

SDRE 기법을 이용한 이륜 밸런싱 로봇의 비선형 최적제어

SDRE Based Nonlinear Optimal Control of a Two-Wheeled Balancing Robot

김 상 태, 권 상 주*
(Sangtae Kim¹ and SangJoo Kwon¹)
¹Korea Aerospace University

Abstract: Two-wheeled balancing mobile robots are currently controlled in terms of linear control methods without considering the nonlinear dynamical characteristics. However, in the high maneuvering situations such as fast turn and abrupt start and stop, such neglected terms become dominant and greatly influence the overall driving performance. This paper addresses the SDRE nonlinear optimal control method to take advantage of the exact nonlinear dynamics of the balancing robot. Simulation results indicate that the SDRE control outperforms LQR in the respect of transient performance and required wheel torques. A design example is suggested for the state matrix that provides design flexibility in the SDRE control. It is shown that a well-planned state matrix by reflecting the physics of a balancing robot greatly contributes to the driving performance and stability.

Keywords: two-wheeled mobile robot, balancing robot, SDRE (State Dependent Riccati Equation) control, optimal control

I. 서론

현재 서비스 로봇 산업에서는 용도에 따라 다양한 로봇들이 개발되고 있으며 일부는 실용화 단계에 접어들고 있다. 서비스 로봇에 이동성을 부여하는 모바일 플랫폼으로는 기동성 측면에서 장점을 갖는 이륜 밸런싱 플랫폼이 최근 많은 관심을 받고 있다. 2000년대 초에 상품화된 Segway [1]는 한번 충전에 약 26~39km를 주행할 수 있는 혁신적인 플랫폼으로서 전기 모터만으로 구동되는 새로운 무공해 교통 수단이라고 할 수 있다. Segway에 이어서 최근 GM에서 개발한 EN-V [2]는 2인승에 약 40km까지 주행이 가능하게 되어 다른 모바일 로봇보다 한 차원 높은 실용성을 갖게 되었다.

이륜 밸런싱 로봇은 두 바퀴와 몸체를 갖는 역진자 타입의 로봇으로서 두 개의 모터만으로 자세제어와 주행이 동시에 이루어지는 부족 구동 시스템(under-actuation system)이며, 동역학적으로는 3자유도 비선형 미분방정식으로 모델링된다. 밸런싱 로봇은 이륜 역진자 이동 로봇 또는 이륜 자기균형 이동차 등으로 불리며 저전력, 저중량, 그리고 구조적인 단순성을 특징으로 갖는다. 한편, 현재까지 밸런싱 모바일 플랫폼에 대한 제어기술은 대부분 선형제어 기법에 바탕을 두고 있다[3-5]. 그러나 이륜 모바일 플랫폼을 채택한 서비스 로봇을 이용하여 다양한 작업 기능을 구현하고 비선형적 특성이 강하게 나타나는 동작 구간에서도 원활한 성능을 달성하기 위해서는 비선형제어 기법을 적용할 필요가 있다.

여기서 밸런싱 로봇에 비선형 제어를 도입하는 목적은 로봇에 고기동 제어 성능을 부여함으로써 특히 로봇에 사람이 탑승하는 경우에 급정지, 급출발, 그리고 급회전과 같은 안정성 측면에서 불리한 상황에 대처하는 능력을 확보하는

데 있다. 본 논문에서는 이륜 밸런싱 로봇에 대하여 상태 의존 리카티 방정식(state dependent Riccati equation, SDRE)을 이용한 비선형 최적제어 법칙을 적용한다. 이를 통하여 기존 선형제어 방식에 비해 로봇의 주행 성능이 개선됨을 보인다. SDRE 제어 방법은 1962년 Pearson [6]에 의해 최초로 제안되었지만 1990년도 후반에 와서야 본격적인 관심을 받기 시작하였다. 그동안 SDRE 방법의 적용은 카트-역진자 시스템과 같은 단순한 모델[7,8]에 국한되었으며 로봇제어에 적용된 사례는 거의 찾아 볼 수 없다. 그러나 이륜 밸런싱 로봇은 구성이 비교적 단순하여 정확한 운동 방정식을 유도할 수 있으므로 SDRE 제어 기법을 적용하기에 매우 적합한 경우라고 할 수 있다. SDRE 최적제어에서는 가중 행렬(weighting matrix)뿐만 아니라 상태 행렬(state matrix)을 조정함으로써 제어기 설계에 유연성을 제공한다[9]. 즉, 상태 변수 설정에 따라 결정되는 상태 행렬을 통하여 비선형 동역학 항들을 제어기 이득 결정 과정에 직접 반영함으로써 이에 따른 성능 향상을 기대할 수 있다.

한편, 기존의 SDRE 제어 관련 논문에서는 선형제어기와의 단순한 성능 비교에 머물거나[10-12], 피드백 시스템에 대한 전역 점근적인 안정성을 확보하기 위해서 제한적인 상태 행렬을 가진 시스템에 한정되는 경우가 대부분이었다[13,14]. 본 논문에서는 우선 이륜 밸런싱 로봇에 대한 SDRE 비선형 최적제어기를 설계하고 비교 시뮬레이션을 통해 LQ 선형 최적제어기와의 성능을 비교한다. 또한 밸런싱 로봇이 급기동하는 상황에 대하여 적합한 상태 행렬을 선정함으로써 주행 안정성이 향상됨을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II 장에서는 이륜 밸런싱 로봇에 대한 3자유도 운동방정식을 유도한다. III 장에서는 비선형 최적제어 방법으로서 SDRE 기법을 간략히 요약한다. IV 장에서는 이륜 밸런싱 로봇에 대한 선형 LQ 제어기와 SDRE 제어기를 설계하고 시뮬레이션을 통해 성능을 상호

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 1. 26., 수정: 2011. 5. 5., 채택확정: 2011. 7. 4.

