Ann. Inst. Fourier, Grenoble
Version de travail – 17 juin 2006

SOMMATION EFFECTIVE D'UNE SOMME DE BOREL PAR SÉRIES DE FACTORIELLES

par Eric DELABAERE & Jean-Marc RASOAMANANA

Résumé. Nous abordons dans cet article la question de la sommation effective d'une somme de Borel d'une série par la série de factorielles associée. Notre approche fournit un contrôle de l'erreur entre la somme de Borel recherchée et les sommes partielles de la série de factorielles. Nous généralisons ensuite cette méthode au cadre des séries de puissances fractionnaires, après avoir démontré un analogue d'un théorème de Nevanlinna de sommation de Borel fine pour ce cadre.

Effective Borel-resummation by factorial series

Abstract. In this article, we consider the effective resummation of a Borel sum by its associated factorial series expansion. Our approach provides concrete estimates for the remainder term when truncating this factorial series. We then generalize a theorem of Nevanlinna which gives us the natural framework to extend the factorial series method for Borel-resummable fractional power series expansions.

1. Introduction

Le problème du calcul effectif d'une somme de Borel a déjà une longue histoire. Celui-ci peut être fait par ce que Poincaré appelait la "méthode des astronomes" [23], et qui n'est autre que la méthode de sommation au plus petit terme que Stokes employait déjà dans son article fondateur de 1857 [26] et qui trouve naturellement sa place dans le cadre Gevrey [24, 3].

Bien d'autres méthodes de sommation ont été développées depuis. Ainsi, l'utilisation des approximants de Padé fait sont apparition dès les années 1970 en physique mathématique (voir, e.g., [25]), à la suite notamment de la redécouverte de la sommation de Borel par le "groupe de Saclay" de physique théorique, avant d'être développée d'un point de vue algorithmique dans le cadre Gevrey [27]. Un point de vue différent, basé sur l'utilisation de transformations conformes, fournit la méthode exposée dans [1]. Dans la mouvance des idées de Dingle [11], de Ecalle [12, 13, 14, 4, 10, 9], et sous l'impulsion de Berry-Howls [2], l'école anglo-saxonne d'asymptotique exponentielle a quant à elle developpé l'outil de l'hyperasymptotique (voir, e.g., [20, 22, 21]) pour lequel la structure résurgente des objets à sommer joue un rôle central [7, 6]. D'autres méthodes effectives de sommation et des applications en physique sont détaillées dans [16].

Nous allons nous pencher ici sur la méthode des séries de factorielles. Cette méthode, en théorie exacte et non approchée, n'est pas nouvelle puisqu'elle remonte à Watson [29],

Mots-clés : Sommation de Borel, séries de factorielles.
Classification math. : 30E15, 40Gxx.

Nevanlinna [18] et Nörlund [19], voir aussi [17, 28]. Notre apport par rapport à la littérature existante sur ce sujet est double. D'une part, ayant en vue des méthodes effectives, notre objectif sera de fournir des estimations de l'erreur commise par sommation partielle des séries de factorielles. D'autre part, nous proposerons une généralisation de la sommation par séries de factorielles au cadre des séries de puissances fractionnaires Borel sommables.

La structure de l'article est la suivante. La section 2 est consacrée à un certain nombre de rappels sur la sommation d'une série sommable de Borel par séries de factorielles. La section 3 fournit une approche originale de la sommation par séries de factorielles, débouchant sur un contrôle effectif de l'erreur commise par sommation partielle comme explicité au théorème 3.2. La sommation de Borel de séries de puissances fractionnaires est abordée en section 4, l'objectif principal étant le théorème 4.6 et son corollaire 4.7 de sommation de Borel fine. Celui-ci fournit le cadre naturel pour la sommation par séries de factorielles généralisée développée en section 5, et son résultat principal, le théorème 5.6. Différents exemples illustrent les procédures de sommation effective.

Notons pour conclure cette introduction que cet article n'a pas pour motivation de promouvoir telle méthode effective de sommation au dépend de telle autre. Notre approche est ici de définir les conditions d'applications de la méthode par séries de factorielles, et donc ses limitations. Enfin, s'il nous semble que dans un cadre résurgent, et en parallèle avec l'hyperasymptotique, les méthodes exposées ici devraient pouvoir déboucher sur le calcul effectif des coefficients de Stokes, cette question ne sera néanmoins pas abordée dans cet article, faute pour les auteurs d'y avoir réfléchi suffisamment.

2. Résultats classiques

Notation 2.1. — Dans tout l'article :

– Pour $r > 0$ et $\theta \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, $\mathcal{B}_r(\theta)$ désigne la bande ouverte

$$\mathcal{B}_r(\theta) = \{\zeta \in \mathbb{C} \,/\, d(\zeta, e^{i\theta}\mathbb{R}^+) < r\},$$

où d est la distance euclidienne.

Pour $\theta = 0$ on notera plus simplement $\mathcal{B}_r$ à la place de $\mathcal{B}_r(0)$.

– On note Δ l'image du disque ouvert $D(1,1)$ de centre 1 et de rayon 1 par la transformation biholomorphe

$$s \in D(1,1) \mapsto \zeta = -\ln(s) \in \Delta.$$

L'ouvert Δ vérifie :

$$\mathcal{B}_{\ln(2)} \subset \Delta \subset \mathcal{B}_{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(cf. Fig. 2.1).}$$

– Pour tout $\lambda > 0$, Δ_λ désignera l'homothétique de Δ défini par :

$$\Delta_\lambda = \{\lambda\zeta \,/\, \zeta \in \Delta\}.$$

– Pour $r > 0$, $A > 0$, $B > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\Re(z) > B$ on notera

$$R_{as}(r, A, B, n, z) = Ae^{Br}\frac{n!}{r^n}\frac{1}{|z|^n(\Re(z) - B)}.$$

Nous résumons maintenant la théorie classique de la sommation de Borel et de la sommation par séries de factorielles. Nous renvoyons le lecteur à [17, 28] pour les démonstrations.

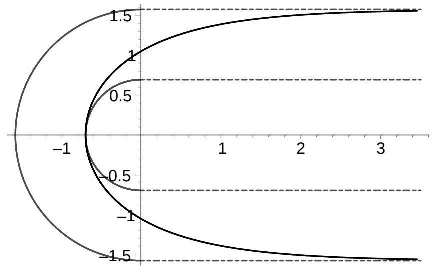

FIG. *2.1.* Les ouverts $\mathcal{B}_{\ln(2)} \subset \Delta \subset \mathcal{B}_{\frac{\pi}{2}}$.

2.1. Sommation de Borel

Nous rappelons tout d'abord le théorème suivant de Nevanlinna dit de "sommation de Borel fine" : l'holomorphie et la croissance au plus exponentielle d'ordre 1 dans une bande pour la transformée de Borel formelle sont équivalentes à l'existence et l'unicité de la somme de Borel. Plus précisément :

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ *une série Gevrey-1. Notons* $\widetilde{f}(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{n-1}}{(n-1)!} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ *sa transformée de Borel formelle. Soit* $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, *et* $r > 0$, $A > 0$, $B > 0$. *Alors (1)* $\Rightarrow$ *(2)* $\Rightarrow$ *(3) :*

(1) $\widetilde{f}$ *se prolonge analytiquement à l'ouvert* $\mathcal{B}_r(\theta)$ *et, pour tout* $\zeta \in \mathcal{B}_r(\theta)$, $|\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$.

(2) *Il existe une fonction* $\mathrm{s}_\theta f(z)$ *holomorphe dans* $\{z \in \mathbb{C} / \Re(ze^{i\theta}) > B\}$ *telle que, pour* $\Re(ze^{i\theta}) > B$ *et* $n \geqslant 0$ *:*

$$\left|\mathrm{s}_\theta f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right| \leqslant R_{as}(r, A, B, n, ze^{i\theta}) \tag{2.1}$$

(3) *Il existe* $r' > 0$ *tel que* $\widetilde{f}$ *se prolonge analytiquement à l'ouvert* $\mathcal{B}_{r'}(\theta)$. *De plus, il existe* $A' > 0$, $B' > 0$ *tels que pour tout* $\zeta \in \mathcal{B}_{r'}(\theta)$, $|\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant A'e^{B'|\zeta|}$.

De plus, sous l'hypothèse (1), la fonction $\mathrm{s}_\theta f(z)$ *est unique, donnée par :*

$$\text{pour } \Re(ze^{i\theta}) > B, \qquad \mathrm{s}_\theta f(z) = a_0 + \int_0^{\infty e^{i\theta}} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta. \tag{2.2}$$

Remarque 2.3. — – L'hypothèse (1) implique que pour tout $n \geqslant 0$,

$$|a_{n+1}| \leqslant Ae^{Br} \frac{n!}{r^n}. \tag{2.3}$$

– Par l'inégalité de Stirling, à savoir [15]

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}},$$

il vient :

$$R_{as}(r, A, B, n, z) < Ae^{Br} \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}}}{r^n} \frac{1}{|z|^n (\Re(z) - B)}.$$

Comme, à z fixé, $\dfrac{n^n e^{-n}}{(r|z|)^n}$ atteint son minimum en $n = r|z|$, la *sommation au plus petit terme* consiste à approcher $\mathrm{s}_\theta f(z)$ par la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}$ avec $n = \big[r|z|\big]$ où $\big[.\big]$ est la partie entière.

Définition 2.4. — *Dans le théorème (2.2), la fonction holomorphe* $\mathrm{s}_\theta f$ *est la somme de Borel de* f *relative à la direction* θ*.*

Remarque 2.5. — Le calcul de la somme de Borel $\mathrm{s}_\theta f$ de $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$ relative à la direction θ se ramène au calcul de la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f_\theta$ de $f_\theta(z) = f(ze^{-i\theta}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n e^{in\theta}}{z^n}$ relative à la direction 0 par la relation :

$$\text{pour tout } \Re(ze^{i\theta}) \gg 0, \quad \mathrm{s}_\theta f(z) = \mathrm{s}_0 f_\theta(ze^{i\theta}). \tag{2.4}$$

2.2. Sommation par séries de factorielles

Nous considérons maintenant la méthode de calcul d'une somme de Borel par séries de factorielles. Suivant la remarque 2.5, il suffit de se concentrer sur le calcul d'une somme de Borel relative à la direction $\theta = 0$.

Notre hypothèse de travail est la suivante : la série Gevrey-1 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$ admet une transformée de Borel formelle $\widetilde{f}(\zeta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{n-1}}{(n-1)!}$ qui se prolonge holomorphiquement à l'ouvert Δ. On suppose par ailleurs :

$$\exists A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall \zeta \in \Delta,\ |\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}. \tag{2.5}$$

On notera que, puisque $\mathcal{B}_{\ln(2)} \subset \Delta$, l'hypothèse (2.5) implique que la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f(z)$ de f est définie holomorphe pour $\Re(z) > B$.

