Second Order Asymptotic Bounds for the Concentration Probability of Estimators in a Family of Truncated Distributions(Asymptotic Methods of Statistics)

赤平, 昌文

数理解析研究所講究録
645巻 1988年 37-51

Second Order Asymptotic Bounds for the Concentration Probability of Estimators in a Family of Truncated Distributions

赤平昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに

非正則な場合に、推定量の２次の漸近有効性については、従来、切断正規分布、両側指数分布、さらにcuspsをもつ連続な密度関数をもつ分布族等のときに論じられた([2],[3],[5]).

ここでは一般の切断分布族の場合に、一般ベイズ推定量の２次の漸近分布を求め、さらに漸近中央値不偏推定量のクラスの中でそれらの集中確率の限界を3/2次および２次のorderまで求める．また推定量の２次の漸近有効性についても考察する．

1. 一般ベイズ推定量の２次の漸近分布

$X_1, \cdots, X_n$をたがいに独立に、いずれも（あるσ-有限測度μに関して絶対連続な）密度関数$f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta)$に従う実確率変数とする．ここで$\Theta = R^1$とし、θが位置母数である、すな

わち $f(x,\theta)=f(x-\theta)$ である場合を考える．さらに次の条件を仮定する．

(A.1) $f(x)>0$, $a<x<b$ のとき，

$f(x)=0$, $x\le a,\ x\ge b$ のとき

(A.2) $f(x)$は開区間(a,b)において２回連続微分可能で

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)=c$$ である．ただし c はある正の定数とする．

(A.3) $$I=\int_a^b \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)}\,d\mu(x)<\infty.$$

上のような設定の下では、一致性の order は n となることが知られている（[1]）.

また $\underline{\theta}=\max_{1\le i\le n} x_i-b$, $\overline{\theta}=\min_{1\le i\le n} x_i-a$ とすれば、

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta)>0,\quad \underline{\theta}<\theta<\overline{\theta} \text{ のとき，}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta)=0,\quad \text{その他のとき}$$

となる．$L(u)$をR^1上で定義された３回連続微分可能で、$|u|$の単調増加な非負値関数とする．このとき損失Lとルベーグ測度に関する一般ベイズ推定量は、ほとんどすべての $\tilde{x}_n=(x_1,\cdots,x_n)$ について

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} L(\hat{\theta}-\theta)\prod_{j=1}^{n} f(x_j-\theta)\,d\theta$$

を最小にする $\hat{\theta}$ になる．

次に $a<x<b$ に対して $l(x)=\log f(x)$ とおいて $l^{(j)}(x)=(d^j/dx^j)l(x)$ $(j=1,2)$ とするとき

$$Z_1=(-1/\sqrt{n})\sum_{j=1}^{n}l^{(1)}(X_j)\ ,\quad Z_2=(1/\sqrt{n})\sum_{j=1}^{n}l^{(2)}(X_j)+\sqrt{n}\,I$$

によって定義する．ここでさらに $(d/du)L(0)=0$ であると仮定する．

<u>定理 1.1.</u> 条件 (A.1) ～ (A.3) の下で、損失 L とルベーグ測度に関する一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ は次の stochastic expansion をもつ．

$$n(\hat{\theta}_{GB}-\theta)=S+\frac{1}{3\sqrt{n}}Z_1T^2-\frac{I}{3n}ST^2-\frac{b_3}{6b_2n}T^2+o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

ここで $S=n(\underline{\theta}+\bar{\theta})/2$，$T=n(\bar{\theta}-\underline{\theta})/2$，$b_j=(d^j/du^j)L(0)$ $(j=2,3)$ とする．

証明については、一般ベイズ推定量が

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}L^{(1)}(\hat{\theta}-\theta)\prod_{j=1}^{n}f(x_j-\theta)\,d\theta=0$$

の解 $\hat{\theta}$ として与えられることから、$\hat{\theta}$ の漸近展開が得られる ([4])．ただし $L^{(1)}(u)=(d/du)L(u)$ とする．

