TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **9**, No. 1 (2008), 125-132.

Sobre uma Generalização do Teorema de Eneström-Kakeya: Polinômio Reflexivo

M. MENEGUETTE Jr.,[1] V.A. BOTTA,[2] Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

J.A. CUMINATO,[3] Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. No estudo das questões de estabilidade de métodos numéricos é de fundamental importância o comportamento dos zeros do polinômio característico associado ao método. Neste trabalho analisaremos uma conjectura que fornece a A_0 estabilidade do método numérico e demonstraremos sua validade no caso em que o polinômio analisado é reflexivo.

Palavras-chave. Polinômio reflexivo, estabilidade, zeros de polinômios.

1. Introdução

O comportamento dos zeros dos polinômios algébricos é uma das subáreas clássicas da Análise. Várias celebridades como Gauss, Cauchy, Hermite, Jensen, Dieudonné, Pólya e Obrechkoff contribuiram nesta área. Além disso, esta teoria é de grande importância no estudo da estabilidade de métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias, que fazem parte de uma área em crescente expansão. Dentre tais métodos, os multiderivadas de passo múltiplo, originalmente introduzidos com o objetivo de obter métodos com menor número de passos e melhor precisão, por possuírem boas propriedades de estabilidade, como grandes regiões de estabilidade absoluta, são indicados para resolver problemas stiff, que dizem respeito a problemas com repentinas mudanças de dinâmica.

Uma classe de métodos multiderivadas de alta ordem, chamada de métodos (K, L) de Brown, foi apresentada em Brown [1] e caracteriza-se por possuir uma grande subclasse de métodos A-estáveis. A construção explícita e a dedução de algumas propriedades importantes desta classe foram apresentadas por Jeltsch [2]. Além disso, um resultado interessante demonstra que A_0 estabilidade dos métodos (K, L) de Brown está relacionada ao polinômio

$$P_\gamma(z) = (a_n + \gamma)z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0,$$

[1]messias@fct.unesp.br
[2]botta@fct.unesp.br
[3]jacumina@icmc.usp.br

sendo γ um parâmetro real variando de 0 a ∞ e $P_0(z)$ o polinômio característico dos métodos (K,L) que fornece a zero-estabilidade. Em Meneguette [4], demonstrou-se, usando o teorema de Eneström-Kakeya, que os coeficientes de $P_\gamma(z)$ são positivos, satisfazendo, para $n \leq K_L$,

1. $0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1}$ mas $a_n < a_{n-1}$;
2. $2a_j < a_{j+1}$ para $0 \leq j \leq K_L^*$;

onde

$$K_L = \min\left\{2^{L+1}+1, ..., \frac{(L+1)^{L+1}}{L^L} + L\right\},$$

$$K_L^* = \min\left\{2^{L}+1, ..., \frac{(L+1)^{L+1}}{2L^L} + L\right\}$$

e L representa o grau da derivada dos métodos numéricos (K,L).

Se $\gamma > a_{n-1} - a_n$, todos os zeros de $P_\gamma(z)$ encontram-se no disco unitário, como conseqüência do teorema de Eneström-Kakeya. Se $0 < \gamma < a_{n-1} - a_n$, o comportamento dos zeros ainda não é conhecido. De uma maneira geral, temos, então, a seguinte conjectura, que é um problema que encontra-se em aberto em Meneguette [5]:

Conjectura 1.1. *Sejam* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *um polinômio tal que*

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_{n-1} \text{ e } a_n < a_{n-1},$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário, e $P'(z)$ com os coeficientes ordenados. Então, os zeros do polinômio

$$P_\gamma(z) = (a_n + \gamma)z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$$

encontram-se no disco unitário, para todo $\gamma > 0$.

Até o presente momento, o autor desta conjectura não obteve respostas a respeito de sua validade ou não. Além disso, ela está sendo objeto de estudo da pesquisa de doutorado da autora deste trabalho. Portanto, apresentaremos aqui alguns resultados obtidos através de condições adicionais sobre os coeficientes do polinômio apresentado na conjectura.

Analisaremos, então, o caso em que o polinômio $P(z)$ é um polinômio reflexivo, isto é,

$$a_i = a_{n-i}, \; a_i > 0 \; (i = 0, 1, 2, ..., n),$$

onde

$$a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_{n-1} \text{ e } a_{n-1} > a_n.$$

Mas como $P(z)$ satisfaz as hipóteses da Conjectura 1.1, temos que

$$a_0 < a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} \text{ e } a_{n-1} > a_n = a_0.$$

Através desta pesquisa foi possível chegar a um resultado mais amplo, não sendo necessário estabelecer que $P'(z)$ tenha seus zeros no disco.

