

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO COMPRESIBLE MEDIANTE EL MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

Enrique Ortega[†] y Carlos G. Sacco^{††}

[†]Departamento Aerodinámica,
Centro de Investigaciones Aplicadas, Instituto Universitario Aeronáutico.
Aula CIMNE, Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico
Av. Fuerza Aérea 6500, Córdoba, Argentina.
Correo electrónico: eortega@iua.edu.ar

^{††}Departamento Mecánica Aeronáutica,
Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico
Aula CIMNE, Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico
Av. Fuerza Aérea 6500, Córdoba, Argentina
Correo electrónico: csacco@iua.edu.ar

Palabras clave: Método de Puntos Finitos, Flujo Compresible, Difusión Artificial

Resumen. *El trabajo desarrollado consiste en la resolución numérica de las ecuaciones de flujo bidimensional, compresible y no viscoso; mediante el Método de Puntos Finitos (FPM). Este último se ubica dentro del conjunto de métodos “meshless” cuya característica principal es prescindir de una malla o grilla a efectos de realizar la discretización numérica. En FPM, la función incógnita y derivadas de la misma se obtienen exclusivamente a partir de las coordenadas de un conjunto de puntos pertenecientes al dominio de análisis. Esto último, sumado a un procedimiento de colocación puntual para la derivación del sistema de ecuaciones discreto, convierten a FPM en un verdadero método sin malla.*

La discretización temporal de las ecuaciones se lleva a cabo mediante un esquema explícito de segundo orden del tipo Lax-Wendroff en dos pasos. Difusión artificial de Jameson, de segundo y cuarto orden, se introduce en las ecuaciones. Se implementa además un esquema corrector de los flujos difusivos o ‘Flux-Corrected Transport’, con la finalidad de regular la cantidad de difusión agregada al esquema y lograr una mayor precisión y calidad de la solución numérica. La performance del algoritmo desarrollado se ilustra mediante la resolución de distintos ejemplos numéricos.

1 INTRODUCCIÓN

El método de Puntos Finitos (FPM) es una técnica de discretización conceptualmente sencilla. La misma ha demostrado gran capacidad para resolver con exactitud un sinnúmero de problemas convectivo-difusivos, de fluidos incompresibles y compresibles. Debido a que el objetivo del presente trabajo es la resolución de las ecuaciones de Euler vía FPM, solamente se repasarán los aspectos básicos del método, a fines de presentar las herramientas que posteriormente permitirán abordar las ecuaciones.

La física del problema en cuestión es gobernada por las ecuaciones de flujo no viscoso o ecuaciones de Euler. Se propone para su solución un esquema del tipo ‘*shock-capturing*’, en el cual la discretización espacial y temporal se realizan en forma independiente. La primera, llevada a cabo mediante FPM, conduce a un sistema de ecuaciones discreto cuya integración temporal se resuelve en forma explícita. El esquema resultante de la combinación de la discretización espacial y temporal, se puede considerar como la implementación en dos pasos de un esquema de segundo orden de aproximación de la familia de métodos denominados Taylor-Galerkin^{1, 2}, introducidos por Donea *et al.* El procedimiento de dos pasos, debido a Richtmyer y Morton evita la necesidad de evaluar las matrices Jacobianas, lo cual agrega simplicidad al esquema. Debido a que la denominación de Taylor-Galerkin se encuentra asociada a la discretización espacial vía FEM, se hará referencia al esquema utilizado en el presente trabajo simplemente como un esquema ‘tipo Lax-Wendroff’ en dos pasos.

Métodos de segundo orden son apropiados en pos de mejorar la exactitud del esquema numérico. Desafortunadamente dichos esquemas traen aparejado derivadas dominantes de orden impar, en los términos correspondientes al error de truncamiento de sus ecuaciones modificadas. Dichos términos son fuente de dispersión numérica que genera un comportamiento oscilatorio del sistema, especialmente en presencia de cambios abruptos en las variables que surgen de discontinuidades en el campo de la solución del problema. Una forma simple de compensar este comportamiento es agregando términos de disipación numérica o ‘*viscosidad artificial*’ al esquema. En este trabajo se implementa el modelo de viscosidad artificial de Jameson, el cual combina términos disipativos de segundo y cuarto orden. La cantidad de viscosidad artificial introducida debe ser cuidadosamente balanceada, a fines de suprimir las oscilaciones sin suavizar excesivamente la solución.

Se implementa además en el código, una adaptación a FPM de la metodología ‘*Flux-Corrected Transport*’ (FCT). La versión original de esta técnica fue desarrollada por Boris y Book, para el caso unidimensional, en el contexto de Diferencias Finitas (FD). Posteriormente, Zalesak generaliza la técnica a multidimensiones e introduce el concepto de combinar métodos de alto y bajo orden de discretización en pos de obtener una solución balanceada. La adaptación de este método al contexto de FEM fue llevada a cabo en primer lugar por Parrott y Christie. Finalmente FEM-FCT alcanza la madurez gracias a los esfuerzos realizados por Löhner y otros colaboradores. En este trabajo se presenta una versión adaptada a FPM del algoritmo desarrollado por Löhner³, teniendo en cuenta ciertas características de la implementación del mismo en FD y FEM^{4, 5}. Básicamente, el mejoramiento en la solución que se logra mediante dicho esquema, responde a la introducción de flujos denominados ‘antidifusivos’ cuyo objetivo es remover el exceso de viscosidad artificial, antes de ser

aplicada la misma, de tal manera que se evite la creación de extremos de naturaleza ‘no física’, manteniendo positividad y monotonicidad en la solución numérica.