<u>定理 1.2.</u> 条件 (A.1) ～ (A.3) の下で、一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ の特性関数は n^{-1} の order まで次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_n(t)&=E\left[e^{2citn(\hat{\theta}_{GB}-\theta)}\right]\\&=\phi_0(t)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3}\alpha_j\phi_j(t)+\frac{1}{12c^2n}\sum_{j=0}^{3}i\beta_j t\phi_j(t)-\frac{1}{18c^2n}\sum_{j=0}^{4}\gamma_j t^2\phi_j(t)\\&\quad+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha_0=\frac{1}{12c^2}(h^-+2I),\quad \alpha_1=1+\frac{1}{12c^2}(5h^--2I),\quad \alpha_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4c^2}(2h^--I),$$

$$\alpha_3=\frac{1}{12c^2}(h^--I),\quad \beta_0=\beta_1=-\left(h^++\frac{2b_3c}{b_2}\right),\quad \beta_2=-\left(2h^++\frac{b_3c}{b_2}\right),$$

$$\beta_3=h^+,\quad \gamma_0=\gamma_1=6h^-,\quad \gamma_2=3h^-,\quad \gamma_3=I,\quad \gamma_4=\frac{I}{4},$$

$$\phi_0(t)=\frac{1}{1+t^2},\quad \phi_1(t)=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2},\quad \phi_2(t)=\frac{2(1-3t^2)}{(1+t^2)^3},$$

$$\phi_3(t)=\frac{6(1-6t^2+t^4)}{(1+t^2)^4},\quad \phi_4(t)=\frac{24(1-10t^2+5t^4)}{(1+t^2)^5},$$

$$h^+=f'(a+0)+f'(b-0),\quad h^-=f'(a+0)-f'(b-0)$$

で、iは虚数単位とする.

証明については、定理1.1で得られた一般ベイズ推定量の stochastic expansion を用いて、その特性関数をn^{-1}の order まで求めることができる.

定理1.2から、一般ベイズ推定量$\hat{\theta}_{GB}$の特性関数は、Fisher 情報量Iおよび$f(x)$の台の端点a, bでの左右の微分係数$f'(a-0), f'(b+0)$の和h^+, 差h^-に依存していることが分かる. このことから$\hat{\theta}_{GB}$の2次の漸近挙動は、端点a, bではh^+, h^-を通して、また区間(a, b)の中ではIを通して行われることが分かる.

系1.1. 条件(A.1)〜(A.3)の下で、$2cn(\hat{\theta}_{GB}-\theta)$の漸近密度は$n^{-1}$のorderまで次のようになる.

$$\tilde{g}_n(x)=g_{00}(x)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3}a_j\,g_{0j}(x)+\frac{1}{12c^2n}\sum_{j=0}^{3}\beta_j\,g_{1j}(x)-\frac{1}{18c^2n}\sum_{j=0}^{4}\gamma_j\,g_{2j}(x)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ここでα_j, β_j $(j=0,1,2,3)$, γ_j $(j=0,1,2,3,4)$は定理1.2で与えられたもので

$$g_{0j}(x)=\frac{1}{2}|x|^j e^{-|x|}\quad(j=0,1,2,3)$$

$$g_{10}(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)e^{-|x|},\quad g_{11}(x)=\frac{1}{2}(x-\operatorname{sgn}x)e^{-|x|},$$

$$g_{12}(x)=\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x-x\right)e^{-|x|},\quad g_{13}(x)=\frac{x^2}{2}(x-3\operatorname{sgn}x)e^{-|x|},$$

$$g_{20}(x)=-\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad g_{21}(x)=-\left(\frac{|x|}{2}-1\right)e^{-|x|},$$

$$g_{22}(x)=-\left(\frac{x^2}{2}-2|x|+1\right)e^{-|x|},\quad g_{23}(x)=-\left(\frac{|x|^3}{2}-3x^2+3|x|\right)e^{-|x|}$$

$$g_{24}(x)=-\left(\frac{x^4}{2}-4|x|^3+6x^2\right)e^{-|x|}$$

とする.

証明は定理1.2とフーリエ逆変換を用いて得られる.