Além disso, se $P(z)$ está sujeito a estas condições, seus zeros encontram-se sobre o disco unitário, sendo, portanto, um caso crítico da conjectura, já que qualquer perturbação dos coeficientes acarretaria numa perturbação dos zeros.

Portanto, mostraremos que para qualquer $\gamma > 0$, o polinômio

$$P_\gamma(z) = P(z) + \gamma z^n,$$

sujeito às condições da Conjectura 1.1, possui seus zeros no disco unitário e encontraremos uma condição sobre γ para que o polinômio $P_\gamma(z)$, sujeito apenas à condição de $P(z)$ possuir todos os seus zeros no disco, tenha também seus zeros no disco unitário.

Apresentaremos, a seguir, alguns resultados que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho.

2. Resultados Importantes

No estudo das questões de estabilidade de métodos numéricos, muitos resultados clássicos sobre zeros de polinômios, que podem ser encontrados em Marden [3], são de fundamental importância. Por exemplo, o famoso resultado de Dahlquist estabelece que um método linear de passo múltiplo é convergente se, e somente se, é consistente (ordem pelo menos um) e zero-estável, que diz respeito aos zeros do polinômio característico do método se localizarem no disco unitário e os de módulo um serem simples.

A seguir apresentaremos resultados que nos permitem determinar a quantidade de zeros de um polinômio no disco unitário. O primeiro deles é o teorema de Eneström-Kakeya.

Teorema 2.1 (Eneström-Kakeya). *Seja* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *um polinômio cujos coeficientes* $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$*, satisfazem*

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n.$$

Então, $P(z)$ *possui seus zeros em* $|z| \leq 1$.

Suponhamos que o polinômio $P(z)$ tenha p $(p \leq n)$ zeros em $|z| \leq 1$.

Associado a ele será considerado o polinômio

$$P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} = a_0 \prod_{j=1}^{n} (z - z_j^*),$$

sendo seus zeros z_k^*, em relação ao disco unitário, os inversos dos zeros z_k de $P(z)$, isto é, $z_k^* = \dfrac{1}{z_k}$.

Logo, qualquer zero de $P(z)$ que possui módulo um é também zero de $P^*(z)$ e se $P(z)$ não tem zeros em $|z| = 1$, $P^*(z)$ também não tem zeros em $|z| = 1$.

Além disso, se $P(z)$ não tem zeros em $|z| = 1$ e p zeros em $|z| < 1$, então $P^*(z)$ possui $n - p$ zeros em $|z| < 1$.

Seja agora a seqüência de polinômios

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k,$$

onde $P_0(z) = P(z)$ e

$$P_{j+1}(z) = a_0^{(j)} P_j(z) - a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z),$$

com $j = 0, ..., n-1$.

Então,

$$a_k^{(j+1)} = a_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} a_{n-j-k}^{(j)}. \tag{2.1}$$

Em cada polinômio $P_j(z)$ o termo constante $a_0^{(j)}$ é representado por δ_j. Assim,

$$\delta_{j+1} = |a_0^{(j)}|^2 - |a_{n-j}^{(j)}|^2 = a_0^{(j+1)},$$

com $j = 0, ..., n-1$.

Lema 2.1. *Considerando $a_0 \neq 0$, se P_j tem p_j zeros em $|z| \leq 1$ e se $\delta_{j+1} \neq 0$, então P_{j+1} tem*

$$p_{j+1} = \frac{1}{2}\{n - j - [(n-j) - 2p_j] sinal(\delta_{j+1})\}$$

zeros em $|z| \leq 1$. Além disso, P_{j+1} tem os mesmos zeros em $|z| = 1$ que P_j.

A demonstração deste lema pode ser encontrada em Marden [3].

Teorema 2.2. *Se $|a_0| < |a_n|$, $a_0 \neq 0$, $P(z)$ tem todos os seus zeros no disco unitário se, e somente se, $P_1^*(z)$ tem também todos os seus zeros em $|z| \leq 1$.*

A demonstração deste resultado segue do Lema 2.1 e mais detalhes podem ser encontrados em Schur [6] e [7].

Em seguida apresentaremos condições sobre γ para que $P_\gamma(z)$ tenha seus zeros no disco unitário.

