ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL DEMAZURE

Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 4 (1970), p. 507-588
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_4_507_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, p. 507 à 588.

SOUS-GROUPES ALGÉBRIQUES DE RANG MAXIMUM DU GROUPE DE CREMONA

PAR MICHEL DEMAZURE.

A la mémoire d'ÉLIE CARTAN,
pour le centième anniversaire
de sa naissance.

En 1893, Enriques déterminait les sous-groupes algébriques connexes maximaux du groupe de Cremona à deux variables (*cf.* [4] et [5], p. 52 et suiv.); à conjugaison près, ces groupes sont de l'un des trois types suivants :

a. le groupe projectif à trois variables;

b. le produit de deux exemplaires du groupe projectif à deux variables;

c. pour chaque entier $n \geq 2$, le groupe G_n obtenu comme suit : on fait le produit semi-direct du groupe $\mathbf{GL}_2$ par l'espace de sa représentation irréductible de dimension $n+1$, et on divise le groupe obtenu par son centre (qui est le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2$ formé des matrices diagonales de puissance $n^{\text{ième}}$ l'unité).

On peut remarquer que ces groupes sont en fait les groupes d'automorphismes des modèles minimaux du plan projectif, respectivement $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, et les surfaces habituellement notées F_n. D'autre part, ces groupes sont tous de rang 2, de centre nul, de partie réductive de type A,.... Je me suis donc proposé de chercher dans quelle mesure ces différents faits se généralisaient au cas du groupe de Cremona $\mathbf{Cr}_{nk}$ à n variables, $n \geq 2$, sur un corps de base k quelconque.

Dans le cas de n variables, $n > 2$, la recherche des sous-groupes maximaux de $\mathbf{Cr}_{nk}$ est compliquée par deux phénomènes :

1° Il est facile de voir que les sous-tores de dimension n de $\mathbf{Cr}_{nk}$ sont maximaux et conjugués (§ 1, n° 6); en revanche, il pourrait exister des sous-tores maximaux de dimension $< n$: le fait que pour tout n les sous-tores maximaux de $\mathbf{Cr}_{nk}$ soient de dimension n est équivalent au fait suivant :

(C) Toute extension K du corps de base k telle que le corps de fractions rationnelles $K(t)$ soit une extension transcendante pure de k de degré de transcendance $\leq n$ est elle-même une extension pure de k.

Dans le cas $n = 2$, (C) résulte du théorème de Lüroth; dans le cas général, c'est un cas particulier d'une conjecture de Zariski [9].

2° Si G est un groupe semi-simple adjoint et P un sous-groupe parabolique de G, G opère fidèlement sur la variété rationnelle G/P, donc définit naturellement une classe de conjugaison de sous-groupes algébriques connexes de $\mathbf{Cr}_{nk}$, $n = \dim (G/P)$. Or, comme me l'a fait remarquer Tits, de tels sous-groupes de $\mathbf{Cr}_{nk}$ sont nécessairement maximaux (parmi les sous-groupes connexes) : cela résulte facilement du fait que G/P est complet et que G est la composante neutre du groupe des automorphismes de G/P.

Lorsque $n = 2$, G est nécessairement de rang 2, en vertu des hasards de la classification des groupes semi-simples.

Pour éviter ces deux difficultés, il convient de rechercher, non pas les sous-groupes algébriques connexes maximaux de $\mathbf{Cr}_{nk}$, mais ceux qui sont de rang n, donc qui contiennent un tore de dimension n; dans cet article, nous nous intéressons aux sous-groupes algébriques de $\mathbf{Cr}_{nk}$, contenant un tore *déployé* de dimension n (non nécessairement maximaux). Les résulsats principaux sont les suivants : ces groupes sont classifiés par des structures analogues aux systèmes de racines de la théorie des groupes réductifs déployés (nous les avons appelés « *systèmes d'Enriques* » — précisons que la méthode d'Enriques est entièrement différente); leur partie réductive est de type A; ceux qui sont semi-simples sont des produits de groupes projectifs; lorsque k est de caractéristique 0, ils proviennent de schémas en groupes lisses affines sur l'anneau des entiers (lorsque k est de caractéristique p, il est nécessaire d'agrandir légèrement le radical unipotent par « saturation »); ces schémas en groupes se réalisent comme groupes d'automorphismes de certains $\mathbf{Z}$-schémas à décomposition cellulaire obtenus en « ajoutant à un tore déployé certains points à l'infini ».

Un rôle important est joué par les schémas précédents; la manière « d'ajouter des points à l'infini à un tore » est décrite par un « *éventail* » (§ 4, n° 2, déf. 1); une étude générale des schémas définis par des éventails se trouve au paragraphe 4.

Je n'ai pas pu répondre à des questions qui se posent fort naturellement au cours de cette étude; une petite liste est donnée au paragraphe 5.

Les résultats principaux de cet article ont été annoncés au colloque organisé à Nancy en juin 1969 pour le centième anniversaire de la naissance d'Élie Cartan, et exposés à l'I. H. E. S. en janvier-février 1970.

Signalons quelques notations et conventions générales : si S est un schéma, X et S' des S-schémas, et si $s \in S$, on note respectivement $X(S')$, $X_{S'}$, $\varkappa(s)$, X_s l'ensemble des points de X dans S' (i. e. des S-morphismes de S' dans X), le S'-schéma déduit de X par changement de base, le corps résiduel de s sur S et le $\varkappa(s)$-schéma $X_{\operatorname{Spec} \varkappa(s)}$. Si $S' = \operatorname{Spec} A$, on écrit aussi $X(A)$ au lieu de $X(S')$. La locution « pour tout point x de X » signifie « pour tout S-schéma S' et tout élément x de $X(S')$ ». Enfin, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\mu}$ désignent respectivement le groupe additif-type et le groupe multiplicatif-type [$\boldsymbol{\alpha}(A)$ et $\boldsymbol{\mu}(A)$ sont donc respectivement le groupe additif de l'anneau A et le groupe multiplicatif A^* des éléments inversibles de A].

1. Sous-groupes lisses du groupe de Cremona.

1. Pseudo-morphismes. — Rappelons dans un cas particulier la notion de *pseudo-morphisme* relatif et ses principales propriétés (*cf.* EGA, IV, § 20, n° 5).

Soient S un schéma et X et Y deux S-schémas *lisses séparés* et *de type fini*. On dit qu'un ouvert U de X est S-*dense* (= universellement schématiquement dense) si, pour chaque $s \in S$, l'ouvert U_s de la fibre X_s de X en s est dense. Un S-*pseudo-morphisme* de X dans Y est une classe d'équivalence de couples (U, f), où U est un ouvert S-dense de X et f un S-morphisme de U dans Y, deux couples (U, f) et (U', f') étant équivalents si f et f' coïncident sur $U \cap U'$. Si φ est un S-pseudomorphisme de X dans Y, la réunion $\operatorname{dom}(\varphi)$ des ouverts U, pour tous les couples (U, f) représentant φ, est un ouvert S-dense de X, appelé l'*ouvert de définition* de φ, et il existe un S-morphisme $f : \operatorname{dom}(\varphi) \to Y$ représentant φ (EGA, IV, 20.2.4); si T est un S-schéma, on dit que φ est défini au point $x \in X(T)$ si $x \in \operatorname{dom}(\varphi)(T) \subset X(T)$ et on pose alors $\varphi(x) = f(x) \in Y(T)$. Les S-pseudo-morphismes de X dans Y s'identifient donc aux S-morphismes non prolongeables d'ouverts S-denses de X dans Y; en particulier, chaque S-morphisme de X dans Y définit un S-pseudo-morphisme auquel on l'identifie. On dit que le pseudo-morphisme φ de X dans Y est S-*dominant* si, pour tout $s \in S$, le morphisme $\operatorname{dom}(\varphi)_s \to Y_s$ qu'il définit est dominant.

Soient Z un troisième S-schéma lisse séparé et de type fini, φ un S-pseudo-morphisme de X dans Y et ψ un S-pseudo-morphisme de Y dans Z.

Le S-*pseudo-morphisme composé* $\psi \circ \varphi$ de X dans Z est défini en particulier dans les trois cas suivants :

a. Le S-*pseudo-morphisme* ψ *est un* S-*morphisme* de Y dans Z; on a alors $\mathrm{dom}(\psi \circ \varphi) \supset \mathrm{dom}(\varphi)$ (*cf.* EGA, IV, 20.2.5).

b. Le S-*pseudo-morphisme* φ *est un* S-*morphisme plat* de X dans Y (*cf.* EGA, IV, 20.5.7); on a alors $\mathrm{dom}(\psi \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\mathrm{dom}(\psi))$ (EGA, IV, 20.3.11).

c. Le S-*pseudo-morphisme* φ *est* S-*dominant*. En effet, soient $(\mathrm{dom}(\varphi), f)$ et $(\mathrm{dom}(\psi), g)$ les représentants non prolongeables de φ et ψ respectivement; pour chaque $s \in S$, l'image de f_s est dense dans Y_s, donc contient un ouvert dense de Y_s (EGA, IV, 1.8.5 et 0_{III}, 9.2.2); il s'ensuit que $f_s^{-1}(\mathrm{dom}(\psi)_s)$ est un ouvert dense de X_s, donc $f^{-1}(\mathrm{dom}(\psi))$ un ouvert S-dense de X. Le S-pseudo-morphisme $\psi \circ \varphi$ est alors défini comme la classe du couple $(f^{-1}(\mathrm{dom}(\psi)), g \circ (f | f^{-1}(\mathrm{dom}(\psi))))$; on a $f^{-1}(\mathrm{dom}(\psi)) \subset \mathrm{dom}(\psi \circ \varphi)$, mais ces deux ouverts sont en général distincts.

Soient S′ un S-schéma et φ un S-pseudo-morphisme de X dans Y, de représentant non prolongeable $(\mathrm{dom}(\varphi), f)$; l'ouvert $\mathrm{dom}(\varphi)_{S'}$ de $X_{S'}$ est S′-dense, et le couple $(\mathrm{dom}(\varphi)_{S'}, f_{S'})$ définit un S′-pseudo-morphisme $\varphi_{S'}$ de $X_{S'}$; on a $\mathrm{dom}(\varphi)_{S'} \subset \mathrm{dom}(\varphi_{S'})$, mais ces deux ouverts sont en général distincts. En particulier, on définit pour tout $s \in S$ le $\varkappa(s)$-morphisme φ^s de X_s dans Y_s, dont l'ouvert de définition contient $\mathrm{dom}(\varphi)_s$.