2 INTERPOLACIÓN EN EL MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

Se desarrollará la aproximación a una función escalar $u(x)$ en un dominio cerrado $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d=1,2,3$. El problema se plantea en forma local, por lo cual se divide el dominio Ω en subdominios Ω_i (nubes de puntos), definidos por un punto x_i denominado ‘star point’ y una colección de puntos $x_j, j=2,3,\dots,np$ circundantes a x_i que conforman Ω_i . Es importante aclarar que dichos subdominios Ω_i pueden solaparse entre sí.

Una aproximación a la función incógnita $u(x)$ se construye en Ω_i de la siguiente manera:

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{l=1}^m p_l(x) \alpha_l = P(x)^T \alpha \quad (1)$$

donde $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$ es el vector de coeficientes que multiplica a cada uno de los términos de la base de interpolación $P(x)$. Se emplea en este trabajo una base de interpolación polinómica completa, definida en forma local y adimensional ⁶, dada por

$$P^T(x) = \left[1, \left(\frac{x_j - x_i}{d_{i\text{máx}}} \right), \left(\frac{x_j - x_i}{d_{i\text{máx}}} \right)^2, \dots, \left(\frac{x_j - x_i}{d_{i\text{máx}}} \right)^k \right] \quad (2)$$

donde $d_{i\text{máx}}$ corresponde a la distancia entre el ‘star point’ x_i y el punto más alejado de la nube. Luego, la función incógnita $u(x)$ es obtenida para los np puntos de Ω_i como sigue

$$u^h = \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_{np}^h \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^h \\ \hat{u}_2^h \\ \vdots \\ \hat{u}_{np}^h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_{np}^T \end{Bmatrix} \alpha = P \alpha \quad (3)$$

donde $u_j^h = u(x_j)$ es el valor de la función incógnita $u(x)$ en un punto x_j y $\hat{u}_j^h = \hat{u}(x_j)$ es el valor aproximado. La obtención de funciones de forma mediante esta técnica carece de flexibilidad, principalmente por la restricción de $m=np$ impuesta para que el sistema (3) pueda ser resuelto. Para solucionar este problema, se plantea una interpolación en la cual se minimiza en forma global el error en la aproximación a $u(x)$ en Ω_i . A tal fin se construye el siguiente funcional discreto, ponderado mediante una cierta función de peso que otorga carácter local a la aproximación.

$$J = \sum_{j=1}^{np} \varphi(x_j) (u_j^h - \hat{u}(x_j))^2 = \sum_{j=1}^{np} \varphi(x_j) (u_j^h - p_j^T \alpha)^2 \quad (4)$$

La función de peso escogida debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x_i) &= 1 \\ \varphi_i(x_j) &\neq 0 \quad \forall x_j \in \Omega_i \\ \varphi_i(x) &= 0 \quad \forall x \notin \Omega_i\end{aligned}\quad (5)$$

Es usual en FPM, adoptar como función de peso la función Gaussiana normalizada, dada por

$$\varphi_i(x_j) = \frac{e^{-\left(\frac{d_j}{\beta}\right)^k} - e^{-\left(\frac{d_{i_{\max}}}{\beta}\right)^k}}{1 - e^{-\left(\frac{d_{i_{\max}}}{\beta}\right)^k}} \quad (6)$$

donde d_j es la distancia que existe entre un punto cualquiera x_j de Ω_i y el 'star point' x_i y los factores β y k son constantes dadas. Generalmente, la distancia $d_{i_{\max}}$ se multiplica por un cierto factor ligeramente mayor a la unidad, de manera que la función de peso no se anule para los puntos extremos del subdominio.

La aproximación mediante Mínimos Cuadrados Ponderados depende de la forma de la función de peso elegida y de la manera en que ésta última es aplicada. Una forma simple es definir una función de peso $\varphi(x)$ fija en cada Ω_i , que satisfaga las condiciones enunciadas en (5). Este tipo de aproximación se denomina *Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos* (FLS) y un esquema de la misma se muestra en Figura 1.

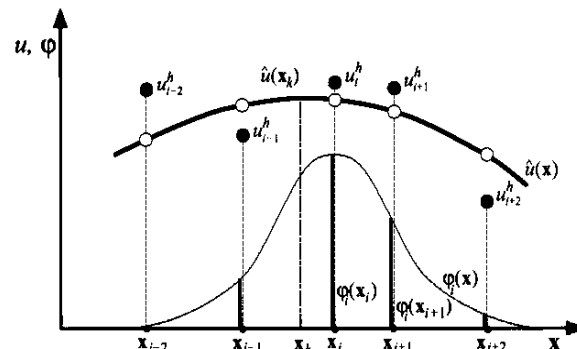


Figura 1

Retomando el proceso de minimización, se definen las siguientes matrices:

$$A = P \Phi(x_i) P^T = \sum_{j=1}^{np} \varphi_i(x_j) p(x_j) p^T(x_j) \quad (7)$$

$$B = \Phi(x_i) P = [\varphi_i(x_1) p(x_1), \varphi_i(x_2) p(x_2), \dots, \varphi_i(x_{np}) p(x_{np})] \quad (8)$$

