

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUDGER KAUP

Poincaré Dualität für Räume mit Normalisierung

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26, n° 1 (1972), p. 1-31

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_1_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POINCARÉ DUALITÄT FÜR RÄUME MIT NORMALISIERUNG (*)

LUDGER KAUP

Einleitung.

Die Dualitätssätze der algebraischen Topologie haben schon lange ihren festen Platz in der Theorie der Mannigfaltigkeiten. Ihre Anwendungen nützen jedoch vielfach nur einen gewissen Teil der durch die Dualitätssätze gelieferten Ergebnisse aus. So liegt es nahe, für eine umfangreichere Klasse von topologischen Räumen Teilaussagen der Dualitätstheorie herzuleiten und anzuwenden. In [9] ist dies exemplarisch für gewisse singuläre komplexe Räume geschehen. Die vorliegende Arbeit bringt nun eine systematischere Ausführung dieses topologischen Konzepts. Sie ist so gehalten, dass sie insbesondere auf komplexe Räume anwendbar ist. Ausser der lokalen Triangulierbarkeit hat nämlich ein komplexer Raum X folgende nützliche Eigenschaft: Man kann ihn durch einen funktionentheoretisch wohlbekannten Prozess in Richtung auf eine Mannigfaltigkeit hin « regularisieren »: Es existiert eine endliche surjektive (sogar holomorphe) Abbildung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ eines lokal irreduziblen komplexen Raumes \tilde{X} auf X , die sogenannte Normalisierungsabbildung. Mit Hilfe dieser Abbildung π lässt sich insbesondere für reindimensionales X ein sinnvoller Poincaré Homomorphismus von der Kohomologie von \tilde{X} in die Homologie von X definieren.

Das Arbeitsprinzip, eine endliche Surjektion π zuzulassen, liefert auch für allgemeinere topologische Räume X Anwendungen. Beschränken wir uns in der Einleitung jedoch auf den Fall, dass X ein abzählbarer lokal triangulierbarer rein p dimensionaler lokal irreduzibler (Definition 2.3) topologi-

Pervenuto alla Redazione il 10 Novembre 1970.

(*) Partially supported by OAS, No 10100100F4.

schers Raum ist, φ eine parakompaktifizierende Trägerfamilie auf X , A eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X und π die Identität. Dann existiert für alle j ein kanonischer "Poincaré Homomorphismus"

$$P_j: H_\varphi^j(X, A) \rightarrow H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A).$$

P_j ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv. Ist beispielsweise A leer, φ eine Überdeckung von X und hat X höchstens isolierte Singularitäten, so sind genau dann alle P_j Isomorphismen, wenn X singularitätenfrei, d.h. eine Homologiemannigfaltigkeit ist. Welche Hindernisse im einzelnen verschwinden müssen, damit für festes j Dualitäten vom Typ Poincaré, Alexander oder Lefschetz gelten, ist in Paragraph 4 dargestellt. Diese Hindernisse liegen in der lokalen Homologie $\mathcal{H}_*(X)$. Besonders übersichtlich ist die Situation, wenn $X \setminus \bar{A}$ nur isolierte Singularitäten hat, denn dann treten die Poincaré Homomorphismen in einer langen exakten Sequenz auf:

$$(*) \quad 0 \rightarrow H_\varphi^1(X, A) \rightarrow H_{p-1}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A) \rightarrow H_{\varphi|X \setminus A}^0(X, \mathcal{H}_{p-1}(X)) \rightarrow H_\varphi^2(X, A) \rightarrow \\ \rightarrow \dots \rightarrow H_\varphi^p(X, A) \rightarrow H_0^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A) \rightarrow 0 \quad (p > 0).$$

Diese Sequenz bricht für Homologiemannigfaltigkeiten offensichtlich in die bekannten kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow H_\varphi^j(X, A) \rightarrow H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A) \rightarrow 0$$

zusammen.

P_0 ist für beliebige Singularitäten ein Isomorphismus. Da der Anfang der Sequenz (*) immer definiert und exakt ist, lassen sich auch P_1 und P_2 stets beschreiben. Als Konsequenz ergibt sich ein allgemeiner Jordan-Brouwerscher Separationssatz (vgl. [9a]). Ferner lässt sich die höchstdimensionale Homologie von X bestimmen. Aus einer Verfeinerung von (*) ergibt sich ein Dualitätssatz für die lokale Homologie isolierter Singularitäten, mit dem man unter anderem zeigt: Ist X kompakt HLC und liegen für eine abgeschlossene Teilmenge A von X in A oder in $X \setminus A$ nur isolierte Singularitäten von X , so gilt für die Euler Poincaré Charakteristiken:

$$\chi(X \setminus A) = \chi(X, A) = \chi(X) - \chi(A).$$

Eine Anwendung der Resultate dieser Arbeit ist ein Lefschetztheorem über Hyperflächenschnitte für singuläre projektiv algebraische Varietäten. Dieser Satz gestattet es seinerseits, die Homologie gewisser singulärer projektiv oder affin algebraischer Varietäten zu berechnen (vgl. [9c]).

Die hier vorliegende Fassung entspricht dem topologischen Teil einer Vortragsreihe vom Herbst 1969 am Mathematischen Institut der Universidad

Nacional de La Plata (vgl. [9b]). Für das Zustandekommen dieses Vortragszyklus sowie für wertvolle Anregungen bin ich besonders Herrn Miguel Herrera verpflichtet.

§ 1. Vorbemerkungen.

In den Bezeichnungen der Kohomologie- und Homologietheorie schliessen wir uns an [3] an. L bezeichne stets einen (kommutativen, nullteilerfreien) Hauptidealring (mit Einselement 1), M einen endlich erzeugten, N einen beliebigen L -Modul, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots$ Garben von L -Moduln. Wir stellen zunächst einige zum Teil bereits bekannte Dinge zusammen, die im folgenden ständig benutzt werden.

1) X bezeichne stets einen lokalkompakten (insbesondere hausdorffschen) topologischen Raum, A eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X , die damit insbesondere lokalkompakt ist. Für jede (nicht notwendig parakompaktifizierende) Trägerfamilie φ auf X hat die exakte Kohomologiesequenz zum Paar (X, A) die Gestalt:

$$\dots \rightarrow H_{\varphi}^j(X, A; \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi}^j(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi \cap A}^j(A, \mathcal{F}|_A) \rightarrow H_{\varphi}^{j+1}(X, A; \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

mit $\varphi \cap A := \{B \cap A, B \in \varphi\}$. Für die relative Kohomologie gelten die folgenden natürlichen Isomorphismen:

a) Ist A φ taut (vgl. [3], II. 10-4), so gilt $H_{\varphi}^*(X, A; \mathcal{F}) \cong H_{\varphi|_{X \setminus A}}^*(X, \mathcal{F})$ mit $\varphi|_{X \setminus A} := \{B \subset X \setminus A, B \in \varphi\}$.

b) Ist A abgeschlossen, so gilt $H_{\varphi}^*(X, A; \mathcal{F}) \cong H_{\varphi}^*(X, \mathcal{F}_{X \setminus A})$.

2) In der Borel-Moore Homologie lautet entsprechend die exakte Homologiesequenz:

$$\dots \rightarrow H_j^{\varphi|_A}(A, \mathcal{F}) \rightarrow H_j^{\varphi}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_j^{\varphi}(X, A; \mathcal{F}) \rightarrow H_{j-1}^{\varphi|_A}(A, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Ist $U \subset X$ offen, so gilt $H_{*}^{\varphi}(X, \mathcal{F}_U) \cong H_{*}^{\varphi|_U}(U, \mathcal{F}|_U)$ und für zusätzlich parakompaktifizierendes φ auch noch $H_{*}^{\varphi}(X, U; \mathcal{F}) \cong H_{*}^{\varphi}(X, \mathcal{F}_{X \setminus U})$. Für abgeschlossenes A gilt $H_{*}^{\varphi}(X, A; M) \cong H_{*}^{\varphi \cap (X \setminus A)}(X \setminus A, M)$.

3) Ist X HLC, $\dim X < \infty$ (im allgemeinen Fall benutzen wir die kohomologische Dimension; in den Anwendungen haben wir in der Regel lokal triangulierbare Räume vorliegen, wo diese Dimension mit der topologischen übereinstimmt), φ parakompaktifiziert und bezeichnet $sH_{*}^{\varphi}(X, \mathcal{F})$ die singuläre Homologie, so gilt nach [3] chap. V. 11: $H_{*}^{\varphi}(X, \mathcal{F}) \cong sH_{*}^{\varphi}(X, \mathcal{F})$. Ist zusätzlich A HLC, so leitet man $H_{*}^{\varphi}(X, A; N) \cong sH_{*}^{\varphi}(X, A; N)$ leicht ab aus V. 12.6 mit V. 13 und dem Fünferlemma.

4) Der Konvention in der Kohomologie folgend werden wir in den Notationen die Trägerfamilie mit c bezeichnen, wenn es sich um die kompakten Mengen handelt; eld schreiben wir für die abgeschlossenen Mengen; wenn keine Trägerfamilie angegeben ist, handelt es sich stets um eld . Es sei also eigens vermerkt, dass die übliche Homologie mit kompakten Trägern hier anders als gewohnt stets mit $H_*^c(X, N)$ bezeichnet wird. Sind keine Koeffizienten angegeben, so handelt es sich in der Regel um den Koeffizientenbereich L .

5) Ist X ein reellanalytischer Raum (vgl. [4]) und hat die offene Teilmenge U von X abzählbare Topologie, so ist U topologisch ein simplizialer Komplex (den wir stets als lokalendlich und sternendlich verstehen); dieser kann zusätzlich so gewählt werden, dass eine vorgegebene lokalendliche Familie analytischer Teilmengen ein Unterkomplex ist (vgl. [6]). Insbesondere ist X also HLC. Dasselbe gilt damit natürlich für komplexe Räume.

6) Die auf der Kategorie der offenen Teilmengen von X definierte Prägarbe $U \rightsquigarrow H_j(U, \mathcal{F})$ mit den nach 2) konstruierten kanonischen Beschränkungen definiert die Garbe $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})$ der j -ten lokalen Homologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F} . Insbesondere gilt also für die lokale Homologie von X in einem Punkte x : $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})_x = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in U}} H_j(U, \mathcal{F})$. Aus dem Ausschneidungssatz ergibt sich, dass die lokale Homologie eine lokale topologische Invariante ist.

BEMERKUNG 1.1. Hat X in einer Umgebung von x die topologische Struktur eines simplizialen Komplexes, so ist $\mathcal{H}_j(X, M)_x$ ein endlich erzeugter L -Modul.

Beweis: Die Umgebung von x sei so trianguliert, dass x Eckpunkt ist. Dann gilt für den Simplexstern $st(x)$ und seinen topologischen Rand $st(x)^\circ$: $\mathcal{H}_j(X, M)_x = H_j^c(st(x), st(x)^\circ; M)$. $st(x)$ und $st(x)^\circ$ sind kompakt und HLC, daher sind $H_*^c(st(x), M)$ und $H_*^c(st(x)^\circ, M)$ endlich erzeugte L -Moduln; wegen der Exaktheit der Homologiesequenz des Paares $(st(x), st(x)^\circ)$ ist folglich auch $H_*^c(st(x), st(x)^\circ, M)$ endlich erzeugt.

Ist c eine Kette in einem simplizialen Komplex, so bezeichnen wir mit ∂c den simplizialen Rand von c . Ist s_p ein p -Simplex, so heiße die Punktmenge $s_p \setminus \partial s_p$ das Innere des Simplex s_p .

BEMERKUNG 1.2. Hat X lokal die topologische Struktur eines simplizialen Komplexes, so ist $\mathcal{H}_j(X, N)$ im Innern eines jeden Simplexes konstant. Der Träger $T := Tr \mathcal{H}_j(X, N)$ ist lokal abgeschlossen. Ist $\dim T = 0$, so ist T diskret.

Beweis: Für die erste Behauptung genügt es offensichtlich, zu zeigen, dass $\mathcal{H}_j(X, N)$ auf jedem $s_p \setminus \partial s_p$ lokal konstant ist. Diese Behauptung ergibt sich jedoch leicht aus der topologischen Homogenität von X in $s_p \setminus \partial s_p$. Da das Innere eines Simplex lokal abgeschlossen ist, lässt sich T als lokal endliche Vereinigung lokal abgeschlossener Mengen darstellen.

