xi \in q(x)$, on note $u_i(x, \xi)$ l'élément de $G(K)$ défini par

$$(23) \qquad u_i(x, \xi) . e_k = \begin{cases} e_k - e_{-i} f(x, e_k) \varepsilon(i) & \text{pour} \quad k \in I_0, \\ e_k & \text{pour} \quad k \in I, \; k \neq i, \\ e_i + x - e_{-i} \xi \varepsilon(i) & \text{pour} \quad k = i. \end{cases}$$

Pour $i, j \in I$, $j \neq \pm i$, et $\xi \in D$, on note $u_{ij}(\xi)$ l'élément de $G(K)$ défini par

$$(24) \qquad u_{ij}(\xi) . e_k = \begin{cases} e_k & \text{pour} \quad k \neq i, j, \\ e_i + e_{-j} \xi^\sigma \varepsilon(-j) & \text{pour} \quad k = i, \\ e_j - e_{-i} \xi \varepsilon(i) & \text{pour} \quad k = j. \end{cases}$$

Le système de racines Φ de G suivant S est compris entre $\Phi_D = \{ a_{ij} \mid i, j \in I, i \neq \pm j \}$ et $\Phi_{BC} = \Phi_D \cup \{ a_i, 2a_i \mid i \in I \}$. On a $a_i \in \Phi$ si et seulement si $X_0 \neq \{0\}$ et $2a_i \in \Phi$ si et seulement si $D^0 \neq \{0\}$. Le sous-groupe radiciel $U_{a_{ij}}$ (resp. U_{a_i}, resp. U_{2a_i}) associé à la racine a_{ij} (resp. à $\{a_i, 2a_i\}$, resp. à $2a_i$), ou plutôt le groupe de ses points rationnels sur K, est l'ensemble des $u_{ij}(\xi)$ pour $\xi \in D$ (resp. des $u_i(x, \xi)$ pour $x \in X_0$ et $\xi \in q(x)$, resp. des $u_i(0, \xi)$ pour $\xi \in D^0$).

Le normalisateur N de Z dans G est le sous-groupe algébrique formé des éléments qui stabilisent X_0 et permutent entre elles les droites $X_i = e_i D$ pour $i \in I$. Il est produit du sous-groupe distingué Z par le sous-groupe N' formé des $n \in N(K)$ qui permutent entre eux les éléments $\pm e_i$ pour $i \in I$.

Enfin, rappelons que $(Z(K), (U_a(K))_{a \in \Phi})$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ dans $G(K)$ (I, 6.1.1, 6.1.3 c et 10.1.6).

Dans la suite, on se permettra, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, de désigner par la même lettre, G par exemple, un K-groupe algébrique et le groupe $G = G(K)$ de ses éléments rationnels sur K.

1.15. *Désormais, nous supposons que le corps K est muni d'une valuation discrète ω telle que $\omega(K^\times) = \mathbf{Z}$ et que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(V 1) *ω se prolonge en une valuation discrète ω_L de L invariante par σ;*

(V 2) *ω_L se prolonge en une valuation discrète ω_D de D.*

Notons que (V 1) est automatiquement satisfaite lorsque $L=K$! Dans tous les cas, le groupe de Galois de L sur K permute transitivement les prolongements de ω et par suite ω_L si elle existe, est *unique*. On sait alors que ω_D satisfaisant à (V 2) est *unique* (III, 1.6), *donc est invariante par* σ. Autrement dit, la conjonction de (V 1) et (V 2) est équivalente à

(V 3) ω *se prolonge en une valuation discrète* ω_D *de* D *invariante par* σ.

On sait que sous la condition (V 1), le complété $\hat{L}$ de L pour ω_L s'identifie à $L \otimes \hat{K}$. Par suite, ω_L est une K-norme *scindable* au sens de III, 1.4 (autrement dit elle admet une « base scindante » plus classiquement appelée « base orthogonale ») puisqu'elle satisfait à la condition (Sc 4) de III, 1.3. On sait que ω_D est une L-norme scindable (III, 1.6) donc une K-norme scindable.

Enfin, rappelons que *les conditions* (V 1) *et* (V 2) *sont automatiquement satisfaites lorsque* K *est hensélien.*

Désormais, on notera simplement ω les prolongements uniques ω_L et ω_D.

On note π_D une uniformisante de D, $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D, $\mathfrak{p}_D$ son unique idéal maximal et $\bar{D}=\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}_D$ son corps résiduel. Les notations π_K, $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{p}_K$ et $\bar{K}$ s'en déduisent en prenant $D=K$. On note $e=[\omega(D^{\times}) : \omega(K^{\times})]$ l'indice de ramification de D, de sorte que $\omega(\pi_D)=1/e$.

On sait (III, 1.6) que ω définit la topologie naturelle de K-espace vectoriel de dimension finie de D. En particulier, D^0 est *fermé* dans D et ω définit par passage au quotient une K-norme scindable sur D/D^0, encore notée ω.

Soit $\hat{K}$ le complété de K. Pour tout K-espace vectoriel de dimension finie Y, on note $\hat{Y}$ le complété de Y (pour sa topologie naturelle), de sorte que $\hat{Y}$ s'identifie à $Y \otimes_K \hat{K}$. La valuation ω se prolonge en une valuation discrète, toujours notée ω, du corps $\hat{D}$. On a $\hat{D}/\hat{D}^0=(D/D^0)\hat{}$. On note $(\hat{f}, \hat{q})$ le prolongement canonique de (f, q) à $\hat{X}$ (1.9) et l'on pose, pour $x \in X_0$ (resp. $x \in \hat{X}_0$) :

$$(25)\qquad \omega_q(x)=\frac{1}{2}\omega(q(x)) \qquad \left(\text{resp. } \omega_{\hat{q}}(x)=\frac{1}{2}\omega(\hat{q}(x))\right),$$

de sorte que $\omega_{\hat{q}}$ est le prolongement par continuité de ω_q à $\hat{X}_0$.

Dans I, 10.1.13, on a introduit une famille $\varphi=(\varphi_a)_{a \in \Phi}$ d'applications $\varphi_a : U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en posant :

$$(26)\qquad \varphi_{a_i}(u_i(x, \xi))=\frac{1}{2}\omega(\xi) \qquad \text{pour} \quad i \in I, \quad x \in X_0, \quad \xi \in q(x),$$

(27) $\varphi_{2a_i}(u_i(0, \xi)) = \omega(\xi)$ pour $i \in I$, $\xi \in D^0$,

(28) $\varphi_{a_{ij}}(u_{ij}(\xi)) = \omega(\xi)$ pour $i, j \in I$, $i \neq \pm j$, $\xi \in D$.

Des résultats de I, § 10, et de II, E 9, on déduit :

PROPOSITION. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La famille* φ *est une valuation de la donnée radicielle* $(Z, (U_a)_{a \in \Phi})$ *de* G *(au sens de* I, 6.2.1);

(ii) ω_q *est une norme sur* X_0;

(iii) $\omega_{\hat{q}}$ *est une norme sur* $\hat{X}_0$;

(iv) ω_q *est une norme scindable sur* X_0;

(v) $\omega(f(x, y)) \geqslant \omega_q(x) + \omega_q(y)$ *pour tous* $x, y \in X_0$;

(vi) *pour tout* $x \in \hat{X}_0 - \{0\}$, *on a* $\hat{q}(\hat{x}) \neq 0$;

(vii) *le rang du groupe semi-simple* G *sur* $\hat{K}$ *est égal à son rang sur* K.

Vu I, 10.1.21 et II, E 9, on sait que (i) $\Leftrightarrow$ (ii), compte tenu de ce que $\omega_q(x) \neq \infty$ pour tout $x \in X_0 - \{0\}$, puisque ω est une norme sur D/D^0. D'autre part, on sait, d'après I, 10.1.15 et II, E 9, que (i) $\Leftrightarrow$ (v) et (i) $\Leftrightarrow$ (vi), compte tenu de ce que l'orthogonal $X^{\perp} = \operatorname{Ker} f$ de X pour f est de dimension $\leqslant 1$ (c'est l'hypothèse « de défaut $\leqslant 1$ »), ce qui entraîne $\hat{q}(x) \neq 0$ pour $x \in \hat{X}^{\perp} - \{0\}$. Mais alors (i) entraîne (iii), car le prolongement par continuité $\omega_{\hat{q}}$ de ω_q à $\hat{X}_0$ est une semi-norme d'après (ii), donc une norme d'après (vi). On sait que (iii) $\Rightarrow$ (iv) (III, 1.5) et il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (ii). On a donc montré l'équivalence des conditions (i) à (vi). Enfin, (vi) $\Leftrightarrow$ (vii), car (vi) signifie que $\hat{X}_+$, $\hat{X}_-$ et $\hat{X}_0$ forment une décomposition de Witt de $\hat{X}$.

COROLLAIRE. — *Si* K *est hensélien, les conditions équivalentes* (i) *à* (vii) *sont satisfaites.*

On sait en effet que (vii) est satisfaite [9].

Désormais, nous supposons que les conditions équivalentes (i) *à* (vii) *de la proposition précédente sont satisfaites.*

2. Normes maximinorantes et immeuble de G

On conserve les hypothèses et notations précédentes (*voir* 1.5, 1.14 et 1.15). On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes scindables sur X.

2.1. DÉFINITION. — *Soit* $\alpha \in \mathcal{N}$. *On dit que* α minore f *si*

(1) $\alpha(x) + \alpha(y) \leqslant \omega(f(x, y))$ *quels que soient* $x, y \in X$.

On dit que α minore (f, q) *si elle minore* f *et si de plus*

$$(2) \qquad 2\alpha(x) \leqslant \omega(q(x)) \quad \textit{quel que soit } x \in X.$$

On dit que α *est* maximinorante *pour* (f, q) *(resp. pour* f*) si* α *est un élément maximal de l'ensemble des normes minorant* (f, q) *(resp.* f*).*

(Rappelons, pour expliquer (2), que l'on désigne aussi par ω la K-norme sur D/D^0 quotient de ω).

2.2. *Remarques.* — (1) Toute semi-norme α sur X minorant (f, q) (i.e. satisfaisant à (1) et (2)) est une norme scindable. En effet, le prolongement par continuité $\hat{\alpha}$ de α à $\hat{X}$ minore $(\hat{f}, \hat{q})$. Soit alors $x \in \hat{X}$, $x \neq 0$; s'il existe $y \in \hat{X}$ tel que $\hat{f}(x, y) \neq 0$, alors (1) entraîne $\hat{\alpha}(x) \neq \infty$; sinon, on a $\hat{q}(x) \neq 0$ (*cf.* 1.15 (vi)) et (2) entraîne $\hat{\alpha}(x) \neq \infty$. Par suite, $\hat{\alpha}$ est une norme et α est bien une norme scindable (III, 1.3).

(2) Toute norme minorant (f, q) est majorée par une norme maximinorante : la borne supérieure d'un ensemble totalement ordonné de normes minorantes est évidemment une semi-norme minorante, donc une norme minorante d'après la remarque (1), et il suffit d'invoquer Zorn.

(3) Supposons qu'il existe $\lambda \in L$ avec $\lambda + \lambda^\sigma = 1$ et $\omega(\lambda) = 0$ (ce qui signifie que ou bien car $\bar{K} \neq 2$, ou bien L est une extension quadratique *étale* de K). Alors α minore (f, q) si et seulement si α minore f : cela résulte de 1.3 (10 *bis*). Ceci est aussi trivialement vrai lorsque $D = D^0$ (puisque $q = 0$!).

2.3. Soit $\alpha \in \mathscr{N}$. C'est aussi une norme sur le D-espace vectoriel à gauche X^σ. A α sont associées la norme duale α^* sur X^* ou sur $(X^\sigma)^*$ et la norme $\operatorname{End} \alpha = \alpha \otimes \alpha^* = \operatorname{End} \alpha^*$ sur le K-espace vectoriel $M = \operatorname{End}_D X = X \otimes_D X^* = \operatorname{End}_D X^*$ (*cf.* III, 1.11). Rappelons que si (x_i) est une base de X scindante pour α, la base duale (x_i^*) est scindante pour α^*, on a $\alpha^*(x_i^*) = -\alpha(x_i)$ et

$$\operatorname{End} \alpha\left(\sum x_i t_{ij} \otimes x_j^*\right) = \inf\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_j) + \omega(t_{ij})\right)$$

quels que soient les $t_{ij} \in D$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

On associe aussi à α la norme $\check{\alpha} = \alpha^* \otimes \alpha^*$ sur le K-espace vectoriel $B = (X^\sigma)^* \otimes X^*$ des formes sesquilinéaires sur X : pour $b \in B$, on a

$$(3) \qquad \check{\alpha}(b) = \inf\left(\omega(b(x_i, x_j)) - \alpha(x_i) - \alpha(x_j)\right).$$

De plus, si $x=\sum x_i\xi_i$ et $y=\sum x_i\eta_i$ (avec ξ_i, $\eta_i\in D$), on a

$$\omega(b(x, y))\geqslant\inf(\omega(b(x_i, x_j)+\omega(\xi_i)+\omega(\eta_j))$$
$$\geqslant\inf(\check\alpha(b)+\alpha(x_i)+\alpha(x_j)+\omega(\xi_i)+\omega(\eta_j))\geqslant\check\alpha(b)+\alpha(x)+\alpha(y),$$

d'où

$$\check\alpha(b)=\inf_{x,\ y\in X}(\omega(b(x, y))-\alpha(x)-\alpha(y)). \tag{3 bis}$$

Proposition. — (i) *α minore f si et seulement si $\check\alpha(f)\geqslant 0$.*

(ii) *Si α est maximinorante pour f, alors $\check\alpha(f)=0$.*

L'assertion (i) traduit (3 *bis*). Si $\check\alpha(f)>0$, alors $\alpha+(1/2)\,\check\alpha(f)$ minore encore f, d'où (ii).

2.4. Proposition. — *Soient α, $\beta\in\mathscr{N}$.*

(i) *$\operatorname{End}\alpha=\operatorname{End}\beta$ si et seulement si il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que $\beta=\alpha+c$.*

(ii) *$\check\alpha=\check\beta$ si et seulement si $\alpha=\beta$.*

(iii) *Pour tout $u\in M$, on a*

$$\operatorname{End}\alpha(u)=\operatorname{End}\check\alpha(u\otimes 1)=\operatorname{End}\check\alpha(1\otimes u).$$

(iv) *Soit γ une K-norme scindable sur B. Pour que l'on ait*

$$\gamma(ubv)\geqslant\operatorname{End}\alpha(u)+\gamma(b)+\operatorname{End}\alpha(v) \tag{4}$$

quels que soient $b\in B$ et u, $v\in M$, il faut et il suffit qu'il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que $\gamma=\check\alpha+c$.

L'assertion (i) est connue (III, 1.13). Démontrons (ii) : on choisit une base (x_i) de X scindante à la fois pour α et pour β (III, 1.26) et l'on remarque que $\alpha(x_i)=(1/2)\check\alpha(x_i^*\otimes x_i^*)$. L'assertion (iii) résulte de III, 1.11 (23). Démontrons (iv). Que $\check\alpha+c$ satisfasse à (4) résulte de (iii) et de la définition des opérations de M sur B (1.2). Inversement, dire que γ satisfait à (4), c'est dire que γ définit sur $B=(X^\sigma)^*\otimes_D X^*$ une structure de bimodule normé sur l'algèbre M munie de la norme $\operatorname{End}\alpha$. Il résulte alors de III, 1.16, qu'il existe une et une seule norme δ sur X^* telle que $\gamma=\alpha^*\otimes\delta$, puis que $\delta=\alpha^*+c$.

2.5. *Dans ce numéro, nous supposons que f est non dégénérée.* Alors, f définit un isomorphisme de X^σ sur X^*, ce qui permet d'associer à $\alpha\in\mathscr{N}$ l'élément $\bar\alpha\in\mathscr{N}$ image réciproque de α^*. On a $(\bar\alpha)^-=\alpha$ (III, 1.11 (18)) et

$$\bar\alpha(x)=\inf_{y\in X}(\omega(f(x, y))-\alpha(y))\qquad\text{pour}\quad x\in X, \tag{5}$$

d'où

(6) $$\breve{\alpha}(f)=\inf_{x\in X}(\bar{\alpha}(x)-\alpha(x)).$$

PROPOSITION. — *Soit* $\alpha\in\mathcal{N}$.

(i) *Pour que* α *minore* f, *il faut et il suffit que* $\bar{\alpha}\geqslant\alpha$.

(ii) *Pour que* α *soit maximinorante pour* f, *il faut et il suffit que* $\bar{\alpha}=\alpha$.