Minimizando expresión (4) respecto a α e introduciendo matrices (7) y (8) se obtiene

$$A\alpha = Bu^h \quad (9)$$

$$\alpha = A^{-1}Bu^h = C^{-1}u^h \quad (10)$$

Luego, reemplazando (10) en (1), se obtiene la aproximación a la función incógnita en Ω_i

$$\hat{u}(x) = P^T \alpha = P^T(x) C^{-1} u^h \quad (11)$$

Las funciones de forma se definen de acuerdo con:

$$N^T(x) = P^T(x) A^{-1} B = P^T(x) C^{-1} \quad (12)$$

Finalmente es posible expresar (11) de la siguiente manera

$$\hat{u}(x) = N^T(x) u^h = \sum_{j=1}^{np} N_j^i u_j^h \quad (13)$$

De acuerdo con (1), la aproximación a la función incógnita (13) es definida exclusivamente en cada subdominio de interpolación Ω_i . Esto último conduce a que puntos pertenecientes a una zona del dominio Ω donde se solapen dos o más subdominios de interpolación, posean funciones de forma multivaluadas, es decir, $N_j^i \neq N_j^k$. Por ello, la función aproximada (13) será válida solamente para el ‘*star point*’ del subdominio Ω_i . Se manifestará más adelante que la elección de un esquema de discretización mediante el método de Colocación Puntual permitirá de manera sencilla cumplir esta última condición impuesta a la aproximación.

2.1 Orden de aproximación de las funciones de forma

En FLS, los coeficientes α son constantes en cada Ω_i y el orden de la aproximación es directamente el orden del polinomio incluido en la base de aproximación $\mathbf{P}(x)$.

2.2 Derivadas de las funciones de forma

En FLS las matrices A y B son constantes en cada Ω_i , por lo cual las derivadas de las funciones de forma (12) se calculan simplemente como

$$\frac{\partial^k N^T}{\partial x^k} = \frac{\partial^k P^T}{\partial x^k} A^{-1} B \quad (14)$$

2.3 Cálculo de las funciones de aproximación y sus derivadas

Utilizando la base de aproximación definida en (2), el cálculo de la función de aproximación y sus derivadas se simplifica notablemente. La aproximación a la función en un punto x_i perteneciente a un subdominio de interpolación Ω_i , se obtiene según expresiones (12) y (13), de la siguiente manera:

$$\hat{u}(x_i) = P^T(x_i) C^{-1} u^h \quad (15)$$

Evaluando la base de aproximación (2) en x_i obtenemos

$$P^T(x_i) = \left[1, \left(\frac{x_i - x_i}{d_{i\text{máx}}} \right), \left(\frac{x_i - x_i}{d_{i\text{máx}}} \right)^2, \dots, \left(\frac{x_i - x_i}{d_{i\text{máx}}} \right)^k \right] = [1, 0, \dots, 0^k] \quad (16)$$

luego, reemplazando (16) en (15) la aproximación buscada resulta:

$$\hat{u}(x_i) = \sum_{j=1}^{np} C_{1,j}^{-1i} u_j^h \quad (17)$$

Se emplea un procedimiento similar en el cálculo de las derivadas de la función en x_i

$$\frac{\partial \hat{u}(x_i)}{\partial x} = \frac{\partial N^T(x_i)}{\partial x} u^h = \frac{\partial P^T(x_i)}{\partial x} C^{-1} u^h \quad (18)$$

$$\frac{\partial P^T(x_i)}{\partial x} = \left[0, \frac{1}{d_{i\max}}, \dots, k \left(\frac{x_i - x_i}{d_{i\max}} \right)^{k-1} \right] = \left[0, \frac{1}{d_{i\max}}, 0, \dots, 0^{k-1} \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial \hat{u}(x_i)}{\partial x} = \frac{1}{d_{\max}} \sum_{j=1}^{np} C_{2,j}^{-1} u_j^h \quad (20)$$

Finalmente, de manera análoga, se obtienen las derivadas de mayor orden de acuerdo con

$$\frac{\partial^n \hat{u}(x_i)}{\partial x^n} = \frac{n!}{(d_{\max})^n} \sum_{j=1}^{np} C_{(n+1),j}^{-1} u_j^h \quad (21)$$

3 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

Debido a las características de multivaluación que poseen las funciones de forma, se desprende que un procedimiento de Colocación Puntual es el adecuado para brindar a la aproximación el carácter local que la misma necesita. Además, este último procedimiento satisface los requerimientos de un verdadero método ‘*mesh-free*’⁷.

4 ECUACIONES DE EULER

Las ecuaciones que gobiernan un flujo compresible, bidimensional y no viscoso, se pueden escribir en forma conservativa de la siguiente manera

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \tilde{0} \quad (22)$$

El vector solución U y los vectores de flujo F y G son dados por

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (\rho e + p)u \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde ρ es la densidad, u y v son las componentes del vector velocidad en las direcciones x e y respectivamente y p es la presión. La energía total e , se compone de la suma de la energía interna más la energía cinética de la partícula. Luego el sistema de ecuaciones se completa mediante la siguiente relación de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[e - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (24)$$

siendo $\gamma = C_p/C_v$ la relación de calores específicos a presión y volumen constante, para la cual se asume un valor constante $\gamma = 1.4$

4.1 Discretización temporal de las ecuaciones

La integración temporal del sistema de ecuaciones (22) se resolverá en forma explícita, mediante un esquema de segundo orden del ‘tipo Lax-Wendroff’ en dos pasos. La evolución de la solución de t^n a $t^{n+1}=t^n+\Delta t$ se realiza según

$$U^{n+1/2} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} \right) \quad (25)$$

$$\Delta U = U^{n+1} - U^n = -\Delta t \left(\frac{\partial F^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial G^{n+1/2}}{\partial y} \right) \quad (26)$$

donde $F^n = F(U^n)$, $G^n = G(U^n)$, $F^{n+1/2} = F(U^{n+1/2})$ y $G^{n+1/2} = G(U^{n+1/2})$.