系1.2. 条件(A.1)〜(A.3)の下で、$n(\hat{\theta}_{GB}-\theta)$の漸近密度は$n^{-1}$のorderまで次のようになる.

$$g_n(x)=ce^{-2c|x|}\Big[1+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3}(2c)^j\alpha_j|x|^j+\frac{1}{12c^2n}\Big\{6ch^+x+8c^3h^+x^3$$

$$-\left(5h^{+}+\frac{b_3 c}{b_2}\right)\operatorname{sgn} x\Big\} - \frac{1}{9c^2 n}\Big\{6c(h^{-}-I)|x| - 6c^2(h^{-}-I)x^2$$

$$+ 4c^3 I|x|^3 - 2c^4 I x^4\Big\}\Big] + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ただし α_j ($j=0, 1, 2, 3$)は、定理1.2で与えられたものとする.

証明は系1.1から直接得られる.

系1.3. 条件(A.1)〜(A.3)が成り立つと仮定する. さらに $b_3 = h^{+} = 0$ ならば、$n(\hat{\theta}_{GB} - \theta)$ の漸近密度は n^{-1} の order まで次のようになる.

$$g_n(x) = ce^{-2c|x|}\Big\{1 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{4} k_j |x|^j\Big\} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ここで $k_0 = \frac{1}{12c^2}(h^{-}+2I)$, $k_1 = 2c + \frac{1}{6c}(h^{-}+2I)$,

$k_2 = -2c^2 - \frac{1}{3}(4h^{-}-I)$, $k_3 = \frac{2}{9}c(3h^{-}-5I)$, $k_4 = \frac{2}{9}c^2 I$

とする.

証明は、系1.2において $b_3 = h^{+} = 0$ とすることによって導かれる. $f(x)$ が $x=(a+b)/2$ の周りで対称ならば、$h^{+}=0$ という条件は満たされる.

定理1.3. 系1.3と同じ条件の下で、一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ について

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_{GB}-\theta| \le t\} = 1 - e^{-2ct} + \frac{1}{n}e^{-2ct}\Big[\frac{1}{6c}(h^{-}+2I)t + \Big\{2c^2 + \frac{1}{3}(h^{-}+2I)\Big\}t^2$$

$$-\frac{2}{3}c(h^{-}-I)t^3-\frac{2}{9}c^2It^4\Big]+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (t>0)$$

が成り立つ.

証明は系1.3から直接得られる.

2. 推定量の集中確率の 3/2 次の限界

一般に、任意の実数 $k\ (\geq 1)$ について、θ の n・一致推定量が k次の漸近中央値不偏であるとは、任意の $\vartheta \in \Theta$ に対してある正数 δ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} n^{k-1}\left|P_\theta\{\hat\theta_n \leq \theta\}-\frac{1}{2}\right|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} n^{k-1}\left|P_\theta\{\hat\theta_n \geq \theta\}-\frac{1}{2}\right|=0$$

が成り立つことであると定義する. $\mathcal{A}_k$ を k次の漸近中央値不偏推定量全体とする. $\hat\theta_n^*(\in \mathcal{A}_k)$ が k次の両側漸近的有効であるとは、任意の $\hat\theta_n \in \mathcal{A}_k$, 任意の $\theta\in\Theta$, 任意の $t>0$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{k-1}\left[P_\theta\{n|\hat\theta^*-\theta|\leq t\}-P_\theta\{n|\hat\theta_n-\theta|\leq t\}\right]\geq 0$$

が成り立つことであると定義する.

ここで $f(x)$ が $x=(a+b)/2$ の周りで対称であることを仮定する. このとき、$k=3/2$ の場合に $\mathcal{A}_k$ の推定量の集中確率の限界は、3/2 次の order まで次のように得られる.

定理 2.1. 条件 (A.1)～(A.3) の下で、任意の $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_{3/2}$, 任意の $\theta \in \Theta$, 任意の $t>0$ に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_n-\theta|\le t\} \le 1-e^{-2ct}+\sqrt{\frac{2I}{\pi n}}\,te^{-2ct}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

が成り立つ.

証明の概略は、基本的に次節の定理 3.1 と同様である.

定理 2.2. 条件 (A.1)～(A.3) が成り立つと仮定する. さらに $I>0$ ならば、θ の一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ は 3/2 次の両側漸近的有効でない.

