Seguro de Vida em Grupo

Edmundo Éboli Bonini *

1. Introdução. 2. Metodologia. 3. Exemplo Prático.

O seguro é hoje em dia uma das mais importantes instituições e de máxima influência para a sociedade. Seu objetivo primordial é facilitar a tarefa de previdência, mediante a reunião de muitas pessoas, concorrendo tôdas para a massa comum, a fim de que esta possa suprir, em determinado momento, as necessidades eventuais de algumas daquelas pessoas.

As características básicas do seguro são: **previdência, incerteza** e "a reunião de um grande número de riscos homogêneos que permite estabelecer o equilíbrio aproximado entre as prestações dos segurados e as contraprestações do segurador".

Dentre as definições encontradas de autores célebres como Manes, Chauton e Hemard, temos a de Hemard que é mais completa e abarca todos os elementos indispensáveis à institui-

* Professor-contratado do Departamento de Métodos Quantitativos da Escola de Administração de Emprêsas de São Paulo, da Fundação Getúlio Vargas e das Faculdades: F.E.A.U.S.P.; E.E.M.; F.C.E.S.L.; F.C.E.S.P.; F.M.U.; F.C.E.A.D.D. Pedro II; E.H.C.F.A.A.P.

R. Adm. Emp., Rio de Janeiro, 10(4): 121-139, out./dez. 1970

ção do seguro: "uma operação pela qual, mediante o pagamento de uma pequena remuneração, uma pessoa, o segurado, promete para si próprio ou para outrem, no caso de um determinado evento, a que se dá o nome de risco, uma prestação de uma terceira pessoa, o segurador, que, assumindo um conjunto de riscos, os compensa de acôrdo com as leis da estatística e o princípio do mutualismo".

Vejamos porque a definição de Hemard apresenta todos os elementos indispensáveis para a instituição do seguro:

Sinistro — é o risco ocorrido.

Segurador — é a pessoa que assume a responsabilidade do risco.

Segurado — é a pessoa em relação a quem se assume a responsabilidade do risco.

Prêmio — é a remuneração que o segurado paga ao segurador para que êste assuma a responsabilidade do risco.

Os seguros podem ser classificados em dois grandes grupos: de **coisas** e de **pessoas.** No de **coisas** estão enquadrados os ramos de incêndio, transportes, etc., e no de **pessoas,** os seguros dos ramos: vida, acidentes pessoais, invalidez, enfermidade, etc. O primeiro grupo denomina-se **seguros de ramos elementares,** e o segundo, **seguros de vida.**

Chama-se **seguro de vida** aquêle em que a duração da vida humana serve de base para o cálculo do prêmio devido ao segurador, para que êste se obrigue a pagar ao beneficiário do seguro um capital ou uma renda determinados, por morte do segurado ou caso êste sobreviver a um prazo convencionado.

O contrato de seguro de vida é dos mais recentes. Durante muito tempo foi considerado como uma especulação imoral e, por isso, proibida a sua prática. O nosso Código Comercial, que é de 1850, proibia (art. 686, 2) e fulminava de nulidade absoluta (art. 6.774) o seguro de vida de pessoa livre; permitia-o tão-sòmente sôbre a vida dos escravos, porque êstes sendo objeto de propriedade, não eram considerados pessoas e sim coisas.

Foi só nas últimas décadas do século XIX que êsse seguro começou a desenvolver-se entre nós até ser expressamente consagrado pelo Código Civil (art. 1.440 e 1.471 a 1.476).

Como todo seguro, também o seguro de vida se baseia no mutualismo e no cálculo das probabilidades que nessa espécie de seguros é feito, com o auxílio das chamadas "tábuas de mortalidade ou de sobrevivência". Suponhamos que mil indivíduos da mesma idade, gozando saúde normal, contraem, na mesma época, um seguro, em caso de morte, pelo mesmo capital. As tábuas de mortalidade permitirão calcular quantos dêsses indivíduos morrerão provàvelmente no primeiro ano, quantos no segundo, e assim sucessivamente até a morte do último dêles.

De acôrdo com êsses dados, o segurador sabe, de antemão e com um certo grau de precisão, quanto deverá despender em cada um daqueles anos com o pagamento dos capitais estipulados para os mil segurados.

Sabe também que o risco de morte irá crescendo de ano para ano, à medida que os referidos segurados forem envelhecendo, porque, a não ser no período infantil, quanto mais velho é o indivíduo, tanto maior é a probabilidade da sua morte.

Quanto ao número de pessoas seguradas, as apólices de seguro de vida podem ser: seguro individual, seguro em conjunto sôbre duas ou mais vidas, seguro temporário de pequenos grupos reunidos **(baby-group)** e seguro temporário em grupo.

Seguro de vida individual: é feito e calculado para uma única pessoa. Apresenta as seguintes modalidades: seguro para o caso de morte, seguro para o caso de sobrevivência, seguro misto, que é uma combinação dos dois anteriores, e seguro a têrmo fixo, aquêle em que a seguradora se compromete a pagar um capital ou uma renda no término de um prazo prefixado, cessando o pagamento dos prêmios periódicos com a morte do segurado. Se ocorrer a morte do segurado antes do prazo estabelecido, a importância devida pela seguradora só será paga no final daquele prazo.