L'assertion (i) résulte de (6), vu 2.3. Démontrons (ii). Soit β le milieu du segment $[\alpha\bar{\alpha}]$ de $\mathcal{N}$ (au sens de III, 1.27 : *cf.* 2.7 ci-dessous). En considérant une base (x_i) de X scindante à la fois pour α et $\bar{\alpha}$ et en appliquant (3), on voit aussitôt que $\breve{\beta}(f)\geqslant 0$, c'est-à-dire que β minore f. Supposons α maximinorante; on a $\alpha\leqslant\beta$ vu (i), donc $\alpha=\beta$ et $\bar{\alpha}=\alpha$. Inversement, si $\bar{\alpha}=\alpha$, alors α minore f d'après (i) et si $\alpha\leqslant\gamma$ avec $\gamma\in\mathcal{N}$ minorant f, alors $\bar{\gamma}\leqslant\bar{\alpha}=\alpha\leqslant\gamma\leqslant\bar{\gamma}$, d'où $\alpha=\gamma$, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que f définit aussi l'involution $u\mapsto u^*$ de passage à l'adjoint sur $M=\operatorname{End} X$ et l'on vérifie aussitôt que

(7) $$\operatorname{End}\alpha(u^*)=\operatorname{End}\bar{\alpha}(u)\qquad\text{pour}\quad \alpha\in\mathcal{N}\quad\text{et}\quad u\in M.$$

COROLLAIRE 1. — *Pour que* $\alpha\in\mathcal{N}$ *soit maximinorante pour* f, *il faut et il suffit que l'on ait* $\operatorname{End}\alpha(u)=\operatorname{End}\alpha(u^*)$ *pour tout* $u\in M$ *et* $\breve{\alpha}(f)=0$.

Que les conditions soit nécessaires résulte de 2.3, de (7) et de l'assertion (ii) de la proposition. Inversement, si elles sont satisfaites, alors (7) et la proposition 2.4 (i) entraînent $\bar{\alpha}=\alpha+c$ et la constante c est égale à $\breve{\alpha}(f)$ d'après (6).

COROLLAIRE 2. — *L'application* $\alpha\mapsto\operatorname{End}\alpha$ *est une bijection de l'ensemble des* $\alpha\in\mathcal{N}$ *maximinorantes pour* f *sur l'ensemble des normes carrées sur* M (III, 1.13) *invariantes par l'involution* $u\mapsto u^*$ *de* M.

Pour tout $\alpha\in\mathcal{N}$, il existe en effet une constante $c\in\mathbf{R}$ et une seule telle que $(\alpha+c)\breve{}\,(f)=\breve{\alpha}(f)-2c$ soit nul.

2.6. Lorsque $D^0=D$, on a $q=0$ et les normes minorant (f, q) sont celles minorant f, qui est d'ailleurs non dégénérée. *Dans ce numéro, nous supposons* $D^0\neq D$. On a vu (1.2 (7)) que q détermine alors f et que pour tout $b\in B$ d'image q (c'est-à-dire tel que $q(x)=b(x, x)+D^0$ pour tout $x\in X$), on a

(8) $$f(x, y)=b(x, y)+\varepsilon b(y, x)^{\sigma}\qquad\text{pour}\quad x, y\in X.$$

Pour $\alpha \in \mathcal{N}$, on note α_2 la norme sur Q quotient de la norme $\breve{\alpha}$ sur B. Vu (8), on a

$$(9) \qquad \alpha_2(q) \leqslant \breve{\alpha}(f).$$

Posons d'autre part

$$(10) \qquad \alpha_m(q) = \inf_{x \in X}(\omega(q(x)) - 2\alpha(x)).$$

Remarquons que, par définition même, α *minore* (f, q) *si et seulement si on a* $\breve{\alpha}(f) \geqslant 0$ *et* $\alpha_m(q) \geqslant 0$.

Pour $b \in B$ d'image q, on a $\omega(q(x)) \geqslant \omega(b(x, x)) \geqslant \breve{\alpha}(b) + 2\alpha(x)$, d'où

$$(11) \qquad \alpha_2(q) \leqslant \alpha_m(q).$$

Soit alors (x_i) une base de X scindante pour α, choisissons des $\lambda_i \in q(x_i)$ et définissons $b \in B$ en posant $b(x_i, x_i) = \lambda_i$, $b(x_i, x_j) = f(x_i, x_j)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $b(x_i, x_j) = 0$ pour $i > j$. On a vu que b est alors d'image q (1.2 (6 *bis*)). D'autre part

$$\breve{\alpha}(b) = \inf(\inf_i(\omega(\lambda_i) - 2\alpha(x_i)), \inf_{i<j}(\omega(f(x_i, x_j)) - \alpha(x_i) - \alpha(x_j)).$$

Mais $\omega(f(x_i, x_j)) = \omega(f(x_j, x_i))$ et $f(x_i, x_i) = \lambda_i + \varepsilon\lambda_i^\sigma$ (1.2(8)), d'où $\omega(f(x_i, x_i)) \geqslant \omega(\lambda_i)$. Par suite

$$\alpha_2(q) \geqslant \breve{\alpha}(b) = \inf(\breve{\alpha}(f), \inf_i(\omega(\lambda_i) - 2\alpha(x_i))).$$

Faisant varier les λ_i, on obtient

$$\alpha_2(q) \geqslant \inf(\breve{\alpha}(f), \inf_i(\omega(q(x_i)) - 2\alpha(x_i))) \geqslant \inf(\breve{\alpha}(f), \alpha_m(q)).$$

Comparant avec (9) et (11), on en déduit

$$(12) \quad \alpha_2(q) = \inf(\breve{\alpha}(f), \alpha_m(q)) = \inf(\breve{\alpha}(f), \inf_i(\omega(q(x_i)) - 2\alpha(x_i))),$$

d'où :

PROPOSITION. — *Supposons $D^0 \neq D$ et soit $\alpha \in \mathcal{N}$.*

(i) *α minore (f, q) si et seulement si $\alpha_2(q) \geqslant 0$.*

(ii) *Soit (x_i) une base de X scindante pour α et supposons que α minore f. Alors, α minore (f, q) si et seulement si*

$$\omega(q(x_i)) \geqslant 2\alpha(x_i) \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

2.7. Rappelons (III, 1.27) que, pour α, $\beta \in \mathcal{N}$ et $t \in [0, 1]$, il existe un élément $\gamma \in \mathcal{N}$ et un seul, noté $t\alpha+(1-t)\beta$, tel que toute base (x_i) de X scindante à la fois pour α et pour β (de telles bases existent (III, 1.26)) soit scindante pour γ et que l'on ait

$$\gamma(x_i)=t\alpha(x_i)+(1-t)\beta(x_i) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

On a alors

$$\gamma(x) \geqslant t\alpha(x)+(1-t)\beta(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On dit qu'une partie A de $\mathcal{N}$ est *convexe* si $t\alpha+(1-t)\beta \in A$ quels que soient α, $\beta \in A$ et $t \in [0, 1]$.

PROPOSITION. — *L'ensemble $\mathcal{N}_m$ des $\alpha \in \mathcal{N}$ minorant (f, q) (resp. f) est une partie convexe de $\mathcal{N}$. Pour tout $\alpha_0 \in \mathcal{N}$, l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{N}_m$ majorant α_0 est une partie convexe de $\mathcal{N}$.*

La première assertion résulte de 2.3 et 2.6 (ii), compte tenu de ce qui vient d'être rappelé. La deuxième assertion résulte de la première et de ce que l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{N}$ majorant α_0 est convexe puisque

$$(t\alpha+(1-t)\beta)(x) \geqslant t\alpha(x)+(1-t)\beta(x)$$

pour α, $\beta \in \mathcal{N}$, $t \in [0, 1]$ et $x \in X$.

2.8. Considérons l'*immeuble* $\mathcal{I}$ de la donnée radicielle valuée de G introduite en 1.15 et l'*appartement* A de $\mathcal{I}$ associé à Z (ou à S) (cf. I, § 7). Posons $V^* = X^*(S) \otimes \mathbf{R}$, munissons V^* de la norme euclidienne pour laquelle $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une base orthonormale et notons V le dual du $\mathbf{R}$-espace vectoriel V^*. On sait que A est un espace affine sous V, qu'on identifie à V en prenant comme origine la valuation $\varphi \in A$ (*cf.* I, § 10). Rappelons que le groupe G, et même le groupe des similitudes de (f, q) (I, 10.1.4) opère sur $\mathcal{I}$ par automorphismes, que le normalisateur N de Z stabilise A et qu'un élément $t \in Z$ opère sur A par la translation de vecteur $\nu(t) \in V$ défini par $\langle \nu(t), a_i \rangle = -\omega(a_i(t))$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ (I, § 10).

2.9. Au point p de l'appartement A identifié à V, faisons correspondre la norme scindable α_p sur X définie par

$$(13) \qquad \alpha_p\left(\textstyle\sum_{i \in I} e_i \xi_i + x_0\right) = \inf\left(\omega_q(x_0), \inf_{i \in I}(\omega(\xi_i) - a_i(p))\right)$$

pour $x_0 \in X_0$ et $\xi_i \in D$ pour $i \in I$.

PROPOSITION. — *L'application $p \mapsto \alpha_p$ est une bijection de A sur l'ensemble des normes maximinorantes pour (f, q) admettant $(X_i)_{i \in I \cup \{0\}}$ comme famille scindante.*

Soient $x = x_0 + \sum e_i \xi_i$ et $y = y_0 + \sum e_i \eta_i$ (avec x_0, $y_0 \in X_0$ et ξ_i, $\eta_i \in D$ pour $i \in I$). On a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \textstyle\sum_{i \in I} \varepsilon(i) \xi_i^\sigma \eta_{-i},$$

d'où

$$\omega(f(x, y)) \geqslant \inf(\omega(f(x_0, y_0)), \inf_i(\omega(\xi_i) + \omega(\eta_{-i}))).$$

Mais $\omega(f(x_0, y_0)) \geqslant \omega_q(x_0) + \omega_q(y_0)$ (1.15 (v)), d'où

$$\begin{aligned}\omega(f(x, y)) \geqslant \inf(\omega_q(x_0), \inf_i(\omega(\xi_i) - a_i(p)))&\\ + \inf(\omega_q(y_0), \inf_i(\omega(\eta_{-i}) + a_i(p)))&\\ \geqslant \alpha_p(x) + \alpha_p(y),&\end{aligned}$$

autrement dit α_p *minore* f. De même,

$$q(x) = q(x_0) + \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \xi_i^\sigma \xi_{-i},$$

$$\omega(q(x)) \geqslant \inf(\omega(q(x_0)), \inf_{1 \leqslant i \leqslant r}(\omega(\xi_i) + \omega(\xi_{-i}))) \geqslant 2\alpha_p(x),$$

ce qui montre que α_p *minore* (f, q).

Soit β une norme $\geqslant \alpha_p$ minorant (f, q). On a

$$\alpha_p(x_0) \leqslant \beta(x_0) \leqslant \omega_q(x_0) = \alpha_p(x_0),$$

d'où $\beta(x_0) = \alpha_p(x_0) = \omega_q(x_0)$. Soit maintenant $i \in I$; on a d'une part $\beta(e_i) \geqslant \alpha_p(e_i) = -a_i(p)$ et de même $\beta(e_{-i}) \geqslant a_i(p)$, d'autre part

$$\beta(e_i) + \beta(e_{-i}) \leqslant \omega(f(e_i, e_{-i})) = 0,$$

d'où l'on déduit que $\beta(e_i) = -a_i(p) = \alpha_p(e_i)$. Enfin, on a

$$\beta(x) \leqslant \omega(f(x, e_{-i})) - \beta(e_{-i}) = \omega(\xi_i) - a_i(p) = \beta(e_i \xi_i),$$

d'où $\beta(x) \leqslant \inf_i \beta(e_i \xi_i)) = \alpha_p(\sum e_i \xi_i)$. Faisant $x_0 = 0$, on en déduit $\beta(\sum e_i \xi_i) = \alpha_p(\sum e_i \xi_i)$, puis

$$\beta(x) = \inf(\beta(x_0), \beta(\textstyle\sum e_i \xi_i)) = \alpha_p(x).$$

Par suite, α_p est bien maximinorante.

Il ne reste plus qu'à démontrer l'assertion de surjectivité de la proposition : elle résulte aussitôt du lemme suivant :

2.10. LEMME. — *Soit β une norme minorant (f, q). Supposons que le couple (X_-, X_0+X_+) soit scindant pour β et que les e_{-i} pour $1 \leqslant i \leqslant r$ forment une base scindante de X_- pour la restriction de β à X_-. Soit p le point de A défini par $a_i(p)=\beta(e_{-i})$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Alors, on a $\beta \leqslant \alpha_p$.*

Soit $x=x_0+x_++x_-$, avec $x_0 \in X_0$, $x_+ \in X_+$ et $x_- \in X_-$. Puisque (e_{-i}) est une base scindante de X_- pour β comme pour α_p, on a

$$\beta(x_-)=\alpha_p(x_-).$$

D'autre part,

$$\beta(x_0+x_+) \leqslant \frac{1}{2}\omega(q(x_0+x_+))=\frac{1}{2}\omega(q(x_0))=\alpha_p(x_0),$$

$$\begin{aligned}\beta(x_0+x_+) &\leqslant \inf_{y \in X_-}(\omega(f(x_0+x_+, y))-\beta(y)) \\ &\leqslant \inf_{y \in X_-}(\omega(f(x_+, y))-\alpha_p(y))=\alpha_p(x_+),\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de ce que la restriction de α_p à X_+ est clairement la norme duale de la restriction de α_p à X_- pour la dualité définie par f. Utilisant alors l'hypothèse suivant laquelle X_- et X_0+X_+ est un couple scindant pour β, on déduit de ces inégalités que

$$\beta(x)=\inf(\beta(x_0+x_+), \beta(x_-)) \leqslant \inf(\alpha_p(x_0), \alpha_p(x_+), \alpha_p(x_-))=\alpha_p(x).$$

2.11. LEMME. — *Soit $p \in A$.*

(i) *On a $\alpha_{n.p}=n.\alpha_p$ pour tout $n \in N$.*

(ii) *Les stabilisateurs de p et de α_p dans G sont égaux.*

On a vu que le normalisateur N de Z est produit de Z par le sous-groupe N' formé des $n \in N$ qui permutent entre eux les $\pm e_i$ pour $i \in I$ (et donc stabilisent X_0). Or, l'assertion (i) est immédiate pour $n \in N'$ par transport de structure et résulte d'un calcul trivial pour $n \in Z$ (*cf.* III, 2.9). Pour démontrer (ii), on voit comme en III, 2.10 qu'il suffit de montrer que, pour toute racine a le sous-groupe $U_{a, -a(p)}=\{u \in U_a \mid \varphi_a(u) \geqslant -a(p)\}$ de Stab_p est contenu dans Stab_{α_p}, ou encore que $\alpha_p(u.x) \geqslant \alpha_p(x)$ pour tout $u \in U_{a, -a(p)}$ et tout $x \in X$.

Prenons d'abord $a=a_{ij}=a_i+a_j$ ($i, j\in I$, $i\neq \pm j$). Un élément $u\in U_{a,-a(p)}$ est de la forme $u_{ij}(t)$ avec $t\in D$ et $\omega(t)\geqslant -a_i(p)-a_j(p)$ (1.14(24) et 1.15(28)) et vu 1.14 (24), on a, pour $x=x_0+\sum e_i\xi_i$ comme en 2.9,

$$u.x=x_0+\textstyle\sum_{k\neq -i,-j}e_k\xi_k+e_{-i}(\xi_{-i}-\varepsilon(i)t\xi_j)+e_{-j}(\xi_{-j}+\varepsilon(-j)t\xi_i).$$

L'inégalité

$$\omega(\xi_{-i}-\varepsilon(i)t\xi_j)+a_i(p)\geqslant\inf(\omega(\xi_{-i})+a_i(p),\ \omega(\xi_j)-a_j(p))$$

et l'inégalité analogue obtenue en échangeant les rôles de i et j entraînent alors la relation cherchée $\alpha_p(u.x)\geqslant\alpha_p(x)$.