7) Ist X eine p -dimensionale Homologiemannigfaltigkeit, so verschwinden alle $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})$ für $j \neq p$; $\mathcal{H}_p(X, \mathcal{F}) = \mathcal{H}_p(X, L) \otimes \mathcal{F}$ (Tensor- und Torsionsprodukt sind stets über L gemeint). Da die uns insbesondere interessierenden komplexen Räume im allgemeinen jedoch keine Homologiemannigfaltigkeiten sind, betrachten wir die folgende Klasse von topologischen Räumen, deren höchste lokale Homologie sich nicht zu sehr von der einer Homologiemannigfaltigkeit unterscheidet:

DEFINITION 1.1 (\tilde{X}, π, X) heiße topologische $L - p$ Normalisierung (von X), wenn \tilde{X} lokalkompakt ist, $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ surjektiv, stetig und endlich (insbesondere also eigentlich) ist und wenn gilt:

i) $\mathcal{H}_j(\tilde{X}) = 0$ für $j > p$; $\text{Tr } \mathcal{H}_p(\tilde{X})$ ist lokal abgeschlossen und $\mathcal{H}_p(\tilde{X})$ ist auf $\text{Tr } \mathcal{H}_p(\tilde{X})$ die konstante Garbe L .

ii) Die für alle $U \subset X$, U offen, definierte Abbildung $\pi_p: H_p(\pi^{-1}(U)) \rightarrow H_p(U)$ definiert einen Isomorphismus von L -Moduln

$$\pi_0(\mathcal{H}_p(\tilde{X})) \cong H_p(X).$$

iii) $\dim_L \tilde{X} < \infty$.

BEISPIELE a) X sei ein komplexer Raum, den wir stets als reduziert annehmen wollen; dies ist keine Einschränkung, soweit wir nur an der Topologie von X interessiert sind (vgl. [7]). X habe die komplexe Dimension n , p sei gleich $2n$, \tilde{X} die (funktionentheoretische) Normalisierung, $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ die holomorphe Normalisierungsabbildung. π ist endlich und surjektiv, ausserhalb der (mindestens 2 kodimensionalen) Menge der lokal reduziblen Punkte von X ist π topologisch. Dann ist (\tilde{X}, π, X) eine topologische $L - 2n$ Normalisierung für alle L . Denn $\mathcal{H}_p(X)_x = L$ genau dann, wenn X in x einen irreduziblen analytischen Mengenkeim X_x erzeugt, wie sich aus dem Analogon zu [2] 4.3 Lemme für allgemeines L leicht ergibt. Der normale komplexe Raum \tilde{X} ist bekanntlich in jedem Punkte irreduzibel. $\text{Tr } \mathcal{H}_p(\tilde{X}) = \{x \in \tilde{X}, \dim_{\mathbb{C}} X_x = n\}$ ist eine abgeschlossene analytische Teilmenge von \tilde{X} , da \tilde{X} lokal irreduzibel ist, sogar eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten. Die Existenz einer Fundamentalklasse sichert,

dass $\mathcal{H}_p(\tilde{X})$ darauf die konstante Garbe L ist. Aus [2] 4.3 Lemme ergibt sich ferner für alle $x \in X$: $|\pi^{-1}(x)| L = \bigoplus_{y \in \pi^{-1}(x)} \mathcal{H}_p(\tilde{X})_y = \pi_0 \mathcal{H}_p(\tilde{X})_x = \mathcal{H}_p(X)_x$

unabhängig von L , so dass einerseits ii) gesichert ist, andererseits $\mathcal{H}_{p-1}(X, L)$ torsionsfrei ist: Für jedes Ideal a in L gilt $\mathcal{H}_p(X, L/a) = \mathcal{H}_p(X, L) \otimes L/a$, da X HLC und daher die Homologie von X invariant unter change of rings ist. Folglich gilt für die Torsion $\mathcal{H}_{p-1}(X, L) * (L/a) = 0$ für alle a , so dass $\mathcal{H}_{p-1}(X, L)$ torsionsfrei über dem Hauptidealring L ist. Mit Bemerkung 1.1 und dem Darstellungssatz für endlich erzeugte L -Moduln folgt, dass jeder Halm $\mathcal{H}_{p-1}(X, L)_x$ ein freier L -Modul ist.

b) Für einen reellanalytischen Raum der Dimension p existiert im allgemeinen keine Normalisierung wie im komplexen Fall (für eine lokale Aussage vgl. [2] 3.6 Lemme). Wenn jedoch eine Normalisierung \tilde{X} existiert und die Menge der topologischen Singularitäten von X mindestens 2 kodimensional ist, dann ist (\tilde{X}, π, X) eine topologische \mathbb{Z}_2 -Normalisierung, wie man aus [2] 3.7 Theorem und dem Beweisprinzip von 4.3 ableitet. Sind alle p -dimensionalen Zusammenhangskomponenten von \tilde{X} orientierbar, so darf man \mathbb{Z}_2 durch beliebiges L ersetzen.

c) \tilde{X} sei ein lokalkompakter p -dimensionaler Raum. Ausserhalb einer abgeschlossenen 2-kodimensionalen Menge sei \tilde{X} eine topologische Mannigfaltigkeit. Jedes $x \in \tilde{X}$ besitze eine Umgebung U , die homöomorph ist zu einer höchstens p -dimensionalen reellanalytischen Menge V in einem Gebiet eines reellen Zahlenraumes. Für jedes dieser V und jedes $y \in V$ enthalte der analytische Mengenkeim V_y höchstens eine irreduzible Komponente der Dimension p . R bezeichne eine eigentliche endliche Äquivalenzrelation auf \tilde{X} , die ausserhalb einer 2-kodimensionalen Menge die Identität induziert. Mit der Quotiententopologie auf $X := \tilde{X}/R$ und der kanonischen Abbildung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ ist (\tilde{X}, π, X) eine $\mathbb{Z}_2 - p$ Normalisierung. Denn X ist lokalkompakt ([8], chap. I, § 10, prop. 9). $Tr \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) = \{x \in \tilde{X}, \dim_x \tilde{X} = p\}$ und $\mathcal{H}_p(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2)$ ist darauf konstant. $\pi_0 \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathcal{H}_p(X, \mathbb{Z}_2)$ ergibt sich mit [2] 3.7 und 2.3.

d) Y sei ein p dimensionaler reellanalytischer Raum, zu dem eine Normalisierung wie in b) existiert; X sei ein abgeschlossenes (nicht notwendig kompaktes) analytisches Polyeder in Y , für dessen topologischen Rand gelte $X \cap \{x \in X, Y \text{ ist in } x \text{ topologisch singular, } \dim_x Y > p - 2\} = \emptyset$. \tilde{X} bezeichne das Urbild von X in der Normalisierung von Y . Dann ist (\tilde{X}, π, X) eine topologische $\mathbb{Z}_2 - p$ (bzw. ggf. $L - p$) Normalisierung. $Tr \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) = \{x \in \tilde{X}, \dim_x \tilde{X} = p, \pi(x) \notin X \cdot\}$ ist lokal abgeschlossen, sogar offen, falls $X \setminus X \cdot$ reindimensional.

8) Mit $\tilde{\mathcal{F}}$ bezeichnen wir das topologische Urbild einer Garbe \mathcal{F} auf X bezüglich π ; mit $\tilde{\varphi}$ das Urbild $\pi^{-1}\varphi = \{A \subset \pi^{-1}(K), A \text{ abgeschlossen}, K \in \varphi\}$ der Trägerfamilie φ auf X .

SATZ 1.1. Ist (\tilde{X}, π, X) eine topologische $L - p$ Normalisierung und $\mathcal{H}_{p-1}(X) * \mathcal{F} = 0$, so ist die natürliche Abbildung

$$H_{\varphi}^*(X, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_{\tilde{\varphi}}^*(\tilde{X}, \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}))$$

ein L -Isomorphismus.

Beweis: Die natürlichen Homomorphismen $H_p(\pi^{-1}(U), \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_p(U, \mathcal{F})$ definieren die Abbildung $g: \pi_0 \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})$. Damit ergibt sich folgendes exakte kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \pi_0(\mathcal{H}_p(X) \otimes \mathcal{F}) & \rightarrow & \pi_0(\mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow f & & \downarrow g & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}_p(X) \otimes \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Die untere Zeile ergibt sich aus dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie; sie ist exakt, da $\mathcal{H}_{p-1}(X) * \mathcal{F} = 0$. Nach Konstruktion des topologischen Urbildgarbe für die endliche Abbildung π gilt auch $\mathcal{H}_{p-1}(\tilde{X}) * \tilde{\mathcal{F}} = 0$, woraus sich die Exaktheit der oberen Zeile ergibt. f werde definiert als $a \otimes b$, wobei $a: \mathcal{H}_p(X) \rightarrow \pi_0 \mathcal{H}_p(\tilde{X})$ den Umkehrisomorphismus zu Def. 1.1, ii) bezeichne und b den kanonischen L -homomorphismus $b: \mathcal{F} \rightarrow \pi_0 \tilde{\mathcal{F}}$. f ist ein Isomorphismus, da halbmweise gilt: $(\mathcal{H}_p(X) \otimes \mathcal{F})_x = \bigoplus_{y \in \pi^{-1}(x)} \pi_0 \mathcal{H}_p(\tilde{X})_y \otimes \mathcal{F}_x = \bigoplus_{y \in \pi^{-1}(x)} \tilde{\mathcal{F}}_y = \pi_0(\mathcal{H}_p(\tilde{X}) \otimes \mathcal{F})_x$. Damit ist auch g ein Isomorphismus, so dass die Behauptung des Satzes sich aus dem Theorem von Vietoris-Begle ergibt, da π eine endliche Abbildung ist. ([3] II, 11.1).

KOROLLAR 1.2 $\dim_L X = \dim_L \tilde{X}$.

Beweis: Für $U \subset X$ offen gilt nach Satz 1.1 $H_c^j(U) \cong H_c^j(\pi^{-1}(U), \mathcal{H}_p(\tilde{X}))$. Falls $j > \dim_L \tilde{X}$, verschwindet $H_c^j(\pi^{-1}(U))$. Nach [3] II, 15.11 gilt daher $\dim_L X \leq \dim_L \tilde{X}$. Die umgekehrte Richtung folgt aus [3] IV. 7.2.

KOROLLAR 1.3 $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) = 0$ falls $j > \dim_L X$.

Beweis durch Induktion über j : Wir beschränken uns auf den Induktionsanfang $j = \dim_L X + 1$: $\mathcal{H}_{j-1}(X)$ ist torsionsfrei, daher gilt $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) \cong = \mathcal{H}_j(X) \otimes \mathcal{F}$, so dass es genügt, $\mathcal{H}_j(X) = 0$ zu zeigen. Wäre ein Halm $\mathcal{H}_j(X)_x \neq 0$, so existierte wegen der exakten Sequenz $0 \rightarrow \lim \text{Ext}(H_c^{j+1}(U, L), L) \rightarrow \mathcal{H}_j(X)_x \rightarrow \lim \text{Hom}(H_c^j(U), L) \rightarrow 0$ eine offene Menge U mit $H_c^j(U)$ oder $H_c^{j+1}(U) \neq 0$. Dies widerspricht $j > \dim_L X$.

BEMERKUNG 1.3. Ist X lokal triangulierbar, so gilt $\dim_L X = p$.

KOROLLAR 1.4. Es sei $S := \{x \in X, \mathcal{H}_p(X)_x \neq L\}$, \bar{S} bezeichne die abgeschlossene Hülle von S . Dann ist der von π induzierte Homomorphismus $\pi^j: H_\varphi^j(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_\varphi^j(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$ surjektiv für $j > s := \dim_\varphi \bar{S}$ und injektiv für $j > s + 1$.

Beweis: Es bezeichne $f: \mathcal{F} \rightarrow \pi_0 \tilde{\mathcal{F}}$ den kanonischen Homomorphismus. Da π surjektiv, ist f injektiv, also hat man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \pi_0 \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Koker}(f) \rightarrow 0.$$

Wegen $\text{Tr Koker } f \subset S$ gilt für alle $j > s$: $H_\varphi^j(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_\varphi^j(X, \pi_0 \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow 0$ sowie $H_\varphi^{j+1}(X, \mathcal{F}) \cong H_\varphi^{j+1}(X, \pi_0(\tilde{\mathcal{F}}))$. Nach dem Satz von Vietoris-Begle gilt weiter $H_\varphi^j(X, \pi_0 \tilde{\mathcal{F}}) \cong H_\varphi^j(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$, woraus sich die Behauptung ergibt.

9) **BEMERKUNG 1.4** Ist X lokal triangulierbar, so gilt: $\mathcal{H}_0(X)_x \neq 0$ genau dann, wenn x isolierter Punkt ist.

Beweis: X ist lokal zusammenhängend, also ist in einer lokalen Triangulierung $H_0(st(x) \cdot) \rightarrow H_0(st(x)) = L$ surjektiv genau dann, wenn $st(x) \cdot \neq \emptyset$.

BEMERKUNG 1.5 Ist X lokal triangulierbar, so gilt: $\mathcal{H}_1(X)_x \neq 0$ genau dann, wenn $st(x) \setminus x$ nicht zusammenhängend ist.