L'application $\zeta \mapsto s = e^{-\zeta}$ définissant une transformation biholomorphe entre l'ouvert Δ et le disque ouvert $D(1,1)$, nous pouvons introduire :

$$\phi(s) = \widetilde{f}(\zeta). \tag{2.6}$$

L'application ϕ est holomorphe dans $D(1,1)$ et s'identifie dans ce disque à la somme de sa série de Taylor :

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (1-s)^n, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n\phi}{ds^n}(1). \tag{2.7}$$

D'un point de vue formel, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}_0 f(z) &= a_0 + \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta = a_0 + \int_0^{+\infty} \phi(e^{-\zeta}) e^{-z\zeta}\, d\zeta \\
&= a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \int_0^{+\infty} (1-e^{-\zeta})^n e^{-z\zeta}\, d\zeta = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1}\, ds \\
&= a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! b_n}{z(z+1)\dots(z+n)}.
\end{aligned}$$

C'est ce développement qui correspond à la sommation par série de factorielles. Nous référant à Malgrange [17], la justification du calcul formel précédent repose essentiellement sur le point clef suivant :

LEMME 2.6. — *Supposons qu'il existe* $A > 0$ *et* $B > 0$ *tels que* $\forall \zeta \in \Delta,\ |\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$. *Alors pour tout* $C > \max(B,1)$ *la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n^C}$ *converge.*

Ce lemme conduit alors au théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — *Avec les notations précédentes, supposons qu'il existe* $A > 0$ *et* $B > 0$ *tels que* $\forall \zeta \in \Delta,\ |\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$.
Alors la série de factorielles $a_0 + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n}{\Gamma(z+n+1)}$ *converge absolument pour* $\Re(z) > \max(B,1)$ *et représente la somme de Borel* $\mathrm{s}_0 f(z)$ *dans cet ouvert.*

L'utilisation de ce théorème nécessite le calcul des coefficients b_n en fonction des coefficients a_n de la série formelle f. L'algorithme de Stirling [17] répond à la question :

PROPOSITION 2.8 (Algorithme de Stirling). —

$$\forall n \geqslant 0, \quad b_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \mathfrak{s}(n, k-1) a_k,$$

où les $\mathfrak{s}(n,k)$ *sont les nombres de Stirling de première espèce.*

Remarque 2.9. — Notre définition des nombres de Stirling de première espèce $\mathfrak{s}(n,k)$ est celle de [5] : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{s}(n,k)x^k$.

Signalons pour mémoire que le théorème 2.7 admet une réciproque, cf. [17].

3. Sommation de Borel effective

Nous proposons à présent une justification de la sommation par série de factorielles. Différente des preuves classiques [17, 28], son avantage réside dans sa simplicité et le fait qu'elle débouche sur un contrôle effectif.

Notre hypothèse de travail est celle du §2.2 : la série Gevrey-1 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$ admet une transformée de Borel formelle $\widetilde{f}(\zeta)$ qui se prolonge holomorphiquement à l'ouvert Δ et vérifie la condition (2.5). Nous considérons de nouveau l'application ϕ définie par (2.6) et sa série de Taylor (2.7).

Tirons tout d'abord quelques conséquences de (2.5) pour les dérivées $\dfrac{d^n\phi}{ds^n}(s)$, $s \in]0,1]$. Par l'égalité de Cauchy et pour $s \in]0,1]$,

$$\frac{d^n\phi}{ds^n}(s) = \frac{n!}{2i\pi} \oint \frac{\phi(t)}{(t-s)^{n+1}} dt = \frac{n!}{2i\pi s^{n+1}} \oint \frac{\phi(t)}{(\frac{t}{s}-1)^{n+1}} dt. \tag{3.1}$$

Dans (3.1), l'intégration se fait le long d'un lacet dont un paramétrage possible est :

$$t(\alpha) = s(1 + re^{i\alpha}), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad r \in]0,1[\text{ fixé.} \tag{3.2}$$

Nous faisons à présent le changement de variable $v \in D(1,1) \mapsto t = e^{-v} \in \Delta$. A $s \in]0,1]$ correspond $\zeta = -\ln(s) \in \mathbb{R}^+$ tandis qu'au lacet (3.2) est associé le lacet

$$v(\alpha) = \zeta - \ln(1 + re^{i\alpha}), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad 0 < r < 1. \tag{3.3}$$

L'égalité (3.1) devient : pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^+$ et tout $r \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} \frac{d^n\phi}{ds^n}(e^{-\zeta}) &= -\frac{n!\, e^{\zeta(n+1)}}{2i\pi} \oint \frac{\phi(e^{-v})}{(e^{-v+\zeta}-1)^{n+1}} e^{-v} dv \\ &= -\frac{n!\, e^{\zeta(n+1)}}{2i\pi} \oint \frac{\widetilde{f}(v)}{(e^{-v+\zeta}-1)^{n+1}} e^{-v} dv \\ &= \frac{n!\, e^{n\zeta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{f}(\zeta - \ln(1+re^{i\alpha}))}{(re^{i\alpha})^n} d\alpha. \end{aligned}$$

Puisque pour $|\tau| < 1$, $|\ln(1+\tau)| \leqslant -\ln(1-|\tau|)$ on en déduit par (2.5) que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^+$ et tout $r \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^n\phi}{ds^n}(e^{-\zeta})\right| &\leqslant \frac{n!\, e^{n\zeta}}{2\pi\, r^n} \int_0^{2\pi} Ae^{B(\zeta - \ln(1-r))}\, d\alpha \\ &\leqslant \frac{A\, n!}{r^n(1-r)^B}\, e^{(n+B)\zeta}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme $r^n(1-r)^B$ atteint son maximum en $r = \dfrac{n}{n+B}$ sur $]0,1[$, nous retiendrons que :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^+, \quad \left|\frac{d^n\phi}{ds^n}(e^{-\zeta})\right| \leqslant \frac{A(n+B)^{n+B}\, n!}{B^B n^n}\, e^{(n+B)\zeta}. \tag{3.5}$$

Ceci établi, considérons maintenant la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f(z)$ de f. Pour tout $N \geqslant 0$ et $\Re(z) > B$, nous avons

$$\mathrm{s}_0 f(z) - \Big(a_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n}{\Gamma(z+n+1)}\Big) = \int_0^{+\infty} \Big(\phi(e^{-\zeta}) - \sum_{n=0}^{N} b_n(1-e^{-\zeta})^n\Big) e^{-z\zeta}\, d\zeta. \tag{3.6}$$

Maintenant par intégrations par parties successives sur le membre de droite de (3.6), en utilisant (2.7) et la majoration (3.5) pour les questions d'intégrabilité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\mathrm{s}_0 f(z) - \Big(a_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n}{\Gamma(z+n+1)}\Big) = \\ &\qquad \frac{(-1)^{N+1}}{z(z+1)\cdots(z+N)} \int_0^{+\infty} \frac{d^{N+1}\phi}{ds^{N+1}}(e^{-\zeta}) e^{-(z+N+1)\zeta}\, d\zeta. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par suite, en vertu de (3.5) : pour tout $N \geqslant 0$ et $\Re(z) > B$,

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{s}_0 f(z) - \Big(a_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n}{\Gamma(z+n+1)}\Big)\right| \\ &\leqslant \frac{A(N+B+1)^{N+B+1}}{B^B(N+1)^{N+1}} \frac{(N+1)!}{|z(z+1)\cdots(z+N)|} \int_0^{+\infty} e^{(B-\Re(z))\zeta}\, d\zeta \\ &\leqslant \frac{A}{B^B} \frac{(N+B+1)^{N+B+1}}{(N+1)^N} \left|\frac{\Gamma(z)N!}{\Gamma(z+N+1)(\Re(z)-B)}\right|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nous résumons le résultat obtenu :

Proposition 3.1. — *On suppose que la série* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ *admet une transformée de Borel formelle* $\widetilde{f}(\zeta)$ *qui se prolonge holomorphiquement à l'ouvert* Δ, *et qu'il existe* $A > 0$ *et* $B > 0$ *tels que pour tout* $\zeta \in \Delta$, $|\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$. *Alors, pour tout* $N \geqslant 0$ *et* $\Re(z) > B$,

$$\left|\mathrm{s}_0 f(z) - \Big(a_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n}{\Gamma(z+n+1)}\Big)\right| \leqslant R_1(A,B,N,z)$$

(3.9)

$$R_1(A,B,N,z) = \frac{A}{B^B}\frac{(N+B+1)^{N+B+1}}{(N+1)^N}\left|\frac{\Gamma(z)\Gamma(N+1)}{\Gamma(z+N+1)(\Re(z)-B)}\right|,$$

où $\mathrm{s}_0 f$ *désigne la somme de Borel de* f, *les* b_n *étant déduits des* a_n *par la proposition 2.8.*

La proposition 3.1 et le théorème 2.7 entraînent le résultat suivant :

Théorème 3.2. — *On suppose que la transformée de Borel formelle* $\widetilde{f}(\zeta)$ *de la série* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ *se prolonge holomorphiquement à l'ouvert* Δ_λ, $\lambda > 0$, *et qu'il existe* $A > 0$ *et* $B > 0$ *tels que pour tout* $\zeta \in \Delta_\lambda$, $|\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$. *Alors :*

- *la série de factorielles* $a_0 + \lambda \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\lambda z)\Gamma(n+1)b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda z+n+1)}$ *converge absolument pour* $\Re(z) > \max(B, 1/\lambda)$, *de somme* $\mathrm{s}_0 f(z)$, *où* $\mathrm{s}_0 f$ *désigne la somme de Borel de* f, *les* $b_n^{(\lambda)}$ *étant déduits des* $a_n^{(\lambda)} = \lambda^{n-1} a_n$ *par la proposition 2.8.*
- *pour tout* $N \geqslant 0$ *et* $\Re(z) > B$,

$$\left|\mathrm{s}_0 f(z) - \Big(a_0 + \lambda\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\lambda z)\Gamma(n+1)b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda z+n+1)}\Big)\right| \leqslant R_{fact}(\lambda,A,B,N,z)$$

(3.10)

$$R_{fact}(\lambda,A,B,N,z) = \frac{A}{(\lambda B)^{\lambda B}}\frac{(N+\lambda B+1)^{N+\lambda B+1}}{(N+1)^N}\left|\frac{\Gamma(\lambda z)\Gamma(N+1)}{\Gamma(\lambda z+N+1)(\Re(z)-B)}\right|,$$

Démonstration. — Posons $\widetilde{f}_\lambda(\zeta) = \widetilde{f}(\lambda\zeta)$, de sorte que $\widetilde{f}_\lambda$ se prolonge holomorphiquement sur Δ, et $\forall \zeta \in \Delta$, $|\widetilde{f}_\lambda(\zeta)| \leqslant Ae^{\lambda B|\zeta|}$. La fonction $\widetilde{f}_\lambda$ n'est autre que la transformée de Borel formelle de la série formelle $f_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n^{(\lambda)}}{z^n}$ avec $a_n^{(\lambda)} = \lambda^{n-1} a_n$. Nous déduisons du théorème 2.7 que la série de factorielles $a_0^{(\lambda)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(z+n+1)}$ converge (absolument) vers $\mathrm{s}_0 f_\lambda(z)$ pour $\Re(z) > \max(\lambda B, 1)$, et de la proposition 3.1 que pour tout $N \geqslant 0$ et $\Re(z) > \lambda B$,

$$\left|\mathrm{s}_0 f_\lambda(z) - \Big(a_0^{(\lambda)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(z+n+1)}\Big)\right| \leqslant R_1(A,\lambda B,N,z).$$

où les $b_n^{(\lambda)}$ sont déduits des $a_n^{(\lambda)}$ par l'algorithme de Stirling (proposition 2.8).