3. Conclusão

Consideremos $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ um polinômio que possui todos os seus zeros no disco unitário tal que

$$a_i = a_{n-i},\ a_i > 0\ (i = 0, 1, 2, ..., n),$$

onde

$$a_0 < a_1 = ... = a_{n-1}, \quad a_{n-1} > a_n = a_0$$

e $P_\gamma(z) = P(z) + \gamma z^n$, $\gamma > 0$.

Sejam os polinômios $P_1^*(z)$ e $P_{1,\gamma}^*(z)$ (relacionados a $P(z)$ e $P_\gamma(z)$, respectivamente) representados por

$$P_1^*(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(1)} z^{n-1-i} \text{ e } P_{1,\gamma}^*(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,\gamma}^{(1)} z^{n-1-i},$$

onde os coeficientes $a_i^{(1)}$ e $a_{i,\gamma}^{(1)}$, $i = 0, ..., n-1$, são dados pela expressão (2.1).

Como $\gamma > 0$, segue que $|a_0| < |a_n + \gamma|$. Assim, o Teorema 2.2 pode ser utilizado para $P_\gamma(z)$.

Observemos que

$$a_{n-1,\gamma}^{(1)} = a_{n-2,\gamma}^{(1)} = ... = a_{1,\gamma}^{(1)} = -\gamma a_{n-1} \quad \text{e} \quad a_{0,\gamma}^{(1)} = -\gamma(\gamma + 2a_n).$$

Se $-a_{0,\gamma}^{(1)} \geq -a_{1,\gamma}^{(1)}$, os coeficientes de $-P_{1,\gamma}^*(z)$ estão ordenados e então, pelo Teorema de Eneström-Kakeya, os zeros de $P_{1,\gamma}^*(z)$ encontram-se no disco unitário. Mas para que isto ocorra devemos ter

$$(-a_{0,\gamma}^{(1)}) - (-a_{1,\gamma}^{(1)}) = \gamma(\gamma + 2a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

Portanto, para $\gamma \geq a_{n-1} - 2a_n$, temos que o polinômio $P_\gamma(z)$ possui os zeros no disco unitário.

No caso do polinômio reflexivo estar sujeito às condições da Conjectura 1.1, isto é, sendo $P(z)$ um polinômio cujos zeros encontram-se no disco unitário e $P'(z)$ com os coeficientes ordenados, temos

$$2a_n - a_{n-1} \geq 0,$$

sendo $n > 1$.

Logo, para qualquer $\gamma > 0$, temos que os coeficientes de $P_{1,\gamma}^*(z)$ estão ordenados.

Analisaremos o caso em que $\gamma < a_{n-1} - 2a_n$.

Observe que

$$\begin{aligned} (-a_{0,\gamma}^{(1)}) - (-a_{n-1,\gamma}^{(1)}) &= \gamma(\gamma + 2a_n - a_1) \\ &= \gamma(\gamma + 2a_n - a_{n-1}) < 0. \end{aligned}$$

Portanto, $-a_{0,\gamma}^{(1)} < -a_{n-1,\gamma}^{(1)}$.

Utilizando uma das relações das fórmulas de Vieta, temos

$$\zeta_1 \zeta_2 ... \zeta_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1,\gamma}^{(1)}}{a_{0,\gamma}^{(1)}},$$

onde ζ_i, $i = 1, ..., n-1$, são os zeros de $P_{1,\gamma}^*(z)$. Logo,

$$|\zeta_1 \zeta_2 ... \zeta_{n-1}| = \left| (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1,\gamma}^{(1)}}{a_{0,\gamma}^{(1)}} \right|,$$

ou seja,

$$|\zeta_1|.|\zeta_2|...|\zeta_{n-1}| > 1,$$

e chegamos à conclusão de que pelo menos um dos zeros de $P^*_{1,\gamma}(z)$ encontra-se fora do disco unitário.

Portanto, os zeros de $P_\gamma(z)$ encontram-se no disco unitário quando $\gamma \geq a_{n-1} - 2a_n$.

Com isso, temos a demonstração do seguinte resultado:

Proposição 3.1. *Seja $P(z)$ um polinômio reflexivo que possui seus zeros no disco unitário cujos coeficientes satisfazem*

$$0 < a_0 < a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} \text{ e } a_{n-1} > a_n = a_0.$$

Os zeros de $P_\gamma(z) = P(z) + \gamma z^n$, para $\gamma > 0$, encontram-se no disco unitário quando $\gamma \geq a_{n-1} - 2a_n$.

4. Exemplos

A seguir apresentaremos alguns exemplos que ilustram os resultados obtidos.