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass x nicht isoliert liegt. Da $st(x)$ zusammenhängend und zusammenziehbar ist, ergibt sich die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{H}_1(X)_x \rightarrow H_0^\circ(st(x) \setminus x) \rightarrow H_0^\circ(st(x)) \rightarrow 0$.

SATZ 1.2 X sei lokal triangulierbar und $X^j := \{x \in X, \dim_x X = j\}$. Dann gilt $\dim(\text{Tr } \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) \setminus \bar{X}^j) < j$.

Beweis: Da es genügt, die Dimension lokal abzuschätzen, dürfen wir annehmen, dass X trianguliert ist. Es sei $x \in \text{Tr } \mathcal{H}_j(X) \setminus \bar{X}^j$ und zunächst

$\mathcal{F} = L; U := st(x) \setminus st(x)$. Wir wollen zeigen, dass für alle $y \in U$, die im Innern eines j -Simplexes s liegen, gilt $\mathcal{H}_j(U)_y = 0$. Daraus ergibt sich dann sofort, dass $\mathcal{H}_j(X)$ auf das $j-1$ Gerüst konzentriert ist. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über die Anzahl n der Simplexe $\neq s$ aus T , dem offenen Simplexstern des abgeschlossenen Simplexes s . Besteht T nur aus s , so ist $\dim_y X = j$ und nichts zu zeigen. Ist $n = 1$, so ist X in y eine Mannigfaltigkeit mit Rand, woraus die Behauptung leicht folgt. Für $n > 1$ zerlege man T in $F_1 \cup F_{n-1}$ mit $s \subset F_1 \cap F_{n-1} \subset T$. Dann ist $F_1 \cap F_{n-1}$ auf s und damit überhaupt zusammenziehbar. Wir betrachten die exakte Mayer-Vietoris Sequenz in der reduzierten Homologie ($j > 0$):

$$\dots \rightarrow H_q^c(F_1 \cap F_{n-1} \setminus y) \rightarrow H_q^c(F_1 \setminus y) \oplus H_q^c(F_{n-1} \setminus y) \rightarrow H_q^c(T \setminus y) \rightarrow \dots$$

Weil $s \setminus y$ homotop ist zu ∂s , überzeugt man sich davon, dass $F_1 \cap F_{n-1}$ $j-2$ zusammenhängend ist. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann $\mathcal{H}_j(U)_y = H_{j-1}^c(T \setminus y) = 0$. — Ist nun \mathcal{F} beliebig, so ergibt die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{H}_j(X) \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}(X) * \mathcal{F} \rightarrow 0$, dass $Tr \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) \subset Tr \mathcal{H}_j(X) \cup Tr \mathcal{H}_{j-1}(X)$, woraus die Behauptung folgt.

KOROLLAR 1.5 *Ist X lokal triangulierbar und hat X keine j -dimensionalen Punkte, so gilt $\dim Tr \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) < j$.*

BEISPIEL: Ist X ein komplexer Raum, so hat X keine Punkte ungerader Dimension.

§ 2. Poincaré Homomorphismen.

In diesem Paragraphen sei (\tilde{X}, π, X) eine fest vorgegebene topologische $L-p$ Normalisierung, $A \subset X$ sei φ -taut (vgl. [3] II, 10.4; hinreichend sind bekanntlich etwa: A offen, oder X vollständig parakompakt und φ parakompaktifizierend, oder A abgeschlossen und φ parakompaktifizierend). Es gelte:

i) $\dim_{\varphi|X \setminus A} X < \infty$.

(Dies ist etwa dann erfüllt, wenn X vollständig parakompakt oder wenn $\varphi|X \setminus A$ parakompaktifizierend ist).

Es bezeichne zur Abkürzung: $\tilde{X}_p := Tr \mathcal{H}_p(\tilde{X})$, $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$, $\tilde{A}_p := \tilde{A} \cap \tilde{X}_p$. Wenn A offen ist, dann ist auch (\tilde{A}, π, A) eine topologische $L-p$ Normalisierung.

ii) Wenn \tilde{X}_p nicht abgeschlossen ist, dann sei A abgeschlossen, φ parakompaktifizierend und X ein normaler topologischer Raum.

iii) \tilde{A}_p sei $\tilde{\varphi}| \tilde{X}_p$ — taut.

(dies gilt etwa, dann, wenn a) $\tilde{X}_p = \tilde{X}$ oder b) φ ist parakompaktifizierend, und für jedes $K \in \tilde{\varphi} | \tilde{X}_p$ hat $K \cap \tilde{A}_p$ ein Umgebungsfundamentalsystem in \tilde{X}_p aus parakompakten Umgebungen. Denn für a) gilt nach Vietoris-Begle $H_{\tilde{\varphi} | \tilde{A}}^*(\tilde{A}, \mathcal{G}) = H_{\varphi \cap A}^*(A, \pi_0 \mathcal{G})$; mit \mathcal{G} ist auch $\pi_0 \mathcal{G}$ eine welke Garbe, so dass $\mathcal{G} | \tilde{A} \varphi \cap \tilde{A}$ -azyklisch ist. Analog gilt für welches \mathcal{G} :

$$\begin{array}{ccc} H_{\varphi}^0(\tilde{X}, \mathcal{G}) & \rightarrow & H_{\tilde{\varphi} | \tilde{A}}^0(\tilde{A}, \mathcal{G}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_{\varphi}^0(X, \pi_0 \mathcal{G}) & \rightarrow & H_{\varphi \cap A}^0(A, \pi_0 \mathcal{G}) \rightarrow 0, \end{array}$$

da A φ -taut. Zu b): Mit φ ist auch $\tilde{\varphi}$ parakompaktifizierend: Da jede Zusammenhangskomponente jedes $K \in \varphi$ σ -kompakt ist, sei ohne Einschränkung K zusammenhängend. K ist lokalkompakt und somit ist $\pi^{-1}(K)$ σ -kompakt und parakompakt, da π eigentlich ist; dies gilt entsprechend für jede abgeschlossene Teilmenge von $\pi^{-1}(K)$. Ist $B \in \tilde{\varphi}$, so existiert ein $K \in \varphi$, das Umgebung von πB ist. Dann ist $\pi^{-1}(K) \in \tilde{\varphi}$ Umgebung von B . — Nach Voraussetzung ist \tilde{X}_p lokal abgeschlossen, somit ist $\tilde{\varphi} | \tilde{X}_p$ parakompaktifizierend auf \tilde{X}_p und sogar parakompaktifizierend für $(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p)$, woraus die Behauptung folgt.

iv) Die Garbe von L Moduln \mathcal{F} bezeichne im folgenden die konstante Garbe M ; wenn A abgeschlossen ist und φ parakompaktifizierend ist, dann darf \mathcal{F} beliebig sein.

Letzteres ist von Bedeutung für die Anwendung des Capproduktes in § 3.

THEOREM 2.1. *Unter Verwendung der exakten Homologiesequenz zum Paar $(X, X \setminus A)$, der exakten Kohomologiesequenzen zu den Paaren (X, A) und $(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p)$ und der von π induzierten Homomorphismen existiert ein kanonisches kommutatives Diagramm von L -Homomorphismen*

$$\begin{array}{cccccccc} \dots \rightarrow & H_{\varphi}^j(X, A; \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\varphi}^j(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\varphi \cap A}^j(A, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{\varphi}^{j+1}(X, A; \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots \\ & \downarrow \pi^j & & \downarrow \pi^j & & \downarrow \pi^j & & \downarrow \pi^{j+1} & & \\ \dots \rightarrow & H_{\tilde{\varphi} | \tilde{X}_p}^j(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) & \rightarrow & H_{\tilde{\varphi} | \tilde{X}_p}^j(\tilde{X}_p, \tilde{\mathcal{F}}) & \rightarrow & H_{(\tilde{\varphi} | \tilde{X}_p) \cap \tilde{A}_p}^j(\tilde{A}_p, \tilde{\mathcal{F}}) & \rightarrow & H_{\tilde{\varphi} | \tilde{X}_p}^{j+1}(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow P_j(X, A) & & \downarrow P_j(X) & & \downarrow Q_j(A) & & \downarrow P_{j+1}(X, A) & & \\ \dots \rightarrow & H_{\varphi-j}^{\varphi | X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_{p-j}^{\varphi}(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_{p-j}^{\varphi}(X, X \setminus A; \mathcal{F}) & \rightarrow & H_{p-j-1}^{\varphi | X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{F}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

falls $\mathcal{H}_{p-1}(\tilde{X}) * \tilde{\mathcal{F}} = 0 = \mathcal{H}_{p-1}(X) * \mathcal{F}$. Das Diagramm ist natürlich in Abhängigkeit von \mathcal{F} .

Beweis: Die obige Leiter ist wohlbekannt und resultiert aus der Abbildung $\pi|_{\tilde{X}_p}: \tilde{X}_p \rightarrow X$. Für die untere Leiter benutzen wir den Beweis der Poincaré Dualität aus [3], insbesondere V.8.4. und 8.5. Man sieht, dass unter den angegebenen Bedingungen zwei konvergente Spektralsequenzen existieren:

$$a) \quad E_2^{r,s} = H_\varphi^r(X, A; \mathcal{H}_{-s}(X, \mathcal{F})) \implies H_{-r-s}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F})$$

$$b) \quad E_2^{r,s} = H_{\varphi \cap A}^r(A, \mathcal{H}_{-s}(X, \mathcal{F})) \implies H_{-r-s}^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{F}).$$

Aus a) folgern wir die Existenz von $P_j(X, A)$: Da in dieser Spektralsequenz die Korandoperatoren $\partial_t^{j,-p}$ für $t \geq 2$ nach $E_t^{j+t, -p-t+1}$ abbilden und diese verschwinden, da $\mathcal{H}_k(X, \mathcal{F}) = 0$ für $k > p$, resultiert aus a) eine natürliche Surjektion

$$H_\varphi^j(X, A; \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) = E_2^{j,-p} \rightarrow E_\infty^{j,-p}.$$

$E_\infty^{j,-p}$ ist natürlich isomorph zu einem Untermodul des assoziierten graduierten Moduls $G(H_{p-j}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F})) = \bigoplus_{a+b=p-j} E_\infty^{a,b}$; da wieder $E_\infty^{a,b} = 0$ falls $b < -p$, ergibt sich eine natürliche Injektion $E_\infty^{j,-p} \rightarrow H_{p-j}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F})$ (vgl. etwa [5] chap. XV, 5.3.a). Eine analoge Schlussweise lässt sich mit b) durchführen; ersetzen wir daher in 2.1 die mittlere Zeile durch

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_\varphi^j(X, A; \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) &\rightarrow H_\varphi^j(X, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_{\varphi \cap A}^j(A, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) \rightarrow \\ &\rightarrow H_\varphi^{j+1}(X, A; \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

so erhalten wir eine modifizierte untere Leiter, die aus folgendem Grunde kommutativ und natürlich in \mathcal{F} ist: Die senkrechten Homomorphismen sind auf natürliche Weise durch Spektralsequenzen definiert, die ihrerseits von Doppelkomplexen herkommen, die durch eine natürliche kurze exakte Sequenz verbunden sind. Es bleibt also noch zu zeigen, dass die beiden mittleren Zeilen auf natürliche Weise identifiziert werden können.

$$\begin{aligned} H_\varphi^*(X, A; \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) &= H_{\varphi|_{X \setminus A}}^*(X, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})), \text{ da } A \text{ } \varphi\text{-taut;} \\ &= H_{\varphi|_{X \setminus A}}^*(\tilde{X}, \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})) \text{ nach Satz 1.1, da } \mathcal{H}_{p-1}(X) * \mathcal{F} = 0; \\ &= H_{\varphi|_{\tilde{X} \setminus \tilde{A}}}^*(\tilde{X}, \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})), \text{ da die Trägerfamilien übereinstimmen;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X} \setminus \tilde{A}})|_{\tilde{X}_p}}^* (\tilde{X}_p, \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})), \text{ da } \mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}) = \mathcal{H}_p(\tilde{X}) \otimes \tilde{\mathcal{F}} \text{ auf } \tilde{X}_p \text{ konzen-} \\
&\quad \text{triert und entweder } \tilde{X}_p \text{ abgeschlossen ist oder gilt: } \varphi \text{ ist parakomp-} \\
&\quad \text{aktifizierend und damit wegen der Eigentlichkeit von } \pi \text{ auch } \tilde{\varphi}; \\
&\quad \text{in dem normalen topologischen Raum } X \text{ hat jedes } K \in \varphi|_{X \setminus A} \text{ eine} \\
&\quad \text{beliebig feine abgeschlossene Umgebung } W \text{ mit } W \cap A = \emptyset; \text{ damit} \\
&\quad \text{ist auch } \varphi|_{X \setminus A} \text{ parakompaktifizierend und folglich ebenso } \tilde{\varphi}|_{\tilde{X} \setminus \tilde{A}}. \\
&= H_{\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p \setminus \tilde{A}_p}}^* (\tilde{X}_p, \tilde{\mathcal{F}}), \text{ da } \mathcal{H}_p(\tilde{X})|_{\tilde{X}_p} = L; \\
&= H_{\tilde{\varphi}}^* (\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}), \text{ da } \tilde{A}_p \tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p} \text{-taut ist.}
\end{aligned}$$

Weiterhin hat man einen natürlichen Homomorphismus

$$\sigma: H_{\varphi \cap A}^* (A, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^* (\tilde{A}_p, \overline{\mathcal{H}_p(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})}) = H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^* (\tilde{A}_p, \tilde{\mathcal{F}}),$$

weil für die Einschränkung $\pi: \tilde{A}_p \rightarrow A$ gilt: ist \tilde{X}_p abgeschlossen, so hat man $\pi^{-1}(\varphi \cap A) = \tilde{\varphi} \cap \tilde{A}_p = \tilde{\varphi} \cap \tilde{A}_p \cap \tilde{X}_p = \tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p} \cap \tilde{A}_p$; ist A abgeschlossen, so gilt $\pi^{-1}(\varphi \cap A) = \pi^{-1}(\varphi|_A) \subset (\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p$.