Par suite la série de factorielles $a_0 + \lambda \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\lambda z)\Gamma(n+1)b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda z+n+1)}$ converge (absolument) vers

$\mathrm{s}_0 f(z)$ pour $\Re(z) > \max(B, 1/\lambda)$, et pour tout $N \geqslant 0$ et $\Re(z) > B$,

$$\left| \mathrm{s}_0 f(z) - \Big(a_0 + \lambda \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\lambda z)\Gamma(n+1) b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda z + n + 1)} \Big) \right| \leqslant \lambda R_1(A, \lambda B, N, \lambda z).$$

□

Le lemme suivant est une conséquence facile de la formule de Stirling.

Lemme 3.3. — *Avec les notations du théorème 3.2, pour $\Re(z) > B$,*

$$R_{fact}(\lambda, A, B, N, z) \sim \frac{A e^{\lambda B \big(1 - \ln(\lambda B)\big)}}{N^{\lambda \big(\Re(z) - B\big) - 1}} \frac{|\Gamma(\lambda z)|}{\Re(z) - B}$$

quand $N \to +\infty$.

De la majoration (3.5) et de la relation (2.7) il découle que, si $\widetilde{f}$ se prolonge holomorphiquement sur Δ, et si $\forall \zeta \in \Delta$, $|\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant A e^{B|\zeta|}$, alors les b_n vérifient $|b_n| \leqslant \dfrac{A(n+B)^{n+B}}{B^B n^n}$. En vertu des propriétés de la fonction $\widetilde{f}_\lambda$ (voir la preuve du théorème 3.2), il vient :

Lemme 3.4. — *Avec les notations du théorème 3.2, pour tout $n \geqslant 0$,*

$$|b_n^{(\lambda)}| \leqslant \frac{A(n + \lambda B)^{n + \lambda B}}{(\lambda B)^{\lambda B} n^n}. \tag{3.11}$$

Remarque 3.5. — Le lemme 3.3 démontre la convergence de la série de factorielles $a_0 + \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\lambda z)\Gamma(n+1) b_n^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda z + n + 1)}$ pour $\Re(z) > B + \dfrac{1}{\lambda}$, $B > 0$, celle-ci représentant la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f(z)$ dans cet ouvert.
Ce résultat est plus faible que celui donné par le théorème 3.2. Le décalage s'explique par la majoration obtenue au lemme 3.4, $|b_n| \leqslant \dfrac{A(n+B)^{n+B}}{B^B n^n}$ (pour $\lambda = 1$). Or $\dfrac{A(n+B)^{n+B}}{B^B n^n} \sim \dfrac{A e^B}{B^B} n^B$, à comparer avec le lemme 2.6.

3.1. Un élément de comparaison

Au vu de la relation $\mathcal{B}_{\ln(2)} \subset \Delta \subset \mathcal{B}_{\frac{\pi}{2}}$, nous allons comparer les estimations des restes $R_{as}(\ln(2), A, B, N, z)$, $R_{as}(\frac{\pi}{2}, A, B, N, z)$ données par (2.1), et celle du reste $R_{fact}(1, A, B, N+1, z)$ décrit par le théorème 3.2. Nous prendrons $A = 1$, $B = 1$, $z = 10 + 10i$. Le résultat est décrit par la figure 3.1.

Cette comparaison répond en partie à l'une des critiques habituellement faite à la méthode de sommation par séries de factorielles, à savoir sa lenteur de convergence. De fait, et de façon similaire à d'autres méthodes de sommation effective, l'efficacité de la méthode par séries de factorielles est très sensible au domaine maximal d'holomorphie Δ_λ de la transformée de Borel formelle $\widetilde{f}$: plus λ peut être pris grand, meilleure sera l'efficacité de la méthode.

Des exemples d'applications illustrant ce phénomène seront donnés dans les sections qui suivent.

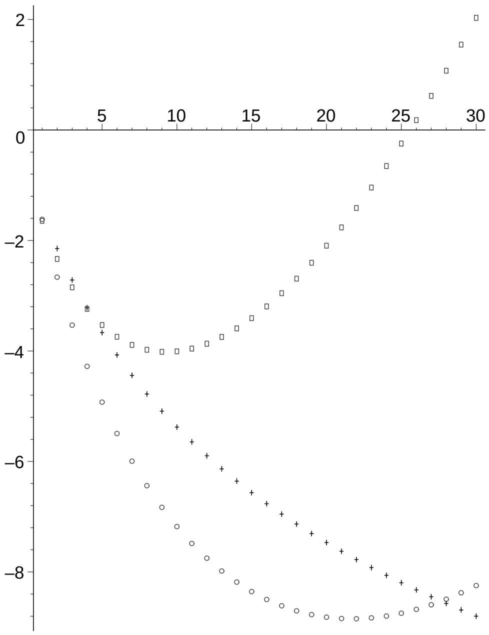

FIG. *3.1.* Nous avons représenté pour $A = B = 1$, $z = 10 + 10i$ et $n = 0, \cdots, 30$, par $\square$ les points de coordonnées $[n, \log |R_{as}(\ln(2), 1, 1, n, z)|]$, par $\circ$ les points de coordonnées $[n, \log \left|R_{as}(\frac{\pi}{2}, 1, 1, n, z)\right|]$, par $+$ les points de coordonnées $[n, \log |R_{fact}(1, 1, 1, n, z|]$.

4. Sommation de Borel de séries de puissances fractionnaires

La section 2 s'occupait de sommes de Borel de séries non ramifiées. Nous allons à présent nous pencher sur le problème de la sommation effective d'une somme de Borel d'une série de puissances fractionnaires. Cette section a pour but de développer un analogue du théorème 2.2 de "sommation de Borel fine".

Notation 4.1. — Par la suite $m \in \mathbb{N}^*$. Nous noterons par $\begin{array}{c}\mathbb{C}_m\\ \pi\downarrow\\ \mathbb{C}\end{array}$ $\left(\textit{resp.}\ \begin{array}{c}\mathbb{C}_m^\star\\ \pi\downarrow\\ \mathbb{C}^\star\end{array}\right)$ la surface de Riemann ramifiée (*resp.* la surface de Riemann) à m feuillets de $X^{\frac{1}{m}}$.

– Nous identifierons l'élément $x \in \mathbb{C}_m^\star$ au couple $(|x|, \arg(x))$ où $|x| \in \mathbb{R}^{+\star}$ est son *module* et $\arg(x) \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi m\mathbb{Z}}$ son *argument*, et on notera $x = |x|e^{i\arg(x)}$:

$$\begin{array}{ccc} x = re^{i\arg(\theta)} \in \mathbb{C}_m^\star & \longleftrightarrow & (r,\theta) = \big(|x|, \arg(x)\big) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi m\mathbb{Z}} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\tilde{\pi} \\ \dot{x} = re^{i\arg(\dot{\theta})} \in \mathbb{C}^\star & \longleftrightarrow & (r,\dot{\theta}) = \big(|\dot{x}|, \arg(\dot{x})\big) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \end{array}$$

– Pour $x \in \mathbb{C}_m^\star$ et $k = 0, \cdots, m-1$, l'élément $x_k = e^{2i\pi k}x \in \mathbb{C}_m^\star$ s'identifie au couple $(|x_k|, \arg(x_k))$ avec $|x_k| = |x|$ et $\arg(x_k) = \arg(x) + 2\pi k$.
– Pour $x \in \mathbb{C}_m^\star$ et $k \in \mathbb{Z}$, on notera $x^{k/m}$ l'élément de $\mathbb{C}_m^\star$ de module $|x^{k/m}| = |x|^{k/m}$ et d'argument $\arg(x^{k/m}) = \frac{k}{m}\arg(x)$.
– Pour $r > 0$ et $\dot{\theta} \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ on notera

$$\mathcal{D}_r(\dot{\theta}) = \pi^{-1}\Big(\mathcal{B}_r(\dot{\theta})\Big) \subset \mathbb{C}_m, \qquad \mathcal{D}_r^\star(\dot{\theta}) = \pi^{-1}\Big(\mathcal{B}_r^\star(\dot{\theta})\Big) \subset \mathbb{C}_m^\star.$$

Pour $\dot{\theta} = 0$ on écrira plus simplement $\mathcal{D}_r = \pi^{-1}(\mathcal{B}_r)$ et $\mathcal{D}_r^\star = \pi^{-1}(\mathcal{B}_r^\star)$.

- On note $\Omega = \pi^{-1}(\Delta)$ et pour tout $\lambda > 0$, $\Omega_\lambda = \pi^{-1}(\Delta_\lambda)$. On définit $\Omega^\star$ et $\Omega_\lambda^\star$ de façon analogue.
- Pour $B > 0$ et $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi m\mathbb{Z}}$, on notera $P(B,\theta)$ le demi-plan ouvert

$$P(B,\theta) = \{z \in \mathbb{C}_m^\star \, / \, |\arg(z) + \theta| \leqslant \frac{\pi}{2}, \, \Re(\dot{z}e^{i\dot{\theta}}) > B\}.$$

Pour $\theta = 0$ on notera plus simplement $P(B) = P(B,\theta)$.

4.1. Somme de Borel

Rappelons quelques définitions et propriétés élémentaires [17].

Définition 4.2. — *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{m}}]]$ *et* $\widetilde{f}(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}$ *sa transformée de Borel formelle. On suppose qu'il existe* $r > 0$ *tel que* $\widetilde{f}(\zeta)$ *définisse une fonction holomorphe sur* $\pi^{-1}\big(D(0,r)^\star\big)$, $D(0,r)^\star = D(0,r)\backslash\{0\}$, *où* $D(0,r)$ *est le disque ouvert de centre* 0 *de rayon* r.
Soit $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi m\mathbb{Z}}$. *On suppose qu'il existe un secteur ouvert* $\Sigma(\theta,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{C}_m^\star, \, \arg(x) \in]\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon[\}$, $\varepsilon > 0$, *tel que* $\widetilde{f}(\zeta)$ *se prolonge analytiquement dans ce secteur et :*

$$\exists\, A > 0, \, \exists\, B > 0, \, \forall \zeta \in \Sigma(\theta,\varepsilon), \; |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant Ae^{B|\zeta|}. \tag{4.1}$$

Alors la fonction

$$\mathrm{s}_\theta f(z) = a_0 + \int_0^{\infty e^{i\theta}} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta \tag{4.2}$$

définie holomorphe dans le demi-plan ouvert $P(B,\theta)$, *est la somme de Borel de* f *dans la direction* θ.

Remarque 4.3. — Le calcul de la somme de Borel $\mathrm{s}_\theta f$ de $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}}$ relative à la direction $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi m\mathbb{Z}}$ se ramène au calcul de la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f_\theta$ de $f_\theta(z) = f(ze^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n e^{in\theta/m}}{z^{\frac{n}{m}}}$ relative à la direction 0 par la relation :

$$\mathrm{s}_\theta f(z) = \mathrm{s}_0 f_\theta(ze^{i\theta}), \qquad z \in P(B,\theta).$$

La remarque 4.3 permet de se limiter à l'étude de la sommation de Borel pour la direction $\theta = 0$, ce que nous ferons dans la suite.