Soient T un S-schéma lisse séparé et de type fini, Z un T-schéma lisse séparé et de type fini, et U un ouvert T-dense de Z; alors Z est un S-schéma lisse séparé et de type fini et U est S-dense dans Z [en effet, si $s \in S$, $(U_s)_t$ est dense dans $(X_s)_t$ pour tout $t \in T_s$, donc U_s dense dans X_s]. Il s'ensuit que tout T-pseudo-morphisme ψ de Z dans un T-schéma lisse séparé et de type fini V définit naturellement un S-pseudo-morphisme de Z dans V; ceci s'applique en particulier lorsque $Z = X_T$, $V = Y_T$ et $\psi = \varphi_T$, où φ est un S-pseudo-morphisme de X dans Y. Le pseudo-morphisme de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$ ainsi obtenu est noté $\varphi \times_S T$.

Enfin, si φ est un S-pseudo-morphisme de X dans Y et ψ un S-pseudo-morphisme de X dans Z, il existe un unique S-pseudo-morphisme (φ, ψ) de X dans $Y \times_S Z$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ (\varphi, \psi) = \varphi$, $\mathrm{pr}_2 \circ (\varphi, \psi) = \psi$.

2. Pseudo-isomorphismes et pseudo-automorphismes. — Soient S un schéma, X et Y deux S-schémas lisses séparés et de type fini et φ un pseudo-morphisme de X dans Y. On dit que φ est un S-*pseudo-isomorphisme* s'il est S-dominant et s'il existe un S-pseudo-morphisme ψ de Y dans X

tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$; il est alors clair que ψ est S-dominant, qu'il est déterminé par φ, et que l'on a $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. On pose $\varphi^{-1} = \psi$.

PROPOSITION 1. — *Pour que le pseudo-morphisme φ soit un pseudo-isomorphisme, il faut et il suffit que son ouvert de définition contienne un ouvert* S-*dense* U *de* X *tel que φ induise un isomorphisme de* U *sur un ouvert* S-*dense de* Y.

La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons qu'il existe un pseudo-morphisme ψ de Y dans X tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$, et soient (U', f') et (V', g') des représentants de φ et ψ respectivement. Posons $U = f'^{-1}(V')$ et $V = g'^{-1}(U')$; ce sont des ouverts S-denses de X et Y respectivement. Montrons que f' envoie U dans V : si l'on note $f'' : U \to V'$ le morphisme induit par f', le composé $g' \circ f''$ est l'injection canonique de U dans X et on a

$$f'^{-1}(V) = f''^{-1}(V) = f''^{-1}(g'^{-1}(U')) = U;$$

il s'ensuit que f' induit un morphisme f de U dans V. Pour la même raison, g' induit un morphisme g de V dans U, et il est clair que f et g sont réciproques l'un de l'autre.

Exemple 1. — L'injection d'un ouvert S-dense U de X dans X est un quasi-isomorphisme de U sur X.

Exemple 2. — Soient k un corps et X et Y deux k-schémas algébriques lisses séparés et irréductibles, de corps des fonctions $k(X)$ et $k(Y)$ respectivement. Les pseudo-morphismes dominants de X dans Y correspondent bijectivement aux k-homomorphismes de $k(Y)$ dans $k(X)$ (EGA, I, 7.1.16); il s'ensuit que les pseudo-isomorphismes de X dans Y correspondent bijectivement aux k-isomorphismes de $k(Y)$ sur $k(X)$.

Exemple 3. — Si on suppose de plus que X et Y sont deux courbes complètes, il résulte de ce qui précède et de (EGA, I, 7.1.13) que tout pseudo-isomorphisme de X dans Y est un isomorphisme.

Soient S un schéma et X un S-schéma lisse séparé et de type fini. Les S-pseudo-isomorphismes de X dans X sont appelés S-*pseudo-automorphismes* de X; ils forment, pour la composition, un groupe noté Psaut(X/S). Pour tout S-schéma S', et tout S-pseudo-automorphisme f de X, $f_{S'}$ est un S'-pseudo-automorphisme de $X_{S'}$, et $f \mapsto f_{S'}$ est un homomorphisme de groupes de Psaut(X/S) dans Psaut($X_{S'}$/S'). Il s'ensuit que, lorsque S' varie dans la catégorie des S-schémas, les $\mathrm{Psaut}(X_{S'}/S')$ s'organisent en un S-*foncteur en groupes*

$$S' \mapsto \mathrm{Psaut}(X_{S'}/S'),$$

que l'on note $\mathbf{Psaut}_S(X)$ ou $\mathbf{Psaut}(X)$.

Si Y est un autre S-schéma lisse séparé et de type fini, et si φ est un S-*pseudo-isomorphisme* de X dans Y, les homomorphismes $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ définissent un isomorphisme de S-foncteur en groupes

$$\mathbf{Psaut}_S(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Psaut}_S(Y).$$

En particulier, soient k un corps et K une extension séparable de type fini de k; soit E l'ensemble des couples (X, u), où X est un k-schéma algébrique lisse et séparé et u un k-isomorphisme de K sur $k(X)$; si $a = (X, u)$ et $b = (Y, v)$ sont deux éléments de E, soit $\varphi_{a,b}$ le pseudo-isomorphisme de X sur Y associé au k-isomorphisme $u \circ v^{-1}$ de $k(Y)$ sur $k(X)$ (exemple 2) et $h_{a,b} : \mathbf{Psaut}_k(X) \to \mathbf{Psaut}_k(Y)$ l'isomorphisme correspondant. Les $h_{a,b}$, a, $b \in E$ forment un système transitif d'isomorphismes et on note $\mathbf{Psaut}(K/k)$ le S-foncteur en groupes obtenu par identification des $\mathbf{Psaut}_k(X)$ à l'aide de ces isomorphismes. Par exemple, $\mathbf{Psaut}(K/k)(k)$ est le groupe opposé au groupe des k-automorphismes de K, mais on prendra garde qu'en général, il est faux que $\mathbf{Psaut}(K/k)(\mathrm{Spec}\,A)$ soit anti-isomorphe au groupe des A-automorphismes de $K \otimes_k A$ [cela est pourtant vrai lorsque A est l'anneau des nombres duaux sur k, ce qui entraîne que la k-algèbre de Lie de $\mathbf{Psaut}(K/k)$ est anti-isomorphe à l'algèbre des k-dérivations de K].

Lorsque K est l'extension transcendante pure $k(x_1, \ldots, x_n)$, on pose $\mathbf{Psaut}(K/k) = \mathbf{Cr}_{nk}$, et ce k-foncteur en groupes est appelé *le groupe de Cremona à n variables*; c'est « le » foncteur des pseudo-automorphismes d'une k-variété rationnelle de dimension n.

Soient k un corps et X une courbe algébrique sur k lisse et complète. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, on n'a pas en général $\mathbf{Psaut}(X) = \mathbf{Aut}(X)$ [par exemple, pour $X = \mathbf{P}^1_k$, l'algèbre de Lie de $\mathbf{Aut}(X)$ est un k-espace vectoriel de dimension 3, tandis que celle de $\mathbf{Psaut}(X)$ est de dimension infinie]; on a cependant $\mathbf{Psaut}(X)(K) = \mathbf{Aut}(X)(K)$ pour toute extension K de k. Plus généralement :

Proposition 2. — *Soient k un corps,* S *un k-schéma localement noethérien et réduit, et* X *une courbe algébrique sur k, propre et lisse. Pour tout point de* $\mathbf{Psaut}(X)(S)$, *c'est-à-dire tout morphisme* $S \to \mathbf{Psaut}(X)$, *il existe* *un ouvert dense* U *de* S *et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbf{Psaut}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ U & \longrightarrow & \mathbf{Aut}(X). \end{array}$$

Quitte à remplacer S par un ouvert dense, on peut supposer que S est *normal*. Soient φ un S-pseudo-automorphisme de $X \times_k S$ et ψ le pseudo-automorphisme inverse. Il est clair que φ est de la forme $(\varphi', \mathrm{pr}_2)$, où φ' est un pseudo-morphisme de $X \times_k S$ dans X; l'ouvert de définition V de φ est donc égal à l'ouvert de définition de φ'. Ce dernier contient tous les points de codimension ≤ 1 de $X \times_k S$ (EGA, I, 7.3.6), en particulier tous les points se projetant sur les points maximaux de S. Comme X est propre sur S, V contient donc un ouvert de la forme $X \times_k U$, où U est un ouvert dense de S. Quitte à remplacer S par U, on peut donc supposer que φ est partout défini; de même, on peut supposer que ψ est partout défini; comme $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{X \times_k S}$, φ est alors un automorphisme.

En général, **Psaut**(X) n'est pas représentable. On a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Soient* S *un schéma et* X *un* S-*schéma lisse séparé et de type fini. Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

a. S *est artinien;*

b. les fibres de X *sont géométriquement intègres.*
Alors la section unité de $\mathbf{Psaut}_S(X)$ *est une immersion fermée.*

En d'autres termes, notons $e : S \to \mathbf{Psaut}(X)$ la section unité de **Psaut**(X); il s'agit de démontrer que, pour tout S-schéma T et tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{Psaut}(X) \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e} \\ T_0 & \longrightarrow & S, \end{array}$$

le morphisme i est une immersion fermée de S-schémas. D'après la définition du S-foncteur **Psaut**(X), il est encore équivalent de dire que pour tout S-schéma T et tout T-pseudo-automorphisme φ de $X \times_S T$, il existe un sous-schéma fermé T_0 de T tel que : pour tout T-schéma S', $\varphi_{S'}$ est le pseudo-automorphisme identique si et seulement si le morphisme canonique de S' dans T se factorise par T_0. Or, quitte à changer de notations, on peut supposer que $T = S$; soit (U, f) un représentant de φ, où U est un ouvert S-dense de X et f un S-morphisme de U dans X. Considérons le morphisme $U \to X \times_S X$ de composantes f et l'injection canonique, et soit U_0 l'image réciproque par ce morphisme de la diagonale de $X \times_S X$. C'est un sous-schéma fermé de U, et il est clair que $\varphi_{S'}$ est l'identité si et seulement si $U_0 \times_S S' = U \times_S S'$, c'est-à-dire si $S' \to S$ se factorise par le sous-foncteur $S_0 = \prod_{U/S} U_0$. Il suffit alors de remarquer que S_0 est bien un sous-schéma fermé de S [cela résulte de SGA 3, VIII, 6.4 dans le cas (a), SGA 3, XI, 6.8 dans le cas (b)].

3. Pseudo-opérations. — *Dans la suite de ce paragraphe, on désigne par k un corps, par k_s une clôture séparable de k, par* Π *le groupe de Galois de k_s sur k, par $\bar{k}$ une clôture algébrique de k_s, par* X *un k-schéma algébrique lisse et séparé, par* G *un k-groupe algébrique lisse et par* $m_G : G \times G \to G$ *le morphisme de multiplication.*

Définition 1. — *Une pseudo-opération de* G *sur* X *est un pseudo-morphisme de* $G \times_k X$ *dans* X *satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

(PO 1) *Le pseudo-morphisme* $\psi = (pr_1, \varphi)$ *de* $G \times_k X$ *dans* $G \times_k X$ *est dominant;*

(PO 2) *Les pseudo-morphismes* $\varphi \circ (G \times \varphi)$ *et* $\varphi \circ (m_G \times id_X)$ *de* $G \times_k G \times_k X$ *dans* X *coïncident.*

Notons que ψ est le composé de $G \times \varphi$ et du morphisme

$$G \times_k X \to G \times_k G \times_k X$$

déduit du morphisme diagonal de G; il en résulte que (PO 1) implique que $G \times \varphi$ est dominant, ce qui donne un sens au premier composé qui intervient dans (PO 2).