Seguro de vida em conjunto para duas ou mais vidas: a cobertura dêste seguro abrange mais de uma vida com uma só apólice, para garantir o pagamento de um capital ou de uma renda. O valor do prêmio a ser pago pelo conjunto de segurados depende da idade de cada um e das probabilidades de morte ou de sobrevivência dos mesmos. Comumente êsse contrato é utilizado para segurar marido e mulher ou sócios de firmas comerciais, podendo ser indicado, neste caso, como beneficiário, a pessoa jurídica. As principais modalidades são: 1. seguro para caso de morte — a importância segurada será paga, logo após o falecimento de um dos segurados, ao sobrevivente; a importância segurada só será paga aos beneficiários, quando ocorrer o falecimento do último segurado sobrevivente; 2. seguro para casos de sobrevivência — a importância segurada será paga ao término do período de tempo estipulado, se todos os segurados estiverem com vida; a importância segurada será paga a todos os sobreviventes do grupo no término do deferimento.

Seguro de vida temporário de pequenos grupos agregados (baby-groups): destina-se a segurar empregados de pequenas firmas ou entidades que tenham no máximo 50 empregados e no mínimo 7, extensivo aos dirigentes desde que êstes tenham atividades regulares na firma ou entidade. Êstes grupos segurados são agrupados de acôrdo com a afinidade de atividade, formando assim um grupo maior, que nunca poderá ser inferior a 200 vidas, para fins de aceitação, e 150 vidas, para fins de manutenção.

Seguro de vida temporário em grupo: destina-se a segurar os empregados (e suas espôsas) de estabelecimentos comerciais, industriais e associados de entidades recreativas, culturais e representativas de categorias profissionais, por meio de uma única apólice denominada **mestra,** emitida em nome do empregador, ou associação, que é **estipulante** do seguro. Cada segurado, por sua vez, receberá um documento chamado **certificado de seguro em grupo,** no qual são registrados, além do nome do segurado, a importância do risco individual e um extrato das condições de apólice. Êste seguro é feito por um ano, sendo reajustado no aniversário da apólice em virtude do envelhecimento do grupo segurado. O seguro de vida em grupo caracteriza-se pela duração anual do risco e estabelecimento de um prêmio médio para todos os componentes do grupo.

2. Metodologia

A matemática financeira estuda os capitais no sentido certo, sendo que a matemática atuarial estuda no sentido aleatório; poderíamos dizer que a matemática financeira constitui um caso particular da matemática atuarial, em que a probabilidade de ocorrer um certo evento é igual a 1.

G. Low, atuário escocês, disse que "o seguro sôbre a vida considerado como um negócio está alicerçado sôbre o princípio de que o número de mortes que pode ocorrer, em um grupo suficientemente numeroso de pessoas, não é inteiramente arbitrário, sendo que está relacionado a leis de médias, cuja grande uniformidade e exatidão permite estabelecer bases de cálculo sôbre as quais podem arriscar, sem temor, os seguradores, seus capitais e os segurados, o porvir daqueles por quem deve zelar".

De acôrdo com êsse princípio foram criadas as Tábuas de Mortalidade ou Sobrevivência. Tais tábuas partem de um grupo inicial de pessoas e mostram o comportamento dêsse grupo ao longo dos anos. As tábuas permitem às companhias de seguro fixar as taxas de contribuição para seus clientes. Existem diversas tábuas de mortalidade. Dentre elas podemos citar:

Tábua H^M de 1869,
Tábua das Companhias Alemãs, de 1883,
Tábua Italiana (M), de 1901
Tábua de Mortalidade Hunter's Semitropical,
Tábua de Mortalidade C.S.O., de 1941,
Experiência Brasileira do Dr. Gastão Quartlum P. de Moura e
Tábua de Mortalidade American Experiences,

sendo que esta última se encontra tabelada em nosso Anexo 1.

George King define a tábua de mortalidade como sendo "o instrumento destinado a medir as probabilidades de vida e morte".

Em 1898, o Segundo Congresso Internacional de Atuários, realizado em Londres, apresentou um trabalho publicado sob o título de **Notação Universal,** que estabelece a simbologia a ser adotada na matemática atuarial. Asim, as tábuas de mortalidade apresentam os seguintes símbolos:

x = idade

l_x = número de pessoas que, pela tábua de mortalidade, atinge exatamente a idade x no prazo de um ano (l corresponde à letra inicial da palavra inglêsa **living**). Assim, por exemplo, em nosso Anexo 1, temos que a idade inicial é 10 anos, isto é, $l_{10} = 100.000$. Dêsse grupo, 99.251 pessoas atingem a idade de 11 anos, pois 749 faleceram entre as idades de 10 e 11 anos.

d_x = número de pessoas que representa o número de mortes numa determinada idade. Assim, por exemplo, de 11 para 12 anos desaparecem 746 das 99.251 e sobrevivem 98.505; temos então $d_{11} = 746$ e $l_{12} = 98.505$ e assim sucessivamente até chegarmos a idade w (idade extrema) da tábua, que é 95 anos. Nesta idade, temos $l_w = 3$ e $d_w = 3$; isto quer dizer que nenhum dos três sobreviventes da idade de 95 anos alcançou a idade de 96 anos. Do exemplo acima, temos que: $d_x = l_x - l_{x+1}$.

p_x = probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver um ano, também denominada taxa de sobrevivência

$p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}$; exemplo: com auxílio do Anexo 1, qual a taxa de sobrevivência de uma pessoa de 45 anos?