김상태, 권상주: 한국항공대학교 항공우주기계공학부

(kimonkey@kau.ac.kr/sjkwon@kau.ac.kr)

비교 분석한다. V 장에서는 이륜 밸런싱 로봇의 SDRE 상태 의존 행렬에 대한 설계 예제를 제시하고 VI 장에서 결론을 맺는다.

II. 이륜 밸런싱 로봇의 운동방정식

이륜 밸런싱 모바일 로봇은 주행 중에 직진 방향(x), 피치 방향(pitch, θ), 요 방향(yaw, ψ)에 대한 3 자유도 운동을 한다. 본 논문에서는 이륜 밸런싱 로봇의 운동방정식을 유도하기 위하여 Kane 방법[15]을 이용하였다. Kane 방법은 일반 작용력(generalized active force)과 일반 관성력(generalized inertia force)을 각각 구한 후 그 합이 영이 되는 관계를 이용한다는 점에서 라그랑지 방정식과 구별된다. 그림 1에서 {N}은 고정 기준 좌표계(reference frame), {F}는 로봇의 진행 방향을 알 수 있는 고정 기준에 대한 요 방향 기준 좌표계, 그리고 {P}는 역진자의 무게중심에 위치한 이동 좌표계를 나타낸다. 일반 작용력과 일반 관성력은 F_i, F_i^* 로 표기하고, $i=1$ 은 직진 방향, $i=2$ 는 피치(pitch) 방향, 그리고 $i=3$ 은 요(yaw) 방향을 나타낸다. 그리고 전방 이동 축에 대한 회전, 즉 롤(roll) 운동은 없다고 가정한다.

결과적으로 Kane 방법에 의거하여 이륜 밸런싱 로봇의 운동 방정식을 유도하면 다음 (1)식과 같이 3자유도 비선형 미

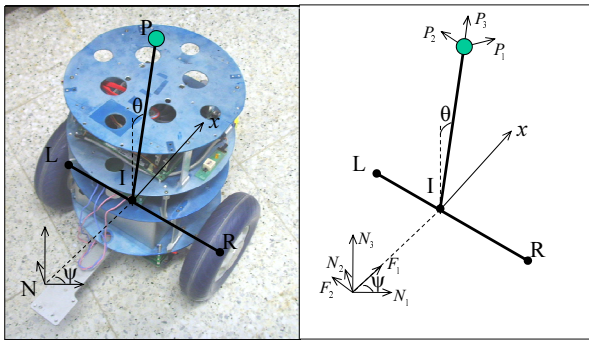


그림 1. 3자유도 이륜 밸런싱 모바일 로봇.
Fig. 1. 3 DOF two-wheeled balancing mobile robot.

표 1. 이륜 밸런싱 모바일 로봇의 파라미터.

Table 1. Parameters of two-wheeled balancing robot.

Frame {N}	고정기준 좌표계
Point P	무게중심
Body L, R	로봇의 좌우 바퀴
Point I	양 바퀴 축을 연결하는 직선의 중심
x	{N}의 원점에서 I점까지의 이동거리
	피치 각(pitch angle)
	요 각(yaw angle)
T_L, T_R	좌우 바퀴의 토크
d	바퀴와 I점 간의 거리
l	질량중심과 I점과의 거리
M_p	로봇 바디의 질량
M	바퀴의 질량
I_1, I_2, I_3	운동 축에 대한 질량관성모멘트(MOI)
J	바퀴 회전축에 대한 바퀴의 MOI
K	지면과 수직 방향에 대한 바퀴의 MOI
R	바퀴의 반지름

분방정식 형태가 된다. 즉, 이륜 밸런싱 로봇은 두 바퀴의 회전 운동에 의해 전방 속도와 두 방향의 자세를 동시에 제어하는 전형적인 부족 구동(under-actuation) 시스템이라고 할 수 있다. 이 결과는 [4]의 경우와 유사하며 표 1은 각 파라미터에 대한 설명이다.

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_1^* &= (T_L + T_R) / R + M_p l [\sin \theta (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) - \cos \theta \cdot \ddot{\theta}] \\
 &\quad - (M_p + 2M + 2J / R^2) \ddot{x} = 0 \\
 F_2 + F_2^* &= M_p l (g \sin \theta - \cos \theta \cdot \ddot{x}) - T_L - T_R \\
 &\quad - (I_3 - I_1 - M_p l^2) \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\psi}^2 \\
 &\quad - (I_2 + M_p l^2) \ddot{\theta} = 0 \\
 F_3 + F_3^* &= -d(T_L - T_R) / R - \sin \theta \cdot \dot{\psi} [2(I_1 - I_3) \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\
 &\quad + M_p l (\dot{x} + 2l \cos \theta \cdot \dot{\theta})] - [I_3 + 2K + 2Md^2 \\
 &\quad + 2Jd^2 / R^2 - (I_3 - I_1 - M_p l^2) \sin^2 \theta] \ddot{\psi} = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

III. SDRE 비선형 최적제어

SDRE 제어에서는 비선형 최적 레귤레이션(regulation) 문제를 다루며 시스템의 모든 상태가 관측 가능하고(full-state observable) 입력값에 대하여 어파인(affine)이라고 가정한다. 기존의 연구에 의하면 우선 SDRE 피드백 시스템은 다변수 입력 시스템에 대하여 지역 점근적으로(locally asymptotically) 안정하고 최적이며, 단일 입력에 대해서는 최적이라는 사실이 증명되었다[16,17]. 여기서 원점을 평형 점으로 가정하면 SDRE 시스템은 다음과 같이 표현되며 이것은 일반성을 상실하지 않는다[18].

