Р. Ш. Оманадзе, Сложностные свойства рекурсивно перечислимых множеств и sQ-полнота, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 425–429

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1624

Математические заметки

том 62 выпуск 3 сентябрь 1997

УДК 510

СЛОЖНОСТНЫЕ СВОЙСТВА РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ И sQ-ПОЛНОТА

Р. Ш. Оманадзе

В работе вводятся понятия эффективно субкреативного множества и сильно эффективно ускоряемого множества. Доказано, что понятия эффективно субкреативного множества, сильно эффективно ускоряемого множества и sQ-полного рекурсивно перечислимого множества эквивалентны.

Библиография: 7 названий.

В работе [1] введены понятия субкреативного множества и эффективно ускоряемого множества и доказано, что рекурсивно перечислимое (РП) множество является субкреативным тогда и только тогда, когда оно является эффективно ускоряемым. Гиллом и Моррисом [2] дана простая и интересная характеристика эффективно ускоряемых множеств в терминах Q-полных множеств. Они доказали, что РП множество является эффективно ускоряемым тогда и только тогда, когда оно Q-полно.

В данной работе вводятся понятия эффективно субкреативного множества и сильно эффективно ускоряемого множества. Доказано, что понятия эффективно субкреативного множества, сильно эффективно ускоряемого множества и sQ-полного РП множества эквивалентны. Все употребляемые без определения понятия и обозначения можно найти в монографии [3].

Будем говорить, что множество A *sQ-сводится* к множеству B ($A \leqslant_{sQ} B$), если существуют общерекурсивные функции (ОРФ) f, g такие, что

$$(\forall\, x)(\forall\, y)\bigl[(x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B) \mathbin{\&} \bigl(y \in W_{f(x)} \implies y < g(x)\bigr)\bigr].$$

РП множество A называется *sQ-полным*, если каждое РП множество sQ-сводится к множеству A.

Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $(\varphi_i)_{i\in\omega}$ – эффективная нумерация всех частично рекурсивных функций (ЧРФ) и последовательность ЧРФ $(\Phi_i)_{i\in\omega}$ удовлетворяет аксиомам Блюма [4]:

1) функция $\varphi_i(x)$ определена $\iff$ функция $\Phi_i(x)$ определена;
2) функция
$$M(i,n,m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_i(n) = m, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
является общерекурсивной.

Естественным образом вводятся следующие понятия.

РП множество A назовем *эффективно субкреативным*, если существуют ОРФ f и g такие, что для каждого i существует число a_i такое, что

1) $W_{f(i)} = A \cup \{a_i\}$,
2) $a_i \in (W_i \cap A) \cup (\overline{W_i \cup A})$,
3) $a_i \in \overline{W_i \cup A} \implies a_i < g(i)$.

РП множество A назовем *эффективно ускоряемым*, если существуют ОРФ h и g такие, что для всех натуральных чисел i и l, если φ_i частично характеристическая функция множества A (эквивалентно, $W_i = A$) и φ_l – ОРФ, то

1) $W_{h(i,l)} = A$,
2) $(\exists \overset{\infty}{x})\bigl(x \in A \implies \Phi_i(x) > \varphi_l\bigl(x, \Phi_{h(i,l)}(x)\bigr)\bigr)$,
3) $(\forall i)(\forall l)(\forall y)\bigl(y \in W_{h(i,l)} \setminus A \implies y < gc(i,l)\bigr)$,

где c – нумерационная функция, т.е. c является рекурсивным взаимно однозначным отображением множества $\omega \times \omega$ на ω.

Если в этих определениях выполняются 1) и 2), то получаются соответственно понятия субкреативного множества и эффективно ускоряемого множества.

Основным результатом этой работы является теорема, анонсированная в [5],

Теорема. *Пусть A – РП множество. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(I) *A есть эффективно субкреативное множество*;
(II) *A есть sQ-полное множество*;
(III) $(\exists f \text{ ОРФ})(\exists g \text{ ОРФ})(\forall x)(\forall y)\bigl((W_x \cap A = \varnothing \implies A \subseteq W_{f(x)} \subsetneq \overline{W}_x) \,\&\, \bigl(y \in W_{f(x)} \setminus A \implies y < g(x)\bigr)\bigr)$;
(IV) *A есть сильно эффективно ускоряемое множество.*

Доказательство. Покажем, что (I) $\iff$ (II). Допустим, что A эффективно субкреативное множество, f и g ОРФ из определения эффективно субкреативного множества, K – креативное множество и t – ОРФ такая, что

$$W_{t(y)} = \begin{cases} \omega, & \text{если } y \in K, \\ \varnothing, & \text{если } y \notin K. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y \in K &\implies W_{t(y)} = \omega \implies W_{ft(y)} = A \cup \{x\} \,\&\, x \in A \cap W_{t(y)} \implies W_{ft(y)} \subseteq A, \\ y \notin K &\implies W_{t(y)} = \varnothing \implies W_{ft(y)} = A \cup \{x\} \,\&\, x \in \overline{A \cup W_{t(y)}} \\ &\implies W_{ft(y)} = A \cup \{x\} \,\&\, x \in \overline{A} \,\&\, x < gt(y). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество

$$W_{f_1(y)} = \{z : z \in W_{ft(y)} \,\&\, z < gt(y)\}.$$

Тогда

$$(\forall x)(\forall y)\bigl[(x \in K \iff W_{f_1(x)} \subseteq A) \,\&\, \bigl(y \in W_{f_1(x)} \implies y < gt(x)\bigr)\bigr].$$