証明の概略. $I>0$ ならば、定理 2.1 において与えられた限界の $n^{-1/2}$ の order の項の係数は正である. 一方、定理 1.3 から一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ の集中確率には $n^{-1/2}$ の order の項は存在せず、次の order は n^{-1} であるから、$\hat{\theta}_{GB}$ の集中確率はその限界を $n^{-1/2}$ の order、すなわち 3/2 次の order まで達成できない。

$I=0$ であるための必要十分条件は、$f(x)$ が区間 (a, b) 上の一様になることであるから、この場合には、定理 1.3、定理 2.1 から一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ の集中確率は $o(n^{-1/2})$ まで一致するから、$\hat{\theta}_{GB}$ は 3/2 次の両側漸近有効推定量になる.

次に $I>0$ のときに、θ の最尤推定量の漸近挙動について考察する.

まず $\sum_{j=1}^{n}(\partial/\partial\theta)\log f(x_j-\hat{\theta}_0)=0$ を満たす $\hat{\theta}_0$ をとる. このとき推定量 $\hat{\theta}^*$ を

$$\hat{\theta}^* = \begin{cases} \underline{\theta}, & \hat{\theta}_0 \le \underline{\theta} \text{ のとき、} \\ \bar{\theta}, & \hat{\theta}_0 \ge \bar{\theta} \text{ のとき、} \\ \hat{\theta}_0, & \underline{\theta} < \hat{\theta}_0 < \bar{\theta} \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義すると、これは θ の最尤推定量になる. そこでその集中確率は $n^{-1/2}$ の order まで次のように求められる.

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}\{n|\hat{\theta}^*-\theta_0|\le t\} \\
&= P_0\{n|\hat{\theta}^*|\le t\} = P_0\{-tn^{-1}\le \hat{\theta}^*\le tn^{-1}\} \\
&= P_0\{-tn^{-1}\le \hat{\theta}^*\le tn^{-1},\ \hat{\theta}_0\le \underline{\theta}\} + P_0\{-tn^{-1}\le \hat{\theta}^*\le tn^{-1},\ \hat{\theta}_0\ge \bar{\theta}\} \\
&\quad + P_0\{-tn^{-1}\le \hat{\theta}^*\le tn^{-1},\ \underline{\theta}<\hat{\theta}_0<\bar{\theta}\} \\
&= P_0\{-tn^{-1}\le \underline{\theta}\le 0,\ \hat{\theta}_0\le \underline{\theta}\} + P_0\{0\le \bar{\theta}\le tn^{-1},\ \hat{\theta}_0\ge \bar{\theta}\} \\
&\quad + P_0\{\max(-tn^{-1},\underline{\theta})<\hat{\theta}_0<\min(tn^{-1},\bar{\theta})\} \\
&= 1-e^{-ct}+\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\left(\sqrt{I}+\frac{h}{\sqrt{I}}\right)te^{-ct}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

ただし $h=f'(b-0)=-f'(a+0)$ とする.

上のことと定理 2.1 から、$\hat{\theta}^*$ は 1 次の両側漸近有効推定量ですらないことが分かる.

3. 推定量の集中確率の2次の限界

推定量のクラス $\mathcal{A}_2$ の中で、それらの集中確率の限界は2次の order まで次のように得られる.

定理 3.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) が成り立つと仮定する. さらに $f(x)$ が $x=(a+b)/2$ の周りで対称であれば、任意の $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_2$, 任意の $\theta \in \textcircled{H}$, 任意の $t>0$ に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_n-\theta| \leq t\} \leq 1-e^{-2ct}+\sqrt{\frac{2I}{\pi n}}\, t e^{-2ct}+\frac{1}{n}\left\{2(c^2-h)t^2-\frac{\sqrt{I}\,t}{\sqrt{2\pi}}\right\}e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ. ただし $h=f'(b-0)=-f'(a+0)$ とする.

注意. 定理 3.1 から集中確率の2次までの限界は、$f(x)$ の台 (a, b) の端点 a, b では $c^2-h=f^2(a)+f'(a+0)$ を通して (a, b) の内点では I を通して影響を受けることが分かる.