5 DISIPACIÓN ARTIFICIAL DE JAMESON (2° y 4° ORDEN)

Dispersión numérica del propio algoritmo, generará oscilaciones de alta frecuencia en presencia de gradientes considerables de las variables del flujo. Estas últimas pueden comprometer, y generalmente lo hacen, la estabilidad numérica del esquema. Una manera simple de resolver este problema es agregar en forma explícita términos disipativos en la solución. En el presente algoritmo se implementa el modelo de disipación artificial de Jameson, que surge de la adaptación de su formulación original al contexto de FEM ^{8,9}

Disipación artificial se puede incluir en el esquema, mediante la introducción de términos disipativos, dentro de los vectores de flujos advectivos \mathbf{F} y \mathbf{G} . Es decir,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}^* = \tilde{0} \quad ; \quad \mathbf{f}^* = \begin{Bmatrix} F - f_{d_x} \\ G - f_{d_y} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Se definen tales términos disipativos, en su forma unidimensional ⁹, de la siguiente manera

$$f_d = \alpha^{(2)} \Delta x \lambda \frac{\Delta x^2}{\bar{p}} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right| \frac{\partial U}{\partial x} - \alpha^{(4)} \Delta x^3 \lambda \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \quad (28)$$

donde $\lambda=|V|+c$ es el máximo autovalor de la matriz Jacobiana y $\alpha^{(2)}$ y $\alpha^{(4)}$ son coeficientes de disipación dados. Δx corresponde a una distancia característica y \bar{p} representa un valor promedio de la presión que rodea a un determinado punto. El flujo disipativo se obtiene derivando expresión (28) respecto a su dirección coordenada, con lo cual se arriba a

$$\frac{\partial f_{d_x}}{\partial x} = \alpha^{(2)} \lambda S_x \Delta x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^{(4)} \Delta x^4 \lambda \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \quad \text{donde } S_x = \frac{\Delta x^2}{\bar{p}} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right| \quad (29)$$

La componente en dirección ‘y’ del flujo disipativo es obtenida de manera análoga. Términos S_X y S_Y poseen la capacidad de dosificar la cantidad de difusión de segundo orden a ser agregada al esquema, preservando con ello la precisión del mismo. Se observa (29) que el término disipativo de cuarto orden se halla siempre presente en el esquema, proveyendo una difusión de tipo complementaria.. Ahora bien, en presencia de choques, la acción de este último puede conducir a la reaparición de oscilaciones y desestabilizar el esquema. Es deseable desde el punto de vista del comportamiento numérico del esquema, que el término de cuarto orden se anule en presencia de fuertes gradientes de las variables. Para ello, se redefine el coeficiente de disipación $\alpha^{(4)}$ como sigue,

$$\bar{\alpha}_{x,y}^{(4)} = \max(0, \alpha^{(4)} - \alpha^{(2)} S_{x,y}) \quad (30)$$

luego, expresión (30) es reemplazada en (29) según cada una de las direcciones cartesianas. Finalmente, cabe aclarar que el cálculo de la derivada cuarta (29) se realiza en forma aproximada según $\partial^4 U / \partial x_j^4 \cong \partial^2 (\partial^2 U / \partial x_j^2)^h / \partial x_j^2$.

6 ESQUEMA CORRECTOR DE LOS FLUJOS DIFUSIVOS

La implementación de un algoritmo de tipo FCT en conjunto con un modelo de difusión artificial de Jameson pretende lograr; además de un mayor refinamiento de la solución, un esquema no ‘excesivamente dependiente’ de los coeficientes de difusión utilizados. Para la aplicación FPM-FCT, se propone una adaptación del trabajo de Löhner para FEM no estructurados³.

El método propuesto emplea la combinación de un esquema de alto orden con otro de bajo orden, de manera tal que la solución de alto orden se aplique en regiones ‘suaves’ del flujo, conservando la precisión del esquema. Por otro lado, en zonas que presenten discontinuidades y/o variaciones abruptas de las variables, el esquema de bajo orden es el que dominará la solución. Teniendo en cuenta la evolución temporal del vector de incógnitas,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta U \quad (31)$$

se definen los esquemas de bajo orden (L) y alto orden (H) de la siguiente manera

$$(U^{n+1})^H = U^n + \Delta U^H = U^n - \Delta t \left(\frac{\partial F^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial G^{n+1/2}}{\partial y} \right) \quad (32)$$

$$(U^{n+1})^L = U^n + \Delta U^L = U^n - \Delta t \left(\frac{\partial F^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial G^{n+1/2}}{\partial y} - D^{n+1/2} \right) \quad (33)$$

donde $D^{n+1/2} = (\partial f_{d_x} / \partial x + \partial f_{d_y} / \partial y)^{n+1/2}$. Para asegurar la estabilidad del esquema de alto orden, se incluye en (32) el término disipativo de cuarto orden. La intención es obtener una solución balanceada entre la positividad y monotonicidad que ofrece el esquema de bajo orden (U^L) por un lado, y la precisión de una solución no difusiva (U^H) por el otro. Para ello, se escribe (32) de la siguiente manera

$$U^{n+1} = U^n + \Delta U^L + (\Delta U^H - \Delta U^L) = U^L + (\Delta U^H - \Delta U^L) \quad (34)$$