Пусть теперь РП множество A является sQ-полным. Тогда из критерия Фридберга и Роджерса [6] следует, что

$$(\exists\, f \text{ ОРФ})(\exists\, g \text{ ОРФ})(\forall\, x)(\forall\, y)\big((W_{f(x)} \cap W_x \neq \varnothing \iff W_{f(x)} \subseteq A) \\ \& \ \big(y \in W_{f(x)} \implies y < g(x)\big)\big). \qquad (1)$$

Рассмотрим множество $W_{f_1(i)} = A \cup \{x : x$ есть первый элемент, который вычислится в $W_{f(i)}$, но никогда не вычислится в $A\}$. Тогда ОРФ f_1 и g удовлетворяют условиям определения эффективно субкреативного множества, т.е. A является эффективно субкреативным множеством.

Теперь покажем, что (II) $\iff$ (III). Если РП множество A является sQ-полным, то выполняется (1). Отсюда получается, что (II) $\implies$ (III).

Если для РП множества A выполняется (III), то sQ-полнота множества A доказывается точно так же, как это делается в теореме 1.(4) из работы В.К. Булитко [7].

Наконец докажем, что (III) $\iff$ (IV). При доказательстве импликации (III) $\implies$ (IV) использована конструкция из доказательства теоремы 2 [2].

Пусть f, g – ОРФ такие, что

$$(\forall\, x)(\forall\, y)\big((W_x \cap A = \varnothing \implies A \subseteq W_{f(x)} \subsetneq \overline{W}_x) \ \& \ \big(y \in W_{f(x)} \setminus A \implies y < g(x)\big)\big).$$

Определим РП множество $W_{i(j,l)}$ и ОРФ s, t следующим образом.

I. 1. Перечисляем $W_{fs(n)}$, пока новый элемент не появится (если существует); пусть этот элемент есть x.

2. Передаем x в $W_{t(n)}$.

3. Вычисляем $\varphi_l\big(x, \Phi_i(x)\big)$ до тех пор, пока не вычислится (если когда-нибудь вычислится).

4. Смотрим $\Phi_j(x) > \varphi_l\big(x, \Phi_i(x)\big) + n$? Если да, то передаем x в $W_{s(n)}$ и останавливаемся. В противном случае возвращаемся к п. 1.

II. Пусть

$$W_i = \{y : y \in W_j \ \& \ y < gc(j,l)\} \cup A \cup \Big(\bigcup_{n \in \omega} W_{t(n)}\Big),$$

где c – нумерационная функция.

Допустим, что $W_j = A$ и φ_l – ОРФ. Для каждого n множество $W_{s(n)}$ либо пусто, либо состоит из единственного элемента. Из II и I.2 ясно, что для каждого n пункт I.3 определен. Кроме того, имеем $W_{s(n)} \cap A \neq \varnothing$. В противном случае

$$A \subsetneq W_{fs(n)} \subseteq \overline{W}_{s(n)}.$$

Тогда $W_{s(n)}$ не может быть пустым множеством, так как в $W_{fs(n)}$ содержится элемент из $\overline{A}$. Но если $W_{s(n)} \neq \varnothing$, то $W_{fs(n)} \cap W_{s(n)} \neq \varnothing$ в силу нашей конструкции. Противоречие. Отсюда следует, что $(\forall\, n)(W_{s(n)} \subset A)$. Следовательно,

$$(\forall\, n)(W_{t(n)} \subset A) \ \& \ W_i = A.$$

Если $x \in W_{s(n)}$, то $\Phi_j(x) > n$. Поэтому существует бесконечно много x таких, что

$$x \in \bigcup_{n \in \omega} W_{s(n)}.$$

Но когда $x \in W_{s(n)}$, имеем

$$\Phi_j(x) > \varphi_l\big(x, \Phi_i(x)\big)$$

и по определению W_i будем иметь

$$(\forall\, y)\big(y \in W_i \setminus A \implies y < gc(i,l)\big).$$

Следовательно, A сильно эффективно ускоряемое множество.

В доказательстве обратной импликации использована конструкция из доказательства теоремы 3.1 из [1].

Пусть A сильно эффективно ускоряемое множество, т.е. существуют ОРФ h, g такие, что для каждого j и l если $W_j = A$ и φ_l – ОРФ, то

1) $W_{h(j,l)} = A$,
2) $(\exists \overset{\infty}{x})\big(x \in A \implies \Phi_j(x) > \varphi_l\big(x, \Phi_{h(j,l)}(x)\big)\big)$,
3) $(\forall\, j)(\forall\, l)(\forall\, y)\big(y \in W_{h(j,l)} \setminus A \implies y < gc(j,l)\big)$.