定理 3.1 の証明の概略. θ_0 を $\textcircled{H}$ において任意に固定する. $\mathcal{A}_2$ の中で $P_{\theta_0}\{n|\hat{\theta}_n-\theta_0| \leq t\}$ を最大にするためには、

$$P_{\theta_0-tn^{-1/2}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\} - P_{\theta_0+tn^{-1}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\}$$

を最大にすればよい. Neyman-Pearson の基本定理と同様の方法によって

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n)=\begin{cases} 1, & \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0+tn^{-1}) > \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0-tn^{-1}) \text{ のとき}, \\ 0, & \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0+tn^{-1}) < \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0-tn^{-1}) \text{ のとき} \end{cases}$$

を用いて、その最大値は

$$E_{\theta_0 - tn^{-1}}(\phi_n^*) - E_{\theta_0 + tn^{-1}}(\phi_n^*)$$

によって与えられる．ただし $\tilde{x}_n = (x_1, \cdots, x_n)$ とする．

ここで $A = \{\tilde{x}_n : \underline{\theta} < \theta_0 - tn^{-1}, \bar{\theta} < \theta_0 + tn^{-1}\}$, $B = \{\tilde{x}_n : \underline{\theta} > \theta_0 - tn^{-1}, \bar{\theta} > \theta_0 + tn^{-1}\}$, $C = \{\tilde{x}_n : \underline{\theta} < \theta_0 - tn^{-1}, \bar{\theta} > \theta_0 + tn^{-1}\}$, $D = \{\tilde{x}_n : Z_1/\sqrt{n} < \theta_0\}$, $D' = \{\tilde{x}_n : Z_1/\sqrt{n} > \theta_0\}$ とおけば、

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1, & \tilde{x}_n \in A \cup (C \cap D) \text{ のとき、} \\ 0, & \tilde{x}_n \in B \cup (C \cap D') \text{ のとき} \end{cases}$$

になる．このとき、任意の $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_2$ に対して

$$\begin{aligned} & P_{\theta_0 - tn^{-1}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\} - P_{\theta_0 + tn^{-1}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\} \\ \leq\ & E_{\theta_0 - tn^{-1}}(\phi_n^*) - E_{\theta_0 + tn^{-1}}(\phi_n^*) \\ =\ & P_{\theta_0 - tn^{-1}}(A) - P_{\theta_0 + tn^{-1}}(A) + P_{\theta_0 - tn^{-1}}(C \cap D) - P_{\theta_0 + tn^{-1}}(C \cap D) \end{aligned}$$

となる．

また $S = n(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$, $T = n(\bar{\theta} - \underline{\theta})/2$ とおいて、S と T の漸近同時密度は

$$f_n(s,t) = \begin{cases} 2c^2 e^{-2ct}\left[1 + \frac{1}{n}\left\{-1 + 4ct + k(t^2 + s^2) - 2c^2t^2 - \frac{2k}{c}t\right\}\right] + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \qquad\qquad (-t < s < t,\ 0 < t), \\ 0 \qquad\qquad (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる．このことから

$$\begin{aligned} P_{\theta_0 - tn^{-1}}(A) &= P_{\theta_0 - tn^{-1}}\{\underline{\theta} < \theta_0 - tn^{-1},\ \bar{\theta} < \theta_0 + tn^{-1}\} \\ &= P_{\theta_0 - tn^{-1}}\{n(\underline{\theta} - (\theta_0 - tn^{-1})) < 0,\ n(\bar{\theta} - (\theta_0 - tn^{-1})) < 2t\} \end{aligned}$$

$$= P_0\{n\underline{\theta} < 0,\ n\bar{\theta} < 2t\}$$
$$= P_0\{S-T<0,\ S+T<2t\}$$
$$= \left(\int_0^t\int_s^{-s+2t} + \int_{-\infty}^0\int_{-s}^{-s+2t}\right) f_n(t,s)\,dt\,ds$$
$$= 1-e^{-2ct} + \frac{2}{n}(c^2-h)t^2e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる．同様にして　$P_{\theta_0+tn^{-1}}(A) = o(1/n)$ を得る．