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f(x) + B(x)u(t) \\
 \text{where } x(0) &= x_0, t \in [0, \infty), f(0) = 0, \\
 x \in R^n &: \text{state vector, } u \in R^m : \text{input vector,} \\
 f: R^n &\rightarrow R^n, B: R^n \rightarrow R^{n \times m}, B(x) \neq 0 \forall x
 \end{aligned} \tag{2}$$

다음에 최적제어 법칙을 결정하기 위해 주어지는 성능지수는 다음 (3)식과 같이 상태변수 x에 대하여는 비이차(non-quadratic)이고 입력 u에 대해서는 이차(quadratic)이다. Q(x)와 R(x)는 상태 값과 입력 값에 대한 가중 행렬(weighting matrix)로서 상태 의존적(state dependent)이다.

$$\begin{aligned}
 J(x, u) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \{x^T(t)Q(x)x(t) + u^T(t)R(x)u(t)\} dt \\
 Q: R^n &\rightarrow R^{n \times n}, R: R^n \rightarrow R^{m \times m}, Q(x) \geq 0, R(x) > 0 \forall x
 \end{aligned} \tag{3}$$

한편, 비선형 시스템 (2)에 대하여 다음 (4)식과 같은 연속적인 행렬 함수인 A(x)가 존재하며 이를 확장된 선형화 또는 SDC (State Dependent Coefficient) 파라미터화(parametrization)라고 부른다.

$$\dot{f}(x) = A(x)x, \text{ with } A: R^n \rightarrow R^{n \times n} \tag{4}$$

위와 같이 상태변수들을 벡터로 분리하고 비선형 항들을 SDC 상태행렬 A(x)에 포함시킴으로써 선형 방정식 형태를 만들 수 있다. 위 식은 $n > 1$ 에 대하여 비유일성(non-uniqueness)을 갖게 되어 전역(global) 점근적 안정화와 최적화를 보장할 수 없으며 현재까지 명확한 이론적 증명이 이루어지지 않고

있다. 그러나 $A(x)$ 의 무한한 변화 가능성 때문에 성능, 안정성, 최적성, 및 강인성과 같은 부분에서 조정 및 변화가 가능하다는 점이 SDRE 제어의 장점이라고 할 수 있다. 이러한 상태행렬 $A(x)$ 의 개인으로서의 특성을 이용하기 위해서는 $\{A(x), B(x)\}$ 가 임의의 x 에 대해서 국소적인 가제어성 (pointwise controllability)이 확보되어 지역 점근적 안정화를 보장해야 한다.

(4)에서 상태행렬이 결정되면 (2)는 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5)$$

위에서 $u(t) = K(x)x$ 와 같이 선형 제어기 형태의 입력을 가정하고 비선형 미방 구속조건 (2)식에 대하여 성능지수 (3)식을 최소화함으로써 접근시키는 입력을 결정하면 결론적으로 원점이 '0'으로 가는 시스템에서 다음과 같은 준최적(suboptimal) 상태 피드백 제어법칙을 얻을 수 있다.

$$u(t) = k(x) = -K(x)x, \quad (6)$$

where $K(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x)$, $k(0) = 0$

결국 위 식은 LQR 제어와 형태적으로 동일하며 준선형적 인(quasilinear) 페루프 시스템을 국소적으로(pointwise) 안정하게 만든다. 위 식에서 $P(x)$ 는 다음 (7) 식에 주어진 상태 의존적 대수 리카티 방정식(state dependent algebraic Riccati equation)의 유일한 해로서 대칭적이고(symmetric) 양의 한정적인(positive-definite) 행렬이다.

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (7)$$

이상과 같이 SDRE 비선형 제어에서는 상태 방정식의 행렬이 상태 의존적이며 비선형 동역학 자체를 이용하기 때문에 평형점에 대하여 선형화된 방정식을 이용하는 선형 최적 제어 방법의 성능 한계를 극복할 수 있다. SDRE 제어 입력을 계산하기 위해서는 매 샘플링 시간마다 SDC 상태행렬을 상수로 처리하고 LQ 최적제어 문제를 푼다.

SDRE 비선형제어 이론을 응용한 기존 연구 결과들을 살펴보면 LQR과 SDRE 사이의 단순한 비교 실험[10,11]이나 전역 점근적 안정성 확보를 위해 제한적인 상태행렬을 가진 시스템에 국한되고 있으며[13], 아직까지 SDRE 제어기 설계에서 핵심적인 내용에 해당하는 SDC 행렬에 대한 체계적인 설계 방법 또는 절차가 제시되지 않고 있다. 본 논문에서는 다변수 비선형 시스템인 역진자 형태의 이륜 밸런싱 모바일 로봇에 대하여 SDRE 제어를 설계하고, 로봇 주행 시에 나타나는 동역학적 특성을 상태행렬 선정에 고려한 설계 예제를 제시하고자 한다.

IV. LQ 선형제어와 SDRE 비선형제어의 성능 비교

1. 이륜 밸런싱 로봇 운동 방정식의 파라미터화

첫째, LQ최적제어 입력을 결정하기 위하여 비선형 운동 방정식 (1)을 평형점 $x = 0$ 대하여 선형화하면 다음과 같은 상태 방정식이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

위에서 상태벡터, 입력벡터, 그리고 각 행렬과 그 구성 요

소들은 다음 식들과 같다.

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & b_2 \\ 0 & 0 \\ b_4 & b_4 \\ 0 & 0 \\ b_6 & -b_6 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{C_1} M_p^2 l^2 g, \quad a_4 = -\frac{1}{C_1} \left(M_p + 2M + \frac{2J}{R^2} \right) M_p l g$$

$$b_2 = -\frac{1}{C_1} \left(\frac{I_2 + M_p l^2}{R} + M_p l \right)$$

$$b_4 = \frac{1}{C_1} \left(\frac{M_p l}{R} + M_p + 2M + \frac{2J}{R^2} \right), \quad b_6 = -\frac{1}{C_2} \frac{d}{R}$$

$$C_1 = M_p^2 l^2 - \left(M_p + 2M + \frac{2J}{R^2} \right) (I_2 + M_p l^2)$$

$$C_2 = I_3 + 2K + 2Md^2 + 2J \frac{d^2}{R^2}$$

둘째, SDRE 제어 입력을 결정하기 위해 (1)식을 확장된 선형 상태방정식 형태로 변환하면 다음 (9)식을 얻을 수 있다. 여기서 SDC 상태행렬 $A(x)$ 는 상태변수 $\theta \rightarrow 0$ 에 따라 $\sin(\theta)/\theta \rightarrow 1$ 로 접근하는 관계를 이용하여 결정된 것이며, 다른 시스템에 대한 SDRE 제어에서도 이와 유사한 예를 찾을 수 있는데[10,11], 이것은 시스템의 물리적 특성에 대한 고려보다는 단순히 수학적 용이성에 근거하여 SDC 행렬을 생성한 것이라고 할 수 있다. 한편, 아래 행렬 $A(x)$, $B(x)$ 에 대한 지역 점근적 안정성은 수치해석적으로 검증하였다.