Zusammen mit den eben konstruierten Isomorphismen zeigt das Fünferlemma unter Verwendung der exakten Kohomologiesequenz zum Paar (\tilde{X}, \tilde{A}_p) mit Trägern in $\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}$, dass auch σ ein Isomorphismus ist. Die Homomorphismen P_j und Q_j werden dann als Komposition dieser Isomorphismen mit den Homomorphismen aus der Spektralsequenz definiert. q. e. d.

Es erscheint sinnvoll, die Abbildungen P_j und Q_j statt der im klassischen Fall der Homologiemannigfaltigkeiten damit identischen Abbildungen $P_j \pi^j$ und $Q_j \pi^j$ zu untersuchen, da sich im allgemeinen Falle nur für P_j und Q_j gewisse Dualitätseigenschaften zeigen lassen. Beispiele etwa im Zusammenhang mit Satz 3.1 zeigen, dass π^j diese weitgehend verwischt. Nachdem der Einfluss von π^j in Korollar 1.4 untersucht wurde, werden wir uns im folgenden auf die Analyse von P_j und Q_j beschränken.

DEFINITION 2.1. Die Homomorphismen $P_j(X, A) = P_j^\varphi(X, A; \mathcal{F})$ und $Q_j(A) = Q_j^\varphi(X, A; \mathcal{F})$ heißen *Poincaré Homomorphismen*.

SATZ 2.2. Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1 existiert ein natürliches exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H_{p-j}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_{p-j}^\varphi(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_{p-j}^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{F}) \\
\downarrow \alpha_j & & \downarrow \alpha_j & & \downarrow \beta_j \\
H_{\varphi|_{X \setminus A}}^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) & \rightarrow & H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) & \rightarrow & H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})).
\end{array}$$

Ferner gilt: a) Ist $H_\varphi^q(X, A; \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = 0$ für $0 < q < j$, dann ist $\text{Im } P_j(X, A) = \text{Ker } \alpha_j(X, A)$.

b) Ist $H_{\varphi \cap A}^q(A, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = 0$ für $0 < q < j$, dann ist $\text{Im } Q_j(A) = \text{Ker } \beta_j$.

Beweis: Wir beschränken uns darauf, die Existenz der Homomorphismen α_j nachzuweisen. Dazu benutzen wir [5] chap. XV prop. 5.6a. Dafür genügt, es, dass in der Spektralsequenz a) für $u < 0$ gilt $E_2^{u, v} = 0$. α_j lässt sich faktorisieren über

$$H_{p-j} := H_{p-j}^{\varphi \mid X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow E_\infty^{0, j-p} \rightarrow E_2^{0, j-p}.$$

Da die zweite Abbildung injektiv ist, gilt

$$\text{Ker } \alpha_j = \text{Ker}(H_{p-j} \rightarrow E_\infty^{0, j-p}) = F^1 H_{p-j}.$$

Andererseits folgt aus der Konstruktion der P_j :

$$\text{Im } P_j = E_\infty^{j, -p} = F^j H_{p-j} / F^{j+1} H_{p-j}.$$

Nach Voraussetzung gilt $0 = E_2^{q, p+q-j} = E_\infty^{q, p+q-j}$ für $0 < q < j$, so dass $F^1 H_{p-j} = \dots = F^j H_{p-j}$. Aus $F^{j+1} H_{p-j} = 0$ folgt damit $\text{Im } P_j = \text{Ker } \alpha_j$. Die Überlegungen für β_j verlaufen analog.

SATZ 2.3. Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1 existiert für alle $j \geq 1$ ein natürliches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_\varphi^0 \mid_{X \setminus A}(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) & \rightarrow & H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) & \rightarrow & H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) \\ \downarrow \gamma_j & & \downarrow \gamma_j & & \downarrow \delta_j \\ H_{\tilde{\varphi} \mid \tilde{X}_p}^{j+1}(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) & \rightarrow & H_{\tilde{\varphi} \mid \tilde{X}_p}^{j+1}(\tilde{X}_p, \tilde{\mathcal{F}}) & \rightarrow & H_{(\tilde{\varphi} \mid \tilde{X}_p) \cap \tilde{A}_p}^{j+1}(\tilde{A}_p, \tilde{\mathcal{F}}), \end{array}$$

falls $H_\varphi^{q+1}(X, A; \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = 0$ für $\gamma_j(X, A)$ bzw. $H_{\varphi \cap A}^{q+1}(A, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = 0$ für δ_j für alle $0 < q < j$. Ferner gilt:

a) Ist zusätzlich $H_\varphi^q(X, A; \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = 0$ für $0 < q < j$, dann ist $\text{Ker } \gamma_j(X, A) = \text{Im } \alpha_j(X, A)$ und $\text{Im } \gamma_j(X, A) = \text{Ker } P_{j+1}(X, A)$.

b) Ist zusätzlich $H_{\varphi \cap A}^q(A, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = 0$ für $0 < q < j$, dann ist $\text{Ker } \delta_j = \text{Im } \beta_j$ und $\text{Im } \delta_j = \text{Ker } Q_{j+1}(A)$.

Beweis: Die Homomorphismen γ_j und δ_j entsprechen den Transgressionen der zuständigen Spektralsequenzen. Damit ergibt sich ihre Existenz aus [5] chap. XV, prop. 5.8, da $E_2^{-j-1, *}$ = 0. Die Bestimmung von Kern und Kokern geschieht unter Ausnutzung von Korollar 1.3 mit [5] chap. XV prop. 5.9 und 5.9a. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.

DEFINITION 2.2. $S(X) := \{x \in X; \mathcal{H}_p(X)_x \neq L \text{ oder } \mathcal{H}_j(X)_x \neq 0 \text{ für } j \neq p\}$ heiße die Menge der topologischen (L -) Singularitäten von X .

KOROLLAR 2.4a). Es gelte $\dim_{\varphi|_{\overline{S(X)} \setminus A}} \overline{S(X)} < t$ sowie $\mathcal{H}_k(X, \mathcal{F})_{X \setminus B} = 0$ für $p - j < k < \min(p, p - j + t)$, wobei B eine Teilmenge von A sein darf, die in X abgeschlossen ist. Dann ergibt sich mit P_j, α_j, γ_j folgende natürliche exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} H_{\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}}^j(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) &\rightarrow H_{p-j}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi|_{X \setminus A}}^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}}^{j+1}(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{p-j-1}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Beweis: Der Fall $j = 1$ wird in Satz 3.5 behandelt, wir können uns also hier auf $j > 1$ beschränken. Nach dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie sind für $k < p$ alle Garben $\mathcal{H}_k(X, \mathcal{F})$ auf $S(X)$ konzentriert. Für eine derartige Garbe \mathcal{G} gilt

$$H_{\varphi}^*(X, A; \mathcal{G}) = H_{\varphi|_{X \setminus A}}^*(X, \mathcal{G}) = H_{(\varphi|_{X \setminus A})|_{\overline{S(X)}}}^*(\overline{S(X)}, \mathcal{G}) = H_{\varphi|_{\overline{S(X)}}}^*(\overline{S(X)}, \mathcal{G}).$$

Die in Satz 2.2 und Satz 2.3 geforderten Kohomologiebedingungen folgen daher für $q \geq t$ aus der Dimensionsbedingung für $\overline{S(X)}$. Da B abgeschlossen ist, folgt für alle $q < t$ und beliebiges i aus der exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccc} H_{\varphi \cap A}^{i-1}(A, B; \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) &\rightarrow & H_{\varphi}^i(X, A; \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_{\varphi}^i(X, B; \mathcal{H}_{p+q-i}(X, \mathcal{F})) \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\varphi \cap A}^{i-1}(A, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})_{X \setminus B}) & & H_{\varphi}^i(X, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})_{X \setminus B}) \\ \parallel & & \parallel \\ 0 & & 0 \end{array}$$

da nach Voraussetzung die entsprechenden Garben verschwinden.

Beispiel 2.1. Ist $\overline{S(X)} \cap \text{Träger}(\mathcal{F})$ ausserhalb von B nulldimensional, dann existiert unter Verwendung der $P_j(X, A; \mathcal{F})$ eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}}^1(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) &\rightarrow \tilde{H}_{p-1}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi|_{X \setminus A}}^0(X \setminus A, H_{p-1}(X, \mathcal{F})) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{\tilde{\varphi}|_{X_p}}^2(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi|_{X \setminus A}}^0(X \setminus A, H_0(X, \mathcal{F})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Analog beweist man das folgende

KOROLLAR 2.4b). *Es gilt $\dim_{\varphi \cap A \cap \overline{S(\tilde{X})}} \overline{S(\tilde{X})} \cap A < t$ und $\mathcal{H}_k(X, \mathcal{F})|_A = 0$ für $p - j < k < \min(p, p - j + t)$. Dann ergibt sich mit Q_j, β_j, δ_j folgende natürliche exakte Sequenz:*

$$\begin{aligned} H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^j(\tilde{A}_p, \tilde{\mathcal{F}}) &\rightarrow H_{p-j}^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^{j+1}(\tilde{A}_p, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{p-j-1}^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Beispiel 2.2. Wenn $\overline{S(\tilde{X})} \cap A \cap \text{Träger}(\mathcal{F})$ nulldimensional ist, dann existiert eine zu Beispiel 2.1 analoge exakte Sequenz unter Verwendung von $Q_j(A, \mathcal{F})$.

Bezeichnen wir mit $H_y^*(X)$ die lokale L -Kohomologie von X in y und mit $H_x^0(X, \mathcal{H}_k(X))$ den Modul aller auf x konzentrierten Schnitte in $\mathcal{H}_k(X)$, ferner mit $\delta_k^i L$ den freien zyklischen L -Modul mit δ_k^i Erzeugenden, so gilt mit δ_k^i Kroneckersymbol:

SATZ 2.5. *Für festes $x \in X$ gelte i) \tilde{x} liegt im Innern von \tilde{X}_p ; ii) Es existiere eine Umgebung U von x mit $\mathcal{H}_{p-j+1}(U \setminus x) = \dots = \mathcal{H}_{p-1}(U \setminus x) = 0$. Dann gilt für $p > 0$:*

$$H_x^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X)) \cong \bigoplus_{y \in \tilde{x}} H_y^{j+1}(\tilde{X}_p) \oplus \delta_p^{j+1} L.$$

Beweis: Da lokale Homologie und lokale Kohomologie lokale Größen sind, dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{H}_p(\tilde{X}) = L$ und dass $\mathcal{H}_{p-j+1}(X \setminus x) = \dots = \mathcal{H}_{p-1}(X \setminus x) = 0$. Analog zu 2.4a) erhalten wir mit $\varphi = \text{cld}$ und $A = X \setminus x$ ein Stück exakte Sequenz

$$(*) \quad H_{p-j}(x) \rightarrow H_x^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X)) \rightarrow H^{j+1}(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}) \rightarrow H_{p-j-1}(x).$$

Ist $\tilde{x} = \{y_1, \dots, y_r\}$, so wähle man paarweise fremde Umgebungen U_e der y_e in \tilde{x} ; mit $U := \cup U_e$ gilt dann $H^*(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}) = H^*(U, U \setminus \tilde{x}) = \bigoplus_e H^*(U_e, U_e \setminus y_e) = \bigoplus_e H^*(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}) = \bigoplus_e H_{y_e}^*(\tilde{X})$. Für $j = p$ verschwinden beide Seiten in Gleichung 2.5. Für $j < p - 1$ liefert (*) die Behauptung. Für $j = p - 1$ kann man (*) fortsetzen zu $(*) \rightarrow H_x^0(X, \mathcal{H}_0(X))$, denn $H^q(X, X \setminus x; \mathcal{H}_{1+q}(X)) = 0$ für $0 < q < j$, da in x höchstens isolierte lokale Homologie in den fraglichen Dimensionen auftritt. Daher ist Satz 2.2 anwendbar. Wegen $p > 0$ ist $\mathcal{H}_0(X) = 0$. Da $H_0(x) = L$, spaltet (*) auf und die Behauptung folgt für $j = p - 1$.