また $S=s$，$T=t$ が与えられたときの $Z_1/\sqrt{n} < \theta_0$ となる条件付確率は n^{-1} の order まで

$$P_{\theta_0\mp tn^{-1}}\{Z_1/\sqrt{n}<\theta_0 | s,t\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi In}}(2hS\pm It) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi I}\,n}(2hS\mp It) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になるから

$$P_{\theta_0\mp tn^{-1}}\{C\cap D\} = \int_C P_{\theta_0\mp tn^{-1}}\{Z_1/\sqrt{n}<\theta_0|s,t\}f_n(s,t)\,ds\,dt$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2ct} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2I}{\pi n}}\,te^{-2ct}$$
$$+\frac{1}{n}\left\{\left(c+\frac{h}{2c}\mp\frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{2\pi}}\right)t-\left(c^2-\frac{h}{2}\right)t^2\right\}e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる．ただし複号同順とする．従って

$$P_{\theta_0}\{n|\hat{\theta}_n-\theta_0|\le t\} \le 1-e^{-2ct} + \sqrt{\frac{2I}{\pi n}}\,te^{-2ct}$$
$$+\frac{1}{n}\left\{2(c^2-h)t^2 - \frac{\sqrt{I}\,t}{\sqrt{2\pi}}\right\}e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり、θ_0 が任意であるから定理3.1の結論が得られる．

系3.1. 定理3.1と同じ仮定の下で、$I=0$ならばθの一般ベイズ推定量$\hat{\theta}_{GB}$は2次の両側漸近的有効である.

証明の概略. $I=0$のとき$f(x)$は(a,b)上の一様分布であるから$f'(a-0)=f'(b+0)=0$より$h=h^-=0$となる. 定理3.1より$\mathcal{A}_2$の推定量の集中確率の限界は

$$1-e^{-2ct}+\frac{2}{n}c^2t^2e^{-2ct}+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(c=\frac{1}{b-a}\right)$$

で、一方定理1.3より

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_{GB}-\theta|\leq t\}=1-e^{-2ct}+\frac{2}{n}c^2t^2e^{-2ct}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となるから、その限界を一様に達成する. 従って$\hat{\theta}_{GB}$は2次の両側漸近的有効である.

例3.1. $X_1,\cdots,X_n$がたがいに独立に、いずれも次のような対称な切断正規密度

$$f(x-\theta)=\begin{cases} ke^{-(x-\theta)^2/2}, & |x-\theta|<1 \text{ のとき、} \\ 0, & |x-\theta|\geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

をもつ分布に従うとする. ただしkはある正の定数とする.

このとき　$f(-1+0)=f(1-0)=ke^{-1/2}=c$, $f'(-1+0)=c$, $f'(1-0)=-c$となる. $c\fallingdotseq 0.36$, $I\fallingdotseq 0.28$であるから定理3.1によって、任意の$\hat{\theta}_n\in\mathcal{A}_2$, 任意の$\theta\in\Theta$, 任意の$t>0$に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_n-\theta|\le t\}\le 1-e^{-0.72t}+\frac{0.42}{\sqrt{n}}te^{-0.72t}+\frac{1}{n}e^{-0.72t}(0.98t^2-0.21t)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる．一方 $L(u)=u^2$ のとき、定理 1.3 から一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ について

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_{GB}-\theta|\le t\}=1-e^{-0.72t}+\frac{1}{n}e^{-0.72t}(0.59t+0.69t^2-0.11t^3-0.01t^4)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる．従って $\hat{\theta}_{GB}$ は 3/2 次の両側漸近有効推定量でないことが分かる．

References

[1] Akahira, M. (1975). Asymptotic thory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE 22, 8-26.

[2] Akahira, M. (1982). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No.185, Department of Statistics, Stanford University, California.

[3] Akahira, M. (1988). Second order asymptotic optimality of estimators for a density with finite cusps. To appear in the Annals of the Institute of Statistical Mathematics.

[4] Akahira, M. (1988). Second order asymptotic properties of the generalized Bayes estimators for a family of non-regular distributions.

To appear in the Proceedings of the 2nd Pacific Area Statistical Conference, Statistical Theory and Data Analysis II, North-Holland, Amsterdam.

[5] Sugiura, N. and Naing, M. T. (1987). Improved estimators for the location of double exponential distribution. Contributed Papers of 46 Session of ISI, Tokyo, 427-428.