Proposition 4.4. — *On se place dans le cadre de la définition 4.2 avec* $\theta = 0$. *Soit* $0 < \delta < \pi/2$ *et* $\mu > 1$. *On note*

$$P_{\delta,\mu}(B) = \{z \in \mathbb{C}_m^\star \, / \, |\arg(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta, \, |z| \geqslant \frac{\mu B}{\sin(\delta)}\}.$$

Alors il existe $C > 0$ *tel que*

$$\forall\, z \in P_{\delta,\mu}(B), \, \forall\, N \geqslant 0, \, \left| \mathrm{s}_0 f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \right| \leqslant C^{1+N/m} \frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{m}\right)}{|z|^{1+N/m}}. \tag{4.3}$$

Démonstration. — La référence [17] ne traitant pas explicitement le cas ramifié, nous donnons ici la preuve de cette proposition.

Quitte à raisonner avec $f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}}$ on peut supposer que $a_j = 0$, $j = 0, \cdots, m-1$ (dans (4.3) cela n'affecte que la constante C).

Soit $0 < b < r$ et $N \geqslant m$. Pour $z \in P_{\delta,\mu}(B)$,

$$\mathrm{s}_0 f(z) = \int_0^\infty \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta = \int_0^b \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta + \int_b^\infty \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta.$$

Par l'holomorphie de $\widetilde{f}(\zeta)$ sur $\pi^{-1}\big(D(0,r)^\star\big)$ on peut écrire

$$\int_0^b \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta = \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^b \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\big(\frac{n}{m}\big)} e^{-z\zeta}\, d\zeta,$$

puis

$$\int_0^b \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta - \sum_{n=m}^{N} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} = \\ - \sum_{n=m}^{N} \int_b^\infty \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\big(\frac{n}{m}\big)} e^{-z\zeta}\, d\zeta + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_0^b \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\big(\frac{n}{m}\big)} e^{-z\zeta}\, d\zeta.$$

En posant $\zeta = bt$ on obtient :

$$\int_0^b \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta - \sum_{n=m}^{N} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} = \\ - \sum_{n=m}^{N} \frac{a_n b^{\frac{n}{m}}}{\Gamma\big(\frac{n}{m}\big)} \int_1^\infty t^{\frac{n}{m}-1} e^{-zbt}\, dt + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n b^{\frac{n}{m}}}{\Gamma\big(\frac{n}{m}\big)} \int_0^1 t^{\frac{n}{m}-1} e^{-zbt}\, dt.$$

Dans chacune des intégrales on peut majorer $t^{\frac{n}{m}-1}$ par $t^{\frac{N}{m}}$. On obtient ainsi :

$$\left| \int_0^b \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta - \sum_{n=m}^{N} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \right| \leqslant \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{|a_n| b^{\frac{n}{m}}}{\Gamma\big(\frac{n}{m}\big)} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{N}{m}+1\right)}{b^{1+N/m} (\Re \dot{z})^{1+N/m}}.$$

Comme $z \in P_{\delta,\mu}(B)$ implique que $\Re(\dot{z}) \geqslant \sin(\delta)|z| \geqslant \mu B$, on en déduit l'existence d'une constante $c = c(\delta, \mu, b, B) > 0$ telle que pour tout $z \in P_{\delta,\mu}(B)$,

$$\left| \int_0^b \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta - \sum_{n=m}^{N} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \right| \leqslant c^{1+N/m} \frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{m}\right)}{|z|^{1+N/m}}. \tag{4.4}$$

Par ailleurs l'hypothèse (4.1) implique :

$$\exists\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall \zeta \in \Sigma(0,\varepsilon),\ |\widetilde{f}(\zeta)| \leqslant A e^{B|\zeta|}.$$

Par suite, puisque $\Re(\dot{z}) - B \geqslant (1 - \frac{1}{\mu}) \sin(\delta)|z| \geqslant (\mu - 1)B$ pour tout $z \in P_{\delta,\mu}(B)$,

$$\left| \int_b^\infty \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta \right| \leqslant A \frac{e^{(B - \Re(\dot{z}))b}}{\Re(\dot{z}) - B} \leqslant A \frac{e^{-(1-\frac{1}{\mu}) b \sin(\delta)|z|}}{(\mu-1)B}.$$

Or, pour $\alpha > 0$, $e^{-(1-\frac{1}{\mu}) b \sin(\delta)|z|} |z|^\alpha$ est maximal pour $|z| = \dfrac{\alpha}{(1-\frac{1}{\mu}) b \sin(\delta)}$. Donc,

$$\left| \int_b^\infty \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta \right| \leqslant A \frac{e^{-\alpha}}{(\mu-1)B} \left(\frac{\alpha}{(1-\frac{1}{\mu}) b \sin(\delta)} \right)^\alpha |z|^{-\alpha}.$$

En prenant $\alpha = 1 + N/m$ et en utilisant la formule de Stirling, $\Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-1/2}e^{-\alpha}(1 + O(\alpha^{-1}))$, $\alpha > 0$, nous en déduisons l'existence d'une constante $d = (\delta, \mu, b, B, A) > 0$ telle que

$$\left|\int_b^\infty \widetilde{f}(\zeta)e^{-z\zeta}\, d\zeta\right| \leqslant d^{1+N/m}\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{m}\right)}{|z|^{1+N/m}}. \tag{4.5}$$

On conclut par (4.4), (4.5) et par l'inégalité triangulaire. □

Remarque 4.5. — L'hypothèse (4.1) faite dans la définition 4.2, valable dans un secteur, entraine que les estimations Gevrey (4.3) de la proposition 4.4 s'étendent à un secteur d'ouverture plus grande que π. Ceci implique l'unicité de la somme de Borel.

4.2. Sommation de Borel fine

Nous allons à présent modifier quelque peu nos hypothèses afin de démontrer un analogue "en famille" du théorème 2.2, donné par le théorème 4.6 et son corollaire 4.7 : l'holomorphie et la croissance au plus exponentielle d'ordre 1 dans un ouvert du type $\mathcal{D}_r^\star(\dot\theta)$ de $\mathbb{C}_m^\star$ pour la transformée de Borel formelle sont équivalentes à l'existence et l'unicité de m sommes de Borel.

Rappelons que par la remarque 4.3 il est loisible de se limiter à l'étude de la sommation de Borel pour la direction $\theta = 0$.

Théorème 4.6. — *Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{m}}]]_1$ une série Gevrey-1 et $\widetilde{f}(\zeta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)} \in \zeta^{-1+\frac{1}{m}}\mathbb{C}\{\zeta^{\frac{1}{m}}\}$ sa transformée de Borel formelle. Pour $l = 1, \cdots, m$ on note*

$$f_l(\dot z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{l,j}}{\dot z^j},\ a_{l,j} = a_{l+m(j-1)}$$

de sorte que $f(z) = a_0 + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} f_l(\dot z)$. Soit par ailleurs $r > 0$ et $B > 0$.

Nous avons (1) ⇒ (2) ⇒ (3), où :

(1) *$\widetilde{f}$ se prolonge analytiquement à l'ouvert $\mathcal{D}_r^\star$ de $\mathbb{C}_m$, et de plus,*

$$\exists\, A > 0, \forall \zeta \in \mathcal{D}_r^\star,\ |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant Ae^{B|\zeta|}. \tag{4.6}$$

(2) *Pour tout $l = 1, \cdots, m$ il existe $A_l > 0$ et une fonction $\mathrm{s}_0 f_l(z)$ holomorphe dans $\Re(\dot z) > B$ tels que, pour $\Re(\dot z) > B$ et $n \geqslant 1$:*

$$\left|\mathrm{s}_0 f_l(\dot z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot z^j}\right| \leqslant R_{as}(r, A_l, B, n, \dot z) \tag{4.7}$$

(3) *Il existe $r' > 0$ tel que $\widetilde{f}$ se prolonge analytiquement à l'ouvert $\mathcal{D}_{r'}^\star$ de $\mathbb{C}_m$, et de plus,*

$$\exists\, A' > 0,\ \exists\, B' > 0,\ \forall \zeta \in \mathcal{D}_{r'}^\star,\ |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant A'e^{B'|\zeta|}. \tag{4.8}$$

De plus, sous l'hypothèse (1), pour $\Re(\dot z) > B$, $\mathrm{s}_0 f_l(\dot z) = \displaystyle\int_0^\infty \widetilde{f}_l(\zeta)e^{-\dot z\zeta}\, d\zeta$.

Démonstration. — • (1) ⇒ (2).
La preuve repose sur un analogue de la “méthode du vecteur cyclique”. Ecrivons f sous la forme

$$f(z) = a_0 + \sum_{l=1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} f_l(\dot{z}), \qquad \text{où} \qquad f_l(\dot{z}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j},\ a_{l,j} = a_{l+m(j-1)}.$$

Puisque pour $k = 0, 1, \cdots, m-1$,

$$f(e^{-2i\pi k} z) - a_0 = \sum_{l=1}^{m} \omega^{lk} z^{\frac{m-l}{m}} f_l(\dot{z}), \qquad \text{avec} \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi}{m}},$$

nous pouvons écrire :

$$A \begin{pmatrix} z^{\frac{m-1}{m}} f_1(\dot{z}) \\ z^{\frac{m-2}{m}} f_2(\dot{z}) \\ \vdots \\ f_m(\dot{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{[0]}(z) \\ f^{[1]}(z) \\ \vdots \\ f^{[m-1]}(z) \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad f^{[k]}(z) = f(e^{-2i\pi k} z) - a_0,$$

où $A = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & A_{i,j} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$, $A_{i,j} = \omega^{(i-1)j}$, est une matrice $m \times m$ de Vandermonde inversible. Si $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & B_{i,j} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$, alors cela implique :

$$f_l(\dot{z}) = \frac{1}{z^{\frac{m-l}{m}}} \sum_{k=0}^{m-1} B_{l,(k+1)} f^{[k]}(z), \qquad l = 1, \cdots, m. \tag{4.9}$$

La transformée de Borel formelle de $f^{[k]}(z)$ s'écrivant sous la forme

$$\widetilde{f^{[k]}}(\zeta) = e^{2i\pi k} \widetilde{f}(\zeta e^{2i\pi k}),$$

on en déduit que chaque $\widetilde{f^{[k]}}(\zeta)$ se prolonge analytiquement sur $\mathcal{D}_r^\star$ et

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}_r^\star,\ |\widetilde{f^{[k]}}(\zeta) \zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant A e^{B|\zeta|}. \tag{4.10}$$