DEFINITION 2.3. X heiße lokal irreduzibel und rein p -dimensional, wenn $\mathcal{H}_p(X) = L$.

KOROLLAR 2.6. X sei lokal irreduzibel und rein p dimensional. Ist X HLC, dann ist $\mathcal{H}_1(X, \mathcal{G}) = 0$ für alle Garben von L -Moduln \mathcal{G} , falls $p \neq 1$.

Beweis: Es sei $M := \mathcal{H}_1(X)_x$ für ein festes x . Aus der Voraussetzung über X folgt eine Injektion $0 \rightarrow H^1(X, X \setminus x, M) \rightarrow H_{p-1}(x, M) = 0$. Das universelle Koeffiziententheorem der Kohomologie impliziert

$$0 = \text{Hom}(H_1^c(X, X \setminus x), M),$$

so dass $M = \mathcal{H}_1(X)_x = H_1^c(X, X \setminus x) = 0$. Da $\mathcal{H}_0(X) = 0$, folgt aus dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie $0 = \mathcal{H}_1(X) \otimes \mathcal{G} = \mathcal{H}_1(X, \mathcal{G})$.

KOROLLAR 2.7. Sind X und \tilde{X} lokal triangulierbar, dann gilt für alle \mathcal{G} : $\mathcal{H}_p(X, \mathcal{G}) = \mathcal{H}_p(X) \otimes \mathcal{G}$.

Beweis: Nach dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{H}_{p-1}(X)_x$ für alle $x \in X$ torsionsfrei ist. Ist $\dim_x X < p$, dann ist $\mathcal{H}_{p-1}(X)_x$ frei. Wir können uns also auf $\pi(\tilde{X}_p)$ beschränken und sogar $\tilde{X} = \tilde{X}_p$ annehmen, da dieses nach Bemerkung 1.2 lokal ein Teilkomplex von \tilde{X} ist. Weil es wieder um ein lokales Problem geht, können wir zunächst annehmen, dass X triangulier ist, und dann nach eventueller Verfeinerung der Triangulierung X auf einen offenen Simplexstern von x beschränken, der folgende Eigenschaften hat: X ist zusammenziehbar, damit ist \tilde{X} auf \tilde{x} zusammenziehbar, so dass wegen der Endlichkeit von π

$H^j(\tilde{X}) = 0$ für $j \neq 0$, und der Teilstern $s := \overline{\text{Tr } \mathcal{H}_{p-1}(\tilde{X})}$ ist ebenfalls zusammenziehbar. Ist $p = 1$, dann ist die Behauptung aus Bemerkung 1.4 klar. Es sei also $p \neq 1$. Aus Korollar 2.4a) ergibt sich eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{s}) \rightarrow H_{p-1}(s) \rightarrow H_s^0(X, \mathcal{H}_{p-1}(X)) \rightarrow H^2(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{s}).$$

Aus Satz 1.2 ergibt sich $\dim s < p - 1$, so dass $H_{p-1}(s) = 0$. Es genügt also, zu zeigen, dass $H^2(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{s})$ torsionsfrei ist, dann ist auch $H_s^0(X, \mathcal{H}_{p-1}(X))$ und damit

$$\mathcal{H}_{p-1}(X)_x = \lim_{X \rightarrow x} H_s^0(X, \mathcal{H}_{p-1}(X))$$

torsionsfrei. Nun gilt $H^2(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{s}) = H^1(\tilde{X} \setminus \tilde{s}) = \text{Hom}(H_1^c(\tilde{X} \setminus \tilde{s}), L) \oplus \text{Ext}(H_0^c(\tilde{X} \setminus \tilde{s}), L)$; dieses ist torsionsfrei, da $H_0^c(\tilde{X} \setminus \tilde{s})$ frei ist.

KOROLLAR 2.8. X sei lokal triangulierbar, reindimensional und \mathcal{F} eine Garbe von L -Moduln. Es gelte $\mathcal{H}_{p-r}(X) = 0$ für alle $0 < r < j - 1$ mit einem festen $j < p - 1$ und $\mathcal{H}_{p-j+1}(X, L/(m)) = 0$ für alle maximalen Ideale (m) in L . Dann gilt $\mathcal{H}_j(\tilde{X}, \mathcal{F}) = 0$ und

$$H_x^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, M)) = \bigoplus_{y \in \tilde{x}} \text{Hom}(\mathcal{H}_{j+1}(\tilde{X}, M)_y, M).$$

Beweis: Nach dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie ist $\mathcal{H}_{p-r}(X, M) = 0$ für $0 < r < j$ mit $M = L/(m)$ daher liefert Korollar 2.4a) eine exakte Sequenz

$$0 = H_{p-s}(x, M) \rightarrow H_x^0(X, \mathcal{H}_{p-s}(X, M)) \rightarrow H_x^{j+1}(\tilde{X}, M) \rightarrow H_{p-s-1}(x, M) = 0$$

für $1 \leq s \leq j$. Weiter gilt

$$H_x^j(\tilde{X}, M) = \text{Hom}(H_j^c(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}), M) \oplus \text{Ext}(H_{j-1}^c(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}), M).$$

Damit ist $\text{Hom}(\mathcal{H}_j(\tilde{X})_y, M) = 0$ für alle $y \in \tilde{X}$. \tilde{X} ist lokal triangulierbar, somit ist $\mathcal{H}_*(\tilde{X})_y$ endlich erzeugt und damit folgt leicht $\mathcal{H}_j(\tilde{X}) = 0$. Schliesslich ist dann

$$H_x^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, M)) = H_x^{j+1}(\tilde{X}, M) = \bigoplus_{y \in \tilde{x}} \text{Hom}(\mathcal{H}_{j+1}(\tilde{X})_y, M) \oplus 0.$$

KOROLLAR 2.9. \tilde{X} sei reindimensional und lokal triangulierbar, $x \in X$ und $j > 1$ seien fest gewählt. M durchlaufe alle Körper $L/(m)$. Falls $\mathcal{H}_j(X, M)_x = 0 = \mathcal{H}_x^q(X, \mathcal{H}_{q+j}(X, M))$ für alle $0 < q < p - j$, dann gilt für alle $y \in \tilde{x}$ und für alle \mathcal{F} auf \tilde{X} :

$$\mathcal{H}_{p-j}(\tilde{X})_y \text{ ist frei und } \mathcal{H}_{p-j+1}(\tilde{X}, \mathcal{F})_y = 0.$$

Beweis: Nach Definition der lokalen Kohomologie gilt

$$H_x^q(X, \mathcal{H}_{q+j}(X, M)) = H^q(X, X \setminus x; \mathcal{H}_{q+j}(X, M)).$$

Da $\mathcal{H}_j(X, M)_x = 0$ impliziert, dass die entsprechende Transgression trivialerweise definiert ist, liefert Satz 2.3 die folgende exakte Sequenz:

$$0 = H_x^0(X, \mathcal{H}_j(X, M)) \rightarrow H^{p-j+1}(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}; M) \rightarrow H_{j-1}(x) = 0;$$

die erste Gleichung wird durch $0 \rightarrow H_x^0(X, \mathcal{H}_j(X, M)) \rightarrow \mathcal{H}_j(X, M)_x$ gerechtfertigt. Wir erhalten also $\text{Hom}(\mathcal{H}_{p-j+1}(\tilde{X})_y, M) = 0 = \text{Ext}(\mathcal{H}_{p-j}(\tilde{X})_y, M)$ in allen Punkten $y \in \tilde{x}$. Nun ist $\mathcal{H}_{p-j}(\tilde{X})_y$ ein endlicher Modul; wir haben also nur zu zeigen, dass er keine Torsion hat. Hätte $\mathcal{H}_{p-j}(\tilde{X})_y$ Torsion, so hätte er einen direkten Summanden $L/(a)$, wobei $a \neq 0$. Dies kann jedoch wegen $\text{Ext}(L/(a), L/(m)) = L/(m)$ für das (a) umfassende maximale Ideal (m) nicht sein. Also ist $\mathcal{H}_{p-j}(\tilde{X})_y$ frei und damit $\mathcal{H}_{p-j+1}(\tilde{X}, \mathcal{F})_y = 0$.

§ 3. Die unteren Dimensionen.

Im ganzen Paragraphen seien (\tilde{X}, π, X) , $L, p, \varphi, A, \mathcal{F}$ wie in Theorem 2.1 gewählt.

SATZ 3.1. *Es sei $\mathcal{H}_{p-1}(X)^* \mathcal{F} = 0$. Dann sind die Homomorphismen $P_0^\varphi(X, A; \mathcal{F})$ und $Q_0^\varphi(A, \mathcal{F})$ definiert und bijektiv, auch wenn weder φ parakompaktifizierend noch \tilde{X}_p abgeschlossen ist.*

Beweis: Für die Existenz haben wir im Beweis von Theorem 2.1 zu zeigen, dass die Bedingung φ parakompaktifizierend oder \tilde{X}_p abgeschlossen nicht erforderlich ist. Das ist aber klar, da man für $j = 0$ Satz II.10.2 in [3] durch Satz I.6.6 ersetzen kann; nach Voraussetzung ist \tilde{X}_p lokal abgeschlossen. Die Isomorphie folgt etwa aus [5] chap. XV prop. 5.12.

Eine analoge Aussage für die höchstdimensionalen (nicht trivialen) Poincaré Homomorphismen gilt nur unter zusätzlichen Einschränkungen:

SATZ 3.2. *X sei lokal triangulierbar und rein p dimensional. Für alle $j < p$ gelte $\dim_\varphi \text{Tr } \mathcal{H}_j(X) < j - 1$. Dann sind $P_p(X, A; \mathcal{F})$ und $Q_p(A, \mathcal{F})$ Isomorphismen.*

Beweis: Für die erste Behauptung gilt: $E_2^{r,s} = H_\varphi^r(X, A; \mathcal{H}_{-s}(X, \mathcal{F})) = H_\varphi^r(X, \mathcal{H}_{-s}(X, A; \mathcal{F})) = 0$ falls $r \geq -s - 1$, daher gilt $E_\infty^{r,s} = 0$ für $r \geq -s - 1$, beides mit $s \neq -p$. Somit wird $P_p(X, A)$ beschrieben durch

$$H_{\varphi|_{\tilde{X}_p}}^2(\tilde{X}_p, \tilde{A}_p; \tilde{\mathcal{F}}) \cong E_\infty^{2,-p} \cong H_0^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}).$$

Die zweite Behauptung beweist man analog, da $A \cap \text{Tr } \mathcal{H}_j(X)$ lokal abgeschlossen ist (vgl. Bemerkung 1.2), X lokal metrisierbar und somit [3] prop. II, 15.8 anwendbar ist.

Es sei nun X parakompakt, φ parakompaktifizierend; dann ist das Capprodukt

$$\cap : H_i^\varphi(X, \mathcal{F}) \otimes H^j(X, \mathcal{G}) \rightarrow H_{i-j}^\varphi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

wohldefiniert (vgl. [3] V. 10). Den Schnitt $x \rightarrow 1_x$ in $H^0(X)$ bezeichnen wir mit 1. Dann gilt:

SATZ 3.5. *X sei parakompakt, lokal irreduzibel und rein p dimensional. Dann gilt für a aus $H^j(X, \mathcal{F})$, falls $\mathcal{H}_{p-1}(X)$ torsionsfrei:*

$$P_j(X, \mathcal{F})(a) = P_0(X)(1) \cap a.$$

Beweis: Wie üblich genügt es, die folgende Gleichung zu zeigen: $P_j(X, \mathcal{F})(a) = P_j(X, \mathcal{F})(1 \cup a) = P_0(X)(1) \cap a$, wobei \cup das Cupprodukt bezeichnet. Damit ist der Beweis reduziert auf das folgende

LEMMA 3.4. *X sei wie in 3.3, φ und $\varphi \cap \psi$ seien parakompaktifizierende Trägerfamilien auf X . Dann gilt für $a \in H_\varphi^r(X, \mathcal{F})$ und $b \in H_\psi^s(X, \mathcal{G})$: $P_{r+s}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(a \cup b) = P_r(X, \mathcal{F})(a) \cap b$.*

Der Beweis des Lemmas verläuft analog [3] chap. V, 10.1 unter Verwendung von Satz 3.1. Es sei darauf hingewiesen, dass man für diesen Beweis die Existenz der Dualität für genügend viele Garben benötigt. Die Details seien dem Leser überlassen.