Soient $V \subset G \times_k X$ l'ouvert de définition de φ et $f : V \to X$ le morphisme défini par φ; si S est un k-schéma et si $g \in G(S)$, $x \in X(S)$, on dit que *le produit $g.x$ est défini* si $(g, x) \in V(S)$, et on pose alors $g.x = f(g, x)$. L'ouvert de définition de $\varphi \circ (G \times \varphi)$ contient $(id_G \times f)^{-1}(V)$; l'ouvert de définition de $\varphi \circ (m_G \times id_X)$ est $(m_G \times id_X)^{-1}(V)$ puisque $m_G \times id_X$ est *plat* (n° 1). On peut donc remplacer (PO 2) par

(PO 2′) *Si* S *est un k-schéma, si* $g, h \in G(S)$ *et* $x \in X(S)$, *et si* $h.x$ *et* $g.(h.x)$ *sont définis, alors* $gh.x$ *est défini et* $gh.x = g.(h.x)$.

A chaque homomorphisme de groupes $G \to \mathbf{Psaut}(X)$, c'est-à-dire à chaque G-pseudo-automorphisme $\psi : G \times_k X \to G \times_k X$ tel que le morphisme de foncteurs $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ associé soit un homomorphisme de groupes, associons le pseudo-morphisme $\varphi = pr_2 \circ \psi$ de $G \times_k X$ dans X.

Proposition 4. — *L'application* $\psi \mapsto \varphi$ *est une correspondance bijective entre les homomorphismes* $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ *et les pseudo-opérations de* G *sur* X.

On voit facilement le pseudo-morphisme φ associé à un homomorphisme de groupes $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ est une pseudo-opération de G sur X. Inversement, soit φ une pseudo-opération de G sur X; reprenons les notations précédentes.

Pour tout $g \in G$, la fibre $pr_1^{-1}(g) \subset G \times_k X$ s'identifie naturellement au $\varkappa(g)$-schéma $X \otimes_k \varkappa(g)$, donc $V \cap pr_1^{-1}(g)$ s'identifie à un ouvert V_g de $X \otimes_k \varkappa(g)$, et ψ induit un $\varkappa(g)$-morphisme $f_g : V_g \to X \otimes_k \varkappa(g)$.

Lemme 1. — *L'ouvert* V_g *est dense dans* $X \otimes_k \varkappa(g)$ *et le morphisme* f_g *est dominant.*

Quitte à remplacer k par $\varkappa(g)$, on peut supposer g rationnel sur k. Soit u l'automorphisme $h \mapsto gh^{-1}$ du schéma G et considérons le pseudo-morphisme composé $\varphi \circ (u \times \mathrm{id}_X) \circ \psi$ de $G \times_k X$ dans X. Il est dominant, et il existe un ouvert dense W de $G \times_k X$, tel que, si S est un k-schéma et si $(h, x) \in W(S) \subset G(S) \times X(S)$, on ait

$$(\varphi \circ (u \times \mathrm{id}_X) \circ \psi)\ (h, x) = gh^{-1}.(h.x);$$

il résulte alors de (PO 2) que $x \in V_g(S)$ et que

$$(\varphi \circ (u \times \mathrm{id}_X) \circ \psi)\ (h, x) = g.x = f_g(x).$$

Il s'ensuit que V_g est dense dans X et que $f_g(V_g)$ contient l'image de W par $\varphi \circ (u \times \mathrm{id}_X) \circ \psi$, donc est dense dans X.

D'après le lemme 1, le pseudo-morphisme ψ est un G-pseudo-morphisme G-dominant; si s_G est l'automorphisme de symétrie de G, le même raisonnement montre que $\psi' = (s_G \circ pr_1, \varphi)$ est un G-pseudo-morphisme G-dominant de $G \times_k X$ dans $G \times_k X$; d'après (PO 2), on a $\psi \circ \psi' = \psi' \circ \psi = \mathrm{id}_{G \times X}$; il s'ensuit que ψ est un G-pseudo-automorphisme de $G \times_k X$, donc est un point de $\mathbf{Psaut}(X)(G)$, associé à un morphisme de k-foncteurs $u : G \to \mathbf{Psaut}(X)$. Il reste à démontrer :

Lemme 2. — *Le morphisme u est un homomorphisme de groupes.*

On peut, par exemple, raisonner ainsi : considérons le morphisme de k-foncteurs $d : G \times_k G \to \mathbf{Psaut}(X)$ tel que $d(g, h) = u(g)\,u(h)\,u(gh)^{-1}$, et le sous-foncteur $d^{-1}(e)$ de $G \times_k G$. Il s'agit de prouver que $d^{-1}(e) = G \times G$.

Or, d'après la proposition 3 (n° 2), $d^{-1}(e)$ est un sous-schéma fermé de G; d'autre part, si K est une extension de k, et si $g, h \in G(K)$, on a $f_g \circ f_h = f_{gh}$ d'après (PO 2'), donc $(g, h) \in d^{-1}(e)$ (K), et enfin $d^{-1}(e) = G \times_k G$.

Remarques 1. — Il résulte en particulier de la proposition 4 que, si H est un sous-groupe algébrique lisse de G, l'intersection $V \cap (H \times_k X)$ est dense dans $H \times_k X$ et φ induit une pseudo-opération de H sur X.

2. Si X' est un k-schéma lisse séparé et de type fini, et si u est un pseudo-isomorphisme de X sur X', chaque pseudo-opération φ de G sur X définit une pseudo-opération $\varphi' = u \circ \varphi \circ (G \times u)^{-1}$ de G sur X', et les homomorphismes $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ et $G \to \mathbf{Psaut}(X')$ associés se déduisent l'un de l'autre par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\mathbf{Psaut}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Psaut}(X')$ déduit de u. Ceci s'applique en particulier lorsqu'on prend pour X' un ouvert dense de X; on dit alors que la pseudo-opération φ' est *induite* par φ.

3. Toute opération de G sur X est une pseudo-opération, et l'homomorphisme $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ associé se factorise par $\mathbf{Aut}(X)$. La réciproque est vraie dans un cas important :

Proposition 5. — *Si* X *est une courbe complète, toute pseudo-opération de* G *sur* X *est une opération.*

D'après la proposition 2 (n° 2), il existe, pour tout homomorphisme u de G dans $\mathbf{Psaut}(X)$, un ouvert dense U de G et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] & \mathbf{Psaut}(X) \\ U \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \mathbf{Aut}(X). \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Si on désigne par p le morphisme $(g, h) \mapsto gh$ de $U \times_k U$ dans G, et par q le morphisme $(g, h) \mapsto f(g)\, f(h)$ de $U \times_k U$ dans $\mathbf{Aut}$ (X), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] & \mathbf{Psaut}(X) \\ U \times_k U \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"] & \mathbf{Aut}(X). \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Si R est le carré fibré de p, et si on note $p_1, p_2 : R \to U \times_k U$ les deux projections, on a donc $j \circ q \circ p_1 = j \circ q \circ p_2$, donc $q \circ p_1 = q \circ p_2$. Comme p est fidèlement plat et quasi compact, il existe un morphisme $v : G \to \mathbf{Aut}$ (X) tel que $q = v \circ p$, donc $u \circ p = j \circ q = j \circ v \circ p$, donc enfin $u = j \circ v$, et u se factorise par j.

4. Pseudo-opérations fidèles et régulières. — Soit φ une pseudo-opération de G sur X; d'après la proposition 3 (nº 2), le noyau $N(\varphi)$ de l'homomorphisme $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ associé est un *sous-schéma en groupes fermé* invariant de G, que l'on appelle le *noyau de* φ.

Définition 2. — *On dit que la pseudo-opération* φ *est fidèle si* $N(\varphi) = e$.

Soit φ une pseudo-opération de G sur X, notons V l'ouvert de définition de φ, $w = (\varphi, pr_2)$ le morphisme $(g, x) \mapsto (g.x, x)$ de V dans $G \times_k X$ et $F \subset G \times_k X$ l'image réciproque par w de la diagonale de $X \times_k X$. C'est un sous-schéma fermé de $G \times_k X$, que l'on appelle le *schéma des stabilisateurs* de φ : si S est un k-schéma, le point (g, x) de $G(S) \times X(S)$ appartient à F (S) si et seulement si $g.x$ est défini et égal à x. En particulier, F contient le sous-schéma $e \times V_e$ de $G \times_k X$ (*cf.* lemme 1 du nº 3), de sorte que la projection canonique $F \to X$ est *dominante*.

Définition 3. — *On dit que la pseudo-opération* φ *est régulière si la projection canonique* $F \to X$ *est fidèlement plate.*

Proposition 6. — *Pour toute pseudo-opération de* G *sur* X, *il existe un ouvert dense* U *de* X *tel que la pseudo-opération induite de* G *sur* U *soit régulière.*

En effet, d'après le théorème de platitude générique ([3], I, § 3, 3.7), il existe un ouvert dense U de X tel que la projection canonique $F \cap (G \times_k U) \to U$ soit fidèlement plate, et il est clair que le sous-schéma des stabilisateurs de la pseudo-opération induite est bien $F \cap (G \times_k U)$.

Proposition 7. — *Soit* φ *une pseudo-opération régulière de* G *sur* X, *et soit* $F \subset G \times X$ *le schéma des stabilisateurs de* φ.

a. F *est un sous-*X*-schéma en groupes du* X*-schéma en groupes* $G \times_k X$.

b. Le noyau de φ *est le plus grand sous-schéma en groupes* H *de* G *tel que* $H \times_k X \subset F$; *plus précisément, on a* $N(\varphi) \otimes_k k_s = \bigcap_{x \in X(k_s)} F_x$.

Il résulte immédiatement de (PO 2′) que F est stable par multiplication, c'est-à-dire que le morphisme

$$(G \times X) \times_X (G \times X) \xrightarrow{\text{can.}} G \times G \times X \xrightarrow{m_G \times X} G \times X$$

envoie $F \times_X F$ dans F. L'assertion (*a*) résulte donc du lemme suivant :

Lemme 3. — *Soient* S *un schéma,* H *un* S*-schéma en groupes,* K *un sous-*S*-schéma de* H, *fidèlement plat et de présentation finie sur* S *et stable par multiplication. Alors* K *est un sous-*S*-groupe de* H.