La meta es limitar los flujos antidifusivos dados por el segundo término del lado derecho de expresión (34), de manera tal que la aplicación de dichos flujos ‘corregidos’ no creen nuevos extremos de naturaleza numérica en la solución, ni contribuyan a su crecimiento, si es que los mismos están presentes. Para tal fin se puede expresar

$$U^{n+1} = U^L + \lim(\Delta U^H - \Delta U^L) = U^L + \delta(\Delta U^H - \Delta U^L) \quad (35)$$

donde el cálculo del ‘limitador’ δ , constituye la piedra fundamental en que se basa el método. El limitador se calculará tomando como variable indicadora la densidad y se aplicará a todas las ecuaciones. Es posible hallar en la literatura procedimientos alternativos.^{3,4,5}

6.1 Implementación del algoritmo

De acuerdo con los conceptos originales de la implementación de FCT en el contexto de FD; en la presente aplicación se reemplazará el término ‘celda’ por ‘nube de puntos’. De acuerdo con el proceso de interpolación planteado en FPM, el balance de flujos se realizará a nivel de cada nube, y el limitador calculado se aplicará exclusivamente al ‘star point’ de la misma. Se propone para el cálculo del limitador el siguiente procedimiento de cuatro pasos:

1. Se calculan de los flujos antidifusivos aportados por cada punto de la nube a su ‘star point’ (APC), ponderados mediante la función de peso de la nube (6)

$$(APC)_{i,j}^k = (\Delta U^H - \Delta U^L)_{i,j}^k \cdot \varphi_{i,j} \quad (36)$$

El índice k indica la componente de U para el cual se calcula el limitador (densidad).

2. Se realiza la suma de todas las contribuciones antidifusivas al ‘star point’, positivas y negativas; debidas a los puntos de la nube. Se calculan para ello los siguiente términos

$$P_i^+ = \sum_{j=2}^{nb} \max(0, (APC)_{i,j}^k) \quad ; \quad P_i^- = \sum_{j=2}^{nb} \min(0, (APC)_{i,j}^k) \quad (37)$$

donde nb es el número de puntos de la nube incluidos en el proceso de balance.

3. El valor de la solución en el ‘star point’ i será afectado por los flujos antidifusivos (36) provenientes de los puntos vecinos. Para evitar el incremento ‘no físico’ o creación de nuevos extremos locales, es necesario definir cotas máximas y mínimas permitidas para la variable. Las mismas se calculan según:

$$Q_i^+ = (U^{\max} - (U_i^k)^L) \cdot \sum_{j=2}^{nb} \varphi_{i,j} \quad ; \quad Q_i^- = ((U_i^k)^L - U^{\min}) \cdot \sum_{j=2}^{nb} \varphi_{i,j} \quad (38)$$

donde $U^{\max} = \max[(U_i^k)^L, (U_i^k)^n]$ y $U^{\min} = \min[(U_i^k)^L, (U_i^k)^n]$. De forma consistente con la versión original de Boris y Book, se toman los valores máximos y mínimos de la variable en la nube (‘celda’ en su versión original) como valores extremos que se

permite alcanzar en el siguiente paso de tiempo. Los extremos se calculan entre valores de la variable en $t = t^n$ y aquellos obtenidos mediante el esquema de bajo orden en $t = t^{n+1}$. Esto último surge del esquema debido a Zalesak quien, con el objetivo de aliviar el efecto del FCT en la supresión de oscilaciones, introduce en el proceso una porción de la historia de la evolución de las variables. Ciertos autores ⁵ remarcan que se debe tener precaución en la utilización de información de máximos y mínimos desactualizada, ya que la misma puede conducir, en situaciones particulares, a la formación de nuevas oscilaciones numéricas a través de la resurrección de viejos extremos.

4. Se determina la fracción de flujo antidifusivo, positivo y negativo, a ser introducida a cada 'star point'. Esta no es más que el limitador δ buscado y se obtiene mediante

$$\delta_i^{+-} = \begin{cases} \min\left(1, \frac{Q_i^{+-}}{P_i^{+-}}\right) & , \quad \text{si } P_i^- < 0 < P_i^+ \\ 0 & , \quad \text{si } P_i = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Debido a que los puntos realizan intercambio de flujos en forma bilateral, donde un flujo positivo desde el punto j al 'star point' i , f_{ji} , es siempre balanceado por un flujo negativo desde el 'star point' i al punto j , f_{ij} , ($f_{ji} = -f_{ij}$); se obtiene que

$$\delta_i = \begin{cases} \delta^+ & , \quad \text{si } (APC)_i > 0 \\ \delta^- & , \quad \text{si } (APC)_i < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Una vez calculado el limitador para cada 'star point' del dominio, los flujos antidifusivos se aplican de acuerdo con expresión (35) de la siguiente manera

$$(U_i^k)^{n+1} = (U_i^k)^n + \delta_i \left(\frac{\sum_{j=2}^{nb} (APC)_{i,j}^k}{\sum_{j=2}^{nb} \varphi_{i,j}} \right) \quad (41)$$

donde $k = 1,4$ representa las cuatro componentes del vector solución y nb es la cantidad de puntos de la nube incluidos en el proceso. El procedimiento planteado es independiente del número de dimensiones espaciales del problema en cuestión y garantiza que la restricción $U_i^{k \min} \leq U_i^{k n+1} \leq U_i^{k \max}$ se cumpla en todos los puntos del dominio.

7 EJEMPLOS NUMÉRICOS

7.1 Tubo de choque o problema de Riemann

El problema del tubo de choque es un caso de prueba típico, de tipo inestacionario. El mismo involucra una onda de choque, una discontinuidad de contacto y un abanico de expansión moviéndose en el interior de un dominio cerrado. El tubo se encuentra inicialmente dividido en dos regiones mediante un diafragma, cada una de las cuales contiene en su interior un gas ideal en reposo, a diferente presión y densidad. ($P_L > P_R$, $\rho_L > \rho_R$). Inmediatamente

después de la ruptura del diafragma, una discontinuidad de presión se propaga hacia la derecha dentro de la región de baja presión del tubo, y en forma simultánea un abanico de expansión se desplaza hacia la izquierda en la zona de alta presión. Aparece además una discontinuidad de contacto que separa las dos regiones del tubo y se propaga hacia la derecha.