Während man im allgemeinen Kern und Bild der P_j bzw. Q_j nicht einfach beschreiben kann, gilt in den unteren Dimensionen.

THEOREM 3.5. *Unter Verwendung der exakten Homologie bzw. Kohomologiesequenzen in den Spalten existiert ein exaktes kommutatives Diagramm 3.5 (vgl. folgende Seite).*

Beweis: Existenz und Exaktheit der waagrechten Zeilen von 3.5 ergeben sich daraus, dass die definierenden Spektralsequenzen aus Doppelkomplexen stammen, in denen beide Filtrierungen regulär sind (vgl. etwa [5] chap. XV, S. 322, case 2). Die Kommutativität und die Natürlichkeit in \mathcal{F} des Gesamtdiagramms ergeben sich wie schon früher aus der Natürlichkeit der kurzen exakten Sequenz, die die definierenden Doppelkomplexe miteinander verbindet.

Ein kommutativer Ring mit 1 R heisst *vollreflexiv*, wenn jeder freie R -Modul, dessen Basis eine nicht messbare Mächtigkeit hat, reflexiv ist (vgl. [12]). In [13] Satz 30 wurde für Hauptidealringe L gezeigt: L ist vollreflexiv genau dann, wenn a) L ist kein lokaler Ring; oder b) Ist L lokaler Ring mit maximalem Ideal μ , so ist L in der μ -adischen Topologie nicht vollständig. — Insbesondere sind also Körper nicht vollreflexiv; für diese sind allerdings die folgenden Aussagen trivialerweise zutreffend.

BEMERKUNG 3.1 X sei lokal triangulierbar, jede Zusammenhangskomponente von X habe abzählbare Topologie. Ist L vollreflexiv, so ist $H_c^1(X)$ frei.

Beweis: Da X lokal zusammenhängend ist und die Trägerfamilie c ist, können wir annehmen, dass X zusammenhängend ist. X ist wegen seiner abzählbaren Topologie dann auch metrisierbar und separabel (vgl. etwa [8] chap. I § 10). Daher gilt (vgl. [3] chap. V, ex. 26):

$$H_0(X) = H_c^0(X) = \begin{cases} L & \text{falls } X \text{ kompakt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_c^1(X), L) \rightarrow H_0(X) \xrightarrow{f} \text{Hom}(H_c^0(X), L) \rightarrow 0$$

ist f ein Isomorphismus, so dass $H_c^1(X)$ ein Whiteheadmodul über L ist. Da wegen der lokalen Triangulierbarkeit $H_c^1(X)$ als induktiver Limes von Moduln endlichen Ranges über L von abzählbarem Rang ist, liefert [12] Theorem 16, dass $H_c^1(X)$ frei ist.

DEFINITION 3.1. Die Teilmenge X^i von X heisst irreduzible Komponente von X , wenn \tilde{X}^i eine Zusammenhangskomponente von \tilde{X} ist.

Insbesondere sind die irreduziblen Komponenten von X abgeschlossen und zusammenhängend. Ist \tilde{X} lokal zusammenhängend, so bilden die irreduziblen Komponenten eine abgeschlossene lokal endliche Überdeckung von X , da X lokal kompakt ist und π eigentlich ist. Ist X ein reell analytischer Raum mit $\dim\{x \in X; \mathcal{H}_p(X) \neq L\} < p - 1$, dann stimmen die hier definierten irreduziblen Komponenten von X mit den reellanalytisch definierten irreduziblen Komponenten überein (vgl. etwa Beweis zu [2] 4.3 Lemme). Insbesondere trifft dies also für alle komplexen Räume zu, da dort für jedes $SL(X)$ eine (topologische) Kodimension mindestens zwei hat.

KOROLLAR 3.6 X sei lokal triangulierbar mit abzählbarer Topologie auf jeder Zusammenhangskomponente. I (bzw. J) bezeichne die Anzahl der kompakten (bzw. nicht kompakten) p dimensionalen irreduziblen Komponenten von X . Dann gilt:

- a) $H_p^c(X, M) = M^{(I)}$.
- b) $H_p(X, M) = M^{I \cup J}$ falls \tilde{X}_p abgeschlossen.
- c) $H_{p-1}^p(X, X \setminus A; M)$ ist torsionsfrei, falls M und $\mathcal{H}_{p-1}(X)$ torsionsfrei.

Ist L vollreflexiv oder ein Körper, so gilt für X lokal triangulierbar

- d) $H_{p-1}^c(X)$ ist frei.
- e) $H^p(X, M) = M^I$.

Beweis: *a)* und *b)* folgen direkt aus Satz 3.1: $H_p^c(X, M) = H_c^0(\tilde{X}_p, M) = M^{(I)}$ da für einen nicht kompakten zusammenhängenden Raum $H_c^0(Y, M) = 0$ *b)* folgt analog, da mit \tilde{X} auch \tilde{X}_p lokal triangulierbar. — Zu *c)*: Mit M und $\mathcal{H}_{p-1}(X)$ ist nach dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie auch $H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-1}(X, M))$ torsionsfrei. Hätte $H_{p-1}^\varphi(X, X \setminus A; M)$ Torsion, so müsste sie nach der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H_{\varphi \cap \tilde{A}_p}^1(\tilde{A}_p, M) \rightarrow H_{p-1}^\varphi(X, X \setminus A; M) \rightarrow H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-1}(X, M))$$

aus Diagramm 3.5 in $H_{(\varphi|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^1(\tilde{A}_p, M)$ liegen, im Widerspruch dazu, dass dieser Modul torsionsfrei ist ([3] chap. II ex. 28). — Zu *d)*: $H_c^0(X, \mathcal{H}_{p-1}(X)) = \varinjlim_{K \in \mathcal{C}} H_c^0(K, \mathcal{H}_{p-1}(X))$. Da $\mathcal{H}_{p-1}(X)$ torsionsfrei ist (vgl. Kor. 2.7), ist jeder Halm frei und auf jedem Kompaktum ist $\mathcal{H}_{p-1}(X)$ endlich erzeugt, also $H^0(K, \mathcal{H}_{p-1}(X))$ frei. Bei den Einbettungen, über die der induktive Limes zu bilden ist, gehen Erzeugende in Erzeugende über, so dass auch der Limes frei ist. Nach Theorem 3.5 mit $\varphi = c$ ist $H_{p-1}^c(X)$ direkte Summe eines (da L Hauptidealring ist, freien) Untermoduls von $H_c^0(X, \mathcal{H}_{p-1}(X))$ mit dem nach Bemerkung 3.1 freien Modul $H_c^1(\tilde{X}_p)$. — Mit *d)* gilt daher

$$H^p(X, M) = \text{Hom}(H_p^c(X), M) \oplus \text{Ext}(H_{p-1}^c(X), M) = M^I.$$

KOROLLAR 3.7 *X erfülle die Voraussetzungen von Satz 3.2 und Korollar 3.6. X_p sei abgeschlossen ferner sei $\dim\{x \in X; \mathcal{H}_p(X)_x \neq L\} < p - 1$. Dann ist jede Zusammenhangskomponente von X irreduzibel und es gilt:*

- i) $H_c^p(X, M) = M^{(I \cup J)}$.
- ii) $H_{p-1}(X)$ ist ein Produkt von Exemplaren von L .

Beweis: Nach Satz 3.2 gilt für $\varphi = c$, $\text{cld} : H_\varphi^p(\tilde{X}_p) = H_0^\varphi(X)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass X zusammenhängend ist. Dann gilt:

$$L = H^0(X) = \text{Hom}(H_0^c(X), L) = \text{Hom}(H_c^p(\tilde{X}_p), L) = \text{Hom}(H_c^p(X), L)$$

nach Korollar 1.4

$$= H_p(X) \text{ nach Bemerkung 1.3}$$

$= H^0(\tilde{X}_p)$, nach Satz 3.1. Da X rein p -dimensional und \tilde{X}_p abgeschlossen, gilt $\tilde{X} = \tilde{X}_p$. Also ist \tilde{X} zusammenhängend, d. h. X irreduzibel. *i)* folgt unmittelbar aus Satz 3.2. Zu *ii)*: $H_{p-1}(X) = \text{Hom}(H_c^{p-1}(X), L) \oplus \text{Ext}(H_c^p(X), L) = \text{Hom}(H_c^{p-1}(X), L)$ nach *i)*. Da $H_c^{p-1}(X)$ von abzählbarem Rang über L ist, genügt es zu zeigen: Für jeden M -Modul abzähl-

baren Ranges E ist $E^* = \text{Hom}(E, L)$ ein Produkt von Exemplaren von L . Der Beweis für diese Behauptung verläuft im wesentlichen wie in [10] für den Spezialfall $L = \mathbb{Z}$: Bezeichnet nämlich $\tau: E \rightarrow E^{**}$ die kanonische Abbildung ins Bidual, dann hat $\tau(N)$ abzählbaren Rang und ist somit frei (vgl. Beweis zu Theorem 16 in [12]). Damit kann man den Beweis für den allgemeinen Fall ausführen.

Eine kleine Anwendung:

KOROLLAR 3.8 *Es sei X ein reduzierter komplexer Raum der komplexen Dimension $n > 0$ mit abzählbarer Topologie. X habe keine n -dimensionale kompakte irreduzible Komponente. Dann gilt für die Garbe \mathcal{O}^* der invertierbaren holomorphen Funktionen auf X :*

$$H^{2n}(X, \mathcal{O}^*) = H^{2n-1}(X, \mathcal{O}^*) = 0.$$

Beweis: Mit dem Garbenhomomorphismus $\exp: f \rightarrow e^{2\pi i f}$ hat man eine exakte Garbensequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ auf X und dazu die exakte Kohomologiesequenz

$$H^{2n-1}(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^{2n-1}(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^{2n}(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow 0.$$

Mit der Normalisierung \tilde{X} von X sind für $L = \mathbb{Z}$ und $p = 2n$ die Voraussetzungen von Korollar 3.6 erfüllt, dabei ist $I = \mathbb{Q}$. Also gilt nach e): $H^{2n}(X, \mathbb{Z}) = 0$. Ist $n = 1$, so sind alle irreduziblen Komponenten von X Steinsch und nach Theorem B gilt $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. Für beliebige n gilt $H^j(X, \mathcal{O}) = 0$ falls $j > n$ (vgl. [11]). Damit folgt aus der Exaktheit der Kohomologiesequenz die Behauptung.

Ist φ eine *parakompaktifizierende* Familie, so gilt bekanntlich $H_\varphi^j(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $j > p$. Für *allgemeines* φ gilt dies jedoch nur für $j > p + 1$. Hier erhält man

SATZ 3.9 *X und \tilde{X} seien lokal triangulierbar mit abzählbarer Topologie auf jeder irreduziblen Komponente. Je zwei irreduzible Komponenten mögen einen höchstens $p - 2$ dimensionalen Schnitt haben. L sei vollreflexiv oder ein Körper. Dann gilt:*

$$H_\varphi^{p+1}(X, M) = 0.$$

Beweis: Es sei zunächst $B := \bigcup_{K \in \varphi} K$ abgeschlossen und $\varphi = \text{cld}(B)$. Für $B = X$ trifft die Behauptung zu, da dann φ parakompaktifizierend. Ist $X \setminus B \neq \emptyset$, so betrachte man aus der exakten Kohomologiesequenz $H^p(X, M) \xrightarrow{f} H^p(X \setminus B, M) \rightarrow H^{p+1}(X, X \setminus B; M) \rightarrow H^{p+1}(X, M) = 0$.

Wegen $H^{p+1}(X, X \setminus B; M) = H_\varphi^{p+1}(X, M)$ genügt es, f als surjektiv nachzuweisen. X_1 bezeichne dazu die Vereinigung aller irreduziblen Komponenten von X , die mit B einen leeren Durchschnitt haben, X_2 die Vereinigung der übrigen. Da die irreduziblen Komponenten eine abgeschlossene lokal endliche Überdeckung, bilden, ist $\dim X_1 \cap X_2 < p - 1$. Somit erhält man aus den entsprechenden Mayer Vietoris Sequenzen folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = H^{p-1}(X_1 \cap X_2, M) & \rightarrow & H^p(X, M) & \rightarrow & H^p(X_1, M) \oplus H^p(X_2, M) & \rightarrow & H^p(X_1 \cap X_2, M) = 0 \\
 \parallel & & \downarrow f & & \downarrow (id, g) & & \parallel \\
 0 = H^{p-1}(X_1 \cap X_2 \setminus B, M) & \rightarrow & H^p(X \setminus B, M) & \rightarrow & H^p(X_1, M) \oplus H^p(X_2 \setminus B, M) & \rightarrow & H^p(X_1 \cap X_2 \setminus B, M) = 0
 \end{array}$$

Da $X_2 \setminus B$ nach Konstruktion keine kompakte irreduzible Komponente enthält, ist nach Korollar 3.6 e) $H^p(X_2 \setminus B, M) = 0$. Also ist g und damit auch f surjektiv. — Für beliebiges φ folgt die Behauptung schliesslich aus $H_\varphi^{p+1}(X, M) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K \in \varphi}} H_{\varphi|_K}^{p+1}(X, M) = 0$.