Considérons le S-morphisme $(x, y) \mapsto (x, xy)$ de $K \times_S K$ dans $K \times_S K$. Il est induit par un automorphisme de $H \times_S H$; c'est donc un monomorphisme, donc un automorphisme (EGA, IV, 17.9.6); cela entraîne que, dès que T est un S-schéma tel que $K(T) \neq \emptyset$, $K(T)$ est un sous-groupe de $H(T)$; il en est donc en particulier ainsi lorsque $T = K$. Il s'ensuit que la section unité de H se factorise par K (puisqu'il en est ainsi après le changement de base fidèlement plat et quasi-compact $K \to S$). On a donc $K(T) \neq \emptyset$ pour tout T, et K est bien un sous-groupe de H.

Démontrons maintenant (*b*). Considérons le sous-k_s-groupe $\bar{L} = \bigcap_{x \in X(k_s)} F_x$ de G_{k_s}; il est clair que $\bar{L} \supset N(\varphi) \otimes_k k_s$; d'autre part, comme $\bar{L}$ est stable sous Π, il s'écrit $L \otimes_k k_s$, où L est un sous-groupe de G; on a $N(\varphi) \subset L$ et il s'agit de prouver que $L \subset N(\varphi)$. Pour ce faire, on peut remplacer k par k_s, donc supposer $k = k_s$. Le sous-schéma F de $G \times_k X$ majore toutes les fibres de $L \times_k X$ en les points rationnels de X, qui forment un sous-ensemble dense de X; on a donc $F \supset L \times_k X$. Pour tout k-schéma S, tout $g \in L(S)$, tout $x \in X(S)$, on a donc $(g, x) \in F(S)$, donc $g.x = x$; il s'ensuit que $L(S) \subset N(\varphi)(S)$, ce qui achève la démonstration.

Gardons les notations de la proposition 7. Si S est un k-schéma, si $g \in G(S)$, $h \in N(\varphi)(S)$, $x \in X(S)$, et si $g.x$ est défini, il résulte de (PO 2′) que $gh.x$ est défini et que $gh.x = g.x$; l'ouvert $V \subset G \times_k X$ de définition de φ est donc stable par multiplication à droite par $N(\varphi) \times_k X$, et le morphisme $V \to X$ invariant par cette opération; il existe donc un ouvert dense V' de $G' \times_k X$, où $G' = G/N(\varphi)$ et un morphisme $f' : V' \to X$ tels que V et f proviennent de V' et f' par image réciproque; en d'autres termes, la pseudo-opération φ provient d'une pseudo-opération de G' sur X, laquelle est évidemment fidèle. Utilisant la proposition 6, on en déduit :

Proposition 8. — *Pour toute pseudo-opération φ de* G *sur* X, *il existe une pseudo-opération fidèle φ' de* $G/N(\varphi)$ *sur* X *et une seule telle que φ soit le composé de φ' et de la projection canonique* $G \times_k X \to G/N(\varphi) \times_k X$.

En d'autres termes, l'homomorphisme $G \to \mathbf{Psaut}(X)$ se factorise de manière unique en la projection $G \to G/N(\varphi)$ et un monomorphisme $G/N(\varphi) \to \mathbf{Psaut}(X)$.

5. Pseudo-opérations pseudo-transitives.

Définition 4. — *On dit que la pseudo-opération φ de* G *sur* X *est pseudo-transitive si le pseudo-morphisme $w = (\varphi, pr_2)$ de* $G \times_k X$ *dans* $X \times_k X$ *est dominant.*

Rappelons qu'un *espace homogène* sous G est un couple (Y, f) où Y est un k-schéma et $f : G \times_k Y \to Y$ une opération satisfaisant aux deux conditions équivalentes suivantes :

(i) le morphisme (f, pr_2) de $G \times_k X$ dans $X \times_k X$ est fidèlement plat;

(ii) il existe un sous-groupe H de $G_{\bar{k}}$, et un $G_{\bar{k}}$-isomorphisme de $Y_{\bar{k}}$ sur $G_{\bar{k}}/H$.

Alors Y est un k-schéma algébrique lisse et séparé, et f est une pseudo-opération pseudo-transitive de G sur Y.

Inversement, si une *opération* de G sur le k-schéma X est pseudo-transitive, il existe un *ouvert dense* Y de X, et un seul, stable et *homogène* sous G. On peut en effet, supposer $k = k_s$; l'image de w contenant un ouvert dense de $X \times_k X$, il existe un point x de $X(k)$ et un ouvert dense U de X tel que $U \times \{x\}$ soit contenu dans l'image de w; alors l'orbite Y de x est dense dans X, donc ouverte, et répond à la question.

LEMME 4. — *Soient* Y_1 *et* Y_2 *deux espaces homogènes sous* G *et* u *un pseudo-isomorphisme de* Y_1 *dans* Y_2, *compatible avec l'action de* G. *Alors* u *est un isomorphisme de* Y_1 *sur* Y_2.

On peut en effet supposer $k = \bar{k}$; soit alors $y_1 \in Y_1(k)$ tel que u soit défini en y_1 et u^{-1} défini en $y_2 = u(y_1)$; si H_1 (resp. H_2) est le stabilisateur de y_1 (resp. y_2), Y_1 s'identifie à G/H_1, Y_2 à G/H_2, et on a $u(gx_1) = gx_2$ dès que $u(gx_1)$ est défini. On en conclut aussitôt que $H_1 = H_2$, d'où le résultat.

PROPOSITION 9. — *Soit* φ *une pseudo-opération pseudo-transitive de* G *sur* X. *Il existe un espace homogène* Y *de* G *et un pseudo-isomorphisme de* X *dans* Y, *compatible avec les pseudo-opérations de* G.

Notons d'abord qu'en vertu du lemme 4 et la théorie de la descente galoisienne, on peut supposer $k = k_s$; notons V′ l'ouvert dense de $G \times_k X$ tel que, pour tout k-schéma S et tout couple $(g, x) \in G(S) \times X(S)$, on ait $(g, x) \in V'(S)$ si et seulement si $g.x$ et $g^{-1}.(g.x)$ sont définis. Le morphisme $w : V' \to X \times_k X$ étant dominant par hypothèse, son image contient un ouvert dense W de $X \times_k X$. On peut trouver un point $x \in X(k)$ tel que les ouverts V'_x et W_x définis par

$$V'_x \times \{x\} = (G \times \{x\}) \cap V',$$
$$W_x \times \{x\} = (X \times \{x\}) \cap W,$$

soient denses dans G et X respectivement. Le morphisme $j : g \mapsto g.x$ de V'_x dans X est alors dominant; d'après (PO 2′), V'_x est stable par multiplication à droite par F_x et le morphisme précédent se factorise par un morphisme dominant $i : V'_x/F_x \to X$, où le quotient V'_x/F_x est l'ouvert de G/F_x dont l'image réciproque dans G est V'_x. Il est clair que i est un monomorphisme : si $g, h \in V'_x(S)$, où S est un k-schéma, et si $g.x = h.x$, on a d'après (PO 2′),

$$x = g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.(h.x) = g^{-1}h.x, \qquad \text{donc} \quad g^{-1}h \in F_x(S).$$

Comme les composantes connexes de V'_x/F_x sont irréductibles, il existe ([3], I, § 3, 4.5 et 4.6) un ouvert dense T de V'_x/F_x tel que la restriction de i à T soit une immersion, nécessairement ouverte (puisque dominante, de source et de but lisses). Il s'ensuit que i définit un pseudo-isomorphisme u de G/F_x dans X, qui transforme la pseudo-opération φ en l'opération naturelle de G sur G/F_x.

6. Pseudo-opérations d'un tore.

Proposition 10. — *Soient* T *un k-groupe algébrique lisse et diagonalisable* (resp. *multiplicatif*), X *un k-schéma lisse séparé et irréductible* (resp. *géométriquement irréductible*), φ *une pseudo-opération régulière et fidèle de* T *sur* X *et* F *le schéma des stabilisateurs de* φ (nº 4). *La projection canonique de* F *sur* X *est un isomorphisme.*

D'après la proposition 7 et la définition 2 (nº 4), il suffit de démontrer :

Lemme 5. — *Si* Y *est un k-schéma intègre* (resp. *géométriquement intègre*) *et* T *un k-groupe diagonalisable* (resp. *multiplicatif*), *tout sous-*Y*-schéma en groupes fermé et plat* F *de* $T \times_k Y$ *est de la forme* $H \times_k Y$, *où* H *est un sous-groupe fermé de* T.

Cela résulte de SGA 3, IX, 5.4; donnons-en cependant une démonstration directe. Il est clair qu'il suffit de faire la démonstration lorsque X est affine, donc $Y = \operatorname{Spec} A$, où A est une k-algèbre intègre (resp. telle que $A \otimes_k k_s$ soit intègre).

Supposons d'abord T diagonalisable, donc $T = \operatorname{Spec} k[M]$, où M est un groupe commutatif. Alors $T \times_k Y$ s'identifie à $\operatorname{Spec} A[M]$ et le sous-groupe F donné à Spec B, où B est une A-bigèbre quotient de $A[M]$, plate sur A. Soit N le sous-groupe de M formé des éléments dont l'image dans B est nulle. Prouvons que $B = A[M/N]$, ce qui achèvera la démonstration dans le cas où T est diagonalisable. Quitte à remplacer T par $\operatorname{Spec} k[M/N]$, on peut supposer $N = 0$; l'application canonique $M \to B$ est alors injective. Si K est le corps des fractions de A, l'application canonique $B \to B \otimes_A K$ est injective puisque B est A-plat. Les éléments de M définissent donc des caractères distincts de $F \otimes_A K$, donc sont linéairement indépendants sur K ([3], II, § 1, 2.9); l'application canonique $A[M] \to B$ est injective, donc bijective, ce qu'il fallait démontrer.

Si maintenant T est multiplicatif et $A \otimes_k k_s$ intègre, ce qui précède s'applique à $T \otimes_k k_s$ et $A \otimes_k k_s$ et montre qu'il existe un sous-groupe fermé $\overline{H}$ de $T \otimes_k k_s$ tel que $\overline{H} \otimes_{k_s} (A \otimes_k k_s) = F \otimes_A (A \otimes_k k_s)$. Comme le corps des fractions de A est linéairement disjoint de k_s, il s'ensuit que $\overline{H}$ est « défini sur k », i. e. de la forme $H \otimes_k k_s$, où H est un sous-groupe fermé de T. Alors $F \otimes_k k_s = (H \otimes_k A) \otimes_k k_s$, donc $F = H \otimes_k A$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. — *Soient* X *un k-schéma lisse séparé et géométriquement irréductible,* T *un k-tore et* φ *une pseudo-opération fidèle de* T *sur* X. *On a* $\dim T \leq \dim X$, *et* φ *est pseudo-transitive si et seulement si* $\dim T = \dim X$.