Si maintenant $a=a_i$ avec $i\in I$, un élément u de $U_{a,-a(p)}\supset U_{2a,-2a(p)}$ est de la forme $u_i(z, t)$ avec $z\in X_0$, $t\in q(z)$ (d'où $\omega_q(z)\geqslant(1/2)\omega(t)$) et $\omega(t)\geqslant -2a_i(p)$ (1.14 (23) et 1.15 (26)). Vu 1.14 (23), on a

$$u.x=x_0+z\xi_i+\textstyle\sum_{j\neq -i}e_j\xi_j+e_{-i}(\xi_{-i}-\varepsilon(i)f(z, x_0)-\varepsilon(i)t\xi_i).$$

Or

$$\omega_q(z\xi_i)\geqslant\frac{1}{2}\omega(t)+\omega(\xi_i)\geqslant\omega(\xi_i)-a_i(p),$$

$$\omega(f(z, x_0))+a_i(p)\geqslant\omega_q(z)+\omega_q(x_0)+a_i(p)\geqslant\omega_q(x_0),$$

$$\omega(t\xi_i)+a_i(p)\geqslant\omega(\xi_i)-a_i(p),$$

d'où aussitôt $\alpha_p(u.x)\geqslant\alpha_p(x)$.

2.12. Théorème. — *Soit $\mathcal{N}_{mm}$ l'ensemble des normes maximinorantes pour* (f, q).

(i) *L'application $p\mapsto\alpha_p$ se prolonge d'une manière et d'une seule en une application j de l'immeuble $\mathcal{I}$ de G dans $\mathcal{N}_{mm}$ covariante par G, c'est-à-dire satisfaisant à*

(14) $$j(g.x)=g.j(x)\quad \textit{pour}\quad x\in\mathcal{I}\ \textit{et}\ g\in G.$$

L'application j est aussi covariante par $\mathrm{Is}(f, q)$.

(ii) *L'application j est bijective et satisfait à*

(15) $$j(tx+(1-t)y)=tj(x)+(1-t)j(y)$$

pour $x, y\in\mathcal{I}$ et $t\in[0, 1]$.

(iii) *L'application j est l'unique application de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{N}_{mm}$ satisfaisant à* (14) *et* (15).

La première assertion se démontre comme l'assertion analogue de III, 2.11 : elle résulte du lemme 2.11 puisque l'immeuble $\mathscr{I}$ est le quotient de $G \times A$ par la relation d'équivalence « il existe $n \in N$ tel que $p' = n.p$ et $g^{-1} g' n \in \mathrm{Stab}_p$ » entre éléments (g, p) et (g', p') de $G \times A$ (I, 7.4.1). De plus, des calculs simples montrent que (14) est exacte d'une part lorsque $g \in \mathrm{Is}(f, q)$ stabilise chacun des X_i, d'autre part lorsque $\sigma = \mathrm{id}$, $\varepsilon = 1$, $r \geqslant 1$ et que g est l'identité sur chacun des X_i pour $i \neq \pm 1$ et permute e_1 et e_{-1}. La deuxième assertion de (i) résulte alors de ce que $\mathrm{Is}(f, q)$ est engendré par G et l'ensemble de ces éléments (I, 10.1.5).

Comme deux points quelconques de $\mathscr{I}$ sont transformés de deux points de A par un même élément de G (II, 7.4.18(c)), l'injectivité de j et (15) résultent des mêmes propriétés (évidentes) de l'application $p \mapsto \alpha_p$. Quant à (iii), elle résulte de (i), (ii) et de II, 4.2.12.

Reste donc uniquement à démontrer la *surjectivité* de $j : \mathscr{I} \to \mathscr{N}_{mm}$, c'est-à-dire à prouver le lemme suivant :

2.13. LEMME. — *Toute norme minorant (f, q) est majorée par un élément de $j(\mathscr{I})$.*

Soit α une norme minorant (f, q). Soit Y_- un supplémentaire scindant pour α de $X_0 + X_+$ et soit Y_0 un supplémentaire scindant pour α de X_+ dans $X_0 + X_+$ (*cf.* III, 1.5 (ii)), de sorte que $Y = Y_0 + Y_-$ est un supplémentaire scindant pour α de X_+. La forme sesquilinéaire f définit un isomorphisme de X_+^{σ} sur le dual de Y_- et l'on peut considérer le norme α^* sur X_+ duale de la restriction de α à Y_- : on a par définition

$$\alpha^*(x_+) = \inf \{\omega(f(x_+, y) - \alpha(y) \mid y \in Y_-\} \qquad \text{pour} \quad x_+ \in X_+,$$

et $\alpha^*(x_+) \geqslant \alpha(x_+)$ puisque α minore f. Notons que l'on a aussi

$$\alpha^*(x_+) = \inf \{\omega(f(x_+, x) - \alpha(x) \mid x \in X\}$$

puisque X_+ est orthogonal à $X_0 + X_+$.

Posons alors pour $x_+ \in X_+$ et $y \in Y$

$$\alpha'(x_+ + y) = \inf (\alpha^*(x_+), \alpha(y)).$$

On obtient ainsi une norme α' sur X, qui majore α et coïncide avec α sur Y et avec α^* sur X_+. Montrons que α' *minore* (f, q). Soient $x_+, x'_+ \in X_+$

et $y, y' \in Y$. On a

$$f(x_+ + y, x'_+ + y') = f(x_+, y') + f(y, x'_+) + f(y, y').$$

Puisque α minore f, on a

$$\omega(f(y, y')) \geqslant \alpha(y) + \alpha(y') = \alpha'(y) + \alpha'(y'),$$

et par définition même de α^*, on a

$$\omega(f(x_+, y')) \geqslant \alpha^*(x_+) + \alpha(y') = \alpha'(x_+) + \alpha'(y'),$$
$$\omega(f(y, x'_+)) = \omega(f(x'_+, y)) \geqslant \alpha^*(x'_+) + \alpha(y) = \alpha'(x'_+) + \alpha'(y),$$

ce qui montre que α' minore f. Que α' minore (f, q) résulte alors de 2.6 (ii) puisque $\alpha' = \alpha$ sur Y et que $q = 0$ sur X_+.

Quitte à remplacer α par sa majorante α', on peut donc supposer que la restriction de α à X_+ est égale à α^*. Soit alors $(u_{-i})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une base de Y_- scindante pour α et soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ la base duale de X_+, de sorte que $f(u_i, u_{-j}) = 0$ pour $i \neq j$ et $= 1$ pour $i = j$. Choisissons des $a_{ii} \in q(u_{-i})$ tels que $\omega(a_{ii}) = \omega(q(u_{-i}))$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, ce qui est possible puisque ω est discrète (*cf.* 2.17 ci-dessous pour le cas dense) et que $\omega(q(x)) = +\infty$ implique $0 \in q(x)$ puisque D^0 est fermé. Posons $a_{ij} = f(u_{-i}, u_{-j})$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant r$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. Enfin, posons, pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$u'_{-i} = u_{-i} - \textstyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} u_j a_{ij}^{\sigma}.$$

Comme $\omega(a_{ij}) \geqslant \alpha(u_{-i}) + \alpha(u_{-j}) = \alpha(u_{-i}) - \alpha(u_j)$, on a $\alpha(\sum u_j a_{ij}^{\sigma}) \geqslant \alpha(u_{-i})$ et la remarque 1.5 de III entraîne que (u'_{-i}) *est une base scindante d'un supplémentaire* Y' *de* $X_+ + X_0$ *scindant pour* α.

D'autre part, comme X_+ est totalement singulier, on a, pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$q(u'_{-i}) = q(u_{-i}) - f(u_i a_{ii}^{\sigma}, u_{-i}) = q(u_{-i}) - a_{ii} = 0$$

et, pour $1 \leqslant i < j \leqslant r$,

$$f(u'_{-i}, u'_{-j}) = f(u_{-i}, u_{-j}) - f(u_{-i}, u_i a_{ji}^{\sigma}) - f(u_j a_{ij}^{\sigma}, u_{-j}) = a_{ij} - 0 - a_{ij} = 0.$$

Le sous-espace Y'_- est donc *totalement singulier*. Enfin, il est clair que X_+ et Y'_- sont en dualité et que (u_i) est la base duale de (u'_{-i}) pour la dualité définie par f.

Le théorème de Witt (1.3 (3)) entraîne alors qu'il existe $g \in \mathrm{Is}(f, q)$ tel que $g.u_i = e_i$ et $g.u'_{-i} = e_{-i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, d'où $g.X_+ = X_+$,

$g.(X_0+X_+)=X_0+X_+$ (puisque X_0+X_+ est l'orthogonal de X_+) et $g.Y'_-=X_-$. Quitte à transformer la situation par g, on voit qu'on peut supposer le couple (X_-, X_0+X_+) scindant pour α et la base (e_{-i}) de X_- scindante pour α, et il suffit pour achever la démonstration d'appliquer le lemme 2.10.

2.14. L'immeuble $\mathscr{I}$ de G s'identifie donc naturellement à une partie convexe de l'*immeuble élargi* $\mathscr{I}_1$ du groupe linéaire général $GL_D(X)$, puisque ce dernier s'identifie à l'ensemble $\mathscr{N}$ de toutes les normes scindables sur X (III, th. 2.11). L'appartement A est l'intersection de $\mathscr{I}$ avec un appartement A_1 de $\mathscr{I}_1$: on peut choisir une base $(e_{0,j})_{j\in J}$ de X_0 scindante pour ω_q et prendre pour A_1 l'ensemble des normes admettant $((e_i)_{i\in I}, (e_{0,j})_{j\in J})$ comme base scindante.

La distance dans $\mathscr{I}$ de deux points $x, y\in A$ est $d(x, y)=(\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(a_i(x-y))^2)^{1/2}$ et leur distance dans $\mathscr{I}_1$ est $d_1(x, y)=(\sum_{i\in I}(a_i(x-y))^2)^{1/2}$ puisque $\alpha_x(e_{0,j})=\alpha_y(e_{0,j})=\omega_q(e_{0,j})$ pour tout $j\in J$ (III, 2.12). Comme $a_{-i}=-a_i$ sur V, on voit que *la distance dans $\mathscr{I}$ est proportionnelle à la restriction de la distance dans $\mathscr{I}_1$*; plus précisément on a $d_1=\sqrt{2}\,d$. Par suite, la distance sur $\mathscr{I}=\mathscr{N}_{mm}$ est équivalente à celle induite par la distance d' de Goldman-Iwahori sur $\mathscr{N}$ définie par $d'(\alpha, \beta)=\sup_{x\in X-\{0\}}|\alpha(x)-\beta(x)|$ ([8], 2.1) : d'après III, 2.12, on a $d'\leqslant\sqrt{2}\,d\leqslant\sqrt{n}\,d'$. En particulier, l'injection de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{N}$ est continue pour la topologie de la convergence simple et une partie Y de $\mathscr{I}=\mathscr{N}_{mm}$ est *bornée* si et seulement si

$$\sup_{\alpha,\beta\in Y}\sup_{x\in X-\{0\}}|\alpha(x)-\beta(x)|<+\infty.$$

2.15. LEMME. — *Soit $\beta\in\mathscr{N}$. L'ensemble Y des $\alpha\in\mathscr{N}_{mm}$ majorant β est borné.*

Il suffit de montrer qu'il existe une constante $b\in\mathbf{R}$ telle que $\alpha(x)\leqslant\beta(x)+b$ pour tout $x\in X$ et tout $\alpha\in Y$. Utilisant les homothéties, on voit qu'il suffit de prouver l'existence d'un réseau R de X et d'une constante $c\in\mathbf{R}$ telle que $\alpha(x)\leqslant c$ pour tout $\alpha\in Y$ et tout $x\in R\pi_D^{-1}-R$:on a en effet $\inf\{\beta(x)\,|\,x\in R\pi_D^{-1}\}>-\infty$. Prenons pour R le réseau formé des $\sum e_i\xi_i+x_0$ avec $\xi_i\in D$, $\omega(\xi_i)\geqslant 0$, et $x_0\in X_0$, $\omega_q(x_0)\geqslant 0$. Si $x=\sum e_i\xi_i+x_0$ n'appartient pas à R, alors

— ou bien il existe $i\in I$ tel que $\omega(\xi_i)<0$; on a

$$\alpha(x)+\beta(e_{-i})\leqslant\alpha(x)+\alpha(e_{-i})\leqslant\omega(f(x, e_{-i}))=\omega(\xi_i)<0,$$

puisque $\alpha \in Y$ minore f, d'où $\alpha(x) < -\beta(e_{-i})$;

— ou bien $\omega(\xi_i) \geqslant 0$ pour tout $i \in I$, d'où $\omega_q(x_0) < 0$; comme $q(x) = q(x_0) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \xi_i^\sigma \xi_{-i}$, on a $\omega(q(x)) = \omega(q(x_0)) < 0$, d'où $\alpha(x) \leqslant (1/2)\,\omega(q(x)) < 0$ puisque α minore q.

Par suite, on peut prendre $c = \sup(0, \sup_{i \in I}(-\beta(e_i)))$.

2.16. On a vu (III, 2.13) que l'immeuble $\mathscr{I}$ de $GL_D(X)$ (ou de $SL_D(X)$) s'identifie canoniquement à l'ensemble End $\mathscr{N}$ des End α pour $\alpha \in \mathscr{N}$ (ou encore à l'ensemble des classes d'homothéties dans $\mathscr{N}$ (2.4 (i)). Par suite, l'application $x \mapsto \operatorname{End} j(x)$ fournit une *injection* de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{I}$ (il est clair que si $\alpha \in \mathscr{N}_{mm}$, alors $\alpha + c \notin \mathscr{N}_{mm}$ quel que soit $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$), covariante par G et affine sur les segments.

S'il existe $\lambda \in L$ tel que $\lambda + \lambda^\sigma = 1$ et $\omega(\lambda) = 0$, alors f est non dégénérée, détermine q et $\alpha \in \mathscr{N}$ minore (f, q) si et seulement si α minore f. On déduit alors de 2.5 que l'image de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{I}$ est l'ensemble des normes carrées invariantes par passage à l'adjoint et que l'image de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{N}$ est l'ensemble des normes invariantes par l'application $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ (qui est de carré 1).

Par contre, si un tel λ n'existe pas, alors en général une norme minorant f ne minore pas nécessairement (f, q) (même lorsque f détermine q). On voit que la considération de q est alors nécessaire, même lorsqu'elle pouvait paraître *a priori* comme superflue.

2.17. *Remarque.* — Nous avions annoncé le théorème 2.12 dans I (Note ajoutée aux épreuves) sous des conditions plus larges : D n'était pas supposé de rang fini sur son centre et la valuation ω de D n'était pas supposée discrète; par contre, on supposait D et D^0 *maximalement complets.* Le lecteur vérifiera sans peine que la démonstration donnée ci-dessus reste valable sans changement : on remarquera que l'hypothèse que D et D^0 sont maximalement complets entraîne d'une part que toute norme sur X est scindable, d'autre part que pour tout $x \in X$, il existe $\lambda \in D$ tel que $\omega(\lambda) = \omega(q(x))$.

Plus généralement, le théorème 2.12 est valable, avec la même démonstration, si l'on désigne par $\mathscr{N}_{mm}$ l'ensemble des normes *scindables* maximinorantes et si l'on suppose seulement que D^0 admet un supplémentaire scindant pour ω (p. ex. s'il existe $\lambda \in L$ avec $\lambda + \lambda^\sigma = 1$ et $\omega(\lambda) = 0$).

3. Schémas

On conserve les conventions précédentes. Le mot *schéma* signifie schéma affine sur l'anneau $\mathcal{O}=\mathcal{O}_K$ des entiers de K.

3.1. La norme $\omega_q(x)=(1/2)\,\omega(q(x))$ sur X_0 prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}/2e$ (rappelons que e est l'indice de ramification de D, de sorte que $\omega(D^\times)=\mathbf{Z}/e$). Pour $n\in\mathbf{R}$, posons

$$\mathscr{X}_{0,n}=\{x\in X_0\,|\,\omega_q(x)\geqslant n/e\},$$

de sorte que $(\mathscr{X}_{0,n})_{n\in\mathbf{Z}/2}$ est le drapeau de réseaux associé à ω_q au sens de III, 1.8. Il est de rang $\leqslant 2$: on a évidemment $\mathscr{X}_{0,n}\pi_D=\mathscr{X}_{0,n+1}$.