$p_{45} = \dfrac{l_{46}}{l_{45}} = \dfrac{73345}{14173} = 0{,}98884$ (o que pode ser constatado na própria tábua).

$q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$; as taxas de mortalidade e de sobrevivência são complementares; estão $p_x + q_x = 1$ ou seja: $q_x = 1 - p_x$, sendo que os valôres de q_x também estão em nosso Anexo 1.

${}_np_x$ = probabilidade de uma pessoa de idade x estar viva daqui a n anos.

$$ {}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots\cdots\cdots p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} $$

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

Exemplo: a probabilidade de uma pessoa de 40 anos chegar aos 50 será:

$$ {}_{10}p_{40} = \frac{l_{50}}{l_{50}} = \frac{69804}{78106} = 0{,}89371 $$

Entre outras funções biométricas e extensões relativas a uma vida, temos:

$$_{n/}q_x = {}_np_x \cdot q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

$_nq_x$ = probabilidade de uma pessoa sobreviver ou morrer em n anos é 1. Então:

$/_nq_x + {}_np_x = 1 = /_nq_x = 1 - {}_np_x$

$_{m/n}\, q_x$ = probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades de x + m e x + m + m.

$_{m/n}\, q_x = {}_mp_x \cdot /_n\, q_{x+m} = {}_mp_x\, (1 - {}_np_{x+m})$

$$_{m/n}q_x = {}_mp_x - {}_mp_x\, {}_np_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m+n}}{l_{x+m}}$$

$$_{m/n}q_x = \frac{l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_{x+m+n}}{l_x}$$

$_nE_x$ = **capital diferido** ou **total puro;** consiste numa obrigação, por parte da sociedade, de pagar um capital à pessoa segurada, se esta sobreviver a um período determinado, desde que pague o prêmio devido à seguradora. E é a inicial da palavra inglêsa **endowment** (dotação). $_xE_n$ é o prêmio puro a ser pago por uma pessoa de idade x, a fim de ter o direito de receber o capital de 1 cruzeiro dentro de n anos, caso esteja viva. O valor do prêmio puro é feito aplicando-se o princípio euleriano, que se baseia na seguinte propriedade: "o valor atual do compromisso dos segurados é igual ao valor atual do compromisso do segurador".

Cada uma das pessoas do grupo l_x, tôdas de idade x, se compromete a pagar, de uma só vez, ao segurador o prêmio $_nE_x$, e a importância total a ser paga pelos l_x pessoas é $_nE_x \cdot l_x$, que representa o valor atual do compromisso dos segurados.

Por sua vez, o segurador se compromete a pagar 1 cruzeiro a cada uma das pessoas sobreviventes de x quando as mesmas tiverem $(x + n)$ anos. O capital a ser pago é igual ao produto de 1 cruzeiro pelo número de sobreviventes l_{x+n} e o valor atual dêsse compromisso é:

$V^n l_{x+n}$, onde $V^n = (l_{+i})^{-n}$ que corresponde ao valor atual de um capital vencível daqui a n anos, considerando-se a capitalização composta e a taxa de juros i.

Aplicando o princípio euleriano:

$$_nE_n l_x = V^n l_{x+n}$$

$$_nE_x = V^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = V^n \, _np_x = HA^{1}_{x:\overline{1|}}$$

$$\text{ou } _nE_x = V^x v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{V^{n+x} l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Onde $D_x = V^x l_x$ (Anexo 2) e onde A (inicial da palavra inglêsa *assurance*) é sempre empregado para representar prêmio único dos seguros de capital.

O n sob o sinal especial *ângulo reto* indica duração; o número 1 sob o n denota que o capital de 1 cruzeiro só será pago, se a pessoa de idade x sobreviver n anos. Exemplo: quer-se assegurar para uma pessoa de 30 anos um capital de Cr$ 100.000,00 no caso dela atingir a idade de 45 anos. Qual o prêmio único puro do seguro?

$$A = C_{15}E_{30} = 100.000{,}00 \cdot \frac{D_{45}}{D_{30}}$$

$$A = 100.000{,}00 \times \frac{12.698{,}29}{26.343{,}06} \text{ x } 48.203{,}56$$

$\ddot{a}_x$ = renda vitalícia imediata antecipada.

Em matemática financeira, renda é uma sucessão de capitais vencíveis em diferentes épocas; no caso, uma pessoa de idade x deve pagar o prêmio único para, em troca, começar a receber imediatamente, desde o início do contrato, 1 cruzeiro de ano em ano, de semestre em semestre, etc., renda essa devida pela seguradora até a extinção da vida segurada. Então, êste caso constituiu uma extensão de $_nE_x$; portanto:

$$\ddot{a}_x = {_0E_x} + {_1E_x} + {_2E_x} + \ldots$$
$$\ddot{a}_x = v^0 {_0p_x} + v p_x + v^2 {_2p_x} + \ldots$$
$$\ddot{a}_x = 1 + v \frac{1_{x+1}}{1_x} + v^2 \frac{1_{x+2}}{1_x} + v^3 \frac{1_{x+3}}{1_x} + \ldots$$

multiplicando o segundo membro de igualdade acima por $\frac{V^x}{V^x}$, teremos;

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x}{v^x} + \frac{V^{x+1}}{v^x \, 1_x} \cdot 1_{x+1} + V^{x+2} \frac{1_{x+2}}{v^x \, 1_x} + V^{x+3} \frac{1_{x+3}}{v^x \, 1_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{D_{x+0} + D_{x+1} + D^x{}_{+2} + \ldots}{D_x}$$

Então, se tivéssemos que calcular o valor de $\ddot{a}_x$ para cada x, deveríamos desenvolver todo o segundo membro. Coube a J. Titens, em 1785, na Alemanha, a ventura de dar ao ramo vida um grande melhoramento, ao mostrar que qualquer que fôsse a lei de sobrevivência adotada seria possível com auxílio de seis tabelas apenas e sob determinada taxa de juros, calcular ràpidamente os prêmios puros de todos os planos de seguros sob uma vida. As tabelas por êle construídas são hoje denominadas Tabelas de Comutação. Os principais símbolos são D_x, N_x, S_x, C_x M_x, R_x onde x = idade (ver Anexo 2).