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u$$

where

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_6(x) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2(x) & b_2(x) \\ 0 & 0 \\ b_4(x) & b_4(x) \\ 0 & 0 \\ b_6(x) & -b_6(x) \end{bmatrix}$$

$$x = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi}]^T, \quad u = [T_L \quad T_R]^T$$

(9)

위에서 각 행렬의 요소들은 다음 식들로 주어진다.

$$a_2(x) = \frac{1}{V_1} \frac{\sin \theta}{\theta} [M_p^2 l^2 g \cos \theta - (I_2 + M_p l^2) M_p l \dot{\theta}^2$$

$$- M_p l \{ I_2 + M_p l^2 + (I_3 - I_1 - M_p l^2) \cos^2 \theta \} \dot{\psi}^2]$$

$$a_4(x) = \frac{1}{V_1} \frac{\sin \theta}{\theta} [-(M_p + 2M + \frac{2J}{R^2}) M_p l g + M_p^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$+ \cos \theta \{ M_p^2 l^2 + (I_3 - I_1 - M_p l^2) (M_p + 2M + \frac{2J}{R^2}) \} \dot{\psi}^2]$$

$$a_6(x) = \frac{1}{V_2} \frac{\sin \theta}{\theta} [2 \cos \theta (I_3 - I_1 - M_p l^2) \dot{\theta} \dot{\psi} - M_p l \dot{x} \dot{\psi}]$$

$$b_2(x) = -\frac{1}{V_1} \left(\frac{I_2 + M_p l^2}{R} + M_p l \cos \theta \right)$$

$$b_4(x) = \frac{1}{V_1} \left(\frac{M_p l \cos \theta}{R} + M_p + 2M + \frac{2J}{R^2} \right), \quad b_6(x) = -\frac{1}{V_2} \frac{d}{R}$$

$$V_1 = M_p^2 l^2 \cos^2 \theta - (M_p + 2M + \frac{2J}{R^2})(I_2 + M_p l^2)$$

$$V_2 = I_3 + 2K + 2Md^2 + 2J \frac{d^2}{R^2} - (I_3 - I_1 - M_p l^2) \sin^2 \theta$$

2. 성능 비교 시뮬레이션

앞 절과 같은 운동방정식이 주어지면 최적제어 법칙에 따라 양 바퀴의 제어 입력을 결정할 수 있고 주어진 초기 조건에 대하여 비선형 방정식을 시간에 대하여 수치 적분함으로써 운동 시뮬레이션을 수행할 수 있다. 이 때 시뮬레이션에 사용된 이륜 밸런싱 로봇의 파라미터 값들은 표 2와 같으며 이것은 세그웨이(segway)와 같이 사람이 탑승할 수 있는 로봇에 해당한다. 양 바퀴는 최대 토크가 0.325 Nm인 모터에 기어비가 20:1인 감속기와 연결된 것으로 가정하며 최대 구동 토크를 세그웨이 경우와 같이 6.5 Nm로 제한한다. 표 1에 나타난 다른 파라미터에 대한 값들은 표 2와 같다.

여기서 로봇의 비선형 특성이 크게 나타나는 동작을 얻기 위해 로봇의 초기 자세를 피치각 $\theta = 10^\circ$, 요각 $\psi = 360^\circ$ 로 설정한 후, 로봇이 평형점으로 레귤레이션하는 시뮬레이션을 수행하면 그림 2와 같이 급회전과 전진 운동이 동시에 일어나게 된다. 이 때 다음과 같은 가중행렬을 적용하면

$$Q = \text{diag}([25 \ 5 \ 120 \ 0.01 \ 5 \ 1]), \quad R = \text{diag}([1 \ 1]) \quad (10)$$

LQR 게인 행렬은 다음 (11)식과 같이 고정된 값으로 산출되는 반면, SDRE 게인 행렬은 매 샘플링 시간마다 변화한다.

표 2. 시뮬레이션 파라미터 값.

Table 2. Simulation parameters.

$M_p = 42.3\text{kg}$	$M = 3.7\text{kg}$
$I_1 = I_2 = 5.1196\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$I_3 = 0.0085\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$l = 0.1676\text{m}$	$d = 0.40\text{m}$
$R = 0.40\text{m}$	$J = 0.116\text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad K = J/2$

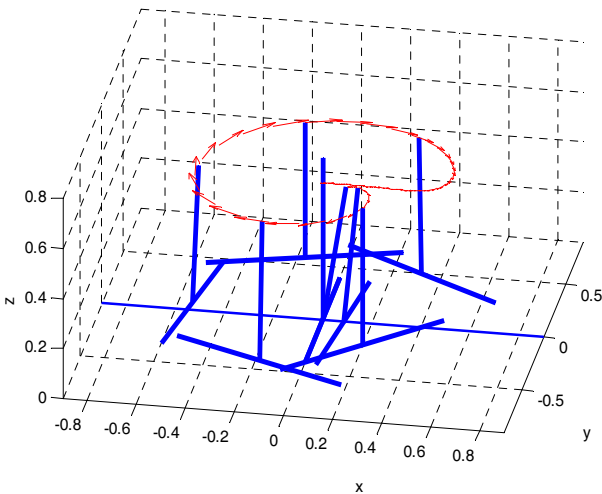


그림 2. 평형점에 대한 밸런싱 로봇의 운동 궤적.
Fig. 2. Regulation motion of the balancing robot.