В дальнейшем i будет обозначать индекс частично характеристической функции множества A. Определим ЧРФ $\varphi_{l(j)}$ следующим образом.

Для каждой пары (x,y) мы можем определить, имеет ли место $\Phi_{h(i,l)}(x) = y$. Для всякой пары (x,y), такой, что $\Phi_{h(i,l)}(x) \neq y$, положим $\varphi_l(x,y) = 0$. Пусть $\Gamma = \{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots\}$ эффективное перечисление всех пар (x,y) таких, что $\Phi_{h(i,l)}(x) = y$.

I. Для каждого x из области определения Γ начинаем вычислять $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$. Когда одна из этих функций вычислится на некотором x_k, то выбрасываем пару (x_k,y_k) из Γ и переходим к II.

II. 1. Если $\varphi_i(x_k)$ вычислилось, то пусть $\varphi_l(x_k,y_k) = 1 + \Phi_i(x_k)$ и возвращаемся к I.

2. Если $\varphi_j(x_k)$ вычислилось, то пусть $\varphi_l(x_k,y_k) = 0$. Вычисляем $\varphi_i(x_k)$, найдем наименьшую пару $(u,v) \in \Gamma$, на которой φ_l пока еще не определена, выбрасываем (u,v) из Γ и положим $\varphi_l(u,v) = 0$. Когда $\varphi_i(x_k)$ вычислится, возвращаемся к I.

Покажем, что $\varphi_i(x)$ вычислится в II.2. Допустим противное. Тогда φ_l – ОРФ и $W_{h(i,l)} = W_i$, $\varphi_{h(i,l)}(x_k)$ вычислится, так как x_k принадлежит области определения Γ. Поэтому $\varphi_i(x_k)$ тоже вычислится. Противоречие.

Допустим, что $W_j \cap W_i = \varnothing$. Тогда II.2 не имеет места, так как когда $\varphi_j(x_k)$ вычислится, то и $\varphi_i(x_k)$ вычислится, поэтому $x_k \in W_j \cap W_i$.

Покажем, что φ_l – не ОРФ. Допустим, что φ_l – ОРФ. Тогда $W_{h(i,l)} = W_i$, следовательно, $\varphi_i(x)$ определено для каждого x из области определения Γ. Так как II.2 не имеет места, II.1 будет иметь место почти для каждого x из области определения Γ. Тогда для каждого $x \in A$

$$\varphi_l\big(x, \Phi_{h(i,l)}(x)\big) > \Phi_i(x).$$

Но это означает, что A не является эффективно ускоряемым множеством. Противоречие.

Итак, φ_l не является ОРФ. Тогда из определения φ_l вытекает, что $\varphi_l(x_k,y_k)$ не определено для некоторой пары $(x_k,y_k) \in \Gamma$. Для такой пары имеем $\Phi_{h(i,l)}(x_k) = y_k$ и $\varphi_i(x_k)$, $\varphi_j(x_k)$ не определены. Поэтому

$$(\exists\, a)(a \in W_{h(i,l)} \;\&\; a \in \overline{W_i \cup W_j}). \tag{2}$$

Из II.2 и из $W_j \cap W_i = \varnothing$ вытекает, что

$$W_{h(i,l)} \cap W_j = \varnothing. \tag{3}$$

Тогда из (2) и (3) получается, что ОРФ p, определенная равенством

$$W_{p(j)} = W_{h(i,j)} \cup A,$$

удовлетворяет условию пункта (III) теоремы. Поэтому A является sQ-полным и, следовательно, A является эффективно субкреативным множеством.

Теорема доказана.

Следствие. *Существует эффективно ускоряемое* (*субкреативное*), *но не сильно эффективно ускоряемое* (*эффективно субкреативное*) *множество.*

Доказательство. Существует Q-полное, но не sQ-полное РП множество, например, Q-полное гиперпростое множество. Из этого факта, из выше доказанной теоремы, из теоремы 3.1 [1] и из теоремы 2 [2] получается следствие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Blum M., Marques I. Complexity properties of recursively enumerable sets // J. Symbolic Logic. 1973. V. 38. №4. P. 579–593.
[2] Gill J. T., Morris P. H. On subcreative sets and s-reducibility // J. Symbolic Logic. 1974. V. 39. №4. P. 669–677.
[3] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
[4] Blum M. A machine-independent theory of the complexity of recursive functions // J. Assoc. Comput. Mach. 1967. V. 14. P. 322–336.
[5] Оманадзе Р. Ш. Сложностные свойства рекурсивно перечислимых множеств и sQ-полные множества // Сообщ. АН Грузии. 1992. Т. 146. №1. С. 9–12.
[6] Friedberg R. M., Rogers H. Reducibility and completeness for sets of integers // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1959. V. 5. P. 117–125.
[7] Булитко В. К. О способах характеризации полных множеств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №2. С. 227–253.

Тбилисский государственный университет им. И. А. Джавахишвили
Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа

Поступило
15.11.95
Исправленный вариант
24.10.96