Se propone para la simulación numérica del problema, un dominio rectangular de relación longitud / altura de 10:1. El diafragma se ubica a la mitad de la longitud total del tubo y las condiciones iniciales del problema se enuncian a continuación:

$$\begin{aligned} p_L &= 100000 \text{ Pa} & \rho_L &= 1 \text{ Kg/m}^3 & u_L &= v_L = 0 \\ p_R &= 10000 \text{ Pa} & \rho_R &= 0.125 \text{ Kg/m}^3 & u_R &= v_R = 0 \end{aligned}$$

El dominio se discretiza en 1111 puntos equiespaciados ($\Delta x = \Delta y = 0.1$) y condición de deslizamiento se aplica sobre todo el contorno del mismo. Para el cálculo de las funciones de forma se emplea aproximación cuadrática ($m=6$) y nubes de 13 puntos cada una.

Se presentan a continuación resultados obtenidos para $t = 0.0061$ seg. desde la ruptura súbita del diafragma, para las variables velocidad, presión y densidad en el tubo de choque.

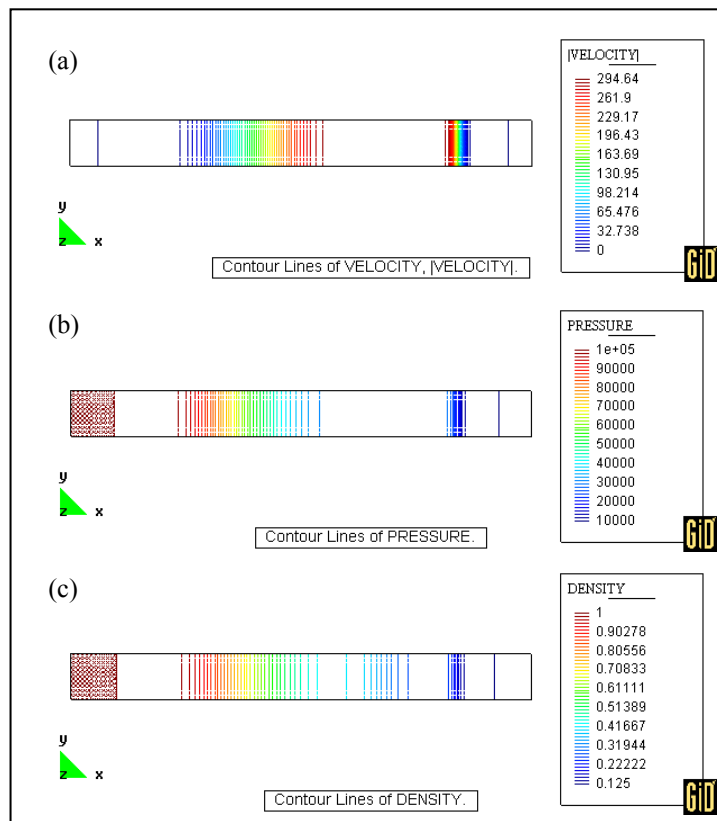


Figura 2: Isolíneas, (a)velocidad, (b)presión, (c)densidad

La solución numérica obtenida mediante el presente algoritmo y la correspondiente solución analítica¹⁰ se contrastan a continuación en Figura 3.