Comme $\omega(f(x,x'))\leqslant\omega_q(x)+\omega_q(x')$ pour $x,x'\in X_0$ (1.15(v)) et que $\omega(f(x,x'))\in\mathbf{Z}/e$, on voit que

$$\text{(1)}\qquad \omega(f(x,x'))\geqslant\lceil n+n'\rceil_e\geqslant(n+n')/e\qquad(x\in\mathscr{X}_{0,n},\ x'\in\mathscr{X}_{0,n'}),$$

où $\lceil n+n'\rceil_e$ est le plus petit multiple entier de $1/e$ *supérieur* à $(n+n')/e$. En particulier,

$$\text{(1 \textit{bis})}\qquad \omega(f(x,x'))\geqslant 1/e\qquad\text{pour}\quad x\in\mathscr{X}_{0,0}\quad\text{et}\quad x'\in\mathscr{X}_{0,1/2}.$$

Choisissons une base $(e_{0,j})_{1\leqslant j\leqslant\dim X_0}$ de X_0, scindante pour ω_q, telle que

$$\omega_q(e_{0,j})=0\qquad\text{pour}\quad 1\leqslant j\leqslant j_0=\dim_{\bar D}\mathscr{X}_{0,0}/\mathscr{X}_{0,1/2},$$
$$\omega_q(e_{0,j})=1/2e\qquad\text{pour}\quad j_0<j\leqslant\dim X_0$$

(base adaptée pour ω_q au sens de III, 1.8), de sorte que $\mathscr{X}_{0,0}$ (resp. $\mathscr{X}_{0,1/2}$) est le $\mathcal{O}_K$-module engendré par les $e_{0,j}$ (resp. par les $e_{0,j}\pi_D$ pour $j\leqslant j_0$ et les $e_{0,j}$ pour $j>j_0$). Choisissons aussi un « relèvement » ${}^r q : X_0\to D$ de la restriction de q à X_0 de la manière suivante : pour chaque j, on choisit $\lambda_j\in q(e_{0,j})$ tel que $\omega(\lambda_j)=\omega(q(e_{0,j}))$ et, pour $x=\sum e_{0,j}\xi_j\in X_0$, on pose

$$\text{(2)}\qquad {}^r q(x)=\sum\xi_j^\sigma\lambda_j\xi_j+\sum\nolimits_{j<k}\xi_j^\sigma f(e_{0,j},e_{0,k})\,\xi_k.$$

LEMME. — (i) ${}^r q(x)\in q(x)$ *pour tout* $x\in X_0$.

(ii) *On a* $\omega_q(x)=(1/2)\,\omega({}^r q(x))$ *pour tout* $x\in X_0$.

L'assertion (i) est évidente (*cf.* 1.2 (6 *bis*)) et entraîne $\omega_q(x)\geqslant(1/2)\,\omega({}^r q(x))$. D'autre part, $\omega_q(x)\geqslant 0$ (resp. $\omega_q(x)\geqslant 1/2e$) entraîne $x\in\mathscr{X}_{0,0}$ (resp. $x\in\mathscr{X}_{0,1/2}$), c'est-à-dire $\omega(\xi_j)\geqslant 0$ pour tout j (resp.

$\omega(\xi_j) \geqslant 1/e$ pour $j \leqslant j_0$ et $\omega(\xi_j) \geqslant 0$ pour $j > j_0$), d'où $\omega({}^r q(x)) \geqslant 0$ (resp. $\omega({}^r q(x)) \geqslant 1/e$ vu (1 *bis*)), et (ii) s'ensuit.

3.2. A une famille $\mathfrak{n} = (n_i)_{i \in I \cup \{0\}}$ avec $n_i \in \mathbf{Z}$ pour $i \in I$ et $n_0 \in \mathbf{Z}/2$, on associe le réseau $\mathscr{X}_{\mathfrak{n}}$ de X défini par

$$\mathscr{X}_{\mathfrak{n}} = \mathscr{X}_{0, n_0} + \sum_{i \in I} e_i \pi_D^{n_i} \mathcal{O}_D. \tag{3}$$

Remarquons que, si l'on s'intéresse à $\mathscr{X}_{\mathfrak{n}}$ à homothétie près, on peut supposer $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1/2$ (ou $n_0 = -1/2$).

3.3. Soit M un $\mathcal{O}_D$-module libre de type fini, par exemple un réseau dans X. C'est aussi un $\mathcal{O}_K$-module (resp. un $\mathcal{O}_L$-module) libre de type fini. On note $\mathfrak{End}\, M$ (resp. $\mathfrak{End}^L M$) le $\mathcal{O}_K$-schéma (resp. le $\mathcal{O}_L$-schéma) en algèbres associé à l'algèbre $\operatorname{End} M$ considérée comme $\mathcal{O}_K$-module (resp. comme $\mathcal{O}_L$-module) libre de type fini. De même, on note $\mathfrak{GL}(M)$ (resp. $\mathfrak{GL}^L(M)$) le $\mathcal{O}_K$-schéma (resp. le $\mathcal{O}_L$-schéma) en groupes associé au groupe multiplicatif $GL(M)$ de $\operatorname{End} M$ (*cf.* III, 3.2). On vérifie aussitôt que $\mathfrak{End}\, M$ (resp. $\mathfrak{GL}(M)$) s'identifie canoniquement au schéma $\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{End}^L M$ (resp. $\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{GL}^L(M)$) obtenu par restriction des scalaires de $\mathcal{O}_L$ à $\mathcal{O}_K$ (*cf.* II, 1.5.13). La fibre générique de $\mathfrak{GL}(M)$ (resp. $\mathfrak{GL}^L(M)$) est le groupe $GL_D(M \otimes_{\mathcal{O}_K} K)$, considéré comme groupe algébrique sur K (resp. sur L : notons que $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K = M \otimes_{\mathcal{O}_L} L$!).

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{X}_j)_{1 \leqslant j \leqslant J}$ une famille finie de réseaux de X. Soit $\mathscr{X}_{\mathscr{F}}$ le réseau $\prod_{1 \leqslant j \leqslant J} \mathscr{X}_j$ de X^J. La puissance J-ième de la représentation identique permet d'identifier le groupe algébrique G à un sous-groupe algébrique défini sur K de $GL(X)^J \subset GL(X^J)$ et de considérer l'*adhérence schématique* $\mathfrak{H}_{\mathscr{F}}$ d'un sous-groupe algébrique H défini sur K de G dans le schéma en groupes $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_{\mathscr{F}})$. C'est un schéma en groupes plat de type fini, de fibre générique H (*cf.* II, 1.2.6, 1.2.7 et 2.2.2). Comme G est semi-simple, il est contenu dans $SL(X_{[K]})$ (où $X_{[K]}$ est le K-espace vectoriel sous-jacent à X) et l'algèbre affine de $\mathfrak{H}_{\mathscr{F}}$ est engendrée par les coefficients des matrices des éléments de H par rapport à des bases des $\mathcal{O}_K$-modules $\mathscr{X}_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant J$ (*cf.* II, 1.4.5), autrement dit, $\mathfrak{H}_{\mathscr{F}}$ est aussi l'adhérence schématique de H dans $\mathfrak{End}\, \mathscr{X}_{\mathscr{F}}$.

3.4. Prenons en particulier pour H le centralisateur Z du tore déployé maximal S et pour famille $\mathscr{F}$ le couple formé des réseaux $\mathscr{X}_{\mathfrak{n}}$ correspondant l'un à la famille $n_i = 0$ pour $i \in I \cup \{0\}$ et l'autre à la famille $n_i = 0$ pour

$i \in I$ et $n_0 = 1/2$. *Le schéma* $\mathfrak{H}_{\mathscr{F}}$ *correspondant est noté* $\mathfrak{Z}$ *et est appelé le schéma canonique de fibre générique* Z.

On a vu (1.14) que Z stabilise chacun des X_i pour $i \in I \cup \{0\}$ et opère par le morphisme $a_i(z)^{-1}$ sur X_i pour $i \in I$. Notons z_0 la restriction de z à X_0. Pour $i \in I$, le schéma $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(e_i \mathcal{O}_D)$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(\mathcal{O}_D)$, c'est-à-dire encore au *schéma canonique* $\mathfrak{D}^\times$ de fibre générique $D^\times$ (III, 3.3). Ce dernier est évidemment invariant par l'involution σ. Comme $a_{-i} = (a_i^\sigma)^{-1}$, il en résulte que l'algèbre affine de $\mathfrak{Z}$ est engendrée par les images réciproques $a_i^*(\mathcal{O}_K[\mathfrak{D}^\times])$ de l'algèbre affine de $\mathfrak{D}^\times$ par les morphismes a_i pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et par les coefficients des deux matrices représentant z_0 par rapport à une $\mathcal{O}_K$-base de $\mathscr{X}_{0,0}$ et par rapport à une $\mathcal{O}_K$-base de $\mathscr{X}_{0,1/2}$. On peut bien entendu remplacer chacun de ces deux réseaux par un homothétique. Ceci rend immédiate la proposition suivante :

PROPOSITION. — (i) *L'adhérence schématique de* S *dans* $\mathfrak{Z}$ *est le schéma canonique* $\mathfrak{S}$ *de fibre générique* S (II, 1.2.11).

(ii) *Pour tout* $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^I \times \mathbf{Z}/2$, *la représentation identique de* Z *dans* X *se prolonge en une représentation linéaire du schéma en groupes* $\mathfrak{Z}$ *dans le réseau* $\mathscr{X}_\mathbf{n}$: *autrement dit,* $\mathfrak{Z}$ *opère dans* $\mathscr{X}_\mathbf{n}$ (II, 1.4.6).

(iii) *Soit* $\mathbf{n}(k) = ((n_i(k))_{i \in I}, n_0(k))$ *une famille finie non vide d'éléments de* $\mathbf{Z}^I \times \mathbf{Z}/2$. *Supposons que l'ensemble des* $n_0(k)$ *contienne un représentant de chaque classe de* $e\,\omega_q(X_0 - \{0\})$ *modulo* $\mathbf{Z}$ (*ces classes étant au nombre de* 0, 1 *ou* 2). *Alors,* $\mathfrak{Z}$ *opère fidèlement dans le produit des* $\mathscr{X}_{\mathbf{n}(k)}$.

3.5. Nous étudierons plus loin le problème de savoir si le schéma $\mathfrak{Z}$ est lisse, ce qui n'est pas toujours le cas. Traitons cependant tout de suite le cas où K est *hensélien* et G *quasi-déployé* sur K. On a alors $D = L$ et Z est un tore.

Si $L \neq K$ (groupe unitaire d'indice maximal) alors

— ou bien $\dim X_0 = 0$, le morphisme $z \mapsto (a_i(z))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ identifie Z au sous-groupe de $(L^\times)^r$ défini par la condition $t_1 \ldots t_r \in K$ et le morphisme $z \mapsto ((a_i(z))_{1 \leqslant i \leqslant r-1}, \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} a_i(z))$ identifie Z à $(L^\times)^{r-1} \times K^\times$. On voit aussitôt que $\mathfrak{Z}$ est isomorphe à $(\mathfrak{L}^\times)^{r-1} \times \mathfrak{K}^\times$;

— ou bien $\dim X_0 = 1$, la restriction z_0 de z à X_0 est la multiplication par $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(a_i(z)/a_i(z)^\sigma)$, le morphisme $z \mapsto (a_i(z))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ identifie Z à $(L^\times)^r$ et $\mathfrak{Z}$ à $(\mathfrak{L}^\times)^r$.

Si $L = K$ et si $\dim X_0 = 0$ ou 1, on voit comme ci-dessus que $\mathfrak{Z}$ est isomorphe à $(\mathfrak{K}^\times)^r$.

Dans tous ces cas, $\mathfrak{Z}$ est lisse et connexe.

Reste enfin le cas du groupe orthogonal en dimension paire quasi-déployé non déployé. Compte tenu de la normalisation convenue (1.14 (22)), on a $1 \in q(X_0)$ et l'on peut identifier X_0 et l'espace vectoriel sous-jacent à l'extension quadratique séparable K' de K déployant G, de telle sorte que la restriction de q à X_0 devienne la norme $\mathrm{Norme}_{K'/K}$. On vérifie sans peine que Z s'identifie à $(K^{\times})^r \times T$, où T est le tore des éléments de norme 1 de K', et que $\mathfrak{Z}$ s'identifie à $(\mathfrak{K}^{\times})^r \times \mathfrak{T}$, où $\mathfrak{T}$ est le schéma canonique de fibre générique T au sens de II, 4.4.8. Or, on sait (II, 4.4.13) que $\mathfrak{T}$ est lisse (et est alors connexe) si et seulement si ou bien car $\bar{K} \neq 2$, ou bien l'extension K' de K est *étale*. Si $\mathfrak{T}$ n'est pas lisse, il peut être ou ne pas être connexe.

En résumé, si K est hensélien et si G est quasi-déployé sur K, alors le schéma $\mathfrak{Z}$ est lisse et connexe sauf dans le cas suivant : on a car $\bar{K}=2$, G est une forme non déployée de SO_{2r+2} et l'extension quadratique séparable de K déployant G n'est pas étale; dans ce cas, $\mathfrak{Z}$ n'est pas lisse.

3.6. Rappelons que, pour toute racine $a \in \Phi$ de G suivant S, on note U_a le sous-groupe radiciel associé et que, pour tout $k \in \mathbf{R}$, on note $U_{a,k}$ le sous-groupe de $U_a(K)$ formé des éléments u tels que $\varphi_a(u) \geqslant k$ (I, 6.2.1).

Soient $i, j \in I$ avec $i \neq \pm j$ et prenons pour a la racine a_{ij}. Le morphisme $u_{ij} : t \mapsto u_{ij}(t)$ (1.14 (24)) identifie le groupe algébrique U_a au groupe additif de D et, vu 1.15 (28), envoie le $\mathcal{O}_K$-module libre de type fini $D_k = \{ t \in D \mid \omega(t) \geqslant k \}$ sur $U_{a,k} (k \in \mathbf{R})$. Notons $\mathfrak{D}_k$ le schéma en groupes canoniquement associé à D_k (II, 1.4.1). Par transport de structure par u_{ij}, on obtient un *schéma en groupes lisse et connexe* $\mathfrak{U}_{a,k}$, *de fibre générique* U_a, *tel que*

$$\mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O}) = U_{a,k}.$$

Remarquons que seuls interviennent réellement les $k \in \mathbf{Z}/e = \omega(D^{\times})$: on a $\mathfrak{U}_{a,k} = \mathfrak{U}_{a,[k]_e}$, où $[k]_e$ est le plus petit multiple entier de $1/e$ supérieur ou égal à k.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathbf{n} = ((n_i)_{i \in I}, n_0) \in \mathbf{Z}^I \times \mathbf{Z}/2$ *et soit* $k \in \mathbf{R}$. *Posons* $m = \sup(n_{-i} - n_j,\ n_{-j} - n_i)$. *Si* $k \geqslant m/e$ *(resp.* $k = m/e$*), alors le schéma en groupes* $\mathfrak{U}_{a_{ij},k}$ *opère (resp. opère fidèlement) sur* $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$. *Si* $k \in \mathbf{Z}/e$, *la réciproque est vraie.*

En effet, 1.14 (24) montre que le sous-groupe $U_{a_{ij}}$ opère trivialement sur $Y_1=X_0+\sum_{h\neq \pm i, \pm j}X_h$, qu'il stabilise $Y_2=X_{-i}+X_{-j}+X_j+X_i$ et que la matrice de la restriction de $u_{ij}(t)$ à $Y_2\,(t\in D)$ par rapport à la base $e_{-i}\pi_D^{n_{-i}}$, $e_{-j}\pi_D^{n_{-j}}$, $e_j\pi_D^{n_j}$, $e_i\pi_D^{n_i}$ de $\mathscr{X}_n\cap Y_2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon(i)\pi_D^{-n_{-i}}t\pi_D^{n_j} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon(-j)\pi_D^{-n_{-j}}t\pi_D^{n_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition en résulte immédiatement, compte tenu de ce que le réseau $\mathscr{X}_n$ est somme directe de ses intersections avec Y_1 et Y_2.

3.7. Soit $i\in I$. Vu 1.14 (23) et 3.1 (i), l'application

$$\psi:\quad (x,\,t)\mapsto u_i(x,\,{}^r q(x)+t)$$

est un isomorphisme de variétés algébriques de $X_0\times D^0$ sur le sous-groupe radiciel U_{a_i} associé à la demi-droite $\mathbf{R}_+^\times . a_i$ (*cf.* II, 1.1.3). Pour $k,\,l\in\mathbf{R}$, avec

$$(4)\qquad l\leqslant \inf\omega(D^0-\{0\})\cap[2k,\,+\infty[,$$

on pose

$$(5)\qquad U_{a_i,(k,l)}=\{u_i(x,\,{}^r q(x)+t)\,|\,x\in X_0,\ \omega_q(x)\geqslant k,\ t\in D^0,\ \omega(t)\geqslant l\}.$$

Pour $x\in X_0$, $\omega_q(x)\geqslant k$, la condition (4) entraîne que l'ensemble des ${}^r q(x)+t$ pour $t\in D_l^0=D^0\cap D_l$ est l'ensemble des $s+t$ avec $s\in q(x)$, $\omega(s)\geqslant 2k$, et $t\in D_l^0$; on en déduit aussitôt que

$$(6)\qquad U_{a_i,(k,l)}=U_{a_i,k}\,.\,U_{2a_i,l}$$

lorsque a_i et $2a_i$ sont des racines; si a_i (resp. $2a_i$) n'est pas une racine, il convient de supprimer le terme $U_{a_i,k}$ (resp. $U_{2a_i,l}$) dans (6). On pose $U_{a_i,k}=U_{a_i,(k,2k)}$.