D'après la proposition 6 (n° 4), on peut supposer φ régulière. Soit W l'ouvert de $G \times_k X$ tel que, pour tout k-schéma S et tout couple $(g, x) \in G(S) \times X(S)$, on ait $(g, x) \in W(S)$ si et seulement si $g.x$ et $g^{-1}.(g.x)$ sont définis. D'après la proposition 1 (n° 2), W est dense dans $G \times_k X$. Le morphisme $w : W \to X \times_k X$ tel que $w(g, x) = (g.x, x)$ est un *monomorphisme*; en effet, si S est un k-schéma et si (g, x), $(h, y) \in W(S)$ sont tels que $w(g, x) = w(h, y)$, on a $g.x = h.y$ et $x = y$, donc

$$x = g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.(h.x) = g^{-1}h.x \qquad \text{et} \qquad x = y;$$

d'après la proposition, cela implique $g = h$ et $x = y$, donc $(g, x) = (h, y)$. On a donc

$$\dim G + \dim X = \dim W \leq \dim X + \dim X,$$

avec égalité si et seulement si w est dominant (puisque $G \times_k X$ et $X \times_k X$ sont irréductibles), c'est-à-dire si φ est transitive.

Corollaire 2. — *Soient* X *un k-schéma lisse séparé et géométriquement irréductible et* T *un k-tore déployé, tel que* $\dim X = \dim T$. *Soit* φ *une pseudo-opération fidèle de* T *sur* X. *Il existe un pseudo-isomorphisme de* X *dans* T, *transformant* φ *en l'opération de* T *sur lui-même par translations.*

D'après le corollaire 1, φ est pseudo-transitive. D'après la proposition 9 (n° 5), on peut supposer que φ est une opération de T sur un espace homogène X. D'après la proposition 10, cet espace homogène est principal, donc trivial d'après le « théorème 90 ».

COROLLAIRE 3. — *Soit* X *un* k*-schéma algébrique lisse séparé et géométriquement irréductible de dimension* n. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbf{Psaut}(X)$ *possède un sous-foncteur en groupes qui est un tore déployé de dimension* n;

(ii) $\mathbf{Psaut}(X)$ *est isomorphe à* $\mathbf{Cr}_{nk}$;

(iii) X *est rationnel.*

(i) $\Rightarrow$ (iii) : cela résulte du corollaire 2, puisqu'un tore déployé est rationnel.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : c'est clair.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : comme $\mathbf{Cr}_{nk}$ contient $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^n_k) = \mathbf{PGL}_{nk}$, il possède un sous-tore déployé de dimension n.

COROLLAIRE 4. — *Les sous-tores déployés de dimension* n *de* $\mathbf{Cr}_{nk}$ *sont conjugués.*

Soit T_0 un tore déployé de dimension n; identifions $\mathbf{Cr}_{nk}$ à $\mathbf{Psaut}(T_0)$ et soit $\overline{T}_0$ le sous-tore de $\mathbf{Psaut}(T_0)$ obtenu en faisant opérer T_0 sur lui-même par translations. Si T est un sous-tore déployé de dimension n de $\mathbf{Psaut}(T_0)$, il existe, d'après le corollaire 2, un pseudo-automorphisme u de T_0 transformant T en $\overline{T}_0$, donc tel que $\mathrm{int}(u)\, T = \overline{T}_0$.

Rappelons que si T est un k-tore déployé de dimension n, le k-foncteur en groupes $\mathbf{Aut}(T)$ des automorphismes de T est un k-schéma en groupes constant, isomorphe à $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})_k$.

COROLLAIRE 5. — *Soit* T *un sous-tore déployé de dimension* n *de* $\mathbf{Cr}_{nk}$. *Notons* C (resp. N) *son centralisateur* (resp. *normalisateur*) *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$.

a. On a $C = T$; *en particulier,* T *est un sous-foncteur en groupes commutatif maximal de* $\mathbf{Cr}_{nk}$.

b. N *est un* k*-schéma en groupes localement algébrique lisse.*

c. Le morphisme canonique $N/T \to \mathbf{Aut}(T)$ *est un isomorphisme.*

Identifions d'après le corollaire 2, $\mathbf{Cr}_{nk}$ à $\mathbf{Psaut}(T)$, T opérant par translations sur lui-même. Soient S un k-schéma et $u \in C(S)$; u est donc un S-pseudo-automorphisme de $T \times_k S$, commutant aux homothéties. Définissons un S-pseudo-morphisme φ de $T \times_k S$ dans lui-même par $\varphi(t) = t^{-1}\, u(t)$; alors on a $\varphi(tt') = \varphi(t)$, de sorte que φ est un S-morphisme constant $t \mapsto t_0$; il s'ensuit que $u(t) = t_0 t$, donc $u = t_0 \in T(S)$. Ceci démontre (a). Considérons le foncteur quotient N/T; le morphisme canonique $\varphi : N/T \to \mathbf{Aut}(T)$

est un monomorphisme en vertu de (a); pour démontrer (b) et (c), il suffit de prouver que φ est un isomorphisme. Soit donc S un k-schéma et u un S-automorphisme de $\mathrm{T}\times\mathrm{S}$; considérons u comme un élément de $\mathbf{Psaut}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$. On a aussitôt $u\in\mathrm{N}(\mathrm{S})$ et $\varphi(u)=u$, ce qui démontre l'assertion cherchée.

Proposition 11 (« passage au quotient par une pseudo-opération d'un tore »). — *Soient* T *un tore déployé,* X *un k-schéma algébrique lisse séparé et irréductible et* φ *une pseudo-opération fidèle de* T *sur* X. *Il existe un k-schéma lisse séparé et irréductible* Y *et un pseudo-isomorphisme* u *de* $\mathrm{T}\times_k\mathrm{Y}$ *sur* X, *transformant* φ *en l'opération naturelle de* T *sur* $\mathrm{T}\times_k\mathrm{Y}$ (par translations sur le facteur T).

On peut supposer X affine, soit $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et φ régulière; posons $\mathrm{K}=k(\mathrm{X})=\mathrm{Fract}(\mathrm{A})$ et $n=\dim\mathrm{T}$; identifions T à $\boldsymbol{\mu}_k^n$, donc $k(\mathrm{T})$ à $k(t_1,\ldots,t_n)$. Le pseudo-morphisme φ est associé à un k-homomorphisme

$$\Delta:\quad \mathrm{K}\to\mathrm{K}(t_1,\ldots,t_n);$$

le pseudo-morphisme $w:(g,x)\mapsto(g.x,x)$ de $\mathrm{G}\times\mathrm{X}$ dans $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ est un *monomorphisme* (prop. 10), ce qui implique que K et $\Delta(\mathrm{K})$ engendrent le corps $\mathrm{K}(t_1,\ldots,t_n)$. D'autre part, l'axiome (PO 2′) entraîne la propriété suivante :

si $a\in\mathrm{K}$, et si

$$\Delta a=\frac{\sum a_\alpha t^\alpha}{\sum b_\alpha t^\alpha},\qquad \sum a_\alpha t^\alpha,\ \sum b_\alpha t^\alpha\in k[t], \tag{1}$$

on a

$$\frac{\sum\Delta a_\alpha\tau^\alpha}{\sum\Delta b_\alpha\tau^\alpha}=\frac{\sum a_\alpha(t\tau)^\alpha}{\sum b_\alpha(t\tau)^\alpha} \tag{2}$$

dans le corps $\mathrm{K}(t,\tau)=\mathrm{K}(t_1,\ldots,t_n,\tau_1,\ldots,\tau_n)$.

On peut supposer que le second membre de (1) est une fraction irréductible, et que l'un des b_α est égal à 1; le second membre de (2) est alors aussi irréductible, de sorte que (2) implique l'existence d'un polynôme $f\in k[t,\tau]$, tel que $\sum\Delta a_\alpha\tau^\alpha=f\sum a_\alpha t^\alpha\tau^\alpha$ et de même pour les b_α. En considérant les degrés en τ des deux membres, on voit que $f\in k[t]$, donc que $\Delta a_\alpha=fa_\alpha t^\alpha$ et $\Delta b_\alpha=fb_\alpha t^\alpha$ pour chaque α; comme l'un des b_α vaut 1, on a $f=1$, d'où enfin

$$\Delta a_\alpha=a_\alpha t^\alpha,\qquad \Delta b_\alpha=b_\alpha t^\alpha. \tag{3}$$

Soit alors M le sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ formé des $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ tels qu'il existe $c \in \mathrm{K}$ avec $c \neq 0$ et $\Delta c = ct^\alpha$; ce qui précède montre que $\Delta\mathrm{K}$ est contenu dans Fract K[M]; comme K et $\Delta\mathrm{K}$ engendrent $\mathrm{K}(t)$, on a $\mathrm{M} = \mathbf{Z}^n$. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, il existe donc $\theta_i \in \mathrm{K}$ avec $\theta_i \neq 0$ et $\Delta\theta_i = \theta_i t_i$; soit d'autre part K_0 le sous-corps de K formé des $c \in \mathrm{K}$ tels que $\Delta c \in \mathrm{K}$; on a $\Delta c = c$ pour $c \in \mathrm{K}_0$ [formules (1) et (3)]. Les formules (3) impliquent alors $\Delta(a_\alpha/\theta^\alpha) = a_\alpha/\theta^\alpha$, donc $a_\alpha = \lambda_\alpha\theta^\alpha$, avec $\lambda_\alpha \in \mathrm{K}_0$, et de même $b_\alpha = \mu_\alpha\theta^\alpha$, avec $\mu_\alpha \in \mathrm{K}_0$. On a donc

$$\Delta a = \frac{\sum \lambda_\alpha \theta^\alpha t^\alpha}{\sum \mu_\alpha \theta^\alpha t^\alpha} = \Delta\left(\frac{\sum \lambda_\alpha \theta^\alpha}{\sum \mu_\alpha \theta^\alpha}\right)$$

donc $a = \nu \dfrac{\sum \lambda_\alpha\theta^\alpha}{\sum \mu_\alpha\theta^\alpha}$, $\nu \in \mathrm{K}_0$, soit $a \in \mathrm{K}_0(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

En résumé, on a $\mathrm{K} = \mathrm{K}_0(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ avec $\Delta\lambda = \lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{K}_0$, $\Delta\theta_i = \theta_i t_i$; il en résulte que les θ_i sont algébriquement indépendants sur K_0 : si $\sum \lambda_\alpha \theta^\alpha = 0$, avec $\lambda_\alpha \in \mathrm{K}_0$, on a $0 = \Delta\left(\sum \lambda_\alpha \theta^\alpha\right) = \sum \lambda_\alpha \theta^\alpha t^\alpha$, donc $\lambda_\alpha\theta^\alpha = 0$ pour chaque α, donc $\lambda_\alpha = 0$. Notons enfin que K_0 est séparable sur k, comme sous-extension de K; il suffit alors de prendre pour Y un k-schéma lisse séparé et irréductible tel que $k(\mathrm{Y}) \simeq \mathrm{K}_0$ et pour u le pseudo-isomorphisme associé à l'isomorphisme

$$k(\mathrm{Y} \times \mathrm{T}) \simeq k(\mathrm{Y})(t_1, \ldots, t_n) \simeq \mathrm{K}_0(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \mathrm{K}.$$

Remarques 1. — La démonstration précédente est directement inspirée de Kochevoï [7].