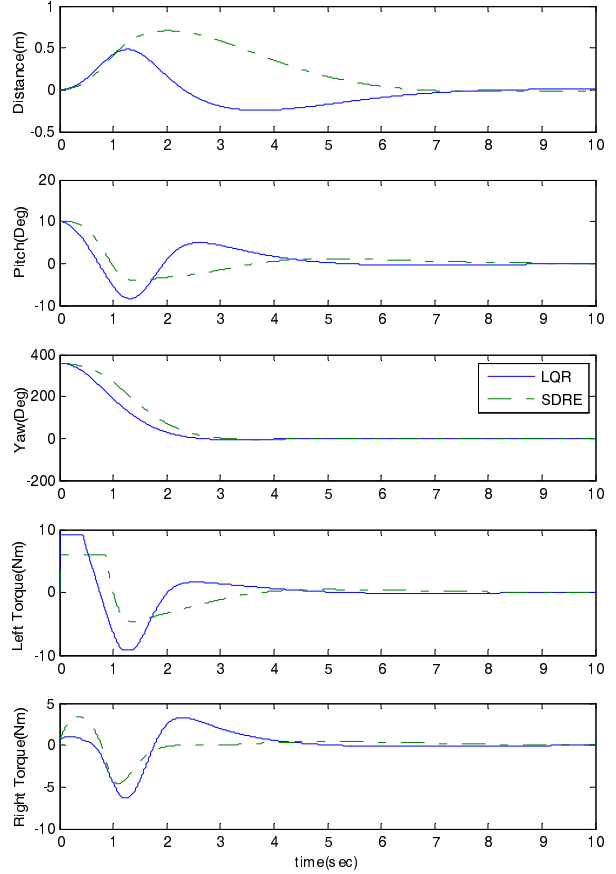


그림 3. LQ 선형제어와 SDRE 비선형제어의 성능 비교.
Fig. 3. Performance comparison between LQ and SDRE.

$$K = \begin{bmatrix} -3.54 & -8.62 & -59.99 & -17.57 & -1.58 & -1.51 \\ -3.54 & -8.62 & -59.99 & -17.57 & 1.58 & 1.51 \end{bmatrix} \quad (11)$$

한편, 주어진 스펙에 따라 바퀴의 양 바퀴의 모터의 토크를 6.5 Nm로 제한하는 경우, 선형 LQ 제어기는 피치각 제어가 되지 않아 쓰러지는 현상을 보였다. 위와 같은 초기 조건에 대하여 로봇이 쓰러지지 않기 위해서는 LQ 제어에서는 최소한 9.2 Nm, SDRE 제어에서는 5.1 Nm의 최대 토크가 필요하다는 것을 확인하였다. 그림 3은 이와 같은 토크 제한 조건 아래에서 두 제어기의 성능을 비교한 것이다. 그림 3에서 각 방향의 운동 궤적을 비교하면 비선형제어가 선형제어에 비해 보다 완만한 궤적 변화를 나타낸다. 결국, SDRE 비선형제어는 양 바퀴의 최대 토크에 대한 요구 수준을 감소시키며 상대적으로 안정한 운동 궤적을 발생시킨다. 따라서 고속 회전, 급출발, 급정지와 같은 고기동 상황에서 선형제어 방식에 비해 보다 우수한 제어 성능을 기대할 수 있다.

V. SDRE 비선형 최적제어의 설계 유연성

1. 입력가중 행렬 조정에 따른 성능 변화

SDRE 제어에서 설계 유연성(design flexibility)이란, (3)에서 가중 행렬 Q, R 을 상대 변수를 포함하는 $Q(x), R(x)$ 형태로 변환하거나 (4)에서 SDC 행렬 $A(x)$ 의 비유일성을 이용하여 피드백 게인 값을 조정할 수 있다는 것을 의미한다.

이륜 모바일 로봇의 경우, 6개의 상태 $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})$ 와 2

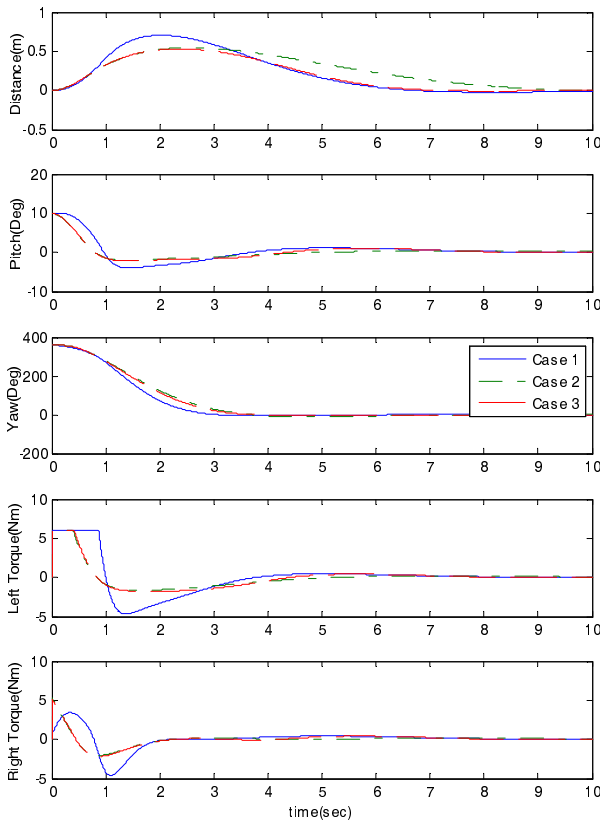


그림 4. 입력가중 행렬에 적용에 따르는 제어 성능 변화.

Fig. 4. Performance change with different input weighting matrices.