Zum Schluss sei für die unteren Dimensionen explizit aufgeschrieben, unter welchen Bedingungen beispielsweise die Poincaré Homomorphismen $Q_j(A)$ alle zu einer langen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H_{(\varphi|_{\tilde{X}_p} \cap \tilde{A}_p)}^1(\tilde{A}_p, \tilde{F}) \rightarrow H_{p-1}^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_0(X, \mathcal{F})) \rightarrow 0$$

gehören. Dabei sei X stets lokal triangulierbar.

$\dim X \leq 2$: Keine Zusatzvoraussetzung.

$\dim X = 3$: X reindimensional und $H_{\varphi \cap A}^i(A, \mathcal{H}_2(X, \mathcal{F})) = 0$, $i = 1, 2$.

$\dim X = 4$: X reindimensional und $H_{\varphi \cap A}^i(A, \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})) = 0$ für $j = 2, 3$ und $1 \leq i \leq 3$.

§ 4. Dualitätssätze.

Es sollen nun die Poincaré Homomorphismen noch etwas genauer untersucht werden. Dabei nehmen wir im ganzen Paragraphen an, dass (\tilde{X}, π, X) , $L, \varphi, A, \mathcal{F}$ den Bedingungen in Theorem 2.1 genügen.

THEOREM 4.1. *Es gelte $B \subset A \subset X \subset Y$, wobei B die selben Voraussetzungen aus Theorem 2.1 erfülle wie A ; X und $Y \setminus B$ seien lokal abgeschlossen in Y , die abgeschlossene Hülle von $X \setminus A$ bezüglich $Y \setminus B$ sei im Innern von $Y \setminus A$ enthalten; ψ sei eine Trägerfamilie auf dem lokalkompakten Raum Y mit $\psi|_X = \varphi$. Dann existiert ein in \mathcal{F} natürlicher Homomorphismus*

$$\sigma_j: H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^j(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p; \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{p-j}^{\psi|_{Y \setminus B}}(Y \setminus B, Y \setminus A; \mathcal{F}),$$

falls eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist :

- i) A und B sind abgeschlossen und ψ ist parakompaktifizierend;
- ii) B ist leer; falls ψ nicht parakompaktifizierend, dann ist A offen in Y ;
- iii) $A = X = Y$.

Zusätzlich gilt: σ_j ist surjektiv, wenn für alle $0 < q < j$ gilt $H_{\varphi \cap A}^q(A, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F}_{X \setminus B})) = 0$ und wenn die Beschränkung $H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_{\varphi \cap B}^0(B, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F}))$ injektiv ist. σ_j ist injektiv, wenn für alle $0 < q < j-1$ $H_{\varphi \cap A}^q(A, \mathcal{H}_{p+q+1-j}(X, \mathcal{F}_{X \setminus B})) = 0$ und wenn die Beschränkung $H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p+1-j}(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_{\varphi \cap B}^0(B, \mathcal{H}_{p+1-j}(X, \mathcal{F}))$ injektiv ist.

Beweis: i) A und B seien abgeschlossen und ψ sei parakompaktifizierend. Dann ist $\varphi|_X$ parakompaktifizierend, da X lokal abgeschlossen ist. Daher existiert nach Theorem 2.1 ein Poincaré Homomorphismus

$$Q_j(A): H_{\varphi \cap A}^j(A, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F}_{X \setminus B})) \rightarrow H_{p-j}^{\varphi}(X, X \setminus A; \mathcal{F}_{X \setminus B}).$$

Da B abgeschlossen ist, gilt $H_{\varphi \cap B}^*(X, \mathcal{F}_{X \setminus B}) = H^{\varphi|_{X \setminus B}}(X \setminus B, \mathcal{F})$ und folglich

$H_{\varphi \cap B}^{\varphi|_{X \setminus B}}(X \setminus B, X \setminus A; \mathcal{F}) = H_{\varphi \cap B}^{\varphi}(X, X \setminus A; \mathcal{F}_{X \setminus B})$. Wir haben noch zu zeigen :

$$H_{\varphi \cap A}^j(A, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F}_{X \setminus B})) \cong H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^j(\tilde{A}_p, \tilde{B}_p; \tilde{\mathcal{F}}).$$

A und B erfüllen analoge Voraussetzungen; wegen $\mathcal{H}_p(X, \mathcal{F}_{Y \setminus B}) = \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})_{X \setminus B}$ zeigt man daher mit Hilfe der exakten Kohomologie-sequenz, dass es genügt, die Behauptung für $B = \emptyset$ zu zeigen. Das ist jedoch im Beweis vom Theorem 2.1 geschehen. — Die Isomorphie $H_{\varphi \cap B}^{\psi|_{Y \setminus B}}(Y \setminus B, Y \setminus A; \mathcal{F}) = H_{\varphi \cap B}^{\psi|_{X \setminus B}}(X \setminus B, X \setminus A; \mathcal{F})$ ergibt sich als Ausschneidung mit [3] chap. V, 5.1, da $Y \setminus B$ lokal abgeschlossen und damit $\psi|_{Y \setminus B}$ parakompaktifizierend ist. σ_j wird nun definiert als die Komposition dieser natürlichen Abbildungen, so dass sich Kern und Bild von σ_j als Kern und Bild von $Q_j(A)$ bestimmen. Die Surjektivität ergibt sich daher als Anwendung von Satz 2.2 unter den angegebenen Bedingungen, da Kern $\beta_j =$ Bild Q_j und da $H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F}_{X \setminus B})) = 0$. Die Transgression im Beweis von Satz 2.3 existiert wegen $H_{\varphi \cap A}^0(A, \mathcal{H}_{p+1-j}(X, \mathcal{F}_{X \setminus B})) = 0$ bei der behaupteten Injektivität auch ohne dass notwendig $H_{\varphi \cap A}^{q+1}(A,$

$\mathcal{H}_{p+q+1-j}(X, \mathcal{F}_{X \setminus B}) = 0$, so dass aus der Beweisidee zu Satz 2.3 unter den angegebenen Voraussetzungen die Injektivität folgt. — ii) Ist B leer, dann beweist man analog; wegen $\mathcal{F}_{X \setminus \emptyset} = \mathcal{F}$ erübrigt sich dabei die Voraussetzung, dass A abgeschlossen ist. Ist ψ nicht parakompaktifizierend, so ist nach Voraussetzung $Y \setminus A$ abgeschlossen in $Y \setminus B$ und nach den allgemeinen Voraussetzungen ist $\mathcal{F} = M$, so dass auch in diesem Fall die Ausschneidung einen Isomorphismus liefert. — iii) ergibt sich, indem man $Q_j(A)$ durch $P_j(X, B)$ ersetzt und dann formal analog schliesst.

Es sollen nun einige im Fall von Homologiemannigfaltigkeiten bekannte und wichtige Sätze als Spezialfälle aufgeführt werden.

SATZ 4.2 (Poincarédualität) *Es gelte für alle $1 \leq q < j$: $H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_{p-j}(X, \mathcal{F})) = 0 = H_\varphi^{q-1}(X, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F})) = H_\varphi^q(X, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, \mathcal{F}))$. Dann ist $P_j(X, F)$ ein Isomorphismus.*

KOROLLAR 4.3 *X sei rein p dimensional und lokal irreduzibel, $S(X)$ sei diskret. Ist $P_j^\varphi(X, L)$ ein Isomorphismus für alle j , so ist X in allen Punkten $p \in \varphi$ eine L -Homologiemannigfaltigkeit.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass in der P_j definierenden Spektralsequenz gilt $E_2^{r,s} = E_\infty^{r,s}$: Einerseits gilt $E_2^{r,s} = 0$ falls $r \neq 0$ und $s \neq -p$. Andererseits gilt nach Konstruktion $\text{Ker } P_j = \text{Ker}(E_2^{j,-p} \rightarrow E_\infty^{j,-p})$. Damit sind alle Abbildungen $E_2^{j,-p} \rightarrow E_3^{j,-p} \rightarrow \dots \rightarrow E_\infty^{j,-p}$ injektiv, so dass alle $\partial_r^{i,j} = 0$, d. h. die Spektralsequenz ist degeneriert. Nun sind aber auch alle P_j surjektiv, also $H_{p-j}^\varphi(X) = E_\infty^{j,-p}$, so dass $HG(H_{p-j}^\varphi(\tilde{X})) = \bigoplus_{a+b=j-p} E_\infty^{a,b} = E_\infty^{j,-p}$ impliziert $E_2^{a,b} = E_\infty^{a,b} = 0$ falls $(a, b) \neq (j-p, 0)$. Also gilt $H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_j(X)) = 0$ falls $j \neq p$. Da $S(X)$ diskret ist, folgt $\mathcal{H}_j(X)_p = 0$ falls $p \in \varphi$.

Für den Dualitätssatz von Lefschetz hat man eine geeignete Fassung des « Berandens » zu wählen.

DEFINITION 4.1 *X heisst « mit Rand X^\cdot », wenn gilt: X ist lokal triangulierbar, $X^\cdot := X \setminus \pi(\tilde{X}_p)$ liegt lokal im $p-1$ Gerüst von X und $\dim S(X) < p-1$.*

Ist X mit Rand X^\cdot , dann ist $\tilde{X} \setminus \tilde{X}_p$ abgeschlossen und hat eine Dimension $< p-1$. Man sieht leicht $\mathcal{H}_p(\tilde{X}_p)|_{\tilde{X}^\cdot} = 0$. Beispiele verschafft man sich aus einem allgemeinen triangulierbaren X , dessen Singularitätenmenge höchstens $p-2$ dimensional ist, indem man eine Vereinigung offener p -Simplexes samt ihrem Rand wählt.

SATZ 4.4 (Lefschetzdualität) *Es sei X mit Rand X^\cdot , φ sei eine parakompaktifizierende Trägerfamilie und B sei eine abgeschlossene Teilmenge von X . Dann ist*

$$Q_j: H_{\varphi \cap (X \setminus (X^\cdot \cup B))_p}^j(X \setminus (X^\cdot \cup B)_p, M) \rightarrow H_{p-j}^\varphi(X, X^\cdot \cup B; M)$$

ein Isomorphismus, falls gilt:

$$0 = H_\psi^0(Y, \mathcal{H}_{p-j}(X, M)) = H_\psi^q(Y, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, M)) = H_\psi^{q-1}(Y, \mathcal{H}_{p+q-j}(X, M))$$

für $0 < q < j$ mit $Y = X \setminus (X^\cdot \cup B)$ und $\psi = \varphi \cap Y$.

Beweis: Man kann sich nicht direkt auf Satz 4.1 berufen, da er für \tilde{X}_p nicht abgeschlossen der Einfachheit halber nur unter der Voraussetzung bewiesen wurde, dass A abgeschlossen ist. Zusammen mit dem Beweis von Theorem 2.1 liefert er jedoch immer noch, dass $q_j: H_\psi^j(Y, \mathcal{H}_p(X, M)) \rightarrow H_{p-j}^\varphi(X, X^\cdot \cup B; M)$ ein Isomorphismus ist. Da $B \cup X^\cdot$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 1.1:

$$H_\psi^j(Y, H_p(X, M)) = H_{\tilde{\psi}}^j(\tilde{Y}, \mathcal{H}_p(\tilde{X}, M)); \text{ nun ist } \mathcal{H}_p(\tilde{X}, M)|_{X \setminus X^\cdot} = M,$$

so dass aus $\tilde{\varphi} \cap \tilde{Y} = \tilde{\psi}$ die Behauptung folgt.

Eine Umgebung U von X^\cdot in X heisst Collaring, wenn (U, X^\cdot) homeomorph zu $X^\cdot \times (I, 0)$ ist, vgl. [14] chap. VI, 2. Solch ein Collaring existiert etwa dann, wenn X metrisierbar ist und wenn X^\cdot und $S(X)$ positiven Abstand haben.

KOROLLAR 4.5 *X sei kompakt, X^\cdot habe ein Collaring, und für $B = \emptyset$, $\varphi = c$ seien die Voraussetzungen von 4.4 erfüllt. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus, falls X lokal irreduzibel und rein p dimensional:*

$$H^j(X, M) \rightarrow H_{p-j}^c(X, X^\cdot; M).$$

Beweis: Die Existenz des Collarings garantiert, wie man leicht nachrechnet, dass $X \setminus X^\cdot$ ein schwacher Deformationsretrakt von X ist. Also induziert die Inklusion $X \setminus X^\cdot \subset X$ einen Isomorphismus $H^*(X) \rightarrow H^*(X \setminus X^\cdot)$, dessen Umkehrung mit Q_j aus 4.4 komponiert den natürlichen Isomorphismus ergibt.