Iremos apenas analisar os símbolos D_x, N_x e M_x, uma vez que utilizaremos sòmente êstes no presente trabalho.

Sejam as séries:

$$1_0,\ 1_1,\ 1_3,\ 1_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ 1_x,\ 1_{x+1},\ 1_{x+2},\ \ldots.\ 1_w$$
$$1,\ v,\ v^2,\ v^3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ v^x,\ v^{x+1},\ v^{x+2},\ \ldots.\ v^w$$

Multiplicando os correspondentes valôres da segunda série pela primeira teremos os números de comutação D_x, sendo $D_x = 1_x \, v^x$.

Há dois critérios para a determinação do número de comutação N_x:

critério Davies: $N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots. = \sum_{t=1}^{W} D_{x+t}$

critério Barret: $N_x = D_{x+0} + D_{x+1} + \ldots. = \sum_{t=0}^{W} D_{x+t}$

Utilizaremos o critério Barret; então $\ddot{a}$ será dado por:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{W} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{W} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

Exemplo: qual o prêmio único que deverá pagar uma pessoa de 30 anos de idade a fim de que receba uma renda anual de Cr$ 1.000,00 no começo de cada ano até a sua morte?

$$A = C\ddot{a}_x = 1.000,00 \cdot \frac{N_{30}}{D_{30}} = 1.000,00 \cdot \frac{481831,33}{26343,06}$$

$$A = 1.000,00 \times 18,29063 = 18.290,63$$

Sejam as séries:

$$d_0,\ d,\ d_2,\ d_3,\ \ldots\ldots\ldots,\ d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2},\ \ldots\ldots,\ d^w$$
$$v,\ v^2,\ v^3,\ v^4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ v^x,\ v^{x+1},\ v^{x+2},\ \ldots\ldots,\ v^w$$

Multiplicando os correspondentes valôres da segunda série pela primeira, teremos os números de comutação C_x, sendo $C_x = d_x v^{x+1}$.

O número de comutação $M_x = C_{x+0} + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} \ldots$ Genèricamente $M_x = \sum_{t=0}^{w} C_{x+t}$

A_x = o valor atual do seguro de vida inteira ou prêmio único puro do referido seguro. Admitimos que l_x pessoas façam um contato com uma companhia seguradora para ficarem segurados pelo plano "vida inteira". A seguradora se compromete a pagar a cada um dos beneficiários dos segurados falecidos um cruzeiro de importância segurada. Assim, durante o primeiro ano de contrato, isto é, entre as idades x e $x + l$, falecem d_x pessoas; serão pagos d_x cruzeiros de benefícios, porém, como esta importância total só será paga no fim do ano, o valor atual será:

No segundo ano falecem d_{x+1} pessoas e serão pagos d_{x+1} cruzeiros, sendo o valor atual dessa importancia total: $v^2 d_{x+1}$ e assim sucessivamente. Então o compromisso da seguradora será:

$$vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots$$

Sendo l_x o número de pessoas seguradas e como uma delas pagará o prêmio único A_x, concluímos que o compromisso dessas pessoas nesse contrato é: $1_x A_x$.

Aplicando o princípio euleriano, temos:

$$1_x A_x = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots$$

$$A_x = \frac{vd_x + v^2d_{x+1} + v^3d_{x+2} + \ldots}{1_x}$$

Multiplicando por $\frac{v^x}{v_x}$ o segundo membro de igualdade acima, teremos:

$$A_x = \frac{v^{x+1}\, d_x + v^{x+2}\, d_{x+1} + v^{x+3}\, d_{x+2} + \ldots}{v^x 1_x}$$

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots.}{D_x}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Exemplo: qual o prêmio único correspondente a um seguro de vida inteira de Cr$ 1.000,00, relativa à vida de uma pessoa de 30 anos?

$$A = C\,.\,A_x = 1.000{,}00\,.\,\frac{M_{30}}{D_{30}} = 1.000{,}00\,\frac{7811{,}081}{26243{,}o6}$$

$$A = 1.000{,}00 = 0{,}296514 = 296{,}51$$

P_x = prêmio puro anual de qualquer seguro. P é o inicial da palavra inglêsa **premium.** A determinação dêste prêmio é relativamente fácil; é como se se tratasse de um seguro de renda antecipada (vitalícia ou temporária), no qual o beneficiário é o segurador e o segurado é quem pagará a renda. O pagamento dos prêmios anuais é feito antecipadamente. Generalizando a operação, chamemos de A o prêmio único puro de seguro, ou o débito total do segurado para com o segurador; de P, a quota anual ou prêmio anual cuja soma dos valôres atuais de cada uma dessas prestações se torna igual ao prêmio único do seguro. A operação consiste em achar o valor atual das prestações anuais, sendo cada uma igual a P. Assim, se a quota anual é l, a soma dos valôres atuais dessas prestações será $\ddot{a}$, uma vez que essas quotas são sempre pagas antecipadamente. Se a referida prestação, em vez de l, fôr P, o valor atual da mesma será: $P\ddot{a}$. Êste valor, conforme dissemos anteriormente, deve ser igual ao prêmio único; logo:

$$P\ddot{a} = A$$

$$P = \frac{A}{a}$$

Baseado nesta fórmula generalizada, podemos encontrar o prêmio anual de qualquer seguro. Quando os prêmios são pagos anualmente e por tôda a vida da pessoa segurada, o plano toma o nome de **vida inteira a prêmios vitalícios** ou mais comumente **Ordinário de Vida.** O seguro Ordinário de Vida é representado por P_x, sendo o prêmio pago anualmente e por tôda a vida da pessoa segurada, o valor atual de tôdas as prestações, iguais cada uma e P_x, é: $P_x\ddot{a}_x$ e êste produto é igual ao prêmio puro único do seguro, logo:

$$P_x \, \ddot{a}_x = A_x$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\dfrac{M_x}{D_x}}{\dfrac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x}$$

Exemplo: qual o prêmio anual vitalício de uma pessoa de 30 anos de um seguro ordinário de vida de Cr$ 1.000,00?

$$P = CP_x = 1.000{,}00 \, \frac{M_{30}}{N_{30}} = 1.000{,}00 \, \frac{7811{,}081}{481831{,}33}$$

$$P = 1.000{,}00 \times 0{,}016211 = 16{,}21$$

$A^e1_{x\,:\,\overline{1|}}$ = valor atual do capital unitário, pagável no fim do ano, pela mudança de estado.

$A^e1_{x\,:\,\overline{1|}} = v\,q^e_x$ = probabilidade de mudança de estado de uma pessoa de idade x.

$$A^e1_{x\,:\,\overline{1|}} = v\,q^e_x = v\,\frac{d_x}{1_x} = \frac{v^{x+1}d_x}{v_x 1_x}$$, como $v^{x+1}d_x = C_x$ e $v^x 1_x = D_x$,

temos:

$$A^e1_{x\,:\,\overline{1|}} = \frac{C_x}{D_x} \quad \text{(B)}$$

P_x = prêmios comerciais ou de tarifa. Os prêmios puros também denominados **prêmios líquidos** ou **prêmios matemáticos** são os que se destinam ùnicamente a fazer face aos compromissos do segurador para com os beneficiários. O prêmio comercial ou de tarifa é igual ao prêmio puro mais o carregamento. Dentre as várias espécies de carregamento, as principais são:

a) carregamento para cobrir despesas gerais
b) carregamento de segurabilidade
d) carregamento para constituir lucros.

Então:

$$P''_x = A^{e}1_{x\,:\,\overline{1|}} + \alpha, \; \alpha = \text{carregamento}$$

$$P''_x = \frac{C_x}{D_x} + \alpha \quad (\gamma)$$

$$P''_m = \text{prêmio médio do grupo}$$

$$P''_m = \frac{\sum_{x=20}^{w} P''_x C_x}{\sum_{x=20}^{w} C_x} \quad (\Delta)$$

onde P''_x = prêmio comercial básico para idade x (fórmula Δ)
C_x = capitais segurados da idade x

$$P_m = (C_{segurado} \times P''_m) \frac{1{,}08}{12} \quad (\mu)$$

3. Exemplo Prático

Seja um grupo de funcionários da Cia. *A* com as seguintes informações:

Quadro 1

Funcionário	Data Nascimento	Idade	Ordenado Mensal
A	16. 7.1946	24	500,00
B	31. 1.1942	28	700,00
C	1.10.1945	24	1.500,00
D	14. 7.1942	28	700,00
E	5. 8.1944	26	400,00
F	28.10.1944	25	900,00
G	9. 8.1942	28	300,00
H	1. 5.1948	22	250,00
I	12. 7.1942	28	780,00
J	18. 5.1942	28	700,00
K	11. 9.1944	26	500,00
L	30. 4.1943	27	800,00
M	19. 5.1945	25	500,00
N	15. 3.1948	21	500,00
O	20. 6.1946	24	500,00
P	1. 2.1942	28	900,00
Q	25. 1.1945	25	400,00

Colocando os salários mensais em intervalos de classe de Cr$ 250,00 e considerando o capital segurado em caso de morte de 10 vêzes o limite superior do intervalo de classe, teremos:

Quadro 2

Classes de Salários	Capital Segurado
250,00 a 500,00	5.000,00
501,00 a 750,00	7.500,00
751,00 a 1.000,00	10.000,00
1.001,00 ou mais	20.000,00

Em função dos Quadros 1 e 2, teremos:

Quadro 3

Idade	Freqüên-cia	Composição Capital Segurado	Total por Idade
21	1	5.000,00	5.000,00
22	1	7.500,00	7.500,00
23	–	—	—
24	3	2 × 5.000,00 + 20.000,00	30.000.00
25	3	2 × 5.000,00 + 10.000,00	20.000,00
26	2	2 × 5.000,00	10.000,00
27	1	5.000,00	5.000,00
28	6	4 × 7.500,00 + 5.000,00 + 10.000,00	45.000,00
Total	17	—	122.500,00

Em função do nosso Anexo 2, poderemos calcular o prêmio puro (fórmula B) e o prêmio comercial ou de tarifa (fórmula γ). sendo γ = 0,0015 ou 1,5%.