개의 입력(T_L, T_R)을 갖기 때문에 상대적으로 상태가중 행렬 보다는 입력가중 행렬 $R(x)$ 를 통한 개인 튜닝이 용이하다. 앞 절과 동일한 시뮬레이션 조건에 대하여 다음 (12)식과 같이 입력 가중 행렬이 상수인 경우와 대각 성분에 상태 값을 포함하는 경우를 비교한다.

$$\begin{aligned} \text{Case 1: } R(x) &= \text{diag}(1) \\ \text{Case 2: } R(x) &= \text{diag}(7) \\ \text{Case 3: } R(x) &= \text{diag}(\|x\| + 0.01) \end{aligned} \quad (12)$$

최적제어에서는 기본적으로 $Q(x)$ 의 크기가 증가하면 제어 오차가 감소하는 반면 입력의 크기가 증가하고, $R(x)$ 크기가 증가하면 입력 수준이 감소하는 대신 상대적으로 제어오차가 증가한다. 그림 4의 결과를 살펴보면 Case 1은 위치 오차가 상대적으로 빠르게 수렴하지만 많은 토크를 요구한다. $R(x)$ 크기를 증가시킨 Case 2는 반대의 결과가 나온다. Case 3은 위 두 가지 경우를 절충한 경우로써, 오차가 수렴함에 따라 가중 행렬의 크기가 감소하므로 상대적으로 토크 수준을 낮게 유지하면서 전방 위치에 대한 오차 수렴 속도가 증가하는 것을 확인할 수 있다.

2. 고기동 주행 안정성을 위한 SDC 상태행렬 선정

위와 같은 가중 행렬 외에 SDC 상태행렬은 SDRE 최적제어에서 성능조정 파라미터로서 제어기 설계에 유연성을 제공한다. 다른 SDRE 시스템들[10,11]과 같이 (9)식에서는 수학적 용이성에 근거하여 상태행렬을 결정하였으나, 본 절에서는 이륜 밸런싱 모바일 로봇의 동역학적 특성에 근거하여 상

태행렬을 선정하면 큰 가속력을 받는 고기동(high maneuvering) 상황에서 주행 안정성을 개선됨을 보인다.

밸런싱 모바일 로봇이 고기동 운동을 하는 대표적인 상황은 고속으로 직진 주행하는 중에 요 방향으로 선회 운동을 시작하는 것이다. 이 때 회전반경 방향으로 법선 가속도가 발생하기 때문에 선회 속도가 빠를수록 로봇이 미끄러지거나 넘어질 가능성이 커진다. 따라서 안정된 선회 운동을 하기 위해서는 요 각속도 크기를 일정 수준 아래로 제한해야 한다. 이 때 요 방향 운동은 거의 양 바퀴 토크 값에 의해서만 결정되며 다른 상태 값에도 거의 영향을 미치지 않는다는 사실을 알 수 있다. 또한 밸런싱 로봇이 전방 방향으로 등속 운동을 하면 피치 각은 영이 되고 등가속 운동을 할 때는 피치 각이 일정하게 앞으로 기울어진 상태로 주행하게 되므로 이 때는 피치 각속도를 $\dot{\theta} = 0$ 으로 가정할 수 있다.

등가속 직진주행 중 선회 운동에 대한 위의 두 가지 물리적 특성을 고려하면 (9)의 SDC 상태행렬에서 6행 요소인 $a_6^*(x)$ 의 왼쪽 항이 거의 영이 되므로 SDC 상태행렬을 다음 (13)식과 같이 요 각속도 항에 해당하는 6행 6열 요소를 첨가하는 방식으로 수정할 수 있다. (9)와 마찬가지로 구동 범위에서 (13)의 지역적 점근 안정성을 수치해석적으로 증명하였다. 상태행렬 (13)은 (9)식에 비해 선회 운동시 요 각속도가 다른 상태 값에 미치는 영향을 감소시키며, 전방 속도가 요 각속도 크기의 감소에 무관하게 보다 직접적으로 선회 운동에 영향을 미친다.

$$A^*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^*(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4^*(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6^*(x) \end{bmatrix} \quad (13)$$

where $a_2^*(x) = a_2(x)$, $a_4^*(x) = a_4(x)$

$$a_6^*(x) = \frac{1}{V_2} [2(I_3 - I_1 - M_p l^2) \cos\theta \sin\theta \cdot \dot{\theta} - M_p l \sin\theta \cdot \dot{x}]$$

$$V_2 = I_3 + 2K + 2Md^2 + 2J \frac{d^2}{R^2} - (I_3 - I_1 - M_p l^2) \sin^2\theta$$

위 상태행렬과 함께 가중 행렬이 주어지면 최적제어 개인은 다음과 같이 2×6 행렬로 결정된다.

$$K(x) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} \quad (14)$$

그림 5는 상태 변수를 $\theta = 10^\circ$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = 60^\circ/\text{sec}$ 와 같이 일정하게 두고 전방 속도를 $\dot{x} = 0 \sim 6.5 \text{ m/sec}$ 로 변화시키면서 개인 행렬의 1행 요소(즉, 왼쪽 바퀴의 토크를 결정)들을 계산한 결과이며 (9)와 (13)의 상태행렬을 적용했을 경우를 비교한다. 상태행렬 (9)를 적용했을 때는 개인 행렬의 모든 요소들이 변화하는 반면, 상태행렬 (13)은 요 각속도 관련 개인 요소만이 전방 속도에 따라 변화하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 개인 값의 변화는 다른 상태 값들에 대해서도 유

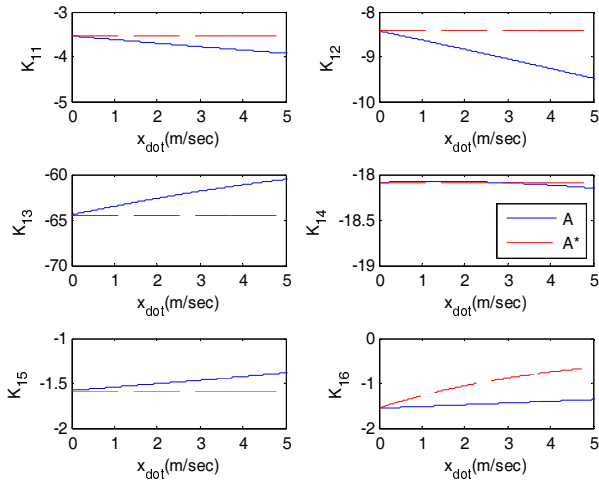


그림 5. 로봇 직진 속도 변화에 대한 SDRE 게인 변화(SDC 상태행렬 $A(x)$ 와 $A^*(x)$ 를 적용한 경우).
 Fig. 5. Variation of the SDRE gains w.r.t. the change of robot velocity.