Exemplo 4.1. *Seja*

$$P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1,$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário ($z = -1$). O polinômio

$$P_\gamma(z) = (1+\gamma)z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

possui todos os seus zeros no disco quando $\gamma \geq a_{n-1} - 2a_n = 1$, como podemos observar na Figura 1.

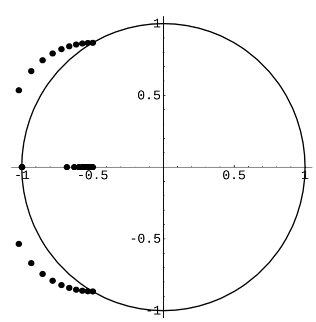

Figura 1: Comportamento dos zeros de $P_\gamma(z) = (1+\gamma)\ z^3 + 3z^2 + 3z + 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$.

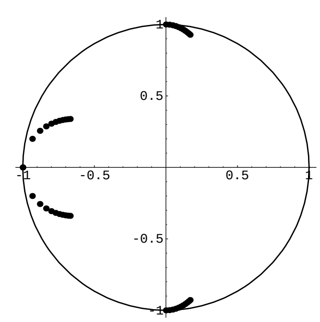

Figura 2: Comportamento dos zeros de $P_\gamma(z) = (1+\gamma)z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1$, $\gamma \geq 0$.

Exemplo 4.2. *Seja*

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1,$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário. O polinômio

$$P_\gamma(z) = (1+\gamma)z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1$$

possui todos os seus zeros no disco quando $\gamma \geq a_{n-1} - 2a_n = 0$. *A Figura 2 mostra tal comportamento.*

Exemplo 4.3. *Seja*

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1,$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário. O polinômio

$$P_\gamma(z) = (1+\gamma)z^3 + 2z^2 + 2z + 1$$

possui todos os seus zeros no disco quando $\gamma \geq 0$, *como podemos observar na Figura 3.*

Exemplo 4.4. *Seja*

$$P(z) = 2.2z^3 + 6z^2 + 6z + 2.2,$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário. O polinômio

$$P_\gamma(z) = (2.2+\gamma)z^3 + 6z^2 + 6z + 2.2$$

possui todos os seus zeros no disco quando $\gamma \geq 1.6$. *A Figura 4 ilustra este caso.*

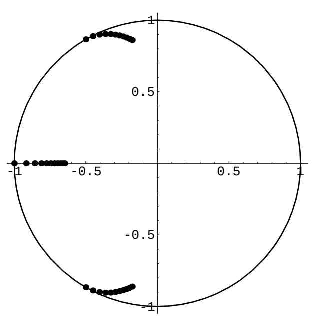

Figura 3: Comportamento dos zeros de $P_\gamma(z) = (1+\gamma)z^3 + 2z^2 + 2z + 1$, $\gamma \geq 0$.

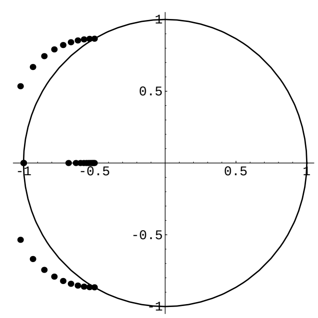

Figura 4: Comportamento dos zeros de $P_\gamma(z) = (2.2+\gamma)z^3 + 6z^2 + 6z + 2.2$, $0 \leq \gamma \leq 1.6$.

Abstract. In the questions of stability of numerical methods is of fundamental importance the behavior of the zeros of characteristic polynomial associated to the method. In this work we will analyze one conjecture that supply the A_0 stability of the numerical method and we will demonstrate its validity in the case that the analyzed polynomial is reflexive.

Referências

[1] R.L. Brown, Some characteristics of implicit multistep-multiderivative integration formulas, *SIAM Journal Num. Anal.*, **14** (1977), 982-993.

[2] R. Jeltsch, A_0-stability and stiff stability of Brown's multistep multiderivative methods, *Numer. Math.*, **32** (1979), 167-181.

[3] M. Marden, "Geometry of Polynomials", Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

[4] M. Meneguette Jr., "Multistep Multiderivative Methods and Related Topics", Tese de Doutoramento, Linacre College, Oxford, 1987.

[5] M. Meneguette Jr., Zeros in the unit disk, *SIAM Review*, **36** (1994), 656-657.

[6] I. Schur, Über Potenzreihen, die in Innern des Einheitskreises beschränkt sind, *Reine Angew. Math.*, **147** (1917), 205-232.

[7] I. Schur, Über Polynome, die nur in Innern des Einheitkreis verschwinden, *Reine Angew. Math.*, **148** (1918), 122-145.