De manière analogue à II, 4.3.5, on définit le *schéma* $\mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}$, *lisse et connexe, de fibre générique* U_{a_i} par transport de structure par l'isomorphisme ψ à partir du schéma $\mathfrak{X}_{0,ke}\times\mathfrak{D}_l^0$ canoniquement associé au $\mathcal{O}_K$-module libre de type fini $\mathscr{X}_{0,ke}\times D_l^0$. On pose $\mathfrak{U}_{a_i,k}=\mathfrak{U}_{a_i,(k,2k)}$. Il est clair que

$$\mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}(\mathcal{O})=U_{a_i,(k,l)}, \qquad \mathfrak{U}_{a_i,k}(\mathcal{O})=U_{a_i,k}.$$

Remarque 1. — Ici aussi, seules interviennent réellement les valeurs $k\in\omega_q(X_0)$ et $l\in\omega(D^0)$: pour k', $l'\in\mathbf{R}$ satisfaisant à (4), on a

$$U_{a_i,(k,l)}=U_{a_i,(k',l')} \qquad (\text{resp. } \mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}=\mathfrak{U}_{a_i,(k',l')})$$

si et seulement si

$$\inf\{h\in\omega_q(X_0)\,|\,h\geqslant k\}=\inf\{h\in\omega_q(X_0)\,|\,h\geqslant k'\}$$

et

$$\inf\{h\in\omega(D^0)\,|\,h\geqslant l\}=\inf\{h\in\omega(D^0)\,|\,h\geqslant l'\}.$$

PROPOSITION. — (i) *La loi de groupe de U_{a_i} se prolonge à $\mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}$ et en fait un schéma en groupes, qui est indépendant du choix du relèvement ${}^rq$.*

(ii) *Soit $\mathbf{n}=((n_i)_{i\in I}, n_0)\in\mathbf{Z}^I\times\mathbf{Z}/2$. Supposons que*

$$(7)\qquad ek\geqslant n_0-n_i,\qquad ek\geqslant n_{-i}-n_0-\frac{1}{2}\qquad et\qquad el\geqslant n_{-i}-n_i.$$

Alors, le schéma en groupes $\mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}$ opère dans le réseau $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$.

(iii) *Supposons que*

$$(8)\qquad 2n_0\geqslant n_i+n_{-i}$$

et

$$(9)\qquad ek=n_0-n_i\qquad et\qquad el=n_{-i}-n_i.$$

Alors $\mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}$ opère fidèlement sur $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$. En particulier, si $2n_0=n_i+n_{-i}$ et $ek=n_0-n_i$, alors $\mathfrak{U}_{a_i,k}$ opère fidèlement sur $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$.

Vu 1.14 (23), $u_i(x, {}^rq(x)+t)$ opère trivialement sur $\sum_{j\neq 0,\pm i}X_j$, stabilise $Y=X_{-i}+X_0+X_i$ et induit sur Y un automorphisme dont la « matrice » par rapport à $e_{-i}\pi_D^{n_{-i}}$, X_0, $e_i\pi_D^{n_i}$ est (avec des notations évidentes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon(i)\pi_D^{-n_{-i}}f(x, Id) & -\varepsilon(i)\pi_D^{-n_{-i}}({}^rq(x)+t)\pi_D^{n_i} \\ 0 & Id & x\pi_D^{n_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons satisfaites les conditions (7). Alors

— vu (1), l'application $(x, z) \mapsto \pi_D^{-n_{-i}} f(x, z)$ est une application $\mathcal{O}_K$-bilinéaire de $\mathcal{X}_{0, ek} \times \mathcal{X}_{0, n_0}$ dans $\mathcal{O}_D$, puisque $ek + n_0 - n_{-i} \geqslant -1/2$;

— l'application $x \mapsto x\pi_D^{n_i}$ est une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de $\mathcal{X}_{0, ek}$ dans $\mathcal{X}_{0, n_0}$ puisque $ek \geqslant n_0 - n_i$ et c'est un *isomorphisme si* $ek = n_0 - n_i$;

— l'application $x \mapsto \pi_D^{-n_{-i}}. {}^r q(x) \pi_D^{n_i}$ est une application $\mathcal{O}_K$-polynomiale de $\mathcal{X}_{0, ek}$ dans $\mathcal{O}_D$: vu (2), il suffit de vérifier que

$$\omega(q(x)) \geqslant (n_{-i} - n_i)/e \qquad \text{et} \qquad \omega(f(x, x')) \geqslant (n_{-i} - n_i)/e$$

pour $x, x' \in \mathcal{X}_{0, ek}$, ce qui est immédiat puisque $\omega(q(x)) \geqslant 2k$, que $\omega(f(x, x')) \geqslant (1/2)(\omega(q(x)) + \omega(q(x'))) \geqslant 2k$ et que d'après (7) on a

$$2ek \geqslant n_0 - n_i + n_{-i} - n_0 - \frac{1}{2} = n_{-i} - n_i - \frac{1}{2}$$

d'où

$$(n_{-i} - n_i)/e \leqslant \inf\{h \in \omega(D^\times) = \mathbf{Z}/e \mid h \geqslant 2k\};$$

— enfin, l'application $t \mapsto \pi_D^{-n_{-i}} t \pi_D^{n_i}$ est une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de D_l^0 dans $\mathcal{O}_D$ puisque $el \geqslant n_{-i} - n_i$.

Tout ceci montre que la loi d'opération de U_{a_i} dans X se prolonge en un *morphisme de schémas* de $\mathfrak{U}_{a_i, (k, l)}$ dans $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(\mathcal{X}_{\mathfrak{n}})$.

Supposons maintenant (8) et (9) satisfaites. Alors (7) l'est aussi, car (8) entraîne $n_0 - n_i \geqslant n_{-i} - n_0$. De plus, le morphisme de schémas que nous venons d'introduire est alors une *immersion fermée*. En effet, on a vu plus haut que l'application $x \mapsto x\pi_D^{n_i}$ de $\mathfrak{X}_{0, ek}$ dans $\mathfrak{X}_{0, n_0}$ en est une et il en est de même de l'application $t \mapsto \pi_D^{-n_{-i}} t \pi_D^{n_i}$ de $\mathfrak{D}_l^0$ dans $\mathcal{O}_D$. Autrement dit, $\mathfrak{U}_{a_i, (k, l)}$ *est l'adhérence schématique de* U_{a_i} *dans* $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(\mathcal{X}_{\mathfrak{n}})$.

Par suite, quels que soient $k, l \in \mathbf{R}$ satisfaisant à (4), le schéma $\mathfrak{U}_{a_i, (k, l)}$ est l'adhérence schématique de U_{a_i} dans un $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(\mathcal{X}_{\mathfrak{n}})$ pour $\mathfrak{n}$ convenable : vu la remarque 1 on peut supposer $k \in \mathbf{Z}/2e$, $l \in \mathbf{Z}/e$ et $l \leqslant 2k$ et l'on peut prendre par exemple $n_0 = ek$, $n_i = 0$, et $n_{-i} = el$, de sorte que (8) et (9) sont satisfaites. Ceci, vu II 1.2.7, démontre l'assertion (i). Quant à (ii) et (iii), ce ne sont, compte tenu de (i), que la traduction de ce qui précède.

Remarque 2. — Supposons $2n_0 \geqslant n_i + n_{-i}$. On voit facilement que le schéma $\mathfrak{U}_{a_i, (k, l)}$ opère fidèlement sur $\mathcal{X}_{\mathfrak{n}}$ si et seulement si on a

$$\inf\{h \in \omega_q(X_0) \mid h \geqslant k\} = \inf\{h \in \omega_q(X_0) \mid eh \geqslant n_0 - n_i\}$$

et

$$\inf\{h\in\omega(D^0)\mid h\geqslant l\}=\inf\{h\in\omega(D^0)\mid eh\geqslant n_{-i}-n_i\}.$$

3.8. On vient de voir que *lorsque* $2n_0\geqslant n_i+n_{-i}$, *l'adhérence schématique de* U_{a_i} *dans* $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_{\blacksquare})$ *est* $\mathfrak{U}_{a_i,((n_0-n_i)/e,(n_{-i}-n_i)/e)}$. Ceci n'est plus exact lorsque $2n_0<n_i+n_{-i}$. Bien des situations peuvent alors se produire. Si la forme f met en dualité $\mathscr{X}_{0,n_0}$ et $\mathscr{X}_{0,-n_0-(1/2)}$ (par exemple si car $\bar{K}\neq 2$), on montre sans difficultés que cette adhérence schématique est $\mathfrak{U}_{a_i,((n_{-i}-n_0-(1/2))/e,(n_{-i}-n_i)/e)}$. Sinon, il peut se faire qu'elle ne soit pas lisse, ou soit lisse mais ne soit pas de la forme $\mathfrak{U}_{a_i,(k,l)}$.

Prenons par exemple $D=K$, car $K=2$, $D^0=D_{\sigma,\varepsilon}=\{0\}$, $r=1$, $\dim X_0=4$ et pour q la forme quadratique

$$x_{-1}x_1+y_1^2+y_1y_2+\lambda y_2^2+\pi(y_3^2+\pi^{a-1}y_3y_4+\mu y_4^2)$$

où a est un entier $\geqslant 2$ et où λ, $\mu\in\mathcal{O}_K$ sont tels que les polynômes $t^2+t+\bar{\lambda}$ et $t^2+\bar{\mu}$ soient irréductibles sur $\bar{K}$. Prenons $n_0=0$, $n_1=b\geqslant a$ et $n_{-1}=0$. On peut alors montrer que l'adhérence schématique de U_{a_1} dans $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_{\blacksquare})$

– n'est pas lisse si $b<2a-1$;

– est lisse mais n'est pas un $\mathfrak{U}_{a_1,k}$ (notons que $2a_1\notin\Phi$) si $b\geqslant 2a-1$: son groupe des points entiers est

$$\{u_1(y,q(y))\mid y_1,\ y_2\in\mathcal{O}_K \text{ et } y_3,\ y_4\in\pi^{-a}\mathcal{O}_K\}.$$

Ceci fournit un exemple de « donnée radicielle schématique » sur G relativement à S qui n'est pas associée à une fonction quasi-concave (*cf.* II, 4.5.12).

3.9. Soit p un point de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G et soit $\alpha=j(p)$ la norme maximinorante qui lui est associée (2.12). Considérons le drapeau de réseaux formé des boules $\mathscr{X}_{\alpha,c}=\{x\in X\mid\alpha(x)\geqslant c\}$ pour $c\in\mathbf{R}$, drapeau qui est composé d'un nombre fini $n'\leqslant n$ de classes d'homothétie. Choisissons un représentant $\mathscr{X}_k$ dans chacune de ces classes et considérons la famille $\mathscr{F}=(\mathscr{X}_k)_{1\leqslant k\leqslant n'}$, et le réseau $\mathscr{X}_{\blacksquare}=\prod_{1\leqslant k\leqslant n'}\mathscr{X}_k$ de $X^{n'}$ (*cf.* III, 3.6). *On note* $\mathfrak{G}_p$ *le schéma en groupes plat de type fini de fibre générique G associé à cette famille comme en* 3.3, *c'est-à-dire l'adhérence schématique de G dans* $\prod_{1\leqslant k\leqslant n'}\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_k)$, *ou encore dans* $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_{\blacksquare})$, *ou encore dans* $\mathfrak{End}\,\mathscr{X}_{\blacksquare}$. Il est clair que ce schéma ne dépend pas du choix des $\mathscr{X}_k$: on peut si l'on veut prendre les différentes boules $\mathscr{X}_{\alpha,c}$ pour $0\leqslant c<1/e$. Il est aussi clair que *le groupe des points entiers de* $\mathfrak{G}_p$ est le stabilisateur dans G des réseaux $\mathscr{X}_k$, c'est-à-dire *le stabilisateur de* $\alpha = j(p)$, ou encore vu 2.12 *le stabilisateur* Stab_p *de* p :

$$\mathfrak{G}_p(\mathcal{O}) = \mathrm{Stab}_p.$$

Quitte à transformer la situation par un élément de G, on peut, pour étudier $\mathfrak{G}_p$ supposer que p est un point de l'appartement A, identifié à V comme plus haut. *Nous le ferons désormais* et posons

$$p_i = a_i(p) \qquad \text{pour} \quad p \in I.$$

Rappelons que Stab_p est alors le sous-groupe de G engendré par $\mathrm{Stab}_p \cap N$ et les $U_{a,\,-a(p)}$ pour $a \in \Phi$ (I, 7.4.4).

Remarque. — Dans III, 3.6, nous avons associé à la norme α sur X un $\mathcal{O}_L$-schéma en algèbres $\mathfrak{M}_\alpha$ de fibre générique $\mathrm{End}^L X$ et un $\mathcal{O}_L$-schéma en groupes $\mathfrak{M}_\alpha^\times$, lisse et connexe, de fibre générique $GL^L(X)$: ce sont les $\mathcal{O}_L$-schémas associés respectivement à l'ordre héréditaire

$$\mathscr{M}_\alpha = \{u \in \mathrm{End}_D X \mid \mathrm{End}\,\alpha(u) \geqslant 0\}$$

(*cf.* III, 1.17 sqq) et à son groupe multiplicatif.

On a vu (III, th. 3.6 (i)) que $\mathfrak{M}_\alpha^\times$ est l'adhérence schématique de $GL^L(X)$ (i. e. le groupe $GL_D(X)$ considéré comme groupe algébrique sur L) dans le $\mathcal{O}_L$-schéma $\mathfrak{GL}^L(\mathscr{X}_\alpha)$. Le $\mathcal{O}_K$-schéma $\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{M}_\alpha^\times$ est un sous-$\mathcal{O}_K$-schéma fermé de $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_\alpha)$ (II, 1.5.9), lisse (II, 1.5.8), de fibre générique $\prod_{L/K} GL^L(X) = GL(X)$ (i. e. $GL_D(X)$ considéré comme groupe algébrique sur K) (II, 1.5.3) et est donc (II, 1.2.6) l'adhérence schématique de $GL(X)$ dans $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_\alpha)$. Il en résulte que *le schéma* $\mathfrak{G}_p$ *est l'adhérence schématique de* G *dans* $\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{M}_\alpha^\times$, *ou encore dans le schéma* $\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{M}_\alpha$, puisque G est contenu dans le sous-groupe d'équation $\mathrm{Nrd} = 1$, et l'on sait (II, 1.5.5) que ce dernier schéma n'est autre que le $\mathcal{O}_K$-schéma canoniquement associé à $\mathscr{M}_\alpha$ *considéré comme* $\mathcal{O}_K$*-module* (libre de type fini). (Bien entendu, $\mathfrak{G}_p$ est un sous-schéma en groupes de $\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{M}_\alpha^\times$, mais non du $\mathcal{O}_K$-schéma associé au $\mathcal{O}_K$-module $\mathscr{M}_\alpha$!).

3.10. LEMME. — *Soit* $p \in A$, *soit* $\alpha = j(p)$ *et soit* $c \in \mathbf{R}$. *La boule* $\mathscr{X}_{\alpha, c}$ *est le réseau* $\mathscr{X}_{\mathbf{n}(c)}$, *où la famille* $\mathbf{n}(c)$ *est définie par les conditions*

$$(10) \qquad n_i(c) \in \mathbf{Z} \qquad \textit{et} \qquad e(p_i + c) \leqslant n_i(c) < e(p_i + c) + 1 \quad \textit{pour} \ \ i \in I,$$

$$(11)\qquad n_0(c)\in\mathbf{Z}/2 \qquad et \qquad ec\leqslant n_0(c)<ec+\frac{1}{2}.$$

Définissons les $n_i(c)$ par (10) et (11). Comme $(X_i)_{i\in I\cup\{0\}}$ est une famille scindante pour α, la boule $\mathscr{X}_{\alpha,c}$ est engendrée par les $e_i\xi_i$ pour $i\in I$, $\xi_i\in D$ et $\alpha(e_i\xi_i)=\omega(\xi_i)-p_i\geqslant c$, condition équivalente à $\omega(\xi_i)\geqslant n_i(c)/e$, et par les $x\in X_0$ tels que $\alpha(x)=\omega_q(x)\geqslant c$, condition équivalente à $x\in\mathscr{X}_{0,n_0(c)}$, d'où le lemme.