2. Il est clair que Y est déterminé à pseudo-isomorphisme près [puisque $k(\mathrm{Y}) = \mathrm{K}_0$].

COROLLAIRE 1. — *Soient d et n deux entiers tels que $0 \leq d \leq n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *tout sous-tore déployé de dimension d de $\mathbf{Cr}_{nk}$ est contenu dans un sous-tore déployé de dimension n;*

(ii) *pour toute extension L de k telle que l'extension pure $\mathrm{L}(t_1, \ldots, t_d)$ soit une extension pure de k de degré de transcendance n, alors L est une extension pure de k.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : soit L une extension de k satisfaisant à la condition de (ii) et soit Y un k-schéma lisse séparé et irréductible tel que $k(\mathrm{Y}) = \mathrm{L}$; le schéma $\mathrm{Y} \times \boldsymbol{\mu}_k^d$ est rationnel de dimension n. L'opération naturelle de $\boldsymbol{\mu}_k^d$ sur ce schéma définit un sous-tore trivial de dimension d de $\mathbf{Cr}_{nk}$; si celui-ci est contenu dans un tore déployé de dimension n, cette opération se prolonge en une pseudo-opération effective de $\boldsymbol{\mu}_k^n \supset \boldsymbol{\mu}_k^d$ sur $Y \times \boldsymbol{\mu}_k^d$. De manière équivalente (*cf.* le cor. 2 à la prop. 10), il existe un pseudo-isomorphisme de $Y \times \boldsymbol{\mu}_k^d$ dans $\boldsymbol{\mu}_k^n$ transformant l'opération de $\boldsymbol{\mu}_k^d$ dans le premier schéma en l'opération par translation dans le second. En particulier les « quotients » Y et $\boldsymbol{\mu}_k^{n-d}$ sont pseudo-isomorphes et Y est rationnel.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : soit T un sous-tore trivial de dimension d de $\mathbf{Cr}_{nk} \simeq \mathbf{Psaut}(X)$, où X est rationnel de dimension n; d'après la proposition 11, on peut choisir X de la forme $T \times Y$, T opérant par translations dans le premier facteur. Si (ii) est satisfait, Y est rationnel et on peut prendre $Y = \boldsymbol{\mu}_k^{n-d}$, de sorte que l'opération de T sur $T \times Y$ se prolonge en une opération de $T \times \boldsymbol{\mu}_k^{n-d} \simeq \boldsymbol{\mu}_k^n$.

Remarque. — Ces conditions sont en particulier satisfaites pour $d = 0$, $d = n$ (évident) et pour $d = n - 1$ (Lüroth); dans le cas général, une conjecture plus forte est donnée par Zariski (*cf.* [9]).

Corollaire 2. — *Soit n un entier ≥ 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les tores déployés maximaux de $\mathbf{Cr}_{nk}$ sont conjugués;*

(ii) *toute extension L de k telle que l'extension pure L (t) soit une extension pure de k de degré de transcendance $\leq n$ est elle-même une extension pure de k.*

Ces conditions sont satisfaites si $n \leq 2$.

2. Étude des sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par k un corps, et on note $X \times Y$ au lieu de $X \times_k Y$ le produit des deux k-foncteurs X et Y.

1. Pseudo-projecteurs. — Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier les sous-groupes algébriques lisses de $\mathbf{Cr}_{nk}$ contenant un tore déployé de dimension n. D'après le paragraphe 1 (n° 3), il revient au même d'étudier les k-groupes algébriques lisses G possédant un tore déployé T et munis d'une pseudo-opération fidèle sur un k-schéma lisse séparé irréductible X, rationnel et tel que $\dim X = \dim T$. La restriction d'une telle pseudo-opération à T étant pseudo-transitive (§ 1, n° 6, cor. 1 à la prop. 10),

elle est elle-même pseudo-transitive et, d'après la proposition 9 (§ 1, n° 5), on peut prendre pour X un espace homogène de G; l'opération induite de T sur X possède alors une orbite ouverte U (§ 1, n° 5), qui est un espace homogène principal sous T (§ 1, n° 6, prop. 10), nécessairement trivial (théorème 90); en particulier $U(k) \neq \emptyset$. Soit donc $x \in U(k)$, et soit H le stabilisateur de x; alors X s'identifie à G/H et le morphisme canonique $T \to G/H$ est une immersion ouverte, donc :

(1) *le morphisme* $T \times_k H \to G$ *induit par la multiplication de* G *est une immersion ouverte.*

D'autre part, comme l'opération naturelle de G sur G/H est une pseudo-opération *fidèle*, on a

$$\bigcap_{g \in G(\bar{k})} g H_{\bar{k}} g^{-1} = e. \tag{2}$$

Remarquons d'ailleurs que la condition (1) équivaut à

$$\text{on a} \quad T \cap H = e \quad \text{et} \quad \dim T + \dim H = \dim G, \tag{1'}$$

et implique que H *est lisse* (et connexe si G l'est). D'autre part, en présence de (1), la condition (2) équivaut à

$$\text{on a} \quad \bigcap_{t \in T(\bar{k})} t H_{\bar{k}} t^{-1} = e. \tag{2'}$$

Inversement, si G est un k-groupe algébrique lisse, T un sous-tore trivial de G et H un sous-groupe de G satisfaisant aux conditions (1) et (2), le k-schéma $X = G/H$ est rationnel en vertu de (1), l'homomorphisme canonique $G \to \mathbf{Aut}(G/H) \to \mathbf{Psaut}(G/H)$ est un monomorphisme en vertu de (2) et on a $\dim T = \dim X$, de sorte que G répond aux conditions exigées.

Il est avantageux pratiquement de présenter un peu différemment les résultats précédents. Soient G, T et H comme ci-dessus; considérons l'ouvert T.H de G et le pseudo-morphisme f de G dans T défini par la projection canonique de T.H sur T. L'*ouvert de définition* Ω *de* f *est* T.H; en effet, considérons le morphisme $g \mapsto f(g)^{-1} g$ de Ω dans G; sa restriction à T.H se factorise par le sous-schéma fermé H de G et il se factorise donc par H lui-même; on a donc, pour tout point g de Ω, $g = f(g).f(g)^{-1}g$ et g est un point de T.H. Le morphisme canonique $T \to G/H = X$ est un pseudo-isomorphisme, qui transforme l'opération naturelle de G sur X en une pseudo-opération de G sur T, notée $(g, t) \mapsto g \star t$, et définie par

$$g \star t = f(gt). \tag{3}$$

Plus précisément, si S est un k-schéma, si $g \in G(S)$ et $t \in T(S)$, et si l'un des deux membres de (3) est défini, l'autre l'est aussi et lui est égal. Il résulte de là que f satisfait aux trois conditions suivantes :

(P 1) *Si* S *est un k-schéma, si* g, $g' \in G(S)$ *et si* $f(g')$ *est défini, alors* $f(gg')$ *est défini si et seulement si* $f(gf(g'))$ *l'est et on a alors*

$$f(gg') = f(gf(g')).$$

(P 2) f *est défini en tout point de* T *et induit l'identité sur* T.

(P 3) *Si* S *est un k-schéma, si* g, $g' \in G(S)$ *et si* $f(gt) = f(g't)$ *pour tout point* t *de* T *dans un* S*-schéma tel que* $f(gt)$ *et* $f(g't)$ *soient définis, alors* $g = g'$.

Définition 1. — *Soit* G *un k-groupe algébrique lisse et soit* T *un sous-tore déployé de* G. *On appelle pseudo-projecteur de* G *sur* T *un pseudo-morphisme* f *de* G *dans* T *satisfaisant aux conditions* (P 1), (P 2) *et* (P 3) *ci-dessus.*

Si f est un pseudo-projecteur de G sur T, la formule (3) définit une pseudo-opération fidèle de G sur T, donc un monomorphisme $G \to \mathbf{Psaut}(T)$, dit *associé à* f; par ce monomorphisme, T opère sur lui-même par translations [condition (P 2)].

Notons qu'il résulte de (P 1) et (P 2) que, si S est un k-schéma et si $g \in G(S)$ et $t \in T(S)$ sont tels que $f(g)$ soit défini, alors $f(tg)$ est défini et on a

$$f(tg) = tf(g); \tag{4}$$

il en résulte que $g \star t$ est défini si et seulement si $f(t^{-1}gt)$ est défini et qu'on a alors

$$g \star t = f(gt) = tf(t^{-1}gt). \tag{5}$$

Inversement, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a :

Théorème 1. — *Si* G *est un sous-groupe algébrique lisse de* $\mathbf{Cr}_{nk}$, *et si* T *est un sous-tore déployé de dimension* n *de* G, *il existe un k-isomorphisme* $\varphi : k(T) \xrightarrow{\sim} k(t_1, \ldots, t_n)$ *et un pseudo-projecteur* f *de* G *tels que l'injection canonique de* G *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$ *se décompose en le monomorphisme* $G \to \mathbf{Psaut}(T)$ *associé à* f *et l'isomorphisme* $\mathbf{Psaut}(T) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Cr}_{nk}$ *défini par* φ.

Si G et T sont comme dans le théorème 1, un *pseudo-projecteur* f de G sur T tel qu'il existe un φ ayant les propriétés du théorème sera dit *adapté* à l'inclusion $G \subset \mathbf{Cr}_{nk}$.

Proposition 1. — *Soient* G *un sous-groupe algébrique lisse de* $\mathbf{Cr}_{nk}$, T *un sous-tore déployé maximal de* G, f *et* f' *deux pseudo-projecteurs de* G *sur* T, *adaptés à l'inclusion de* G *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$. *Il existe* $a \in T(k)$ *tel que* $f'(g) = f(aga^{-1})$ *pour tout point* g *assez général de* G.

Soit φ (resp. φ') le k-isomorphisme $k(T) \xrightarrow{\sim} k(t_1, \ldots, t_n)$ associé à f (resp. f') et soit h le pseudo-automorphisme de T défini par le k-automorphisme $\varphi'^{-1} \circ \varphi$ de $k(T)$. Si m est l'automorphisme de $\mathbf{Psaut}(T)$ défini par h, on a $j' = m \circ j$, si j (resp. j') est le monomorphisme $G \to \mathbf{Psaut}(T)$ associé à f (resp. f'). En particulier, h commute aux translations de T, ce qui entraîne que h est un morphisme de la forme $t \mapsto at$, où $a \in T(k)$; la relation $j' = m \circ j$ donne alors la formule annoncée.

