COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXIII 1992 FASC. 1

SÉRIES DE FOURIER ET SÉRIES D'ONDELETTES

PAR

DINA MELAS ET EDUARDO SERRANO (BUENOS AIRES)

1. Introduction. Les notations sont celles de [1]. On désigne par V_j, $j \in \mathbb{Z}$, une analyse multirésolution r-régulière de $L^2(\mathbb{R})$ où $r \geq 1$. Il existe donc une fonction φ de la variable réelle x telle que $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base hilbertienne de V_0 et que

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^q \varphi(x)\right| \leq C_m(1+|x|)^{-m} \tag{1.1}$$

pour $0 \leq q \leq r$ et tout $m \geq 0$.

Alors $2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base hilbertienne de V_j, on a $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ et finalement $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous venons de rappeler la définition d'une analyse multirésolution r-régulière de $L^2(\mathbb{R})$. Quitte à multiplier φ par une constante de module 1, on peut supposer $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$.

On sait alors qu'il existe une fonction 2π-périodique et indéfiniment dérivable $m_0(\xi)$ telle que l'on ait, pour tout ξ réel,

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,. \tag{1.2}$$

On a, en outre,

$$m_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1\,. \tag{1.3}$$

S. Mallat a posé le problème de savoir sous quelle condition on peut construire une analyse multirésolution r-régulière V_j, $j \in \mathbb{Z}$, à partir d'une fonction $m_0(\xi)$ indéfiniment dérivable et 2π-périodique vérifiant (1.3). Il suppose, en outre,

$$m_0(\xi) \neq 0 \quad \text{si } -\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2 \tag{1.4}$$

et démontre alors que (1.2) possède une et une seule solution $\varphi \in L^2 \cap L^1$ vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ et que $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une suite orthonormée. Cette suite est une base hilbertienne d'un sous-espace fermé V_0 de $L^2(\mathbb{R})$. On définit V_j par

$$f(x) \in V_0 \;\Leftrightarrow\; f(2^j x) \in V_j \tag{1.5}$$

et l'on a

$$V_j \subset V_{j+1}, \qquad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}\,, \tag{1.6}$$
$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \quad \text{est dense dans } L^2(\mathbb{R})\,.$$

On ne dispose pas, à l'heure actuelle, d'un critère simple portant sur $m_0(\xi)$ et fournissant (1.1). C'est pour cette raison que nous supposerons, dans tout ce qui suit, que (1.4) est vérifiée ainsi que (1.1).

2. L'énoncé du théorème fondamental. On désigne par $P_j : L^2(\mathbb{R}) \to V_j$ l'opérateur de projection orthogonale, on note W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. On observe que $Q_j = P_{j+1} - P_j$ est l'opérateur de projection orthogonale sur W_j. Le noyau de Q_j est $K_j(x,y) = 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^j x - k)\overline{\psi(2^j y - k)}$ et vérifie, pour tout $m \geq 1$, l'estimation suivante :

$$|K_j(x,y)| \leq C_m 2^j (1 + 2^j|x-y|)^{-m}\,. \tag{2.1}$$

Il en résulte que Q_j est aussi défini sur $L^\infty(\mathbb{R})$ et, plus précisément, que si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ est périodique de période 1 et si $j \geq 0$, il en est de même pour $Q_j(f)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, on définit $j \geq 0$ par, soit $-2^j \leq n < -2^{j-1}$, soit $2^{j-1} \geq n < 2^j$. Si $n = 1$, on a $j = 1$ et si $n = -1$, $j = 0$. On définit e_n, $n \in \mathbb{Z}$, par

$$e_n(x) = \exp(2\pi i n x) \tag{2.2}$$

et l'on pose, si n et j sont reliés comme indiqué ci-dessus,

$$f_n(x) = Q_j(e_n)(x)\,. \tag{2.3}$$

On a alors, en posant $f_0(x) = 1$,

Théorème 1. *Avec les notations précédentes, la suite $f_n(x)$ est une base de Riesz de $L^2[0,1]$.*

Une *base de Riesz* d'un espace de Hilbert H est l'image d'une base hilbertienne par un isomorphisme $T : H \to H$, non nécessairement isométrique.

Plus précisément, nous montrerons que les fonctions 1 et $\gamma_n f_n$, $\gamma_n = \overline{(\widehat{\psi}(2\pi n 2^{-j}))^{-1}}$, forment une base hilbertienne de $L^2[0,1]$ et qu'il existe deux constantes $c' > c > 0$ telles que $c \leq |\gamma_n| \leq c'$ pour tout $n \neq 0$.

Ce théorème a des variantes. Si nous supposons, par exemple, que $\varphi(x)$ est paire, alors la collection des fonctions 1, $Q_j(\cos 2\pi n x)$, $j = 0, 1, \ldots$, $2^{j-1} + 1 \leq n \leq 2^j$ et $Q_j(\sin 2\pi n x)$, $j = 1, 2, \ldots$, $2^{j-1} \leq n \leq 2^j - 1$, est aussi une base de Riesz de $L^2[0,1]$.

3. La preuve du théorème 1. Commençons par rappeler la construction des ondelettes périodiques. Pour tout $j \geq 0$, on pose

$$\widetilde{\psi}_j(x) = 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^j(x-k))\,. \tag{3.1}$$

Alors la suite 1, $\widetilde{\psi}_j(x - k2^{-j})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$, est une base orthonormée de $L^2[0,1]$. Or on a

$$Q_j(e_n)(x) = 2^{-j/2}\overline{\widehat{\psi}(2\pi n 2^{-j})} \sum_{0 \leq k < 2^j} e_n(k2^{-j})\widetilde{\psi}_{j,k}(x)\,. \tag{3.2}$$

Grâce à l'hypothèse faite sur $m_0(\xi)$, on a $|\widehat{\psi}(\xi)| \geq \beta > 0$ si $\pi \leq |\xi| \leq 2\pi$. On a donc $0 < \alpha \leq |\gamma_n| \leq \beta^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si donc 1 et les $\gamma_n f_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, forment une base hilbertienne de $L^2[0,1]$, alors 1 et les f_n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, constituent une base de Riesz de $L^2[0,1]$.

Pour démontrer que 1 et les $\gamma_n f_n$ forment une base hilbertienne de $L^2[0,1]$, on considère la matrice carrée M_j dont les coefficients sont $2^{-j/2}e_n(k2^{-j})$, $0 \leq k < 2^{-j}$, $-2^j \leq n < -2^{j-1}$ ou $2^j - 1 \leq n < 2^j$. On observe que deux valeurs distinctes de n ne peuvent être congrues modulo 2^j. Il en résulte que les vecteurs correspondants de M_j sont orthogonaux et que M_j est unitaire.

On désigne alors par F_j, $j \in \mathbb{N}$, le sous-espace engendré par les fonctions $\widetilde{\psi}_j(x - k2^{-j})$, $0 \leq k < 2^j$, et l'on a $L^2[0,1] = l \oplus F_0 \oplus \ldots \oplus F_j \oplus \ldots$ où l est le sous-espace des fonctions constantes. L'identité (3.2) nous apprend que les fonctions $\gamma_n f_n$, $-2^j \leq n < -2^{j-1}$ ou $2^{j-1} \leq n < 2^j$, constituent une base orthonormée de F_j. Le théorème 1 est démontré.

RÉFÉRENCE

[1] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, tome I, Hermann, 1990.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
CIUDAD UNIVERSITARIA, PABELLON 1
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINE

Reçu par la Rédaction le 5.10.1990