3.11. THÉORÈME. — *Soit $p\in A$ et soit $\mathfrak{G}_p$ le schéma associé* (3.9).

(i) *L'adhérence schématique de Z dans $\mathfrak{G}_p$ est le schéma canonique $\mathfrak{Z}$ de fibre générique Z* (3.4).

(ii) *Pour tout $a\in\Phi^{\text{red}}$, l'adhérence schématique de U_a dans $\mathfrak{G}_p$ est le schéma $\mathfrak{U}_{a,-a(p)}$.*

(iii) *Soit $\Phi^+\subset\Phi$ un système de racines positives et posons $\Phi^-=-\Phi^+$. Quels que soient les ordres mis sur Φ^+ et sur Φ^-, le morphisme produit est un isomorphisme de schémas de*

$$\prod\nolimits_{a\in\Phi^{\text{red}}\cap\Phi^-}\mathfrak{U}_{a,-a(p)}\times\mathfrak{Z}\times\prod\nolimits_{a\in\Phi^{\text{red}}\cap\Phi^+}\mathfrak{U}_{a,-a(p)}$$

sur un sous-schéma ouvert dense de $\mathfrak{G}_p$ (grosse cellule).

(iv) *Le schéma $\mathfrak{G}_p$ est lisse si et seulement si $\mathfrak{Z}$ l'est.*

L'assertion (i) a déjà été vue (prop. 3.4 (ii)). L'assertion (iii) est conséquence de (i) et (ii) et du théorème 2.2.3 de II et (iv) en résulte aussitôt. Reste donc à démontrer (ii). Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $a\in\Phi^{\text{red}}$, le schéma en groupes $\mathfrak{U}_{a,-a(p)}$ opère sur le réseau $\mathscr{X}_{\alpha,c}$ quel que soit $c\in\mathbf{R}$ et qu'il existe $c\in\mathbf{R}$ tel qu'il y opère fidèlement.

Prenons d'abord $a=a_{ij}$ avec $i,j\in I$, $i\neq\pm j$. On a $a(p)=p_i+p_j$ et le schéma $\mathfrak{U}_{a,-a(p)}$ est égal à $\mathfrak{U}_{a_{ij},k_{ij}/e}$, où k_{ij} est le plus petit entier supérieur ou égal à $-e(p_i+p_j)$. Pour tout $c\in\mathbf{R}$, on a, d'après (10),

$$-e(p_i+p_j)-1\leqslant n_{-i}(c)-n_j(c)<-e(p_i+p_j)+1,$$

d'où $k_{ij}\geqslant n_{-i}(c)-n_j(c)$ et de même $k_{ij}\geqslant n_{-j}(c)-n_i(c)$. Donc, $\mathfrak{U}_{a,-a(p)}$ opère dans $\mathscr{X}_{\alpha,c}$ (prop. 3.6). Prenons maintenant $c=-p_j$. Alors, $n_j(c)=0$ et $-e(p_i+p_j)\leqslant n_{-i}(c)-n_j(c)<-e(p_i+p_j)+1$, autrement dit on a $k_{ij}=n_{-i}(c)-n_j(c)$ et, vu 3.6, $\mathfrak{U}_{a,-a(p)}$ opère fidèlement dans $\mathscr{X}_{\alpha,p_j}$.

Soit maintenant $i \in I$. La remarque 1 de 3.7 montre que le schéma $\mathfrak{U}_{a_i, -p_i}$ est égal à $\mathfrak{U}_{a_i, m_i/e}$ où m_i est défini par

$$m_i \in \mathbf{Z}/2 \qquad \text{et} \qquad -ep_i \leqslant m_i < -ep_i + \frac{1}{2}.$$

Or les formules (10) et (11) entraînent, pour tout $c \in \mathbf{R}$,

$-ep_i - 1 \leqslant n_0(c) - n_i(c) < -ep_i + (1/2)$ d'où $m_i \geqslant n_0(c) - n_i(c)$,

$-ep_i - 1 \leqslant n_{-i}(c) - n_0(c) - (1/2) < -ep_i + (1/2)$

d'où $m_i \geqslant n_{-i}(c) - n_0(c) - (1/2)$,

$-2ep_i - 1 \leqslant n_{-i}(c) - n_i(c) < -2ep_i + 1$ d'où $2m_i \geqslant n_{-i}(c) - n_i(c)$.

La proposition 3.7 (ii) entraîne donc que $\mathfrak{U}_{a_i, -p_i}$ opère dans $\mathscr{X}_{\alpha, c}$ pour tout $c \in \mathbf{R}$. De plus, soit $\bar{ep_i}$ la partie entière de ep_i et prenons $c \in]0, 1/e]$ défini par

$$ep_i = \bar{ep_i} + 1 - ec.$$

Des calculs simples montrent alors que

– si $0 < c \leqslant 1/2e$, on a $m_i = -\bar{ep_i} - (1/2)$, $n_i(c) = \bar{ep_i} + 1$, $n_{-i}(c) = -\bar{ep_i}$ et $n_0(c) = 1/2$;

– si $1/2e < c \leqslant 1/e$, on a $m_i = -\bar{ep_i}$, $n_i(c) = \bar{ep_i} + 1$, $n_{-i}(c) = -\bar{ep_i} + 1$ et $n_0(c) = 1$.

Dans les deux cas, on a $2n_0(c) = n_i(c) + n_{-i}(c)$ et $m_i = n_0(c) - n_i(c)$ et la dernière assertion de la proposition 3.7 entraîne que $\mathfrak{U}_{a_i, m_i/e}$ opère fidèlement dans $\mathscr{X}_{\alpha, c}$, ce qui achève la démonstration.

4. Montée étale

On conserve les conventions précédentes, mais *on suppose désormais que K est hensélien*. De plus, on reprend les notations de 1.9 et de III, § 4. En particulier, on désigne par $\tilde{K}$ une extension galoisienne *étale* de K (II, 1.6.2 et III, § 4), de sorte que ω se prolonge de manière unique en une valuation $\tilde{\omega}$ de $\tilde{K}$ telle que $\tilde{\omega}(\tilde{K}^\times) = \mathbf{Z}$. Comme $\tilde{K}$ est lui aussi hensélien, la valuation $\tilde{\omega}$ se prolonge de manière unique en une valuation ω' du corps D' commutant du $\tilde{D}$-module simple E, valuation qui est donc invariante par l'involution τ lorsque celle-ci est définie (c'est-à-dire lorsque $L \otimes \tilde{K}$ est un corps).

4.1. Le groupe algébrique $\tilde{G}=G_{\tilde{K}}$ obtenu par extension des scalaires à partir de G est à isomorphisme près soit un groupe $SL_k(D')$, soit un groupe $SU(f', q')$ (1.11 et 1.13). On peut donc lui appliquer soit les résultats de III, soit ceux des paragraphes précédents (compte tenu du corollaire à la proposition 1.15). En particulier, on peut considérer l'*immeuble* $\tilde{\mathscr{I}}$ de $\tilde{G}$ et lui appliquer soit le théorème 2.11 de III, soit le théorème 2.12 ci-dessus. Le groupe de Galois $\Gamma=\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ opère évidemment, par transport de structure, sur l'immeuble $\tilde{\mathscr{I}}$.

THÉORÈME. — (i) *Il existe une bijection $p\mapsto\tilde{p}$ et une seule de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G sur l'ensemble $\tilde{\mathscr{I}}^{\natural}$ des points invariants par Γ de l'immeuble $\tilde{\mathscr{I}}$ de $\tilde{G}$ qui soit covariante par G et affine sur les segments.*

(ii) *Pour tout $p\in\mathscr{I}$, l'identité de $\tilde{G}$ se prolonge en un isomorphisme de schémas en groupes de $(\mathfrak{G}_p)_{\tilde{\mathfrak{O}}}$ sur $\mathfrak{G}_{\tilde{p}}$.*

L'unicité de la bijection de (i) résulte de II,4.2.12.

La démonstration de son existence et de (ii) fait l'objet des numéros suivants jusqu'à 4.10.

4.2. Reprenons les notations de 1.9 et munissons la $\tilde{K}$-algèbre $\tilde{D}=D\otimes_K\tilde{K}$ de la norme d'algèbre $\omega\otimes\tilde{\omega}$, que nous notons plus simplement $\tilde{\omega}$ (*cf.* III, 4.1). Soit $\tilde{\mathscr{N}}$ l'ensemble des $\tilde{D}$-normes sur $\tilde{X}$ scindables en tant que $\tilde{K}$-normes. Pour $\gamma\in\tilde{\mathscr{N}}$, on définit comme en 2.3 et 2.6

— la norme $\check{\gamma}$ sur l'espace des formes sesquilinéaires $\tilde{B}$ sur $\tilde{X}$ par

(1) $\check{\gamma}(h)=\inf_{x,y\in\tilde{X}}(\tilde{\omega}(h(x,y))-\gamma(x)-\gamma(y))$ pour $h\in\tilde{B}$;

— la norme γ_2 sur l'espace $\tilde{Q}$ des formes pseudo-quadratiques sur $\tilde{X}$ par passage au quotient à partir de $\check{\gamma}$;

— la norme γ_m sur $\tilde{Q}$ en posant $\gamma_m(r)=\inf_{x\in\tilde{X}}(\tilde{\omega}(r(x))-2\gamma(x))$ pour $r\in\tilde{Q}$.

On dit que γ minore $h\in\tilde{B}$ (resp. minore $(h, r)\in\tilde{C}$) si $\check{\gamma}(h)\geqslant 0$ (resp. si $\check{\gamma}(h)\geqslant 0$ et $\gamma_m(r)\geqslant 0$).

LEMME. — *Soit $\alpha\in\mathscr{N}$ et soit $\tilde{\alpha}=\alpha\otimes\tilde{\omega}$ l'élément correspondant de $\tilde{\mathscr{N}}$.*

(i) *Pour tout $g\in B$, on a $(\tilde{\alpha})^{\check{}}(\tilde{g})=\check{\alpha}(g)$.*

(ii) $\tilde{\alpha}_2(\tilde{q})=\alpha_2(q)$.

(iii) *α minore (f, q) si et seulement si $\tilde{\alpha}$ minore $(\tilde{f}, \tilde{q})$.*

Comme $\tilde{K}$ est une extension étale de K, on peut choisir une base $(k_i)_{0\leqslant i<[\tilde{K}:K]}$ de $\tilde{K}$ sur K, scindante pour $\tilde{\omega}$, telle que $k_0=1$ et que

$\tilde{\omega}(k_i)=0$ pour tout i (relever dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ une base de $\bar{\bar{K}}$ sur $\bar{K}$). Vu (1), on a

$$(\tilde{\alpha})\check{}\,(\tilde{g}) \leqslant \inf_{i,j} \inf_{x, y \in X} (\tilde{\omega}(\tilde{g}(x \otimes k_i, y \otimes k_j)) - \tilde{\alpha}(x \otimes k_i) - \tilde{\alpha}(y \otimes k_j))$$
$$\leqslant \inf_{i,j} \inf_{x, y \in X} (\omega(g(x, y)) - \alpha(x) - \alpha(y)) = \check{\alpha}(g).$$

Inversement, pour $x=\sum x_i \otimes k_i$ et $y=\sum y_i \otimes k_i$

$$\tilde{\omega}(\tilde{g}(x, y)) \geqslant \inf_{i,j} \tilde{\omega}(\tilde{g}(x_i \otimes k_i, y_j \otimes k_j)) = \inf_{i,j} \omega(g(x_i, y_j))$$
$$\geqslant \inf_{i,j}(\check{\alpha}(g) + \alpha(x_i) + \alpha(y_j)) = \check{\alpha}(g) + \inf_i \alpha(x_i) + \inf_j \alpha(y_j)$$
$$\geqslant \check{\alpha}(g) + \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\alpha}(y),$$

d'où $(\tilde{\alpha})\check{}\,(\tilde{g}) \geqslant \check{\alpha}(g)$, ce qui démontre (i).

Démontrons (ii) et (iii). Si $D^0=D$, (ii) est évident puisque $Q=\{0\}$ et (iii) résulte de (i). Supposons donc $D^0 \neq D$, d'où $\tilde{D}^0 \neq \tilde{D}$. On voit d'abord comme en 2.6 que

(2) $$\tilde{\alpha}_2(\tilde{q}) \leqslant (\tilde{\alpha})\check{}\,(\tilde{f}) = \check{\alpha}(f).$$

Puis, on remarque que si $g \in B$ a pour image q, alors $\tilde{g}$ a pour image $\tilde{q}$; de (i) résulte alors

(3) $$\tilde{\alpha}_2(\tilde{q}) \geqslant \alpha_2(q).$$

Comme en 2.6, on voit que si $h \in \tilde{B}$ a pour image $\tilde{q}$, alors on a

$$\tilde{\omega}(\tilde{q}(x)) = \sup \tilde{\omega}((h(x, x)) + D^0) \geqslant \tilde{\omega}(h(x, x)) \geqslant (\tilde{\alpha})\check{}\,(h) + 2\tilde{\alpha}(x)$$

pour tout $x \in \tilde{X}$. Par suite,

(4) $$\tilde{\alpha}_2(\tilde{q}) \leqslant \tilde{\alpha}_m(\tilde{q}).$$

Mais, si $x \in X \subset \tilde{X}$, on a $\tilde{q}(x) = q(x) + \tilde{D}^0 = q(x) + \sum_{i \neq 0} D^0 \otimes k_i$, d'où aussitôt $\tilde{\omega}(\tilde{q}(x)) = \omega(q(x))$ et

(5) $$\tilde{\alpha}_m(\tilde{q}) \leqslant \inf_{x \in X}(\omega(q(x)) - 2\alpha(x)) = \alpha_m(q).$$

De (2), (4) et (5), on tire, compte tenu de (i) et de 2 (12),

$$\tilde{\alpha}_2(\tilde{q}) \leqslant \inf((\tilde{\alpha})\check{}\,(\tilde{f}), \tilde{\alpha}_m(\tilde{q})) \leqslant \inf(\check{\alpha}(f), \alpha_m(q)) = \alpha_2(q).$$

Comparant avec (3), on obtient finalement

(6) $$\tilde{\alpha}_2(\tilde{q}) = \inf((\tilde{\alpha})\check{}\,(\tilde{f}), \tilde{\alpha}_m(\tilde{q})) = \inf(\check{\alpha}(f), \alpha_m(q)) = \alpha_2(q),$$

ce qui démontre (ii) et (iii) (*cf.* prop. 2.6(i)).

4.3. Distinguons maintenant les deux cas de 1.10 et 1.13.

Premier cas : $\tilde{L} = L \otimes_K \tilde{K}$ ***est un corps*** (hypothèse que nous conserverons jusqu'en 4.7 inclus). On reprend alors les notations de 1.10.

On sait (III, 1.13, 4.6) qu'il existe sur le $\tilde{D}$-module simple E une norme ω_0 et une seule à une constante additive près qui en fait un $\tilde{D}$-module normé. On sait aussi (*loc. cit.*) que ω_0 est aussi une D'-norme scindable et que l'on a $\tilde{\omega} = \mathrm{End}\, \omega_0$ (en identifiant $\tilde{D}$ et $\mathrm{End}_{D'} E$).

On a défini en 1.10 le D'-espace vectoriel $X' = \mathrm{Hom}_{\tilde{D}}(E, \tilde{X})$, de sorte que $\tilde{X} = X \otimes \tilde{K}$ s'identifie à $X' \otimes_{D'} E$, et les bijections $\delta : \tilde{B} \to B'$ et $\delta_2 : \tilde{C} \to C'$. On a également défini en 1.11 le couple $(f', q') = \delta_2(\tilde{f}, \tilde{q}) \in C'$ tel que $G_{\tilde{K}}$ s'identifie à $SU(f', q')$.

D'autre part, on sait (III, 1.16) que l'application $\gamma \mapsto \gamma' = \mathrm{Hom}(\omega_0, \gamma)$ est une bijection de l'ensemble $\tilde{\mathcal{N}}$ des $\tilde{D}$-normes scindables en tant que $\tilde{K}$-normes sur l'ensemble $\mathcal{N}'$ des D'-normes scindables sur X', la bijection réciproque étant l'application $\gamma' \mapsto \gamma' \otimes \omega_0$. En particulier, on en déduit l'action du groupe de Galois Γ sur $\mathcal{N}'$. Il est évident, par transport de structure, que l'identification de l'immeuble $\tilde{\mathscr{I}}$ avec l'ensemble $\mathcal{N}'_{mm} \subset \mathcal{N}'$ des normes maximinorantes pour (f', q') (2.12) est compatible avec les actions de Γ sur $\tilde{\mathscr{I}}$ et sur $\mathcal{N}'$.