Quadro 4

Idade X	C_x	D_x	$A^{e}1_{x\,:\,\overline{1}|}$	$A^{e}1_{x\,:\,\overline{1}|} + \alpha$
21	304,6518	40334,95	0,007553	0,009053
22	292,5287	38478,96	0,007602	0,009102
24	269,7090	35013,79	0,007703	0,009203
25	258,9749	33397,40	0,007754	0,009254
26	249,0143	31853,91	0,007817	0,009317
27	239,4368	30379,74	0,007881	0,009381
28	230,2277	28971,86	0,007947	0,009447

Em função do Quadro 3 e do Quadro 4 podemos determinar o prêmio anual (CAPITAL SEGURADO $\times$ PRÊMIO COMERCIAL) e o Prêmio Médio do Grupo (Fórmula $^{\Delta}$).

Quadro 5

Idade	Freqüência	Capital Segurado	Prêmio Comercial	Prêmio Anual
21	1	5.00,000	0,009053	45,265
22	1	7.500,00	0,009102	68,265
24	3	30.000,00	0,009203	276,090
25	3	20.000,00	0,009254	185,080
26	2	10.000,00	0,009317	93,170
27	1	5.000,00	0,009381	46,905
28	6	45.000,00	0,009447	423,720
Total	17	122.500,00	—	1.138,495

$$P''_m = \frac{\Sigma\,(A^{e}1_{x:\overline{1|}} + \alpha)\,C_x}{\Sigma\,C_x} = \frac{1.138{,}495}{122.500{,}00}$$

$$P''_m \quad 0{,}009238 \text{ ou } 0{,}29\%$$

Em função do Prêmio Médio do Grupo P_m elaboramos o quadro abaixo que consta o Prêmio Mensal (fórmula $^{\mu}$).

Quadro 6

Classe de Salário	Capital Segurado	Prêmio Mensal
280,00 a 500,00	5.000,00	4,19
501,00 a 780,00	7.500,00	6,27
751,00 a 1.000,00	10.000,00	8,36
1.001,00 ou mais	20.000,00	16,73

Bibliografia

BONINI, Edmundo. Investimentos e Retornos Parciais. *Revista Publicidade Industrial,* agôsto de 1966; Amortização de Empréstimos. *Revista de Administração de Emprêsa,* nº 26, março de 1968.

FREEMAN, Harry. *Mathematics for Actuarial Students.* Cambridge, University Press, 1940

FURQUIM, Clodomiro de Almeida. *Cálculo Operatório na Matemática Financeira.* São Paulo, Tipografia Rosolillo, 1957.

GLOVER, W. James. *Tables of Supplied Mathematics in Finance, Insurance.* The George Whar Publishing Co., 1951.

RICHARD, P. J. *Théorie et Pratique des Opérations d'Assurance.* Paris, G. Dom and C., 1946.

SPURGEON, E. F. *Life Contingencies.* Cambridge, University Press, 1946.

VILANOVA, Wilson. *Matemática Atuarial.* São Paulo, Livraria Pioneira Editôra, 1969.

Anexo 1

Tábua de Mortalidade American Experience

y	l_x	d_x	p_x	q_x
10	100 000	749	.992 510	.007 490
11	99 251	746	.992 484	.007 516
12	98 505	743	.992 457	.007 543
13	97 762	740	.993 421	.007 569
14	97 022	737	.992 404	.007 596
15	96 285	735	.992 366	.007 634
16	95 550	732	.992 339	.007 661
17	94 818	729	.992 312	.007 688
18	94 089	727	.992 273	.007 727
19	93 362	725	.992 235	.007 765
20	92 637	723	.992 195	.007 805
21	91 914	722	.992 145	.007 855
22	91 192	721	.992 094	.007 906
23	90 471	720	.992 042	.007 958
24	89 751	719	.991 989	.008 011
25	89 032	718	.991 935	.008 065
26	88 314	718	.991 870	.008 120
27	87 596	718	.991 803	.008 197
28	86 878	718	.991 736	.008 264
29	86 160	719	.991 655	.008 345
30	85 441	720	.991 573	.008 427
31	84 721	721	.991 490	.008 510
32	84 000	723	.991 393	.008 607
33	83 277	726	.991 282	.008 718
34	82 551	729	.991 169	.008 831
35	81 822	732	.991 054	.008 946
36	81 090	737	.990 911	.009 089
37	80 353	742	.990 766	.009 234
38	79 611	749	.990 592	.009 408
39	78 862	756	.990 414	.009 586
40	78 106	765	.990 206	.009 794
41	77 341	774	.989 992	.010 008
42	76 567	785	.989 748	.010 252
43	75 782	797	.989 483	.010 517
44	74 985	812	.989 171	.010 829
45	74 173	828	.988 837	.011 163
46	73 345	848	.988 438	.011 562
47	72 497	870	.988 000	.012 000
48	71 627	896	.987 491	.012 509
49	70 731	927	.986 894	.013 106
50	69 804	962	.986 219	.013 781
51	68 842	1 001	.985 459	.014 541
52	67 841	1 044	.984 611	.015 389