De (4.9) on tire que

$$\begin{cases} \widetilde{f_l}(\dot{\zeta}) = \dfrac{\zeta^{-\frac{l}{m}}}{\Gamma(1-\frac{l}{m})} * \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} B_{l,(k+1)} \widetilde{f^{[k]}}(\zeta) \right), \qquad l = 1, \cdots, m-1 \\[2ex] \widetilde{f_m}(\dot{\zeta}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} B_{m,(k+1)} \widetilde{f^{[k]}}(\zeta). \end{cases}$$

où $*$ désigne le produit de convolution $\left(\varphi_1 * \varphi_2(\zeta) = \int_0^\zeta \varphi_1(\eta) \varphi_2(\zeta - \eta)\, d\eta, \text{ voir [4]} \right)$. Ceci implique l'holomorphie de chaque $\widetilde{f_l}(\dot{\zeta})$ sur $\mathcal{B}_r$, et par ailleurs,

$$\exists A_l > 0, \forall \dot{\zeta} \in \mathcal{B}_r,\ |\widetilde{f_l}(\dot{\zeta})| \leqslant A_l e^{B|\dot{\zeta}|}. \tag{4.11}$$

Le théorème 2.2 s'applique alors à chacune des séries formelles Gevrey-1 $f_l(\dot z)$: pour $\Re(\dot z) > B$ et $n \geqslant 1$,

$$\Big|\mathrm{s}_0 f_l(\dot z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot z^j}\Big| \leqslant A_l e^{Br} \frac{n!}{r^n} \frac{1}{|\dot z|^n(\Re(\dot z) - B)}$$

où la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f_l(\dot z)$ est unique, définie par :

$$\mathrm{s}_0 f_l(\dot z) = \int_0^{\infty} \widetilde{f}_l(\zeta) e^{-\dot z\zeta}\, d\zeta.$$

• (2) ⇒ (3).
De l'hypothèse (2) et du théorème 2.2 on déduit immédiatement que, pour tout $l = 1, \cdots, m$, il existe $r'_l > 0$ tel que $\widetilde{f}_l$ se prolonge analytiquement à l'ouvert $\mathcal{B}_{r'_l}$. De plus, il existe $A'_l > 0$, $B'_l > 0$ tels que pour tout $\dot\zeta \in \mathcal{B}_{r'_l}$, $|\widetilde{f}_l(\dot\zeta)| \leqslant A'_l e^{B'_l|\dot\zeta|}$. Remarquons ici que, via l'égalité de Cauchy et quitte à prendre un $r'_l > 0$ plus petit, ce type de majoration exponentielle se transpose à la dérivée $\dfrac{d\widetilde{f}_l}{d\dot\zeta}$.

Introduisons la somme finie $p_m(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}}$, de transformée de Borel formelle $\widetilde{p_m}(\zeta)$. On établit facilement l'identité

$$\widetilde{f} = \widetilde{p_m} + \widetilde{f_m} + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\zeta^{-1+l/m}}{\Gamma(l/m)} * \frac{d\widetilde{f}_l}{d\dot\zeta}, \tag{4.12}$$

d'où l'on déduit qu'en posant $r' = \min\limits_{1\leqslant l\leqslant m} r'_l$, alors d'une part $\widetilde{f}$ se prolonge analytiquement à l'ouvert $\mathcal{D}^\star_{r'}$ de $\mathbb{C}_m$, et par ailleurs

$$\exists\, A' > 0,\ \ \exists\, B' > 0,\ \forall \zeta \in \mathcal{D}^\star_{r'},\ |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant A' e^{B'|\zeta|}.$$

□

Corollaire 4.7. — *Sous l'hypothèse (1) du théorème 4.6, il existe m fonctions $\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z)$, $k = 0, \cdots, m-1$, holomorphes respectivement dans $P(B, 2\pi k)$, telles que pour tout $z \in P(B, 2\pi k)$ et tout $N \geqslant m$, $N = mn + p$, $0 \leqslant p < m$,*

(4.13)
$$\Big|\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{m}}}\Big| \leqslant \frac{Ce^{Br} n!}{r^n|\dot z|^n(\Re(\dot z) - B)} \left(\frac{(n+1)}{r} \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{|\dot z|^{l/m}} + \sum_{l=p+1}^{m} |\dot z|^{1-l/m} \right).$$

où $C = \max\limits_{1\leqslant l\leqslant m} A_l$, les A_l étant ceux définis dans l'item (2) du théorème 4.6. De plus, pour tout $z \in P(B, 2\pi k)$,

$$\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) = a_0 + \int_0^{\infty e^{2i\pi k}} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta = a_0 + \sum_{l=1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} \mathrm{s}_0 f_l(\dot z) \tag{4.14}$$

Démonstration. — Pour $k = 0, \cdots, m-1$ et $z \in P(B, 2\pi k)$ définissons la fonction $\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z)$ par

$$\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) = a_0 + \sum_{l=1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} \mathrm{s}_0 f_l(\dot z).$$

D'une part, en conséquence de (4.12) et des propriétés générales du produit de convolution, on observe que

$$\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) = a_0 + \int_0^{\infty e^{2i\pi k}} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta.$$

D'autre part, soit $N \geqslant m$ et $N = mn + p$, $0 \leqslant p < m$. Alors

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{m}}} = a_0 + \left(\sum_{l=1}^{p} z^{\frac{m-l}{m}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} \right) + \left(\sum_{l=p+1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} \right).$$

Donc,

$$\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{m}}} =$$
$$\sum_{l=1}^{p} z^{\frac{m-l}{m}} \left[\mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} \right] + \sum_{l=p+1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} \left[\mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} \right]$$

et on déduit de (4.7) et de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} \left| \mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{m}}} \right| \leqslant & \sum_{l=1}^{p} |z|^{\frac{m-l}{m}} \left[A_l e^{Br} \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \frac{1}{|\dot{z}|^{n+1} (\Re(\dot{z}) - B)} \right] \\ & + \sum_{l=p+1}^{m} |z|^{\frac{m-l}{m}} \left[A_l e^{Br} \frac{n!}{r^n} \frac{1}{|\dot{z}|^{n} (\Re(\dot{z}) - B)} \right] \end{aligned}$$

En posant $C = \max_{1 \leqslant l \leqslant m} A_l$ on peut alors écrire :

$$\left| \mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{m}}} \right| \leqslant \frac{C e^{Br} n!}{r^n |\dot{z}|^n (\Re(\dot{z}) - B)} \left(\frac{(n+1)}{r} \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{|\dot{z}|^{l/m}} + \sum_{l=p+1}^{m} |\dot{z}|^{1-l/m} \right).$$

Supposons à présent l'existence de m fonctions $\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z)$, $k = 0, \cdots, m-1$ holomorphes respectivement dans $P(B, 2\pi k)$ et satisfaisant (4.13), avec C une constante positive. En adaptant la preuve du théorème 4.6, on peut définir m fonctions $\mathrm{s}_0 f_l(\dot{z})$ holomorphes dans $\Re(\dot{z}) > B$ en posant : pour $z \in P(B, 2\pi k)$,

$$\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z) - a_0 = \sum_{l=1}^{m} z^{\frac{m-l}{m}} \mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}). \tag{4.15}$$

Ecrivons en effet

$$\text{Pour } z \in P(B),\ F^{[k]}(z) = \mathrm{s}_{(2\pi k)} f(e^{-2i\pi k} z) - a_0, \qquad k = 0, \cdots, m-1.$$

Alors (4.15) se récrit sous la forme : pour $k = 0, 1, \cdots, m-1$ et $z \in P(B)$,

$$F^{[k]}(z) = \sum_{l=1}^{m} \omega^{lk} z^{\frac{m-l}{m}} \mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}), \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi}{m}},$$

de sorte que les fonctions $\mathrm{s}_0 f_l(\dot{z})$ sont déterminées de façon unique par l'analogue de l'équation (4.9) : pour $z \in P(B)$ et $l = 1, \cdots, m$,

$$\mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}) = \frac{1}{z^{\frac{m-l}{m}}} \sum_{k=0}^{m-1} B_{l,(k+1)} F^{[k]}(z). \tag{4.16}$$

Soit $n \geqslant 1$, $0 \leqslant p < m$ et $N = mn + p$. On note $G_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{a_j}{z^{\frac{j}{m}}}$ et

$$\text{Pour } z \in P(B),\ G_N^{[k]}(z) = G_N(e^{-2i\pi k} z), \qquad k = 0, \cdots, m-1.$$

Alors, pour $z \in P(B)$,

$$\text{si } p = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} = \frac{1}{z^{\frac{m-l}{m}}} \sum_{k=0}^{m-1} B_{l,(k+1)} G_N^{[k]}(z), \;\; l = 1, \cdots, m$$

$$\text{si } p \geqslant 1, \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} = \frac{1}{z^{\frac{m-l}{m}}} \sum_{k=0}^{m-1} B_{l,(k+1)} G_N^{[k]}(z), \;\; l = 1, \cdots, p \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} = \frac{1}{z^{\frac{m-l}{m}}} \sum_{k=0}^{m-1} B_{l,(k+1)} G_N^{[k]}(z), \;\; l = p+1, \cdots, m. \end{cases}$$

En utilisant (4.13), il vient pour $\Re(\dot{z}) > B$:

(1) Pour $p = 0$ choisissons $l = 1$:

$$\left| \mathrm{s}_0 f_1(\dot{z}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{1,j}}{\dot{z}^j} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |B_{1,(k+1)}| \frac{Ce^{Br} n!}{r^n |\dot{z}|^n (\Re(\dot{z}) - B)} \left(\sum_{j=1}^{m} |\dot{z}|^{(1-j)/m} \right)$$

En supposant $|\dot{z}| > 1$ on en déduit l'existence d'une constante $D > 0$ indépendante de n telle que

$$\left| \mathrm{s}_0 f_1(\dot{z}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{1,j}}{\dot{z}^j} \right| \leqslant \frac{De^{Br} n!}{r^n |\dot{z}|^n (\Re(\dot{z}) - B)}$$

(2) Pour $p \geqslant 1$ choisissons $l = p + 1$:

$$\left| \mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} \right| \leqslant$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} |B_{l,(k+1)}| \frac{Ce^{Br} n!}{r^n |\dot{z}|^n (\Re(\dot{z}) - B)} \left(\frac{(n+1)}{r} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{|\dot{z}|^{1+(j-l)/m}} + \sum_{j=l}^{m} |\dot{z}|^{(l-j)/m} \right)$$

En supposant $|\dot{z}| > 1$ et en prenant $0 < r' < r$, on en déduit de nouveau l'existence d'une constante $D > 0$ indépendante de n telle que

$$\left| \mathrm{s}_0 f_l(\dot{z}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j} \right| \leqslant \frac{De^{Br'} n!}{r'^n |\dot{z}|^n (\Re(\dot{z}) - B)}$$

Le théorème (2.2) impose alors l'unicité de la famille des $\mathrm{s}_0 f_l(\dot{z})$, donc de la famille des $\mathrm{s}_{(2\pi k)} f(z)$, $k = 0, \cdots, m-1$. □

Remarque 4.8. — La propriété (4.11) implique, par Cauchy, que pour tout $j \geqslant 1$

$$(4.17) \qquad |a_{l+m(j-1)}| \leqslant A_l e^{Br} \frac{j!}{r^j} \qquad \left(\text{car } a_{l+m(j-1)} = \frac{d^j \widetilde{f}_l}{d\zeta^j}(0) \right).$$

En pratique, on remplacera alors la majoration (4.13) par une estimation de l'erreur de la forme : pour $\Re(\dot{z})$ assez grand et $n \geqslant 1$,

$$(4.18) \qquad \left| \mathrm{s}_0 f(z) - \sum_{k=0}^{mn} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{m}}} \right| \sim \max_{1 \leqslant l \leqslant m} (|a_{l+mn}|) \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} |z|^{\frac{i}{m}}}{|z|^n \Re(\dot{z})}.$$

Pour les mêmes raisons que celles développées à la remarque 2.3, la *sommation au plus petit terme* consistera à choisir $n = \big[r|z|\big]$.