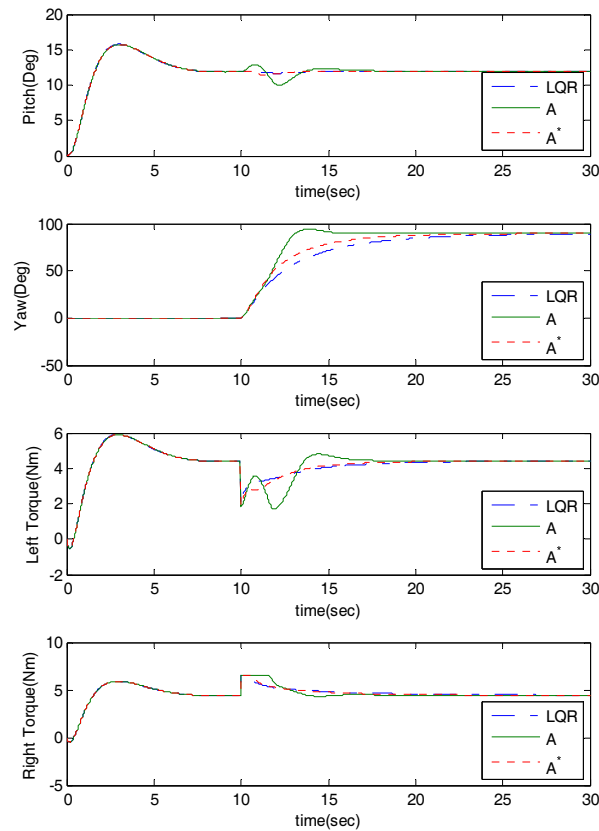


그림 6. 상태행렬에 선정에 따른 주행성능의 변화(Case 1).
 Fig. 6. Performance change according to the state matrix selection.

사한 경향을 나타내며, 오른쪽 바퀴 토크에 관여하는 (14)의 2행 요소 또한 같은 경향성을 보인다.

그림 6은 로봇이 0.8 m/sec^2 의 전방 가속도로 출발하여 주행 성능이 안정화된 이후에 10초 근방에서(속도 8 m/sec) 요 방향으로 90° 선회 주행을 시작하는 경우로서, LQR과 SDRE 제어 성능 및 상태행렬 차이에 따르는 SDRE 제어 성능을

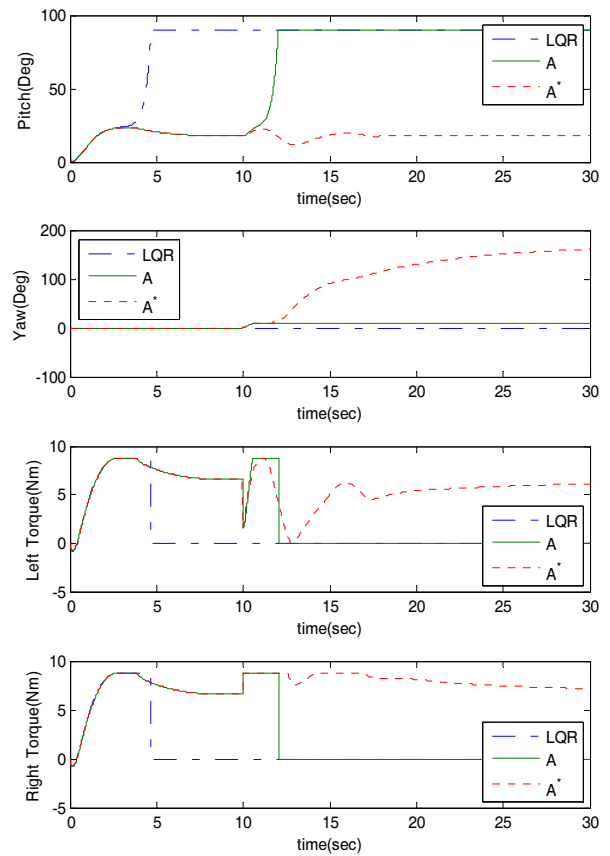


그림 7. 상태행렬에 선정에 따른 주행성능의 변화(Case 2).
 Fig. 7. Performance change according to the state matrix selection.

상호 비교한다. 이 때 사용된 가중행렬은 (10)식과 같다. 상태행렬 (9)를 적용한 SDRE 제어보다 (13)을 적용했을 때 방향 전환 시에 피치 운동이 상대적으로 안정됨을 알 수 있다. 또한 LQ 제어는 SDRE 제어에 비해 요 값의 반응 속도가 느리게 나타난다.

위 그림 7은 더 높은 가속도 1.2 m/sec^2 로 직진 주행하다가 10초 시점에(속도 12 m/sec) 180° 선회 운동을 시작하는 시물레이션 결과이다. 각 제어기의 성능 차이를 확인하기 위해 양 바퀴의 토크 제한을 8.8 Nm 로 상향시켰다. 우선 LQ 선형 제어는 등가속을 시작하는 과도구간에서 안정화가 이루어지지 않아 넘어지는 결과를 나타낸다. 상태행렬 (9)를 적용한 SDRE 제어는 선회 시에 피치 안정화를 이루지 못하고 쓰러지는 현상을 보인다. 반면 상태행렬 (13)을 통한 SDRE 제어는 안정성을 유지하였다.