Anexo 1

Tábua de Mortalidade American Experience

y	l_x	d_x	p_x	q_x
53	66 797	1 901	.983 667	.016 333
54	65 706	1 143	.982 604	.017 396
55	64 563	1 199	.981 429	.018 571
56	63 364	1 260	.980 115	.019 885
57	62 104	1 325	.978 665	.021 335
58	60 779	1 394	.977 064	.022 936
59	59 385	1 468	.975 280	.024 720
60	57 917	1 546	.973 307	.026 693
61	56 371	1 628	.971 120	.028 880
62	54 743	1 713	.968 708	.031 292
63	53 060	1 800	.966 057	.033 943
64	51 230	1 889	.963 127	.036 873
65	49 341	1 980	.959 871	.040 129
66	47 361	2 070	.956 293	.043 707
67	45 291	2 158	.952 353	.047 647
68	43 133	2 243	.947 998	.052 002
69	40 890	2 321	.943 238	.056 762
70	38 569	2 391	.938 007	.061 993
71	36 178	2 448	.932 335	.067 665
72	33 730	2 487	.926 267	.073 733
73	31 243	2 505	.919 822	.080 178
74	28 738	2 501	.912 972	.087 028
75	26 237	2 476	.905 629	.094 371
76	23 761	2 431	.897 689	.102 311
77	21 330	2 369	.888 936	.111 064
78	18 961	2 291	.879 173	.120 827
79	16 670	2 196	.868 266	.131 134
80	14 474	2 091	.855 534	.144 466
81	12 383	1 964	.841 395	.158 605
82	10 419	1 816	.825 703	.174 297
83	8 603	1 648	.808 439	.191 561
84	6 955	1 470	.788 641	.211 359
85	5 485	1 292	.764 448	.235 552
86	4 193	1 114	.734 319	.265 681
87	3 079	933	.696 980	.303 020
88	2 146	744	.653 308	.346 692
89	1 402	555	.604 137	.395 863
90	847	385	.545 455	.454 454
91	462	246	.467 534	.532 466
92	216	137	.365 741	.634 259
93	79	58	.265 823	.734 177
94	21	18	.142 857	.857 143
95	3	3	.000 000	1.000 0000

Anexo 2

Tábua de Comutações American Experience — 4%

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
10	67 556.42	1 379 083.20	24 937 065.7	486.536 1	14 514.755	420 042.21
11	64 471.56	1 311.526.78	23 557 982.5	465.949 4	14 028.219	405 527.46
12	61 525.93	1 247 055.23	22 246 455.7	446.226 5	13 562.270	391 499.24
13	58 713.32	1 185 529.30	20 999 400.5	427.331 6	13 116.043	377 936.97
14	56 027.79	1 126 815.97	19 813 871.2	409.229 9	12 688.712	364 820.93
15	53 463.64	1 070 788.18	18 687 055.2	392.422 5	12 279.482	352 132.21
16	51 014.93	1 017 324.54	17 616 267.0	375.789 2	11 887.059	339 852.73
17	48 677.02	966 309.61	16 598 942.5	359.854 9	11 511.270	327 965.67
18	46 444.98	917 632.59	15 632 632.8	345 065.0	11 151.415	316 454.40
19	44 313.57	871 187 61	14 715 000.3	330.880 5	10 806.350	305 302.99
20	42 278.32	826 874.05	13 843 812.6	317.270 7	10 475.470	294 496.64
21	40 334.95	784 595.73	13 016 938.6	304.651 8	10 158.193	284 021.17
22	38 478.96	744 260.78	12 232 342.9	292.528 7	9 853.541	273 862.98
23	36 706.47	705 781.82	11 488 082.1	280.887 5	9 561.012	264 009.43
24	35 013.79	669 075.36	10 782.300.3	269.709 0	9 280.125	254 448.42
25	33 397.40	634 061.56	10 113 224.9	258.974 9	9 010.416	245 168.30
26	31 853.91	600 664.16	9 479 163.34	249.014 3	8 751.441	236 157.88
27	30 379.74	568 510.26	8 878 499.18	239.436 8	8 502.427	227 406.44
28	28 971.86	538 430.51	8 309 688.92	230.227 7	8 262.990	218 904.01
29	27 627.33	509 458.66	7 771 258.41	221.681 1	8 032.762	210 641.02
30	26 343.06	481 831.33	7 261 799.75	213.451 4	7 811.081	202 608.26
31	25 116.41	455 488.27	6 779 968.42	205.526 8	7 597.630	194 797.18
32	23 944.87	430 371.87	6 324 480.15	198.170 1	7 392.103	187 199.55
33	22 825.74	406 427.00	5 894 108.29	191.338 8	7 193.933	179 807.45
34	21 756.49	383 601.26	5 487 681.29	184.739 9	7 002.594	172 613.52
35	20 734.96	361 844.77	5 104 080.03	178.365 5	6 817.854	165 610.92
36	19 759.10	341 109.81	4 742 235.26	172.676 8	6 639.489	158 793.07
37	18 826.45	321 350.71	4 401 125.45	167.161 8	6 466.812	152 153.58
38	17 935.20	302 524.26	4 079 774.74	162.248 8	6 299.650	145 686.77
39	17 083.13	284 589.06	3 777 250.48	157.466 5	6 137.401	139 387.12
40	16 268.62	267 505.92	3 492 661.42	153.212 6	5 979.935	133 249.72
41	15 489.70	251 237.30	3 225 155.50	149.053 0	5 826.722	127 269.78
42	14 744.88	235 747.61	2 973 918.20	145.357 0	5 677.669	121 443.06
43	14 032.42	221 002.72	2 738 170.59	141.902 9	5 532.312	115 765.39
44	13 350.81	206 970.30	2 517 167.87	139.013 1	5 390.409	110 233.08
45	12 698.29	193 619.50	2 310 197.57	136.300 3	5 251.396	104 842.67
46	12 073.60	180 921.20	2 116 578.07	134.223 6	5 115.096	99 591.273
47	11 475.01	168 847.60	1 935.656.87	132.409 5	4 980.872	94 476.177
48	10 901.25	157 372.58	1 764 809.28	131.121 6	4 848.463	89 495.305
49	10 350.85	146 471.33	1 607 436.69	130.440 6	4 717.341	84 646.842