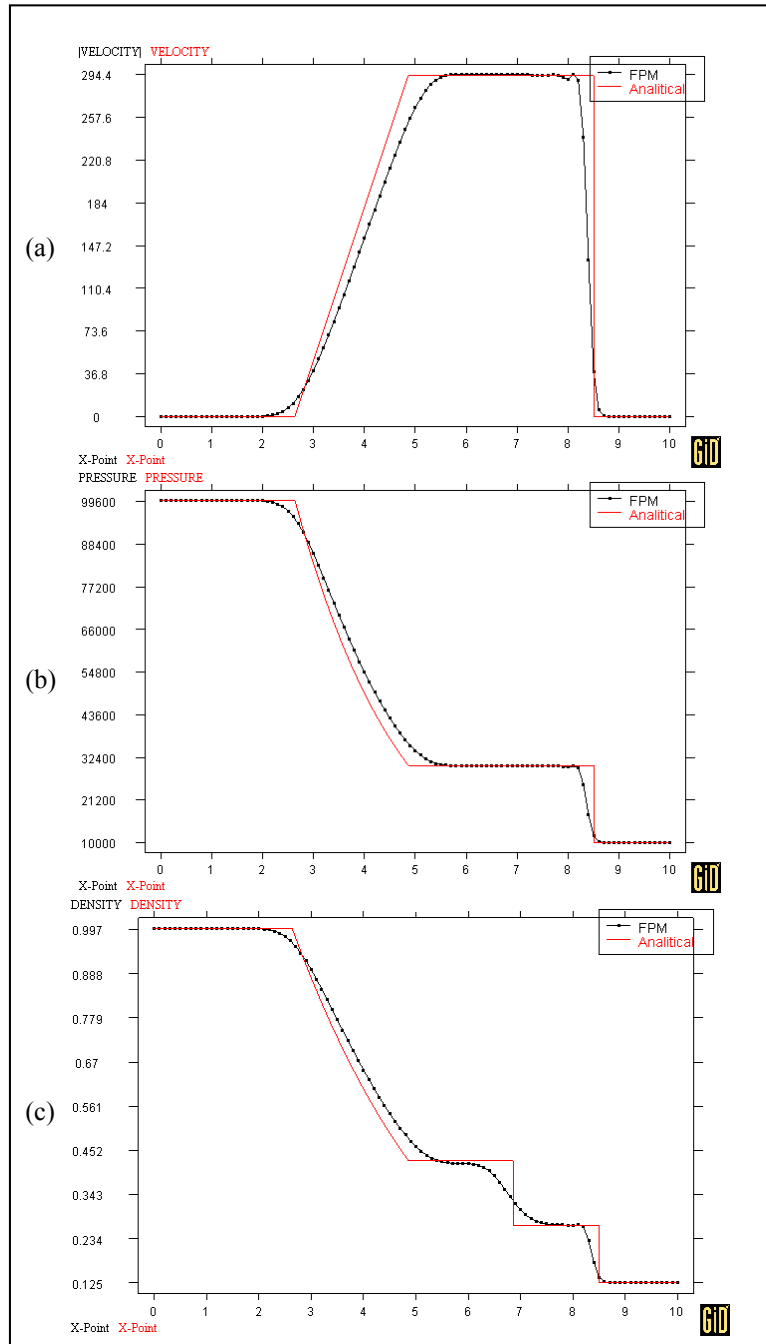


Figura 3: (a)Velocidad, (b)Presión y (c)Densidad a lo largo de la longitud total del tubo

Los resultados expuestos demuestran la capacidad del algoritmo de suprimir las oscilaciones propias del esquema de segundo orden, manteniendo un grado de precisión aceptable en la solución. Se observa una buena definición de la discontinuidad de presión y de la formación del abanico de expansión. No ocurre lo mismo con la discontinuidad de contacto (densidad) la

cual se ve considerablemente suavizada debido al carácter difusivo de la solución de bajo orden.

7.2 Flujo en una tobera divergente. Caso transónico

Supongamos el flujo supersónico de un fluido en el interior de una tobera divergente. Existe una relación entre la presión de entrada y salida, por encima de la cual será posible una expansión isentrópica del fluido a lo largo de la tobera y el flujo será enteramente supersónico. Si la presión de salida de la tobera aumenta, ya no será posible dicha expansión isentrópica y una onda de choque normal se formará corriente abajo, a una determinada distancia de la entrada de la tobera. Por detrás de la onda de choque el flujo será subsónico, con lo cual se producirá la expansión necesaria en el conducto divergente para alcanzar la presión requerida a la salida de la tobera.

Este último caso descrito se resuelve en forma numérica mediante el algoritmo propuesto, para una tobera divergente cuya variación de sección transversal es dada por:

$$S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(0.8x - 4) \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (42)$$

El flujo a la entrada de la tobera es supersónico, por lo cual se especifican todas las variables del flujo en la misma, de acuerdo al sentido en que las características propagan la información dentro del dominio. Las variables del flujo impuestas a la entrada de la tobera son las siguientes:

$$\begin{aligned} \rho_i &= 1.221 \text{ kg/m}^3 & p_i &= 47880 \text{ Pa} \\ u_i &= 351.43 \text{ m/s} & v_i &= 0. \text{ m/s} \end{aligned}$$

que corresponden a un número de Mach de entrada $M = 1.5$. Debido a que el flujo en el plano de salida de la tobera es subsónico, uno de los autovalores es negativo e introduce información al dominio, por lo tanto se especifica una condición. De acuerdo a esto último, se impone a la salida la variable presión de acuerdo con:

$$p_o = 117766.3 \text{ Pa}$$

Además, condición de deslizamiento es impuesta sobre los lados superior e inferior del dominio. De acuerdo con el valor de presión impuesto a la salida, deberá esperarse la formación de una onda de choque normal en el interior de la tobera posicionada en $x=5$.

El dominio de análisis se discretiza en 1111 puntos equiespaciados ($\Delta x = 0.1$). Se emplea aproximación cuadrática ($m=6$) en la obtención de las funciones de forma y nubes de 17 puntos cada una.

Es posible observar a continuación, en Figura 4, una clara definición de la onda de choque posicionada a la mitad de la longitud total de la tobera. Los resultados numéricos son comparados con resultados obtenidos analíticamente para el caso unidimensional¹¹, y una buena correlación para la variable presión a lo largo de longitud de la tobera, se revela en Figura 5. Además es posible notar que la posición de la onda de choque es obtenida correctamente mediante el esquema propuesto y que la difusión introducida al esquema se mantiene bien acotada por efecto del algoritmo FCT.

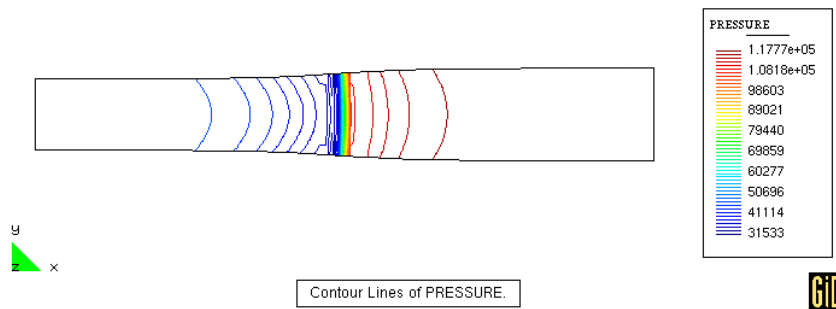


Figura 4: Isolneas de presión (Pa)