2. Exemples de pseudo-projecteurs et premières propriétés. — *a*. Prenons pour G le groupe affine $\boldsymbol{\mu}_k . \boldsymbol{\alpha}_k$ d'ordre 1; celui-ci opère sur la droite affine X, de façon que le groupe des homothéties ait une orbite ouverte; si on prend pour H le stabilisateur du point 1, le pseudo-projecteur associé f est tel que $f(\mu, \lambda) = \mu + \lambda$ si μ est un point de $\boldsymbol{\mu}_k$ et λ un point de $\boldsymbol{\alpha}_k$ tels que $\mu + \lambda$ soit inversible.

b. Prenons pour G le groupe $\mathbf{GL}_{2k}$ opérant sur le plan, pour T le tore diagonal, pour H le stabilisateur du point (1, 1). Alors, le pseudo-projecteur f est défini par

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}.$$

c. Soient G un k-groupe algébrique lisse, T un tore déployé de G et f un pseudo-projecteur de G sur T.

Soit G′ un sous-groupe algébrique lisse de G contenant T. Alors la « restriction » f' de f à G′ est un pseudo-projecteur de G′ sur T; si H est le noyau de f, le noyau de f' est $H' = H \cap G'$. Ceci s'applique notamment si on prend pour G′ le centralisateur dans G d'un sous-groupe fermé de T ([3], IV, § 1, 2.5). Prenons en particulier pour G′ le centralisateur de T; alors la condition (2′) relative à G′ dans lequel T est central implique $H' = e$, donc $G' = T$. *Le tore* T *de* G *est donc son propre centralisateur* (cela résulte aussi du cor. 5 à la prop. 10, § 1, nº 10); cela implique en particulier que T est maximal, que le centre de G est multiplicatif, et par conséquent que G *est affine*.

d. Soit Z un sous-groupe fermé de T, *central dans* G; posons $\overline{G} = G/Z$, $\overline{T} = T/Z$. Si g est un point de G et z un point de Z, on a

$$f(gz) = f(zg) = zf(g) = f(g)z,$$

de sorte que f définit par passage aux quotients un pseudo-morphisme $\overline{f}$ de $\overline{G}$ dans $\overline{T}$. *Alors* $\overline{f}$ *est un pseudo-projecteur de* $\overline{G}$ *sur* $\overline{T}$. Les conditions (P 1) et (P 2) sont évidentes; pour démontrer (P 3), ou, ce qui revient au même, la relation (2′) relative à $\overline{G}$, il s'agit de prouver que $\bigcap_{t \in T(\overline{k})} t(ZH)_{\overline{k}} t^{-1} = Z_{\overline{k}}$. On peut supposer k algébriquement clos; notons alors $K = H \cap \left(\bigcap_{t \in T(k)} tZHt^{-1}\right)$ et démontrons que $K = e$, ce qui impliquera l'assertion annoncée. On a des morphismes $z : T \times K \to Z$, $h : T \times K \to H$ tels que

$$tkt^{-1} = z(t, k)\, h(t, k)$$

pour tout k-schéma S et tout point (t, k) de $T(S) \times K(S)$. Comme Z est central dans G, il est clair que $k \mapsto z(t, k)$ est un homomorphisme pour tout t; d'autre part, on a $z(1, k) = 1$. Il suffit alors de prouver :

Lemme 1. — *Soient* K *un k-groupe affine*, T *un tore*, Z *un k-groupe multiplicatif, et* $z : T \times K \to Z$ *un morphisme multiplicatif par rapport à la seconde variable et tel que* $z(1, \ ) = 1$. *Alors* $z = 1$.

On peut supposer k algébriquement clos, puis remplacer T et Z par le groupe multiplicatif-type $\boldsymbol{\mu}_k = \operatorname{Spec} k[X, X^{-1}]$. Si A est la bigèbre de K, z est donné par un élément x de $A[X, X^{-1}]$ tel que $\Delta_A x = x \otimes x$ (avec les abus de notations évidents). Si $x = \sum a_i X^i$, avec $a_i \in A$, ceci s'écrit

$$\Delta_A(a_i) X^i = \sum a_j \otimes a_k X^{j+k},$$

ce qui implique aussitôt que $x = a_0$, c'est-à-dire que $z(t, k)$ est indépendant de t, donc que $z = 1$.

e. Soient toujours G, T et f comme ci-dessus, et supposons G connexe et $\dim G - \dim T = 1$; alors G est résoluble, mais n'est pas commutatif, vu (*c*), donc est le produit semi-direct de T par un sous-groupe G^u isomorphe à $\boldsymbol{\alpha}_k$, sur lequel T opère par l'intermédiaire d'un caractère $\alpha : T \to \boldsymbol{\mu}_k$.

Proposition 2. — *Il existe un isomorphisme* $x : \boldsymbol{\alpha}_k \to G^u$ *et un homomorphisme de groupes* $\rho : \boldsymbol{\mu}_k \to T$, *uniquement déterminés, tels que, pour tout k-schéma* S *et tout* $\lambda \in \boldsymbol{\alpha}_k(S)$, $f(x(\lambda))$ *soit défini si et seulement si* $1 + \lambda$ *est inversible, et qu'on ait alors*

$$f(x(\lambda)) = \rho(1 + \lambda). \tag{1}$$

De plus, on a

$$x(\lambda) \star t = f(x(\lambda)\, t) = t\rho(1 + \lambda\alpha(t)^{-1}) \tag{2}$$

pour $\lambda \in \boldsymbol{\alpha}_k(S)$ *et* $t \in T(S)$ *tels que* $1 + \lambda\alpha(t)^{-1}$ *soit inversible, et*

$$\alpha \circ \rho = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mu}_k}. \tag{3}$$

Considérons en effet le noyau H de f. Comme H est de dimension 1 et non invariant dans G, il est distinct de G^u; c'est donc un tore et il existe $a \in G^u(k)$ avec $aHa^{-1} \subset T$ [un tel a existe en effet après extension du corps de base à $\bar{k}$; mais on a $\mathrm{Norm}_G(H) \cap G^u = \mathrm{Cent}_G(H) \cap G^u$ et ce dernier est lisse et connexe et $\neq G^u$, puisque dans le cas contraire G^u centraliserait H et ce dernier serait contenu dans T; il s'ensuit que $\mathrm{Norm}_G(H) \cap G^u = e$, de sorte que $a \in G^u(k)$]. On a $a \neq 1$ et il existe un isomorphisme $x : \boldsymbol{\alpha}_k \tilde{\to} G^u$ tel que $a = x(-1)$; soit alors $\rho : \boldsymbol{\mu}_k \to T$ un monomorphisme tel que $\rho(\boldsymbol{\mu}_k) = aHa^{-1}$. Il existe un pseudo-morphisme z de $\boldsymbol{\alpha}_k$ dans $\boldsymbol{\mu}_k$ tel que

$$x(\lambda) = f(x(\lambda))\, x(1)\, \rho(z(\lambda))^{-1} x(-1)$$

pour tout point assez général λ de $\boldsymbol{\alpha}_k$. Mais cela s'écrit aussi

$$x(\lambda) = f(x(\lambda))\, \rho(z(\lambda))^{-1} x(\alpha\rho z(\lambda) - 1),$$

soit $f(x(\lambda)) = \rho(z(\lambda))$ et $\lambda = \alpha\rho z(\lambda) - 1$. Si n est l'entier tel que $\alpha\rho(\mu) = \mu^n$ pour tout point μ de $\boldsymbol{\mu}_k$, on a donc $z(\lambda)^n = 1 + \lambda$, ce qui implique $n = 1$ ou $n = -1$. Quitte à changer ρ en ρ^{-1}, on peut supposer $n = 1$, donc $z(\lambda) = 1 + \lambda$. Cela implique l'existence de x et ρ satisfaisant à (1), ainsi que la formule (3); il est clair inversement que (1) détermine x et ρ. Enfin, si λ est un point de α_k et t un point de T, assez généraux, on a

$$x(\lambda) \star t = f(x(\lambda)\, t) = t f(t^{-1} x(\lambda)\, t) = t f(x(\lambda\alpha(t)^{-1})) = t\rho(1 + \lambda\alpha(t)^{-1}).$$

Remarques. — 1. Inversement, si T est un tore déployé, $\alpha : T \to \boldsymbol{\mu}_k$ et $\rho : \boldsymbol{\mu}_k \to T$ des homomorphismes tels que $\alpha \circ \rho = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mu}_k}$, le groupe $G = T \cdot_{\alpha} \boldsymbol{\alpha}_k$, produit semi-direct de T par $\boldsymbol{\alpha}_k$ sur lequel il opère grâce à α, possède un pseudo-projecteur f sur T, donné par $f(t, \lambda) = t\rho(1 + \lambda)$.

2. On comparera le résultat obtenu avec l'exemple donné dans (*a*) [noter que $\mu + \lambda = \mu(1 + \lambda/\mu)$].

3. Système d'Enriques défini par un pseudo-projecteur. — Soient G un k-groupe algébrique lisse, T un tore trivial de G, et f un pseudo-projecteur de G sur T (n° 1, déf. 1). Notons M le groupe $\mathrm{Hom}(T, \boldsymbol{\mu}_k)$ des caractères de T, $M^* = \mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mu}_k, T)$ le groupe abélien dual et $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement canonique entre M^* et M. Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie de G et, pour chaque $m \in M$, notons $\mathfrak{g}^m$ le sous-espace propre de la représentation adjointe de T dans g correspondant au caractère m de T. Rappelons que

les racines de G relativement à T sont les $\alpha \in M$ tels que $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$; on note R l'ensemble des racines de G relativement à T, de sorte qu'on a une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha. \tag{1}$$

THÉORÈME 2. — *a. Le groupe* G *est affine*, T *est son propre centralisateur dans* G *et, si* G *est connexe*, $\mathrm{Cent}(G) = \bigcap_{\alpha \in R} \mathrm{Ker}\,\alpha \subset T$.

b. Pour chaque $\alpha \in R$, *le* k*-espace vectoriel* $\mathfrak{g}^\alpha$ *est de dimension* 1, *il existe un sous-groupe fermé* U_α *de* G, *normalisé par* T, *un isomorphisme* $x_\alpha : \boldsymbol{\alpha}_k \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ *et un élément* ρ_α *de* M^*, *uniquement déterminés, tels que, si* S *est un* k*-schéma, si* $t \in T(S)$ *et* $\lambda \in \boldsymbol{\alpha}_k(S)$, *on ait*

$$t x_\alpha(\lambda)\, t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\,\lambda), \tag{2}$$

$$f(x_\alpha(\lambda)) = \rho_\alpha(1+\lambda), \qquad \textit{si } 1+\lambda \textit{ est inversible.} \tag{3}$$

De plus,

$$\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha, \tag{4}$$

$$\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1. \tag{5}$$

c. Si $\alpha \in R$ *et si* $-\alpha \notin R$, *alors* $\mathrm{Cent}_G(\mathrm{Ker}\,\alpha) = T\,.\,U_\alpha$.