SATZ 4.6 (Alexanderdualität) *Es gelte $H_{p-j}^\varphi(X, \mathcal{F}) = 0 = H_{p-j+1}^\varphi(X, \mathcal{F})$; es existiere ein t mit $\dim_{\varphi \cap A \cap \overline{S(X)}} A \cap \overline{S(X)} < t$ und $\mathcal{H}_k(X, \mathcal{F}) = 0$ für $t \leq k \leq p-1$. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$H_{(\tilde{\varphi}|_{\tilde{X}_p}) \cap \tilde{A}_p}^{j-1}(\tilde{A}_p, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{p-j}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \tilde{\mathcal{F}}).$$

Beweis: Aus der exakten Homologiesequenz zum Paar $(X, X \setminus A)$ folgt $H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{F}) = H_{p-j+1}^{\varphi}(X, X \setminus A; \mathcal{F})$. Daher genügt es, zu zeigen, dass $Q_j(A)$ ein Isomorphismus ist. Dies ergibt sich jedoch mit den gemachten Voraussetzungen leicht aus Satz 4.1 mit $Y = X$ und $B = \emptyset$.

KOROLLAR 4.7 A_1 und A_2 seien Teilmengen von X , die beide die in 4.6 an A gestellten Voraussetzungen erfüllen. Gilt ferner $H_{\varphi \cap A_1}^{j-1}(A_1, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) \cong H_{\varphi \cap A_2}^{j-1}(A_2, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F}))$, so gilt

$$H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A_1}(X \setminus A_1, \mathcal{F}) \cong H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A_2}(X \setminus A_2, \mathcal{F}).$$

Beweis: Nach Satz 4.6 gilt

$$\begin{aligned} H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A_1}(X \setminus A_1, \mathcal{F}) &= H_{\varphi \cap A_1}^{j-1}(A_1, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) = \\ &= H_{\varphi \cap A_2}^{j-1}(A_2, \mathcal{H}_p(X, \mathcal{F})) = H_{p-j}^{\varphi|X \setminus A_2}(X \setminus A_2, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

BEMERKUNG 4.1. Wie der Beweis zeigt, ist 4.6 und damit 4.7 nur eine der möglichen Varianten analoger Resultate.

Es bezeichne

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \text{Rang}_L H^i(X, L)$$

wie üblich die Euler-Poincaré Charakteristik von X .

SATZ 4.8. X sei lokal irreduzibel und rein p dimensional, p sei grade. $A \subset X$ sei abgeschlossen und taut, es gelte $\text{Rang}_L H^*(X, L) < \infty$ sowie $\text{Rang}_L H^*(A, L) < \infty$ (bzw. $\text{Rang}_L H^*(X \setminus A, L) < \infty$). Hat A (bzw. $X \setminus A$) nur endlich viele Singularitäten und in diesen endlich erzeugte lokale Homologie, dann gilt $\chi(X, A) = \chi(X \setminus A)$, falls A (bzw. X) kompakt.

Beweis: Die Charakteristik ist unabhängig vom Ring L , wir können daher L durch den Körper $Q(L)$ der Quotienten von L ersetzen.

Aus Korollar 2.4b) resultiert für den Fall, dass in A nur endlich viele Singularitäten liegen, eine exakte Sequenz $0 \rightarrow H^1(A) \rightarrow H_{p-1}^c(X, X \setminus A) \rightarrow H^0(A, \mathcal{H}_{p-1}(X)) \rightarrow H^2(A) \rightarrow \dots \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_0(X)) \rightarrow H^{p+1}(A) = 0$, wobei alle Koeffizienten in $Q(L)$ genommen seien. Aus der Exaktheit dieser Sequenz ergibt sich zunächst, dass $\chi(X \setminus A)$ eine wohldefinierte endliche Zahl ist, falls alle $H^0(A, \mathcal{H}_j(X))$ endliche Dimension haben. Man erhält weiter aus der Exaktheit eine Gleichung

$$0 = \dim H^0(A) - \chi(A) + \chi(X, X \setminus A) - \dim H_p^c(X, X \setminus A) - D,$$

wobei gilt

$$D := \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \dim H^0(A, \mathcal{H}_i(X)).$$

Da in A nur endlich viele Singularitäten liegen, gilt für alle $i: H^0(A, \mathcal{H}_i(X)) = \bigoplus_{y \in \mathcal{S}(X) \cap A} \mathcal{H}_i(X)_y$ und nach Voraussetzung sind alle diese Vektorräume von endlicher Dimension, so dass alles wohldefiniert ist. $\mathcal{H}_0(X) = \mathcal{H}_1(X) = 0$, vgl. Kor. 2.6. Für die restlichen i erhält man aus Satz 2.5 in jeder Singularität $y: \mathcal{H}_i(X)_y = \mathcal{H}_y^{p-i+1}(X) = \mathcal{H}_{p-i+1}(X)_y$, da $Q(L)$ ein Körper ist. Weil p gerade ist, folgt daraus $D = 0$. Nach Satz 3.1 gilt weiter $H^0(A) = H_p^c(X, X \setminus A)$, so dass insgesamt $\chi(A) = \chi(X, X \setminus A)$. Aus den exakten Kohomologiesequenzen zu (X, A) und $(X, X \setminus A)$ erhält man $\chi(X, A) - \chi(X) + \chi(A) = 0 = \chi(X, X \setminus A) - \chi(X) + \chi(X \setminus A)$, woraus durch Einsetzen die Behauptung folgt. Falls die Voraussetzungen nicht für A , sondern für $X \setminus A$ erfüllt sind, schliesst man ähnlich.

Für spätere Anwendungen sei noch explizit erwähnt, dass gleichzeitig gezeigt wurde:

KOROLLAR 4.9. *Sind für A die Voraussetzungen von Satz 4.8 erfüllt, so ist $H^*(X \setminus A, M)$ endlich erzeugt.*

Für eine abgeschlossene Teilmenge A eines endlichen simplizialen Komplexes K kann man ohne weitere Voraussetzungen an K eine Verallgemeinerung von 4.9 beweisen, wobei jedoch A , wie einfache Beispiele zeigen, einer sehr einschränkenden Bedingung unterworfen werden muss. Sie ist etwa dann erfüllt, wenn A ein Unterkomplex von K ist.

SATZ 4.10. *\mathcal{F} sei eine Garbe auf dem endlichen simplizialen Komplex K , wobei \mathcal{F} im Innern eines jeden Simplexes aus K (vgl. 1.2) konstant und endlich erzeugt sei. A sei eine abgeschlossene Teilmenge von K , so dass für jedes Simplex s aus K gilt: $H_*(s \cap A)$ ist endlich erzeugt. Dann ist $H^*(K \setminus A, \mathcal{F})$ endlich erzeugt.*

Beweis: Es wird Induktion über $n := \dim K$ gemacht. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Satz 4.10 sei bewiesen für alle endlichen Komplexe K der Dimension $< n$, alle \mathcal{F} und alle A wie angegeben. Dann sei K das Standard n -Simplex, $\mathcal{F}|_{K \setminus \partial K} = M$. Damit erhalten wir aus Mayer Vietoris eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^j(K \setminus (\partial K \cap A), \mathcal{F}) &\rightarrow H^j(K \setminus \partial K, M) \oplus H^j(K \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^j(K \setminus (\partial K \cap A), M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Da $K \setminus \partial K$ zusammenziehbar ist, ist $H^*(K \setminus \partial K, M)$ endlich erzeugt. Nach Satz 4.4 gilt für alle j : $H^j(K \setminus (\partial K \cup A), M) = H_{n-j}(K, \partial K \cup A; M)$, so dass wir für die endliche Erzeugtheit von $H^*(K \setminus (\partial K \cup A), M)$ offensichtlich nur zu zeigen haben, dass $H_*(A \cup \partial K, M)$ endlich erzeugt ist; nach dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie genügt es sogar, dies für $M = L$ zu zeigen. Da nach Voraussetzung $H_*(s \cap A)$ für alle Simplizes s endlich erzeugt ist und da der Durchschnitt zweier Simplizes höchstens ein niederdimensionales Simplex ist, ergibt sich dies leicht durch Induktion über den Aufbau von ∂K mit Mayer Vietoris. Die Garbe \mathcal{F} lässt sich in eine exakte Sequenz einbringen: $0 \rightarrow \mathcal{F}_{K \setminus \partial K} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\partial K} \rightarrow 0$. Um zu zeigen, dass $H^*(K \setminus (\partial K \cap A), \mathcal{F})$ endlich erzeugt ist, genügt es, dies für die Garben $\mathcal{F}_{K \setminus \partial K}$ und $\mathcal{F}_{\partial K}$ zu zeigen. Man hat

$$H^*(K \setminus (\partial K \cap A), \mathcal{F}_{K \setminus \partial K}) = H_c^*(K \setminus \partial K, M) = H^*(K, \partial K; M)$$

und dieses ist endlich erzeugt. $\mathcal{F}_{\partial K}$ ist auf den $n - 1$ dimensionalen Komplex ∂K beschränkt und erfüllt darauf die Induktionsvoraussetzungen nach Konstruktion; analoges gilt für $\partial K \cap A$. Mit $\text{cld}(\partial K \setminus (\partial K \cap A)) = \text{cld}(K \setminus (\partial K \cap A))|_{\partial K \setminus (\partial K \cap A)}$ lässt sich daher auf

$$H^*(K \setminus (\partial K \cap A), \mathcal{F}_{\partial K}) = H^*(\partial K \setminus (\partial K \cap A), \mathcal{F})$$

die Induktionsvoraussetzung anwenden. Insgesamt ist also gezeigt: Für ein n dimensionales Simplex K ist $H^*(K \setminus A, \mathcal{F})$ endlich erzeugt. Ist K nun ein beliebiger endlicher n dimensionaler Komplex, so erhält man daraus die Behauptung des Satzes, indem man mit Induktion über die Anzahl der n -Simplizes weiterschliesst; für die Bausteine haben wir gerade die Behauptung gezeigt; für die niederdimensionalen Durchschnitte gilt sie nach Induktionsvoraussetzung, damit gilt sie auch für die Vereinigung K .

LITERATUR

- [1] BOURBAKI, N.: *Topologie générale*. chap. I-II, Paris 3. ed.
- [2] BOREL, A. und A. HAEFLIGER: *La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique* Bull. Soc. Math. France 89, 461-513 (1961).
- [3] BREDON, G. E.: *Sheaf Theory*. New York 1967.
- [4] CARTAN, H.: *Variétés analytiques complexes et variétés analytiques réelles*. Bull. S. M. France 85, 77-100 (1957).
- [5] CARTAN, H. und S. EILENBERG: *Homological Algebra*. Princeton 1956.
- [6] GIESECKE, B.: *Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume*. Math. Zeitschr. 83, 177-213 (1964).
- [7] GRAUERT, H. und R. REMMERT: *Komplexe Räume*. Math. Ann. 136, 245-318 (1958).
- [8] HILTON, P. J. und S. WYLIE: *Homology Theory*. Cambridge 1960.
- [9] KAUP, L.: *Bemerkungen zur Kohomologie komplexer Räume*. Habilitationsschrift. Erlangen 1969.
- [9a] KAUP, L.: *The Jordan-Brouwer separation theorem for locally analytic spaces*. Anais Acad. Brasileira de Ciências, 42, 655-659 (1970).
- [9b] KAUP, L.: *Poincaré-Dualität für Räume mit Normalisierung*. Edición previa. Notas de matemática. No 12. Univ. Nac. La Plata (1970).
- [9c] KAUP, L.: *Zur Homologie projektiv algebraischer Varietäten*. Edición previa. Notas de matemática No 15. Univ. Nac. La Plata (1970).
- [10] NUNKE, R. J. und ROTMAN: *Singular cohomology groups*. Journ. London Math. Soc. 37, 301-306.
- [11] REIFFEN, H. J.: *Riemannsche Hebbbarkeitsätze für Kohomologieklassen mit kompaktem Träger*. Math. Ann. 164, 272-279 (1966).
- [12] GERSTNER, O., L. KAUP und H. G. WEIDNER: *Whitehead-Moduln abzählbaren Rang(s) über Hauptidealringen*. Arch. Math. 20, 503-514 (1969).
- [13] HEINLEIN, G.: *Funktorielle Topologien und Reflexivität von Moduln*. Diplomarbeit. Erlangen 1969.
- [14] SPANIER, E. H.: *Algebraic Topology*. New. York 1966.

Mathematisches Institut
Universität
D - 852 Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2