위 시물레이션 결과는 로봇이 감속 없이 급선회하는 상황을 나타내므로 정상적인 주행 상황에서는 다소 벗어난 경우라고 볼 수 있다. 그러나 이륜 밸런싱 로봇이 기존 선형제어의 성능 한계를 극복하기 위해서는 이와 같이 비선형 동역학 항의 크기가 증가하는 고기동 조건에 대하여 안정된 제어 성능을 확보하는 것이 필요하다. 특히 인간 탑승형 밸런싱 로봇의 경우, 의도하지 않은 로봇의 오동작 또는 조작 실수로 인해 높은 가속도가 발생하는 비정상적인 상황에서 탑승자의 안전을 확보하기 위하여 SDRE 제어 방법이 매우 효과적인 수단이 될 수 있다.

VI. 결론

이륜 밸런싱 로봇은 세그웨이와 같은 간편한 교통 수단, 여러 서비스 용도뿐만 아니라 최근에는 군사용 로봇까지 그 응용 분야가 확대되고 있다. 그러나 현재의 선형제어 방식만으로는 신속한 기동이 요구되는 다양한 작업 기능을 구현하는데 한계가 있다. 본 논문에서는 이륜 밸런싱 모바일 로봇에 대하여 SDRE 비선형 최적제어기를 설계하였으며 LQR 선형제어와의 비교 시뮬레이션을 통해 유용성을 밝혔다. 결론적으로 SDRE 제어 방법은 비선형 동역학 항의 크기가 증가하는 고기동 상황에서 선형제어에 비해 우수한 성능을 보이며 로봇 양 바퀴에 대한 최대토크 요구 스펙을 완화시킨다.

한편, SDRE 제어에서는 비선형 요소들을 갖는 상태행렬 설계 문제가 핵심적인 오픈 이슈(open issue)로 남아있으며, 아직까지 이론에 근거한 체계적인 설계 방법이 제시되지 못하였다. 본 논문에서는 이륜 밸런싱 로봇에 대한 설계 예제로서 두 가지 상태행렬을 제시하였다. 특히 로봇이 고기동하는 주행 조건에 대한 물리적 특성을 고려하여 상태행렬을 적용했을 때 선회주행 안정성이 크게 개선됨을 보였다. 단, SDRE 방법과 같은 비선형제어 기법을 실제 로봇에 적용했을 때 나타날 수 있는 강인성(robustness) 문제와 그 대책은 향후 과제로 남겨져 있다.

참고문헌

- [1] <http://www.segway.com>
- [2] <http://www.gm.com>
- [3] F. Grasser, A. D'Arrigo, and S. Colombi, "JOE: A mobile, inverted pendulum," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 49, no. 1, pp. 107-114, Feb. 2002.
- [4] Y. Kim, S. Kim, and Y. Kwak, "Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 44, no. 1, pp. 25-46, Sep. 2005.
- [5] J. M. Yun, J.-K. Lee, and J.-M. Lee, "An Efficient Horizontal Maintenance Technique for the Mobile Inverted Pendulum," *Journal of Control, Automation, and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 13, no. 7, pp. 656-663, Jul. 2007.
- [6] J. D. Pearson, "Approximation methods in optimal control," *Journal of Electronics and Control*, vol. 13, pp. 453-469, 1962.
- [7] N. M. Singh, J. Dubey, and G. Laddha, "Control of pendulum on a cart with state dependent riccati equations," *Int. Journal of Computer, Information, and Systems Science, and Engineering*, pp. 92-96, 2009.
- [8] C. Hui Feng, L. Hongxing, and Y. Peipei, "Swinging-up and stabilization of the inverted pendulum by energy well and SDRE control," *Control and Decision Conf.*, pp. 2222-2226, Jun. 2009.
- [9] J. R. Cloutier and C. P. Mracek, "Parametric enhancement of state-dependent riccati equation based control," *Proc. of the American Control Conf.*, vol. 2, pp. 1072-1073, Jun. 1997.
- [10] E. Erdem and A. Alleyne, "Experimental real-time SDRE control of an underactuated robot," *Proc. of the 40th IEEE*

Conference on Decision and Control, vol.3, pp. 2986-2991, Dec. 2001.

- [11] P. Dand and F. Lewis, "Controller for swing-up and balance of single inverted pendulum using sdre-based solution," *IECON 31st Annual Conference of IEEE*, pp. 304-309, Nov. 2005.
- [12] A. Fenili and J. M. Balthazar, "The rigid-flexible nonlinear robotic manipulator: Modeling and control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, pp. 2332-2341, May 2011.
- [13] E. Erdem and A. Alleyne, "Design of a class of nonlinear controllers via state dependent riccati equations," *IEEE Trans on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 1, pp. 133-137, Jan. 2004.
- [14] A. Nemra and N. aouf, "Robust INS/GPS sensor fusion for UAV Localization using sdre nonlinear filtering," *IEEE Sensors Journal*, vol. 10, no. 4, Apr. 2010.
- [15] T. R. Kane and D. A. Levinson, "Dynamics: Theory and applications," McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [16] C. P. Mracek and J. R. Cloutier, "Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent riccati equation method," *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, pp. 401-433, Apr. 1998.
- [17] J. R. Cloutier, C. N. D'Souza, and C. P. Mracek, "Nonlinear regulation and nonlinear H_∞ control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, Theory; Part 2, Examples," *Proc. of the First Int. Conf. on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, pp. 117-141, May 1996.
- [18] T. Cimen, "State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey," *Proc. of the 17th World Congress the Int. Federation of Automatic Control*, pp. 3761-3775, Jul. 2008.



김 상 태

2008년 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부 졸업. 2010년 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학과 대학원 졸업(공학석사). 2010년~현재 동 대학원 박사과정 재학중. 관심분야는 모바일 로봇, 비선형제어.



권 상 주

1989년 서울대학교 조선공학과(공학사). 1991년 POSTECH 기계공학과(공학석사). 1991년~1997년 국방과학연구소 연구원. 2002년 POSTECH 기계공학과(공학박사). 2003년~2004년 한국과학기술연구원, 한국생산기술연구원 선임연구원. 2004년 9월~현재 한국항공대학교 항공우주기계공학부 부교수. 관심분야는 강인제어, 추정이론, 센서퓨전, 밸런싱로봇, 초정밀로봇.