4.3. Un exemple

A titre d'exemple, qui nous servira également d'introduction à la section 5, nous allons considérer la sommation de Borel d'une solution formelle de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2}\Phi. \tag{4.19}$$

Suivant [8] :

Proposition 4.9. — *Soit* $z(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$. *Il existe une unique série formelle* $\psi(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1/3}]]$, *de terme constant égal à* 1, *telle que*

$$\Phi(x) = \frac{e^{-z}}{z^{\frac{1}{6}}}\psi(z)\,|_{z=z(x)} \tag{4.20}$$

avec Φ *solution formelle de l'équation (4.19). De plus la transformée de Borel formelle de* ψ *définit une fonction analytique sur le revêtement universel de* $\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}$ *et est à croissance exponentielle d'ordre au plus 1 à l'infini.*

La série formelle $\psi(z)$ de la proposition précédente se calcule à tout ordre :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{k}{3}}} \\ &= 1 - \left(\frac{128}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{z^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{2048}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}} - \left(\frac{34328125}{373248}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{z} + \cdots . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Comme conséquence de la proposition 4.9, la série formelle $\psi(z)$ rentre dans le cadre d'application du théorème 4.6 et de son corollaire 4.7, avec $0 < r < 2$: la série $\psi(z)$ est sommable de Borel pour $z \in P(B)$, $B > 0$ assez grand, et nous nous proposons ici d'évaluer la somme $\mathrm{s}_0\psi(z)$. Celle-ci est de la forme

$$\mathrm{s}_0\psi(z) = a_0 + \sum_{l=1}^{3} z^{\frac{3-l}{3}} \mathrm{s}_0\psi_l(\dot{z})$$

où

$$\psi_l(\dot{z}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{l,j}}{\dot{z}^j}, \qquad a_{l,j} = a_{l+3(j-1)}.$$

Pour l'illustration numérique qui suit, nous choisirons $z = 12$ (cela correspond à $x = 9$ dans la proposition 4.9).

4.3.1. Sommation au plus petit terme

Nous commençons l'évaluation de

$$\mathrm{s}_0\psi(z), \qquad z = 12,$$

au moyen des sommes partielles $\sum_{k=0}^{3n} \frac{a_k}{z^{\frac{k}{3}}}$ par la sommation au plus petit terme comme exposé dans la remarque 4.8.

La figure 4.1 suggère de choisir $n = 24$ comme troncation optimale, ce qui correspond au choix de $n = \sup_{0<r<2} \left[r|z|\right]$ (cf. Remarque 4.8). Le calcul donne :

$$\mathrm{s}_0\psi(z) \simeq 0.26256292290 \pm 0.23 \times 10^{-9}.$$

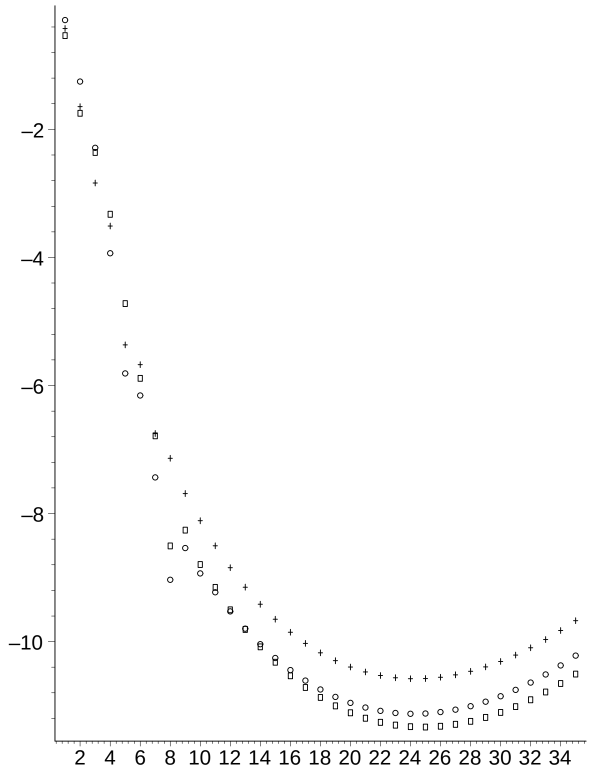

FIG. *4.1.* Nous avons représenté pour $z = 12$ et $j = 1, \cdots, 35$, par $\square$ les points de coordonnées $[j, \log\left|\frac{a_{1,j}}{z^j}\right|]$, par $\circ$ les points de coordonnées $[j, \log\left|\frac{a_{2,j}}{z^j}\right|]$, par $+$ les points de coordonnées $[j, \log\left|\frac{a_{3,j}}{z^j}\right|]$.

4.3.2. Sommation par séries de factorielles

Par la proposition 4.9 et le théorème 4.6, les transformées de Borel formelles $\widetilde{\psi_{(l)}}(\dot{\zeta})$ des $\psi_{(l)}(\dot{z})$ définissent des fonctions holomorphes dans le domaine $\mathcal{B}_r$ pour tout $0 < r < 2$, mais également dans le domaine Δ_λ pour tout $0 < \lambda < 2/\ln(2)$, et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus 1 dans ces domaines. En vertu du théorème 3.2 :
Il existe $B > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda < 2/\ln(2)$ et tout $l = 1, 2, 3$, le développement

$$\lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\lambda\dot{z})\Gamma(j+1)b_{l,j}^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda\dot{z}+j+1)}$$

converge absolument pour $\Re(\dot{z}) > \max(B, \frac{1}{\lambda})$ et sa somme représente $\mathrm{s}_0\psi_l(\dot{z})$, où les coefficients $b_{l,j}^{(\lambda)}$ se déduisent des $a_{l,j}^{(\lambda)} = \lambda^{j-1}a_{l,j}$ par l'algorithme de Stirling.

Evaluons à présent la somme de Borel

$$\mathrm{s}_0\psi(z) = a_0 + \sum_{l=1}^{3} z^{\frac{3-l}{3}}\mathrm{s}_0\psi_l(\dot{z}), \qquad z = 12,$$

par l'utilisation des séries de factorielles. On estime chacune des sommes de Borel $\mathrm{s}_0\psi_{(l)}(\dot{z})$ au moyen des sommes partielles $\lambda \sum_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(\lambda\dot{z})\Gamma(j+1)b_{l,j}^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda\dot{z}+j+1)}$. Les majorations (3.10) et (3.11)

Valeur de n	Estimation de $s_0\psi(z)$	Estimation de l'erreur
10	0.262562935	0.20×10^{-7}
14	0.26256292301	0.22×10^{-9}
18	0.2625629228800	0.45×10^{-11}
25	0.262562922877259	0.15×10^{-13}
33	0.262562922877250882	0.65×10^{-16}
40	0.2625629228772508441	0.2×10^{-18}

TAB. *4.1.* Calcul de $s_0\psi(z)$ par séries de factorielles pour $z = 12$ avec $\lambda = 2/\ln(2)$.

amènent en pratique (pour $\Re(\dot{z})$ assez grand) à estimer l'erreur commise par la relation

$$\left|s_0\psi_{(l)}(\dot{z}) - \lambda \sum_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(\lambda\dot{z})\Gamma(j+1)b_{l,j}^{(\lambda)}}{\Gamma(\lambda\dot{z}+j+1)}\right| \sim |b_{l,n+1}^{(\lambda)}| \frac{|\Gamma(\lambda\dot{z})|\Gamma(n+1)}{\Re(\dot{z})|\Gamma(\lambda\dot{z}+n+1)|}. \tag{4.22}$$

En prenant pour λ la borne sup $2/\ln(2)$ des valeurs théoriquement permises, le calcul fournit la table 4.1. D'une part, comparée à la sommation au plus petit terme, on observera une meilleure performance de la méthode par séries de factorielles, pour un n équivalent. D'autre part une vitesse de convergence satisfaisante. De fait, la structure singulière des transformées de Borel rend ici judicieux le choix de la méthode par séries de factorielles (pour la sommation de Borel de direction 0).

Valeur de n	Estimation de $s_0\psi(z)$	Estimation de l'erreur
14	0.262562922891	0.24×10^{-10}
18	0.26256292287739	0.25×10^{-12}

TAB. *4.2.* Calcul de $s_0\psi(z)$ par séries de factorielles pour $z = 12$ avec $\lambda = 4$.

Ajoutons, sans tenter de l'expliquer, qu'on observe en pratique une accélération de la convergence en prenant des valeurs de λ au-delà des valeurs théoriquement permises, et pour des n modérés. Ceci est illustré par la table 4.2.

5. Sommation de Borel par séries de factorielles des séries de puissances fractionnaires

L'exemple traité au §4.3 a illustré comment la méthode de sommation d'une somme de Borel par les séries de factorielles pouvait être adaptée au cas d'une série de puissances fractionnaires. Dans cette section nous allons présenter une variante plus directe, qui peut être vue comme une extension de la méthode de sommation par séries de factorielles.

5.1. Sommation par séries de factorielles généralisées

Nos hypothèses seront les suivantes : $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{m}}]]_1$ est une série dont la transformée de Borel formelle $\widetilde{f}(\zeta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)} \in \zeta^{-1+\frac{1}{m}}\mathbb{C}\{\zeta^{\frac{1}{m}}\}$ se prolonge analytiquement à l'ouvert $\Omega^\star$, et de plus :

$$\exists\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall \zeta \in \Omega^\star,\ |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant Ae^{B|\zeta|}. \tag{5.1}$$

Comme $\mathcal{D}^\star_{\ln(2)} \subset \Omega^\star$, on déduit du théorème 4.6 et de son corollaire 4.7 que la somme de Borel

$$\mathrm{s}_0 f(z) = a_0 + \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta$$

est bien définie pour $z \in P(B)$ et nous nous proposons de la calculer.