4.4. Nous avons défini en 1.7 une bijection $\tilde{K}$-linéaire $\lambda \mapsto b_\lambda$ de D' sur l'ensemble des formes sesquilinéaires sur E à valeurs dans $\tilde{D}$ (l'algèbre simple M considérée en 1.7 est ici $\tilde{D}$ et le commutant du M-module simple E est D' et non D !).

PROPOSITION. — *Il existe une constante* $c \in \mathbf{R}$ *telle que*

$$\tilde{\omega}(b_\lambda(x, y)) = \omega_0(x) + \omega_0(y) + \omega'(\lambda) + c$$

quels que soient $x, y \in E$ *et* $\lambda \in D'$.

Pour tout $u \in \tilde{D}$ et $x, y \in E$, on a

$$\tilde{\omega}(b_\lambda(ux, y)) = \tilde{\omega}(u^\sigma b_\lambda(x, y)) \geqslant \tilde{\omega}(u) + \tilde{\omega}(b_\lambda(x, y)).$$

Il s'ensuit immédiatement que, pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \tilde{\omega}(b_\lambda(x, y))$ est une $\tilde{D}$-norme sur E, donc qu'il existe $c(y, \lambda) \in \mathbf{R}$ tel que $\tilde{\omega}(b_\lambda(x, y)) = \omega_0(x) + c(y, \lambda)$. Mais on voit de même que $y \mapsto c(y, \lambda)$ est une $\tilde{D}$-norme sur E et il existe $c(\lambda) \in \mathbf{R}$ tel que

$\tilde{\omega}(b_\lambda(x, y))=\omega_0(x)+\omega_0(y)+c(\lambda)$ quels que soient $x, y\in E$. Soit $\mu\in D'$. D'après 1.7 (17), on a $b_{\lambda\mu}(x, y)=b_\lambda(x, \mu y)$ et d'autre part $\omega_0(\mu y)=\omega_0(y)+\omega'(\mu)$ puisque ω_0 est une D'-norme. On en tire $c(\lambda\mu)=c(\lambda)+\omega'(\mu)$, d'où $c(\lambda)=\omega'(\lambda)+c(1)$, ce qui démontre la proposition.

Quitte à remplacer ω_0 par $\omega_0-(c/2)$, *on peut supposer que* $c=0$, *ce que nous ferons désormais.* Remarquons que l'on ne peut plus supposer simultanément (comme nous l'avions fait en III, 4.6) que $0\in\omega_0(E)$: ce n'est pas gênant.

4.5. Reprenons maintenant la bijection $\delta: \tilde{B}\to B'$ et, lorsque $D'^0\neq D'$, la bijection $\delta_2: \tilde{Q}\to Q'$ (1.10, remarque).

LEMME. — *Soit* $\gamma\in\tilde{\mathcal{N}}$.

(i) *Pour tout* $g\in\tilde{B}$, *on a* $\check{\gamma}'(\delta g)=\check{\gamma}(g)$; *en particulier,* $\check{\gamma}'(f')=\check{\gamma}(\tilde{f})$.

(ii) *Supposons* $D'^0\neq D'$ *et soit* $r\in\tilde{Q}$; *on a* $\gamma'_2(\delta_2 r)=\gamma_2(r)$.

Soit (ε_i) une D'-base de E scindante pour ω_0. Comme $\tilde{X}=X'\otimes_{D'}E$ et $\gamma=\gamma'\otimes\omega_0$, on a, pour $x'_i\in X'$,

$$\gamma\left(\sum x'_i\otimes\varepsilon_i\right)=\inf_i(\gamma'(x'_i)+\omega_0(\varepsilon_i)).$$

Soit $g\in\tilde{B}$; posons

$$A=\inf_{i,j}\inf_{x', y'\in X'}(\tilde{\omega}(g(x'\otimes\varepsilon_i, y'\otimes\varepsilon_j))-\gamma(x'\otimes\varepsilon_i)-\gamma(y'\otimes\varepsilon_j)),$$

de sorte que $\check{\gamma}(g)\leqslant A$. Pour $x=\sum x'_i\otimes\varepsilon_i$ et $y=\sum y'_i\otimes\varepsilon_i$, avec $x'_i, y'_i\in X'$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(g(x, y))&\geqslant\inf_{i,j}\tilde{\omega}(g(x'_i\otimes\varepsilon_i, y'_j\otimes\varepsilon_j))\\&\geqslant\inf_{i,j}(A+\gamma(x'_i\otimes\varepsilon_i)+\gamma(y'_j\otimes\varepsilon_j))=A+\gamma(x)+\gamma(y),\end{aligned}$$

d'où $\check{\gamma}(g)\geqslant A$ et finalement $\check{\gamma}(g)=A$.

Mais, par définition même de la bijection δ, on a, quels que soient les indices i et j et quels que soient $x', y'\in X'$,

$$g(x'\otimes\varepsilon_i, y'\otimes\varepsilon_j)=b_{\delta g(x', y')}(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Compte tenu de ce que l'on a choisi ω_0 de telle sorte que la constante c de la proposition 4.4 soit nulle, on a donc, d'après 4.4,

$$\tilde{\omega}(g(x'\otimes\varepsilon_i, y'\otimes\varepsilon_j))=\omega'(\delta g(x', y'))+\omega_0(\varepsilon_i)+\omega_0(\varepsilon_j).$$

Par suite,

$$A=\inf_{x',\, y'\in X'}(\omega'(\delta g(x',\, y'))-\gamma'(x')-\gamma'(y'))=\check{\gamma}'(\delta g),$$

ce qui démontre (i).

Si maintenant $D'^0\neq D'$, la bijection $\delta_2 : \tilde{Q}\to Q'$ est obtenue par passage aux quotients à partir de la bijection $\delta : \tilde{B}\to B'$ (1.10, remarque) et (ii) résulte de (i) puisque γ_2 et γ'_2 sont les normes quotients de $\check{\gamma}$ et $\check{\gamma}'$ respectivement.

4.6. Lemme. — *Une norme $\alpha\in\mathcal{N}$ sur X minore $(f,\, q)$ si et seulement si la norme correspondante $\alpha'=\mathrm{Hom}(\omega_0,\, \tilde{\alpha})$ sur X' minore $(f',\, q')$.*

Supposons d'abord $D'^0\neq D'$. Comme $q'=\delta_2\tilde{q}$, les lemmes 4.2 et 4.5 entraînent $\alpha'_2(q')=\tilde{\alpha}_2(\tilde{q})=\alpha_2(q)$ et il suffit d'appliquer la proposition 2.6.

Si $D^0=D$, d'où $D'^0=D'$, on a $q=0$ et $q'=0$ et le lemme résulte, vu 2.3 (i), des égalités $\check{\alpha}'(f')=(\tilde{\alpha})\check{}(\tilde{f})=\check{\alpha}(f)$ (lemmes 4.2 et 4.5).

Enfin, supposons $D^0\neq D$ et $D'^0=D'$. On a alors $q'=0$ et 1.10 (21) entraîne $\tilde{q}(x'\otimes z)=0$ quels que soient $x'\in X'$ et $z\in E$. Reprenons alors la base (ε_i) de E de 4.5; quels que soient les $x'_i\in X'$, on a

$$\tilde{q}(\textstyle\sum x'_i\otimes\varepsilon_i)=\sum_{i<j}\tilde{f}(x'_i\otimes\varepsilon_i,\, x'_j\otimes\varepsilon_j)+\tilde{D}^0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\tilde{q}(\textstyle\sum x'_i\otimes\varepsilon_i))&\geqslant\inf_{i,\,j}\tilde{\omega}(\tilde{f}(x'_i\otimes\varepsilon_i,\, x'_j\otimes\varepsilon_j))\\&\geqslant(\tilde{\alpha})\check{}(\tilde{f})+\inf_{i,\,j}(\tilde{\alpha}(x'_i\otimes\varepsilon_i)+\tilde{\alpha}(x'_j\otimes\varepsilon_j))\\&=(\tilde{\alpha})\check{}(\tilde{f})+2\tilde{\alpha}(\textstyle\sum x'_i\otimes\varepsilon_i).\end{aligned}$$

Par suite, $\tilde{\alpha}_m(\tilde{q})\geqslant(\tilde{\alpha})\check{}(\tilde{f})$, d'où $\tilde{\alpha}_2(\tilde{q})=(\tilde{\alpha})\check{}(\tilde{f})$ d'après (6). Vu les lemmes 4.2 et 4.5, on a donc

$$\alpha_2(q)=\check{\alpha}(f)=\check{\alpha}'(f'), \tag{7}$$

et α minore $(f,\, q)$ si et seulement si α' minore f'. Remarquons que la première égalité (7) montre que α minore $(f,\, q)$ si et seulement si α minore f.

4.7. L'application $\alpha\mapsto\alpha'$ est évidemment une bijection de $\mathcal{N}$ sur l'ensemble $\mathcal{N}'^{\natural}$ des invariants de Γ dans $\mathcal{N}'$, croissante, covariante par G et affine sur les segments (*cf.* III, 1.29 (31)). Le lemme 4.6 montre que sa restriction à l'ensemble $\mathcal{N}_{mm}$ des normes maximinorantes pour (f, q) sur X est une bijection sur l'ensemble Y des normes sur X' minorant (f', q'), invariantes par Γ et *maximales pour ces propriétés.* L'assertion (i) du théorème 4.1 sera donc démontrée si nous montrons que Y est exactement l'ensemble $\mathcal{N}'^{\natural}_{mm}$ des normes maximinorantes invariantes par Γ sur X'.Or, il est clair que $\mathcal{N}'^{\natural}_{mm} \subset Y$. Inversement, soit $\beta \in Y$. Alors l'ensemble Ω des normes maximinorantes $\gamma \in \mathcal{N}'_{mm} = \tilde{\mathcal{I}}$ majorant β est une partie convexe de $\tilde{\mathcal{I}}$ (2.7), invariante par Γ, fermée puisque l'application $\gamma \mapsto \gamma(x)$ est continue pour tout $x \in X'$ (2.14) et bornée d'après 2.15. D'après le théorème de point fixe dans les immeubles (I,3.2.4), Ω contient un point γ_0 invariant par Γ et, vu la maximalité de β, on a $\beta = \gamma_0 \in \mathcal{N}'^{\natural}_{mm}$, ce qui achève la démonstration de (i).

Enfin, démontrons l'assertion (ii) du théorème. On sait (III,4.7 et 4.10) que l'identité de $(GL^L(X))_{\tilde{L}}$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\tilde{L}}$-schémas en groupes de $(\mathfrak{GL}^L(\mathcal{X}_\alpha))_{\mathcal{O}_{\tilde{L}}}$ sur $\mathfrak{GL}^{\tilde{L}}(\mathcal{X}'_{\alpha'})$. Par suite, l'identité de $(GL(X))_{\tilde{K}}$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$-schémas en groupes de

$$(\mathfrak{GL}(\mathcal{X}_\alpha))_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}} = (\textstyle\prod_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathfrak{GL}^L(\mathcal{X}_\alpha))_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}} = \textstyle\prod_{\mathcal{O}_{\tilde{L}}/\mathcal{O}_{\tilde{K}}} (\mathfrak{GL}^L(\mathcal{X}_\alpha))_{\mathcal{O}_{\tilde{L}}}$$

(*cf.* II,1.5.3) sur $\mathfrak{GL}(\mathcal{X}'_{\alpha'})$. Comme l'opération d'adhérence schématique commute avec un changement de base plat (II,1.2.6), cet isomorphisme envoie $(\mathfrak{G}_p)_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}$ sur l'adhérence schématique de $\tilde{G}$ dans $\mathfrak{GL}(\mathcal{X}'_{\alpha'})$, c'est-à-dire sur $\tilde{\mathfrak{G}}_{\tilde{p}}$.

La démonstration du théorème 4.1 dans le cas où $\tilde{L}$ est un corps est achevée.

4.8. *Deuxième cas* : $\tilde{L} = \tilde{K}^2$. On reprend alors les notations de 1.13 et l'on suppose $L \subset \tilde{K}$. On déduit aussitôt de II,1.6.8(i) que la norme $\tilde{\omega} = \omega \otimes \tilde{\omega}$ sur $\tilde{L}$ est donnée par

(7) $$\tilde{\omega}(h, k) = \inf(\tilde{\omega}(h), \tilde{\omega}(k)) \qquad \text{pour} \quad h, k \in \tilde{K},$$

et les deux idempotents minimaux p_1 et p_2 de $\tilde{L}$ satisfont à

(8) $$\tilde{\omega}(p_1) = \tilde{\omega}(p_2) = 0.$$

De (8) résulte que la norme $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{D} = M_1 \times M_2$ est donnée par

(9) $$\tilde{\omega}(m_1, m_2) = \inf(\tilde{\omega}(m_1), \tilde{\omega}(m_2)).$$

et que toute $\tilde{D}$-norme $\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}$ sur $\tilde{X}$ satisfait à

(10) $\gamma(x_1+x_2)=\inf(\gamma(x_1), \gamma(x_2))$ pour $x_1 \in \tilde{X}_1$ et $x_2 \in \tilde{X}_2$.

Soit $\tilde{\mathcal{N}}_i$ l'ensemble des M_i-normes sur $\tilde{X}_i$, scindables en tant que $\tilde{K}$-normes. Reprenons le σ-isomorphisme $\varphi : \tilde{X}_1 \to \mathrm{Hom}_{M_2}(\tilde{X}_2, M_2)$ défini par

(11) $\langle \varphi(x_1), x_2 \rangle = \tilde{f}(x_1, x_2)$ pour $x_i \in \tilde{X}_i$.

Pour $\beta \in \tilde{\mathcal{N}}_1$, considérons la M_2-norme $\varphi(\beta)$ sur $\mathrm{Hom}_{M_2}(\tilde{X}_2, M_2)$ et sa norme duale $\bar{\beta}=\varphi(\beta)^*$ sur

$$\tilde{X}_2=\mathrm{Hom}_{M_2}(\mathrm{Hom}_{M_2}(\tilde{X}_2, M_2), M_2),$$

de sorte que $\bar{\beta} \in \tilde{\mathcal{N}}_2$ (rappelons que $\tilde{X}_2$ est un M_2-module libre de type fini, ce qui permet de voir aisément que $\bar{\beta}$ définit la topologie naturelle de $\tilde{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur $\tilde{X}_2$, donc est scindable en tant que $\tilde{K}$-norme). On a

(12) $\bar{\beta}(x_2)=\inf_{x_1 \in \tilde{X}_1}(\tilde{\omega}(\tilde{f}(x_1, x_2)-\beta(x_1))$ pour $x_2 \in \tilde{X}_2$.

Posons

(13) $(\beta \oplus \bar{\beta})(x_1+x_2)=\inf(\beta(x_1), \bar{\beta}(x_2))$ pour $x_i \in \tilde{X}_i$.

On obtient ainsi une $\tilde{D}$-norme $\beta \oplus \bar{\beta} \in \tilde{\mathcal{N}}$.

LEMME. — *Soit* $\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}$ *et soit* γ_i *sa restriction à* $\tilde{X}_i (i=1,2)$.

(i) *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) γ *minore* $(\tilde{f}, \tilde{q})$;

(*b*) γ *minore* $\tilde{f}$;

(*c*) $\gamma \leqslant \gamma_1 \oplus \bar{\gamma}_1$.

(ii) *L'application* $\beta \mapsto \beta \oplus \bar{\beta}$ *est une bijection de* $\tilde{\mathcal{N}}_1$ *sur* $\tilde{\mathcal{N}}_{mm}$.

Par définition (*a*) entraîne (*b*). D'autre part, il existe $\lambda \in L$ tel que $\lambda+\lambda^\sigma=1$ et l'on a $\tilde{q}(x)=\lambda \tilde{f}(x, x)+\tilde{D}^0$ pour tout $x \in \tilde{X}$. En particulier, $q(\tilde{x}_i)=0$ pour $x_i \in \tilde{X}_i$, $i=1, 2$, et

$$\tilde{q}(x_1+x_2)=\tilde{f}(x_1, x_2)+\tilde{D}^0,$$
$$\tilde{\omega}(\tilde{q}(x_1+x_2)) \geqslant \tilde{\omega}(\tilde{f}(x_1, x_2)).$$

Vu (10), ceci montre que (*b*) entraîne (*a*). De plus, la définition même de $\bar{\gamma}_1$ montre, compte tenu de (10) et de ce que les $\tilde{X}_i$ sont totalement isotropes, que (*b*) est équivalent à (*c*).

Enfin, (ii) résulte trivialement de (i), compte tenu de ce que $\beta \leqslant \beta'$ entraîne $\bar{\beta} \geqslant \bar{\beta}'$.