Anexo 2

Tábua de Comutações American Experience — 4%

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
50	9 822.303	136 120.48	1 460 965.36	130.159 2	4 586.900	79 929.501
51	9 314.363	126 298.17	1 324 844.89	130.226 8	4 456.741	75 342.601
52	8 125.892	116 983.81	1 898 546.71	130.597 1	4 326.514	70 885.659
53	8 355.837	108 157.92	1 081 562.90	131.227 4	4 195.917	66 559.345
54	7 903.232	99 802.081	973 404.985	132.194 3	4 064.690	62 363.427
55	7 467.067	91 898.849	873 602.904	133.337 5	3 932.496	58 298.738
56	7 046.535	84 431.782	781 704.055	134.731 8	3 799.158	54 366.242
57	6 640.782	77 385.248	697 272.272	136.233 0	3 664.426	50 567.083
58	6 249.134	70 744.466	619 887.024	137.814 8	3 528.193	46 902.657
59	5 870.968	64 495.331	549 142.559	139.548 7	3 390.379	43 374.464
60	5 505.613	58 624.363	484 647.228	141.310 9	3 250.830	39 984.085
61	5 152.548	53 118.750	426 022.865	143.082 8	3 109.519	36 733.255
62	4 811.290	47 966.202	372 904.115	144.762 8	2 966.436	33 623.736
63	4 481.478	43 154.911	324 937.914	146.264 5	2 821.674	30 657.299
64	4 162.849	38 673.434	281 783.002	147.592 7	2 675.409	27 835.626
65	3 855.147	34 510.585	243 109.569	148.752 1	2 527.816	25 160.217
66	3 558.119	30 655.438	208 598.984	149.532 9	2 379.064	22 632.400
67	3 271.735	27 097.319	177 943.546	149.894 0	2 229.531	20 253.337
68	2 996.005	23 825.584	150 846.227	149.805 9	2 079.637	18 023.806
69	2 730.969	20 829.578	127 020.643	149.053 2	1 929.831	15 944.169
70	2 476.878	10 098.610	106 191.065	147.642 9	1 780.778	14 014.338
71	2 233.971	15 621.732	88 092.454 9	145.348 6	1 633.135	12 233.560
72	2 002.700	13 387.761	72 470.723 3	141.984 9	1 487.786	10 600.426
73	1 783.688	11 385.061	59 082.962 2	137.512 0	1 345.8[illegible]1	9 112.639 4
74	1 577.573	9 601.373	47 697.901 3	132.012 0	1 208.289	7 766.838 1
75	1 384.885	8 023.800	38 096.528 6	125.665 7	1 076.277	6 558.548 8
76	1 205.955	6 638.915	30 072.728 8	118.636 4	930.611 6	5 482.271 4
77	1 040.935	5 432.960	23 433.814 1	111.164 1	831.975 3	4 531.659 8
78	889.735 3	4 392.025	18 000.653 9	103.369 2	720.611 2	3 699.684 5
79	752.145 4	3 502.290	13 608.828 9	95.271 98	617.441 9	2 978.873 3
80	627.944 8	2 750.144	10 106.539 2	87.227 52	522.170 0	2 361.431 4
81	516.565 5	2 122.199	7 356.394 81	78.778 49	434.942 4	1 839.261 4
82	417.919 1	1 605.634	5 234.195 19	70.040 41	356.163 9	1 404.319 0
83	331.804 9	1 187.715	3 628.561 06	61.116 25	286.123 5	1 048.155 1
84	257.926 9	855.910 1	2 440.846 03	52.418 37	225.007 3	762.031 54
85	195.588 2	597.983 2	1 584.935 87	44.299 14	172.588 9	537.024 26
86	143.766 5	402.395 0	986.952 607	36.726 97	128.289 8	364.435 35
87	101.510 1	258.628 5	584.557 607	29.576 60	91.562 84	236.145 58
88	68.029 27	157.118 4	325.929 107	22.678 05	61.986 27	144.582 74
89	42.734 71	89.089 14	168.810 687	16.266 44	39.308 22	82.596 452
90	24.824 64	46.354 43	79.721 537	10.849 93	23.041 78	43.288 232
91	13.019 91	21.529 79	33.367 107	6.666 039	12.191 85	20.246 452
92	5.653 108	8.509 883	11.637 317	3.569 604	5.525 805	8.054 602
93	2.058 385	2.656 775	3.327 434	1.453 095	1.956 201	2.528 797
94	0.526 121	0.598 390	0.670 659	0.433 616	0.503 106	0.572 596
95	0.072 269	0.072 269	0.072 269	0.069 490	0.069 490	069 490