Pour $\zeta \in \Omega^\star$ nous pouvons écrire $\widetilde{f}$ sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} &\widetilde{f}(\zeta) = \sum_{l=1}^{m} (1-e^{-\zeta})^{\frac{l}{m}-1} \widetilde{g}_l(\dot{\zeta}) \\ &\widetilde{g}_l(\dot{\zeta}) = \left(\frac{\dot{\zeta}}{1-e^{-\dot{\zeta}}}\right)^{\frac{l}{m}-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{l+mk}\dot{\zeta}^k}{\Gamma\left(\frac{l}{m}+k\right)} \in \mathbb{C}\{\dot{\zeta}\}. \end{aligned} \right. \tag{5.2}$$

En outre, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ nous avons :

$$\widetilde{f}(e^{2i\pi k}\zeta) = \sum_{l=1}^{m} \omega^{kl}\, (1-e^{-\zeta})^{\frac{l}{m}-1} \widetilde{g}_l(\dot{\zeta}) \qquad \text{avec} \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}.$$

Nous en tirons la relation :

$$A \begin{pmatrix} (1-e^{-\zeta})^{\frac{1}{m}-1} \widetilde{g}_1(\dot{\zeta}) \\ \vdots \\ (1-e^{-\zeta})^{\frac{m-1}{m}-1} \widetilde{g}_{m-1}(\dot{\zeta}) \\ \widetilde{g}_m(\dot{\zeta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{f}(e^{2i\pi}\zeta) \\ \vdots \\ \widetilde{f}(e^{2i\pi(m-1)}\zeta) \\ \widetilde{f}(\zeta) \end{pmatrix}.$$

où $A = (A_{k,l})\,,\ \ A_{k,l} = \omega^{kl}$, est une matrice $m \times m$ de Vandermonde inversible. En notant $A^{-1} = B = (B_{i,j})$ on obtient que pour tout $l = 1, \cdots, m$ et tout $\zeta \in \Omega^\star$,

$$\widetilde{g}_l(\dot{\zeta}) = (1-e^{-\zeta})^{1-\frac{l}{m}} \sum_{k=1}^{m} B_{l,k} \widetilde{f}(e^{2i\pi k}\zeta).$$

Cette propriété, la définition même (5.2) des $\widetilde{g}_l$, et les hypothèses faites sur $\widetilde{f}$ montrent le lemme suivant :

Lemme 5.1. — *Pour tout $l = 1, \cdots, m$, $\widetilde{g}_l$ est holomorphe sur Δ et il existe $A_l > 0$ tel que, $\forall \dot{\zeta} \in \Delta$, $|\widetilde{g}_l(\dot{\zeta})| \leqslant A_l e^{B|\dot{\zeta}|}$.*

Soit $D(1,1)^\star$ le disque ouvert épointé de centre 1 et de rayon 1. Notons $\begin{array}{c} D(1,1)^\star_m \\ \nu \downarrow \\ D(1,1)^\star \end{array}$ le revêtement à m feuillets de $D(1,1)^\star$. L'application conforme $\dot{\zeta} \in \Delta^\star \mapsto \dot{s} = e^{-\dot{\zeta}} \in D(1,1)^\star$ se relève naturellement en une application conforme de $\Omega^\star$ sur $D(1,1)^\star_m$:

$$\begin{array}{ccc} \zeta \in \Omega^\star & \longleftrightarrow & s = e^{-\zeta} \in D(1,1)^\star_m \\ \pi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \dot{\zeta} \in \Delta^\star & \longleftrightarrow & \dot{s} = e^{-\dot{\zeta}} \in D(1,1)^\star \end{array}$$

Posons alors, pour $s \in D(1,1)^\star_m$:

$$\Phi(s) = \widetilde{f}(\zeta), \qquad \phi_l(\dot{s}) = \widetilde{g}_l(\dot{\zeta}).$$

Suivant (5.2) l'application Φ se décompose sous la forme

$$\Phi(s) = \sum_{l=1}^{m} (1-s)^{\frac{l}{m}-1} \phi_l(\dot{s}) \tag{5.3}$$

où, comme dans la section 2.2, nous pouvons écrire, pour $\dot{s} \in D(1,1)$:

$$\phi_l(\dot{s}) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j^{(l)} (1-\dot{s})^j. \tag{5.4}$$

Par conséquent, Φ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} &\forall\, s \in D(1,1)_m^\star,\ \ \Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n (1-s)^{\frac{n}{m}-1}, \\ &\text{avec}\ \ \forall l \in \{1,\dots,m\},\, \forall j \in \mathbb{N},\quad d_{l+mj} = b_j^{(l)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Formellement, nous pouvons écrire la somme de Borel de f sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathrm{s}_0 f(z) &= a_0 + \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta = a_0 + \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n (1-e^{-\zeta})^{\frac{n}{m}-1} e^{-z\zeta}\, d\zeta, \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{m}-1} s^{z-1}\, ds = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\Big(\frac{n}{m}\Big)\Gamma(z) d_n}{\Gamma\Big(z+\frac{n}{m}\Big)}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression de $\mathrm{s}_0 f(z)$ est justifiée par la généralisation suivante du théorème 2.7 :

Proposition 5.2. — *Soit* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{m}}]]_1$. *On suppose que la transformée de Borel formelle* $\widetilde{f}(\zeta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\Big(\frac{n}{m}\Big)} \in \zeta^{-1+\frac{1}{m}} \mathbb{C}\{\zeta^{\frac{1}{m}}\}$ *se prolonge analytiquement à l'ouvert* $\Omega^\star$ *et que*

$$\exists\, A>0,\, \exists\, B>0,\, \forall \zeta \in \Omega^\star,\ |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant A e^{B|\zeta|}.$$

Alors la série de factorielles généralisée

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\Big(\frac{n}{m}\Big)\Gamma(z) d_n}{\Gamma\Big(z+\frac{n}{m}\Big)}$$

converge absolument pour $z \in P(\max(B,1))$ *et représente la somme de Borel* $\mathrm{s}_0 f(z)$ *dans cet ouvert.*

Démonstration. — La preuve s'appuiera sur deux lemmes préparatoires.

Lemme 5.3. — $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $\quad \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{n}{m})}{\Gamma(z+\frac{n}{m})} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma(z)}{\left(\frac{n}{m}\right)^z}.$

Démonstration. — Nous savons par la formule de Stirling que pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $\Gamma(z) \underset{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-}}{\sim} \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$, d'où :

$$\begin{cases} \Gamma(\frac{n}{m}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}(\frac{n}{m})^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{m}} \\ \\ \dfrac{1}{\Gamma(z+\frac{n}{m})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{z+\frac{n}{m}}}{\sqrt{2\pi}\big(z+\frac{n}{m}\big)^{z+\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}} = \dfrac{e^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{2\pi}\big(z+\frac{n}{m}\big)^{z-\frac{1}{2}}} \dfrac{e^z}{\big(z+\frac{n}{m}\big)^{\frac{n}{m}}}. \end{cases}$$

Or, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} \big(z+\dfrac{n}{m}\big)^{z-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \big(\dfrac{n}{m}\big)^{z-\frac{1}{2}} \\ \\ \big(z+\dfrac{n}{m}\big)^{-\frac{n}{m}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \big(\dfrac{n}{m}\big)^{-\frac{n}{m}} e^{-z}, \end{cases}$$

ce qui nous donne l'équivalence souhaitée. □

Lemme 5.4. — *On considère la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ associée à la fonction $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n(1-s)^{\frac{n}{m}-1}$. Sous les hypothèses de la proposition 5.2, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|d_n|}{\left(\frac{n}{m}\right)^C}$ converge pour tout $C > \max(B,1)$.*

Démonstration. — Par le lemme 5.1 et le lemme 2.6 nous pouvons déduire que les coefficients $b_j^{(l)}$ définis par (5.4) vérifient :

$$\forall C > \max(B,1), \qquad \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|b_j^{(l)}|}{j^C} < +\infty.$$

A fortiori, pour tout $l = 1, \cdots, m$,

$$\forall C > \max(B,1), \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|b_j^{(l)}|}{\left(j+\frac{l}{m}\right)^C} < +\infty.$$

Par suite, par la définition (5.5) des coefficients d_n et par sommation finie sur l,

$$\forall C > \max(B,1), \qquad \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|d_{l+mj}|}{\left(j+\frac{l}{m}\right)^C} < +\infty.$$

Ceci fournit *in fine* la relation : $\forall C > \max(B,1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|d_n|}{\left(\frac{n}{m}\right)^C} < +\infty.$ □

Nous revenons maintenant à la preuve de la proposition 5.2 proprement dite. Pour ce qui est de la convergence absolue de la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\Gamma(z) d_n}{\Gamma\left(z+\frac{n}{m}\right)}$ pour $z \in P(\max(B,1))$, comme par le lemme 5.3 :

$$d_n \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{n}{m})}{\Gamma(z+\frac{n}{m})} \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n \Gamma(z) \Big(\frac{n}{m}\Big)^{-z},$$

il suffit donc de voir que pour $z \in P(\max(B,1))$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |d_n| \Big(\frac{n}{m}\Big)^{-\Re(\dot{z})}$ converge, ce qui est une conséquence du lemme 5.4.

Pour voir que la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\Gamma(z)d_n}{\Gamma\left(z+\frac{n}{m}\right)}$ représente bien la somme de Borel $\mathrm{S}_0 f(z)$, il s'agit de montrer que dans l'expression

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |d_n| \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\frac{n}{m}-1} ds$$

nous pouvons permuter $\sum$ et $\int$. Il suffit pour cela de montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} |d_n||s^{z-1}|(1-s)^{\frac{n}{m}-1}$ est intégrable sur $[0,1]$. Or, nous avons les égalités suivantes (en posant $C = \Re(\dot{z}) > \max(B,1)$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} |d_n| \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{m}-1}|s^{z-1}|ds &= \sum_{n=1}^{+\infty} |d_n| \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{m}-1} s^{C-1} ds \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |d_n| \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\Gamma(C)}{\Gamma\left(C+\frac{n}{m}\right)}.
\end{aligned}$$

Or cette dernière série converge comme nous l'avons démontré au point précédent. Ceci achève la démonstration. □

Il nous reste pour terminer à déduire les coefficients d_n des a_n. Tout ce que nous avons à faire est de calculer la décomposition donnée par la proposition 5.2 pour $\frac{1}{z^r}$, $r > 0$. Pour $z \in P(0)$, nous avons

$$\frac{1}{z^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-uz} u^{r-1} du$$

de sorte que, avec $u = -\ln(s)$, $\frac{1}{z^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 s^{z-1} \left(-\ln(s)\right)^{r-1} ds$. Pour $s \in]0,1[$, nous pouvons écrire $-\frac{\ln(s)}{1-s} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j!}{j+1} \frac{(1-s)^j}{j!}$. La série de Taylor

$$\left(-\frac{\ln(s)}{1-s}\right)^{r-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{r,j}(1-s)^j,$$

se déduit alors de la formule de Faa di Bruno ([5]), et nous obtenons :

$$c_{r,0} = 1, \qquad c_{r,j} = \frac{1}{j!} \sum_{1 \leqslant p \leqslant j} \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-p)} B_{j,p}\left(\frac{1!}{2}, \frac{2!}{3}, \cdots, \frac{l!}{l+1}, \cdots\right),\ j \geqslant 1,$$

où les $B_{j,p}$ désignent les polynômes de Bell exponentiels partiels ([5]). En permutant $\sum$ et $\int$ (licite par un calcul identique à celui effectué dans la démonstration de la proposition 5.2), nous en déduisons que

$$\frac{1}{z^r} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{r,j}}{\Gamma(r)} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{r+j-1} ds = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{r,j}}{\Gamma(r)} \mathrm{Beta}(r+j,z)$$

$$\frac{1}{z^r} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{r,j}}{\Gamma(r)} \frac{\Gamma(r+j)\Gamma(z)}{\Gamma(r+j+z)}.$$

Nous avons en particulier :

$$\frac{1}{z^r} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(r+z)} + \sum_{j=1}^{+\infty} d_{r,j} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(r+j+z)}$$

avec

$$d_{r,j} = \left(\sum_{1 \leqslant p \leqslant j} \frac{B_{j,p}(\frac{1!}{2}, \frac{2!}{3}, \cdots, \frac{l!}{l+1}, \cdots)}{\Gamma(r-p)} \right) \frac{\Gamma(r+j)}{j!}.$$

Par suite, pour $m \in \mathbb{N}^\star$ et $l \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{z^{\frac{l}{m}}} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{l}{m})} + \sum_{j=1}^{+\infty} d_{\frac{l}{m},j} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{l+jm}{m})}.$$

Nous en déduisons alors facilement le résultat qui suit :

Proposition 5.5. — *Dans la proposition 5.2, nous avons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,*

$$d_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{m})} \left(a_n + \sum_{\substack{j \geqslant 1, l \geqslant 1 \\ l+jm=n}} d_{\frac{l}{m},j}.a_l \right)$$

où les $d_{r,j}$ sont définis par

$$d_{r,j} = \left(\sum_{1 \leqslant p \leqslant j} \frac{B_{j,p}(\frac{1!}{2}, \frac{2!}{3}, \cdots, \frac{l!}{l+1}, \cdots)}{\Gamma(r-p)} \right) \frac{\Gamma(r+j)}{j!}, \tag{5.6}$$

les $B_{j,p}$ désignant les polynômes de Bell exponentiels partiels.