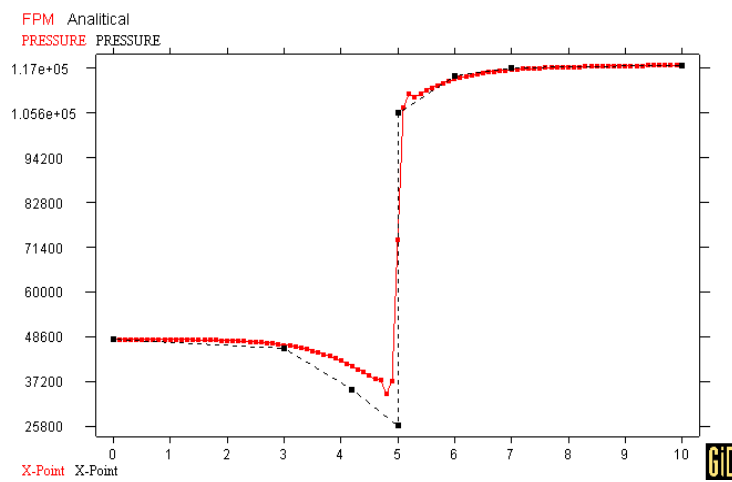


Figura 5: Distribución de presión a lo largo de la tobera

Finalmente se presenta en Figura 6 la historia de la convergencia del problema calculada para la variable densidad según norma L_2 .

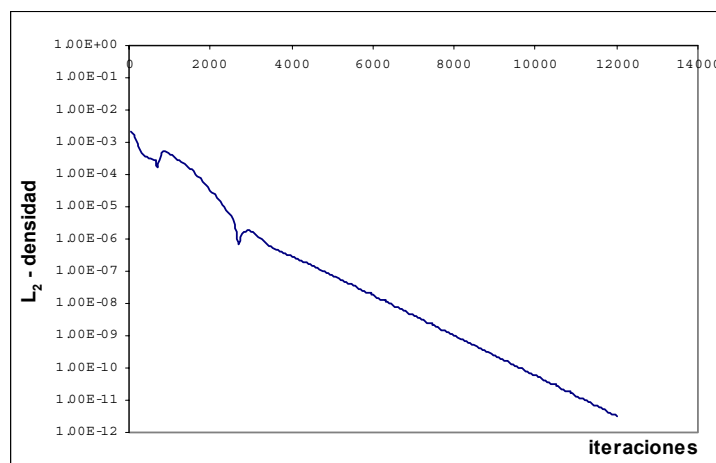


Figura 6: Convergencia del problema

8 CONCLUSIONES

Se presentó en este trabajo la solución numérica de las Ecuaciones de Euler mediante el Método de Punto Finito. Se comprobó una buena performance del algoritmo logrado mediante la conjunción de discretización espacial vía FPM y el esquema temporal propuesto. El modelo de difusión artificial implementado, demostró actuar de manera satisfactoria en zonas de fuertes gradientes de las variables como así también en zonas de velocidades relativamente bajas. Es en estas últimas, donde el empleo de difusión artificial de cuarto orden actuó en forma determinante para lograr estabilidad en la solución. Se logró en este trabajo una formulación estable para la adaptación del algoritmo FCT al contexto de Punto Finito. Si bien se pudo observar la reaparición de alguna oscilación de muy pequeña amplitud en presencia de fuertes gradientes de las variables, en ningún caso esto último generó oscilaciones significativas o inestabilidades de algún tipo. Este problema requiere para su solución un estudio más pormenorizado del proceso de cálculo de los limitadores.

9 REFERENCIAS

- [1] Donea, J., '*A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems*', Int. J. Num. Meth. Eng. 20: 101-119 (1984)
- [2] Löhner, R., Morgan, K., Zienkiewicz, O.C., '*The Solution of Non-Linear Hyperbolic Equations Systems by the Finite Elements Method*', Int. J. Num. Meth. Fluids 4: 1043-1063 (1984)
- [3] Löhner, R., Morgan, K., Peraire, J., Vahdati, M., '*Finite Element Flux Corrected Transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes Equations*', Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, 7: 1093-1109. (1987)
- [4] Möller, M., Kuzmin, D., Turek, S., '*Implicit Flux-Corrected Transport Algorithm for Finite Element Simulation of the Compressible Euler Equations*', Institute of Applied Mathematics, University of Dortmund, Germany.
- [5] Möller, M., Kuzmin, D., Turek, S., '*Multidimensional FEM-FCT Schemes for Arbitrary Time-stepping*', Institute of Applied Mathematics, University of Dortmund, Germany.
- [6] Sacco, C., '*Desarrollo del Método de Puntos Finitos en Mecánica de Fluidos*', Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Catalunya, Barcelona, España. (2001)
- [7] Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., '*A Finite Point Method in Computational Mechanics. Applications to Convective Transport and Fluid Flow*', Int. J. Num. Meth. Eng. 39: 3839-3866.(1996)
- [8] Hirsch, C., '*Numerical Computation of Internal and External Flows*', Volumen 2, John Wiley & Sons. (1990)
- [9] Fischer, T. R., '*A Contribution to Adaptive Numerical Solution of Compressible Flow Problems*', Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Catalunya, Barcelona, España. (1996)
- [10] Slater, J. W., NPARC Validation Archive, [documento WWW], URL: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/stube/stube.html>, Marzo 2003.
- [11] Hoffman, K. A., Chiang, S. T., '*Computational Fluid Dynamics for Engineers*', Volumen 2, Engineering Education Systems. (1993)