4.9. Reprenons maintenant le M_1-module à droite simple E et munissons-le d'une M_1-norme ω_0 (qui existe et est unique à une constante additive près d'après III,1.13). Considérons son commutant D' et le D'-espace vectoriel $X' = \mathrm{Hom}_{M_1}(E, X_1)$, de sorte que $X_1 = X' \otimes_{D'} E$. La bijection $\beta \mapsto \beta \otimes \omega_0$ de l'ensemble $\mathcal{N}'$ des D'-normes scindables sur X' sur $\tilde{\mathcal{N}}_1$ (III,1.16) suivie de celle de 4.8(ii) fournit une bijection de $\mathcal{N}'$ sur $\tilde{\mathcal{N}}_{mm}$, d'où une loi d'opération de Γ dans $\mathcal{N}'$.

Considérons alors l'immeuble $\tilde{\mathcal{I}}$ de $SL_{D'}(X')$ (qui est le même que celui de $GL_{D'}(X')$) et l'immeuble élargi $\tilde{\mathcal{I}}_1$ de $GL_{D'}(X')$. On sait (III, th. 2.11 et cor. 2.13) que $\tilde{\mathcal{I}}_1$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{N}'$ et que $\tilde{\mathcal{I}}$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des classes d'homothéties dans $\mathcal{N}'$. Par transport de structure, le groupe de Galois Γ opère sur $\tilde{\mathcal{I}}$ et sur $\tilde{\mathcal{I}}_1$, de manière compatible avec la surjection canonique $s: \tilde{\mathcal{I}}_1 \to \tilde{\mathcal{I}}$ et avec la bijection canonique $j: \tilde{\mathcal{I}}_1 \to \mathcal{N}'$.

Composant j avec la bijection précédente de $\mathcal{N}'$ sur $\tilde{\mathcal{N}}_{mm}$, on obtient une bijection ψ_1 de $\tilde{\mathcal{I}}_1$ sur $\tilde{\mathcal{N}}_{mm}$, compatible avec les opérations de Γ, covariante par G et affine sur les segments (III,2.11 et III,1.29), d'où une bijection $\psi_1^\natural$ covariante par G et affine sur les segments de l'ensemble $\tilde{\mathcal{I}}_1^\natural$ des invariants de Γ dans $\tilde{\mathcal{I}}_1$ sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{N}}_{mm}^\natural$ des normes maximinorantes pour $(\tilde{J}, \tilde{q})$ invariantes par Γ.

De plus, si $\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_{mm}^\natural$ et $\gamma = \gamma_1 + \bar{\gamma}_1$, alors $\gamma_1 \in \tilde{\mathcal{N}}_1$ est invariante par $\Gamma' = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/L)$ et, pour tout $\rho \in \Gamma$ de restriction σ à L, $\bar{\gamma}_1$ est la transformée de γ_1 par l'isomorphisme $\rho: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ (*cf.* 1.13, remarque). Comme $\rho(\gamma_1 + c) = \rho(\gamma_1) + c$, il en résulte que

$$(\gamma_1 + c) \oplus (\overline{\gamma_1 + c}) = (\gamma_1 + c) \oplus (\bar{\gamma}_1 - c)$$

n'est invariante par Γ pour aucune constante $c \neq 0$. Revenant à $\tilde{\mathcal{I}}_1$ grâce à ψ_1^{-1}, on voit qu'une classe d'homothétie contient au plus un point invariant par Γ. Inversement, une classe d'homothétie invariante par Γ contient un tel point, car Γ y opère via un groupe fini d'automorphismes affines. Par suite, la surjection s fournit une *bijection* $s^\natural$ de $\mathcal{I}_1^\natural$ sur $\mathcal{I}^\natural$, covariante par G et affine sur les segments, et $\psi_1^\natural = \psi^\natural \circ s^{\natural - 1}$ est une bijection de $\mathscr{I}^\natural$ sur $\tilde{\mathscr{N}}^\natural_{mm}$, covariante par G et affine sur les segments.

Il ne reste plus pour démontrer l'assertion (i) du théorème 4.1 dans ce deuxième cas, qu'à montrer que l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est une bijection de $\mathscr{N}_{mm}$ sur $\tilde{\mathscr{N}}^\natural_{mm}$. Ceci se fait comme en 4.7. Le lemme 4.2 montre que l'image Y de $\mathscr{N}_{mm}$ est l'ensemble des normes $\beta \in \tilde{\mathscr{N}}$ minorant $(\tilde{f}, \tilde{q})$, invariantes par Γ et maximales pour ces propriétés, d'où $\tilde{\mathscr{N}}^\natural_{mm} \subset Y$. Inversement, soit $\beta \in Y$ et soit Ω l'ensemble des $x \in \tilde{\mathscr{I}}_1$ tels que $\psi_1(x) \geqslant \beta$. C'est une partie convexe, fermée et invariante par Γ de $\tilde{\mathscr{I}}_1$. Montrons que Ω est *borné*. Comme $\tilde{f}$ est non-dégénérée, on peut comme en 2.5 définir la « norme duale » $\bar{\gamma} \in \tilde{\mathscr{N}}$ de $\gamma \in \tilde{\mathscr{N}}$ par une formule analogue à 2.5(5) ou à (12) et γ minore $\tilde{f}$ si et seulement si $\gamma \leqslant \bar{\gamma}$. Alors, $\beta \leqslant \gamma$ et $\gamma \in \tilde{\mathscr{N}}_{mm}$ entraînent $\beta \leqslant \gamma \leqslant \bar{\gamma} \leqslant \bar{\beta}$, ce qui montre que Ω est bien borné.

Il s'ensuit que sa projection sur V^1 (rappelons que V^1 est l'espace vectoriel réel à une dimension dual de $X_K^*(GL_{D'}(X')) \otimes \mathbf{R}$ et que $\tilde{\mathscr{I}}_1 = \tilde{\mathscr{I}} \times V^1$ (III,2.4)) est bornée, donc relativement compacte. L'image $s(\Omega)$ de Ω dans l'immeuble $\tilde{\mathscr{I}}$ est donc elle aussi fermée, et il est clair que $s(\Omega)$ est également convexe, bornée et invariante par Γ. Le théorème de point fixe dans les immeubles (I,3.2.4) entraîne que $s(\Omega)$ contient un point z invariant par Γ et $s^{-1}(z) \cap \Omega$ est une partie convexe bornée de $\{z\} \times V^1 \simeq V^1$ stable par Γ, dont le barycentre x_0 est un point de Ω fixe par Γ. La maximalité de β entraîne alors $\beta = \psi_1(x_0) \in \tilde{\mathscr{N}}^\natural_{mm}$. La démonstration de l'assertion (i) du théorème 4.1 est achevée.

4.10. Démontrons (ii). Soit $p \in \mathscr{I}$ et $\alpha = j(p)$ la norme maximinorante correspondante. On a vu (3.9) que le schéma $\mathfrak{G}_p$ est l'adhérence schématique de G dans le schéma associé au $\mathcal{O}_K$-module

$$\mathscr{M}_\alpha = \{ u \in \operatorname{End}_D X \mid \operatorname{End} \alpha(u) \geqslant 0 \}.$$

Par suite, $(\mathfrak{G}_p)_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}$ est l'adhérence schématique de $\tilde{G}$ dans le schéma associé au $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$-module

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_\alpha \otimes \mathcal{O}_{\tilde{K}} = \mathscr{M}_{\tilde{\alpha}} &= \{ u \in \operatorname{End}_{\tilde{D}} \tilde{X} \mid \operatorname{End} \tilde{\alpha}(u) \geqslant 0 \} \\ &= \{ (u_1, u_2) \mid u_i \in \operatorname{End}_{M_i} \tilde{X}_i, \operatorname{End} \tilde{\alpha}_i(u) \geqslant 0 \} = \mathscr{M}_{\tilde{\alpha}_1} \times \mathscr{M}_{\tilde{\alpha}_2}.\end{aligned}$$

Si (x_k) est une base de X sur D, scindante pour α, alors les $\tilde{x}_k = x_k \otimes_L^1 1 \in \tilde{X}_1$ forment une base de $\tilde{X}_1$ sur M_1 qui est « M_1-scindante » pour $\tilde{\alpha}_1$ en ce sens que

$$\tilde{\alpha}_1(\sum \tilde{x}_k \mu_k) = \inf(\alpha(x_k) + \tilde{\omega}(\mu_k))$$

quels que soient les $\mu_k \in M_1$. On en déduit aisément que la « base duale » de $\tilde{X}_2$ est « M_2-scindante » pour $\tilde{\alpha}_2 = \bar{\tilde{\alpha}}_1$ et que l'application $u \mapsto {}^t\varphi^{-1} \circ {}^t u \circ {}^t\varphi$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$-modules de $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_1}$ sur $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_2}$.

Or on a vu que si $(g_1, g_2) \in G(\tilde{K})$, avec $g_i \in \mathrm{Aut}_{M_i} \tilde{X}_i$, alors $g_2 = {}^t\varphi^{-1} \circ {}^t g^{-1} \circ {}^t\varphi$ (1.13). Compte tenu de ce que l'adhérence schématique de $\tilde{G}$ dans chacun des schémas associés aux $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_i}$ est un schéma en groupes, donc invariant par $g \mapsto g^{-1}$, on voit que les images réciproques dans $\tilde{K}[G]$ des algèbres affines des schémas associés aux modules $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_1}$ et $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_2}$ sont égales. Par suite, $(\mathfrak{G}_p)_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}$ est aussi l'adhérence schématique de $\tilde{G}$ dans le schéma associé à $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_1}$.

Mais l'isomorphisme canonique $\mathrm{End}_{M_1} \tilde{X}_1 \to \mathrm{End}_{D'} X'$ transporte $\mathcal{M}_{\tilde{\alpha}_1}$ sur $\mathcal{M}_{\alpha'}$, où $\alpha' = \mathrm{Hom}(\omega_0, \tilde{\alpha}_1)$ (III,4.10) et par conséquent envoie $(\mathfrak{G}_p)_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}$ sur $\tilde{\mathfrak{G}}_{\tilde{p}}$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.

4.11. *Remarque.* – L'hypothèse K hensélien n'est pas indispensable : l'important est que la valuation de $\tilde{K}$ se prolonge en une valuation de D' et que, dans le cas où $\tilde{L}$ est un corps, le système D', X', (f', q') satisfasse aux conditions équivalentes de la proposition 1.15.

5. Conclusion

Nous allons maintenant comparer les résultats précédents avec ceux de II, §5. Il faut pour cela se placer dans le domaine d'intersection des hypothèses. Autrement dit, on conserve les hypothèses de 1.5, on suppose le corps K muni d'une valuation discrète ω telle que $\omega(K^*) = \mathbf{Z}$, que K muni de ω est hensélien (par suite les hypothèses de 1.15 et du paragraphe 4 sont satisfaites) et que G est quasi-déployé sur l'hensélisé strict ${}^{hs}K$ de K (« extension étale maximale ») (*cf.* II,5.1.1). On sait que cette dernière hypothèse est conséquence des autres lorsque le corps résiduel $\bar{K}$ de K est *parfait*.

On a alors exhibé en II,5, une valuation φ' de la donnée radicielle $(Z, (U_a)_{a \in \Phi})$ de G, d'où un immeuble $\mathcal{I}'$. Il résulte des théorèmes d'unicité des immeubles (I,3.5 et 8.1.10, II,4.2.12) que φ' est équivalente à la valuation φ de 1.15 et que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$, avec toutes leurs structures à condition de normaliser convenablement les distances de $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}'$, sont isomorphes d'une manière et d'une seule. On peut donc les identifier, et ceci de manière compatible avec la « montée étale » au sens du paragraphe 4 ou au sens de II, th. 5.1.25.

Pour tout $p \in \mathscr{I}$, on a défini en II,4.6.26 et 5.1.9, un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes $\hat{\mathfrak{G}}_p$, *lisse*, de fibre générique G, tel que le groupe des points de $\hat{\mathfrak{G}}_p$ à valeurs dans l'anneau ${}^{hs}\mathcal{O}$ des entiers de ${}^{hs}K$ soit le stabilisateur de p dans $G({}^{hs}K)$ (opérant sur l'immeuble de $G_{{}^{hs}K}$), c'est-à-dire coïncide avec le groupe des points de $\mathfrak{G}_p$ à valeurs dans ${}^{hs}\mathcal{O}$ (4.1 et 3.9). Comme un $\mathcal{O}_K$-schéma lisse est caractérisé par l'ensemble de ses points à valeurs dans ${}^{hs}\mathcal{O}$ (*cf.* II,1.7.6), on voit que *l'on a* $\hat{\mathfrak{G}}_p = \mathfrak{G}_p$ *si et seulement si le schéma* $\mathfrak{G}_p$ *est lisse.* On sait que ceci est vrai si et seulement si le schéma $\mathfrak{Z}$ de 3.4 est lisse (3.11 (iv)), et $\mathfrak{Z}$ coïncide alors avec le schéma noté $\mathfrak{Z}$ en II,5.2.1, puisque l'un et l'autre sont l'adhérence schématique de Z dans $\mathfrak{G}_p = \hat{\mathfrak{G}}_p$ (3.11 (i) et II,5.2.4).

Mais d'une part $\mathfrak{G}_p$ est lisse si et seulement si $(\mathfrak{G}_p)_{{}^{hs}\mathcal{O}}$ l'est, d'autre part nous avons déjà étudié la lissité de $\mathfrak{Z}$ lorsque G est quasi-déployé. Appliquant les résultats de 3.5 au groupe $G_{{}^{hs}K}$, on obtient finalement, compte tenu de ce qu'une extension quadratique de ${}^{hs}K$ n'est jamais étale :

THÉORÈME. — *Si K est hensélien et G quasi-déployé sur ${}^{hs}K$, alors pour tout $p \in \mathscr{I}$, le schéma $\mathfrak{G}_p$ est lisse et coïncide avec le schéma $\hat{\mathfrak{G}}_p$ de* II, *sauf si* car $\bar{K} = 2$ *et G une forme du groupe orthogonal SO_{2m} non déployée sur ${}^{hs}K$.*

Dans ce dernier cas, $\mathfrak{G}_p$ *n'est pas lisse*, n'est pas égal à $\hat{\mathfrak{G}}_p$ et le schéma en groupes $\hat{\mathfrak{G}}_p$ est le lissifié au sens de Raynaud de $\mathfrak{G}_p$ (*cf.* II,4.4.12 et 13).

Errata à la première partie [5]

P. 294 : ligne 3 du bas : *lire* « $\bar{C}$ de $\bar{D}$ » *au lieu de* « C de D ».

P. 295 : formule (1) : *lire* $\overline{\mathrm{Nrd}} = \mathrm{Norme}_{\tilde{C}/\bar{K}} \circ \mathrm{Nrd}_{\tilde{D}/\tilde{C}}$.

P. 298 :

ligne 8 du bas : *lire* $R_{ud}(\hat{\mathfrak{G}}_{1,x}) = R_{ud}(\hat{\mathfrak{G}}_x)$;

ligne 7 du bas : *lire* ${}^q\hat{\mathfrak{G}}_{1,x}$;

ligne 6 du bas : *lire* ${}^q\hat{\mathfrak{G}}_x$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBERT (A. A.). – Structure of algebras, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, vol. 24, A.M.S., Providence R.I., 1961.

[2] BOURBAKI (N.). – *Algèbre*, chapitre IX, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Paris, Hermann, 1959.

[3] BRUHAT (F.) et TITS (J.). – Groupes réductifs sur un corps local, I, Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 41, 1972, p. 5-251.

[4] BRUHAT (F.) et TITS (J.). – Groupes réductifs sur un corps local, II, Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 60, 1984, p. 5-184.

[5] BRUHAT (F.) et TITS (J.). – Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, 1[re] partie : le groupe linéaire général, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 112, 1984, p. 259-301.

[6] DIEUDONNÉ (J.). – *La géométrie des groupes classiques*, Springer, 1963.

[7] EICHLER (M.). – *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Berlin, 1955.

[8] GOLDMAN (O.) et IWAHORI (N.). – The space of p-adic norms, *Acta Math.*, vol. 109, 1963, p. 137-177.

[9] ROUSSEAU (G.). – Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux, *Thèse*, Université Paris-XI, 1977.

[10] TITS (J.). – Classification of algebraic semi-simple groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. IX, 1966, p. 33-62.

[11] TITS (J.). – Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, *Inv. Math.*, 5, 1968, p. 19-41.

[12] WALL (C.T.C.). – On the axiomatic foundations of the theory of hermitian forms, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 67, 1970, p. 243-250.

[13] WEIL (A.). – Algebras with involution and the classical groups, *J. Indian Math. Soc.*, 24, 1960, p. 589-623.