La proposition 5.2 admet comme conséquence le résultat suivant :

Théorème 5.6. — *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{\frac{n}{m}}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{m}}]]_1$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la transformée de Borel formelle $\widetilde{f}(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \zeta^{\frac{n}{m}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)} \in \zeta^{-1+\frac{1}{m}}\mathbb{C}\{\zeta^{\frac{1}{m}}\}$ se prolonge analytiquement à l'ouvert $\Omega^\star_\lambda$, et que*

$$\exists\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall \zeta \in \Omega^\star_\lambda,\ |\widetilde{f}(\zeta)\zeta^{\frac{m-1}{m}}| \leqslant A e^{B|\zeta|}.$$

Alors la série de factorielles généralisée

$$a_0 + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\Gamma(\lambda z) d_n^{(\lambda)}}{\Gamma\left(\lambda z + \frac{n}{m}\right)},$$

où les $d_n^{(\lambda)}$ se déduisent des $a_n^{(\lambda)} = \lambda^{\frac{n}{m}-1} a_n$ par la proposition 5.5, converge absolument pour $z \in P(\max(B, 1/\lambda))$ et représente la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f(z)$ dans cet ouvert.

Démonstration. — Elle est similaire à celle du théorème 3.2. □

5.2. Exemple 1

Nous reprenons l'exemple de la sous-section 4.3. Nous estimons la somme de Borel $\mathrm{s}_0\psi(z)$ pour $z = 12$ au moyen de la série de factorielles généralisée tronquée

$$a_0 + \lambda \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{3}\right)\Gamma(\lambda z) d_k^{(\lambda)}}{\Gamma\left(\lambda z + \frac{k}{3}\right)},$$

avec $\lambda = 2/\ln(2)$ et $N = n/3$. La comparaison, détaillée par la table 5.1, est faite avec la "valeur exacte" (voir table 4.1),

$$\text{“valeur exacte”} = 0.2625629228772508441 \pm 0.2 \times 10^{-18}.$$

Valeur de $n = N/3$	Estimation de $\mathrm{s}_0\psi(z)$	Erreur
10	0.262562936	0.13×10^{-7}
18	0.2625629228786	0.13×10^{-11}
25	0.2625629228772537	0.29×10^{-14}

TAB. *5.1.* Calcul de $\mathrm{s}_0\psi(z)$ par séries de factorielles généralisées pour $z = 12$ avec $\lambda = 2/\ln(2)$.

5.3. Exemple 2

Considérons à présent la somme de Borel

$$\mathrm{s}_0 f(z) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \zeta^{1/2}\right)^{1/2} e^{-z\zeta}\, d\zeta$$

de la série Gevrey

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)\Gamma(k-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)} \frac{1}{z^{1+k/2}}$$

qui rentre dans le cadre de la proposition 4.4, mais pas dans celui des théorèmes 4.6 et 5.6, du fait de la singularité en $\zeta = e^{2i\pi}$ pour la transformée de Borel formelle. Un calcul direct montre que

$$\mathrm{s}_0 f(5) = 0.2357006$$

à 10^{-7} près. Le calcul à 10^{-6} près par séries de factorielles généralisées tronquéees avec $\lambda = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma(z) d_k}{\Gamma\left(z + \frac{k}{2}\right)}$, donne la table 5.2 : comme on pouvait le prévoir, la série de factorielles généralisée ne converge pas vers la somme de Borel $\mathrm{s}_0 f(5)$.

Valeur de N	Estimation par séries de factorielles
10	0.235584
100	0.159338

TAB. *5.2.*

Pour se tirer d'affaire on peut utiliser la remarque 4.3 : en prenant $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (par exemple), la somme de Borel $\mathrm{s}_\theta f(z)$ définit un prolongement analytique de $\mathrm{s}_0 f(z)$ pour $\arg(z) \in]-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}[$, $|z| > 0$. Donc $\mathrm{s}_\theta f(5) = \mathrm{s}_0 f(5)$. Or

$$\mathrm{s}_\theta f(z) = \mathrm{s}_0 f_\theta(ze^{i\theta})$$

où

$$f_\theta(z) = f(ze^{-i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)\Gamma(k-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1)} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}(1+\frac{k}{2})}}{z^{1+k/2}}.$$

Les théorèmes 4.6 et 5.6 s'appliquent à f_θ, sous réserve de prendre λ tel que l'image de Δ_λ par la rotation de centre 0 et d'angle θ ne contienne pas 1. On peut prendre $\lambda = 0.6$ par exemple. Ceci permet l'évaluation de $\mathrm{s}_0 f_\theta(z)$ par la série de factorielles généralisée associée $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma(\lambda z) d_k^{(\lambda)}(\theta)}{\Gamma\left(\lambda z + \frac{k}{2}\right)}$. On estime alors $\mathrm{s}_0 f(5)$ en évaluant les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma(\lambda z) d_k^{(\lambda)}(\theta)}{\Gamma\left(\lambda z + \frac{k}{2}\right)}$ pour $z = 5e^{i\theta}$. Le résultat est illustré par la table 5.3, la convergence étant très lente.

Valeur de N	Estimation par séries de factorielles	|erreur|
50	$0.2356902 + 0.50 \times 10^{-5} i$	0.12×10^{-4}
150	$0.2357024 - 0.25 \times 10^{-6} i$	0.1×10^{-5}

TAB. *5.3.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Balser, D. A. Lutz & R. Schäfke, « On the convergence of Borel approximants », *J. Dynam. Control Systems* **8** (2002), no. 1, p. 65-92.

[2] M. V. Berry & C. J. Howls, « Hyperasymptotics for integrals with saddles », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **434** (1991), no. 1892, p. 657-675.

[3] M. Canalis-Durand, « Solutions Gevrey d'équations différentielles singulièrement perturbées », Thèse d'habilitation à diriger des recherches, 1999.

[4] B. Candelpergher, J.-C. Nosmas & F. Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1993, ii+290 pages.

[5] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, enlarged ed., D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974, The art of finite and infinite expansions, xi+343 pages.

[6] E. Delabaere, « Effective resummation methods for an implicit resurgent function », *submitted* (2006).

[7] E. Delabaere & C. J. Howls, « Global asymptotics for multiple integrals with boundaries », *Duke Math. J.* **112** (2002), no. 2, p. 199-264.

[8] E. Delabaere & J.-M. Rasoamanana, « Resurgent deformations for an ODE of order 2 », *Pacific Journal of Mathematics* **223** (2006), no. 1, p. 35-93.

[9] E. Delabaere, « Introduction to the Écalle theory », in *Computer algebra and differential equations (1992)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 193, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, p. 59-101.

[10] E. Delabaere & F. Pham, « Resurgent methods in semi-classical asymptotics », *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **71** (1999), no. 1, p. 1-94.

[11] R. B. Dingle, *Asymptotic expansions : their derivation and interpretation*, 1973, xv+521 pages.

[12] J. Écalle, *Les fonctions résurgentes. Tome I*, Publications Mathématiques d'Orsay 81 [Mathematical Publications of Orsay 81], vol. 5, Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1981, Les algèbres de fonctions résurgentes. [The algebras of resurgent functions], With an English foreword, 247 page.

[13] ———, *Les fonctions résurgentes. Tome II*, Publications Mathématiques d'Orsay 81 [Mathematical Publications of Orsay 81], vol. 6, Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1981, Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération. [Resurgent functions applied to iteration], 248-531 pages.

[14] ———, *Les fonctions résurgentes. Tome III*, Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay], vol. 85, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985, L'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects], 587 page.

[15] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968, xviii+509 pages.

[16] U. Jentschura, « Quantum Electrodynamic, Bound-State Calculations and Large-Order Perturbation Theory », Habilitation Thesis, Dresden University of Technology, 3rd edition, 2004.

[17] B. Malgrange, « Sommation des séries divergentes », *Exposition. Math.* **13** (1995), no. 2-3, p. 163-222.

[18] F. Nevanlinna, « Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen », (1918).

[19] N. Nörlund, « Leçons sur les Séries d'Interpolation », (1926).

[20] A. B. Olde Daalhuis, « Hyperterminants. I », *J. Comput. Appl. Math.* **76** (1996), no. 1-2, p. 255-264.

[21] ———, « Hyperasymptotic solutions of higher order linear differential equations with a singularity of rank one », *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **454** (1998), no. 1968, p. 1-29.

[22] ———, « Hyperterminants. II », *J. Comput. Appl. Math.* **89** (1998), no. 1, p. 87-95.

[23] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987, Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. [Periodic solutions. Nonexistence of uniform integrals. Asymptotic solutions], Reprint of the 1892 original, With a foreword by J. Kovalevsky, Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard. [Albert Blanchard Scientific Library], xii+387 pages.

[24] J.-P. Ramis & R. Schäfke, « Gevrey separation of fast and slow variables », *Nonlinearity* **9** (1996), no. 2, p. 353-384.

[25] B. Simon, « Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory : a mathematical overview. », *International Journal of Quantum Chemistry*, p. 3.

[26] G. Stokes, « On the Discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **X** (1857), p. Part I.

[27] J. Thomann, « Resommation des series formelles. Solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières », *Numer. Math.* **58** (1990), no. 5, p. 503-535.

[28] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XIV, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965, ix+362 pages.

[29] G. Watson, « The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials », *Cir. Mat. Palermo* **34**, p. 41-88.

Eric DELABAERE & Jean-Marc RASOAMANANA
Département de Mathématiques, UMR CNRS 6093, Université d'Angers,
2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France.
eric.delabaere@univ-angers.fr
jean-marc.rasoamanana@univ-angers.fr