d. Si $\alpha \in R$ *et si* $k\alpha \in R$, *avec* $k \in \mathbf{Q}$, $k \neq 1$, *on a* $k = -1$. *Dans ce cas*, $\mathrm{Cent}_G(\mathrm{Ker}\,\alpha)$ *est un groupe réductif connexe, de rang semi-simple* 1, *dont* $T\,.\,U_\alpha$ *et* $T\,.\,U_{-\alpha}$ *sont les deux groupes de Borel contenant* T.

e. Le groupe G *possède un plus grand sous-groupe invariant lisse connexe et unipotent* U, *et un plus grand sous-groupe réductif connexe* L *contenant* T. *La composante neutre* G^0 *de* G *est produit semi-direct de* L *par* U. *Si* $R_s = R \cap (-R)$ *et* $R_u = R - R_s$, *on a*

$$(\alpha \in R_s) \Leftrightarrow (U_\alpha \subset L), \qquad (\alpha \in R_u) \Leftrightarrow (U_\alpha \subset U), \tag{6}$$

$$\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in R_s} \mathfrak{g}^\alpha, \tag{7}$$

$$U = \prod_{\alpha \in R_u} U_\alpha, \qquad \textit{pour tout ordre total sur } R_u. \tag{8}$$

Démonstration. — Les deux premières assertions de (*a*) ont été démontrées au nº 2 (*c*), la troisième en résulte. Soit $\alpha \in M$, $\alpha \neq 0$; notons T_α le sous-tore maximal du noyau $\mathrm{Ker}\,\alpha$ de α, et Z_α le centralisateur de T_α dans G; on peut appliquer les parties (*c*) et (*d*) du nº 2 : le k-groupe algébrique lisse Z_α/T_α

possède un pseudo-projecteur sur son tore déployé T/T_α. Mais T/T_α est de dimension 1, de sorte que Z_α/T_α possède une pseudo-opération effective sur $\boldsymbol{\mu}_k$, donc aussi sur $\mathbf{P}^1_k$. Appliquant la proposition 5 (§ 1, n° 3) et le fait que $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^1_k) \simeq \mathbf{PGL}_{2k}$ ([3], III, § 3, 4.1), on en conclut que Z_α/T_α est isomorphe à un sous-groupe algébrique lisse de $\mathbf{PGL}_{2k}$ contenant le tore maximal canonique de ce dernier. Il y a donc quatre cas possibles :

1° $Z_\alpha = T$;

2° T est d'indice 2 dans Z_α;

3° Z_α est connexe, $\dim Z_\alpha - \dim T = 1$;

4° Z_α est réductif connexe de rang semi-simple 1.

D'autre part, $\mathrm{Lie}(Z_\alpha)$ est la somme des $\mathfrak{g}^0$ et des $\mathfrak{g}^\beta$ pour tous les multiples rationnels β de α qui sont racines, de sorte que les racines de Z_α relativement à T sont les éléments de $R \cap \mathbf{Q}\alpha$.

Prenons maintenant pour α un élément de R; alors les cas 1° et 2° sont exclus; dans le cas 3° posons $H = Z_\alpha$; dans le cas 4°, soit H le sous-groupe de Borel de Z_α contenant T et dont α est la seule racine. Appliquant à H la proposition 2 du n° 2, (*e*), on obtient (*b*). Comme $\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$, on a $T_\alpha = \mathrm{Ker}\,\alpha$, d'où (*c*) et (*d*). Enfin, (*e*) est un phénomène général pour les groupes dont les racines sont de multiplicité 1 et dont les tores maximaux sont leurs propres centralisateurs.

Corollaire 1. — *Les tores déployés maximaux de* G *sont conjugués.*

Cela résulte de ce que U est déployé (« *k*-résoluble »); *voir* par exemple [10], 11.6.

Pour chaque $\alpha \in R$, et chaque point μ de $\boldsymbol{\mu}_k$, posons

$$(9)\qquad h_\alpha(\mu) = x_\alpha(1)\,\rho_\alpha(\mu)\,x_\alpha(-1) = x_\alpha(1-\mu)\,\rho_\alpha(\mu) = \rho_\alpha(\mu)\,x_\alpha\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right).$$

Corollaire 2. — *Soit* H *le noyau de f. Le k-groupe lisse connexe* $H \cap G^0$ *est engendré par les tores de dimension* 1, *images des* h_α, $\alpha \in R$.

On a aussitôt $f(h_\alpha(\boldsymbol{\mu}_k)) = 1$, donc $h_\alpha(\boldsymbol{\mu}_k) \subset H$. D'autre part, vu la partie (*e*) du théorème, il existe un ordre total sur R, soit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ tel qu'un ouvert dense Ω de G^0 se décompose en produit $T.U_{\alpha_1}\ldots U_{\alpha_n}$ (*cf.* [1], exp. 13, n° 4). Soit

$$h = t x_{\alpha_1}(\lambda_1)\ldots x_{\alpha_n}(\lambda_n)$$

un point assez général de $H \cap \Omega$. Posons $\lambda'_i = \lambda_i.(\alpha_i f x_{\alpha_n}(\lambda_n))^{-1}$, $t' = t.fx_n(\lambda_n)$, et $h' = t' x_{\alpha_1}(\lambda'_1)\ldots x_{\alpha_{n-1}}(\lambda'_{n-1})$. On a, par un calcul immédiat

$$h = h'.h_{\alpha_n}\left(\frac{1}{1+\lambda_n}\right), \qquad f(h') = 1,$$

et il n'y a plus qu'à recommencer le raisonnement pour h'.... Il s'ensuit que les points assez généraux de $\mathrm{H} \cap \mathrm{G}^0$ sont des produits de points des $h_\alpha(\boldsymbol{\mu}_k)$, ce qui entraîne le résultat.

COROLLAIRE 3. — *Si* G *est connexe, le pseudo-projecteur f est déterminé par les ρ_α et les x_α.*

En effet, ceux-ci déterminent H, donc f.

THÉORÈME 3. — *Soit $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que $-\alpha \in \mathrm{R}$. Il existe un homomorphisme de groupes $\varphi_\alpha : \mathbf{GL}_{2k} \to \mathrm{G}$, uniquement déterminé, tel que*

$$\varphi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(\lambda), \qquad \varphi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(\lambda), \tag{10}$$

$$\varphi_\alpha\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_\alpha(\mu), \qquad \varphi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \rho_{-\alpha}(\mu). \tag{11}$$

Alors, pour tout point $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ assez général de $\mathbf{GL}_{2k}$, on a

$$f\left(\varphi_\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \rho_\alpha(a+b)\,\rho_{-\alpha}(c+d), \tag{12}$$

$$\varphi_\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \star t = t\rho_\alpha(a + b/\alpha(t))\,\rho_{-\alpha}(c\alpha(t)+d). \tag{13}$$

Démonstration. — D'après le théorème 2, le groupe $\mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{Cent}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Ker}\,\alpha)$ est réductif de rang semi-simple 1; il existe donc (SGA 3, XX, 5.8) un scalaire $z \in k^\star$ et un homomorphisme $u : \mathbf{SL}_{2k} \to \mathrm{G}$, tels que

$$u\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(\lambda), \qquad u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(z\lambda);$$

posons $\alpha^\star(\mu) = u\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix}$. Pour a, b, c, d assez généraux, avec $ad - bc = 1$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ac & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha^\star(a)\,x_{-\alpha}(zac)\,x_\alpha(b/a),$$

et

$$\begin{aligned} f\left(u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \alpha^\star(a)\,f(x_{-\alpha}(zac)\,x_\alpha(b/a)) = \alpha^\star(a)\,f(x_{-\alpha}(zac)\,\rho_\alpha(1+b/a)) \\ &= \alpha^\star(\alpha)\,\rho_\alpha(1+b/a)\,f(x_{-\alpha}(zac(1+b/a))), \end{aligned}$$

donc

$$f\left(u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \alpha^\star(a)\,\rho_\alpha\left(\frac{a+b}{a}\right)\rho_{-\alpha}(1+zc(a+b)). \tag{14}$$

D'autre part, on a $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+rs & r \\ s & 1 \end{pmatrix}$, donc pour r et s assez généraux, et d'après (14) :

$$f(x_\alpha(r)\, x_{-\alpha}(zs)) = \alpha^*(1+rs)\, \rho_\alpha\left(\frac{1+r+rs}{1+rs}\right) \rho_{-\alpha}(1+zs(1+r+rs)); \tag{15}$$

mais ceci vaut aussi

$$f(x_\alpha(r)\, \rho_{-\alpha}(1+zs)) = \rho_{-\alpha}(1+zs)\, f(x_\alpha(r(1+zs))) = \rho_{-\alpha}(1+zs)\, \rho_\alpha(1+r+zrs).$$

Comparant à (15), on en tire

$$\alpha^*(1+rs)\, \rho_\alpha\left(\frac{1+r+rs}{1+rs}\right) \rho_{-\alpha}(1+zs(1+r+rs)) = \rho_{-\alpha}(1+zs)\, \rho_\alpha(1+r+zrs); \tag{16}$$

appliquant α aux deux membres, compte tenu de

$$\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2, \ \langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1, \ \langle \rho_{-\alpha}, \alpha \rangle = -1,$$

on en tire sans difficulté $z = 1$; retournant alors à (16), on obtient

$$\alpha^*(1+rs) = \rho_\alpha(1+rs)\, \rho_{-\alpha}(1+rs)^{-1},$$

soit, en notation additive

$$\alpha^* = \rho_\alpha - \rho_{-\alpha}. \tag{17}$$

Considérons alors le morphisme $v : \boldsymbol{\mu}_k \to G$ tel que $v(\mu) = \rho_\alpha(\mu)\, \rho_{-\alpha}(\mu)$. On a

$$v(-1) = \rho_\alpha(-1)\, \rho_{-\alpha}(-1) = \rho_\alpha(-1)\, \rho_{-\alpha}(-1)^{-1} = \alpha^*(-1) = u\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbf{GL}_{2k}$ s'obtient par amalgamation de $\mathbf{SL}_{2k}$ et de $\boldsymbol{\mu}_k$ [en identifiant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ à la section -1 de $\boldsymbol{\mu}_k$] on en déduit qu'il existe un homomorphisme $\varphi_\alpha : \mathbf{GL}_{2k} \to G$ tel que $u = \varphi_\alpha | \mathbf{SL}_{2k}$ et que $v(\mu) = \varphi_\alpha\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix}\right) = \rho_\alpha(\mu)\, \rho_{-\alpha}(\mu)\, \rho_\alpha(\mu)\, \rho_{-\alpha}(\mu)^{-1} = \rho_\alpha(\mu^2);$$

comme $\mu \mapsto \mu^2$ est un épimorphisme de $\boldsymbol{\mu}_k$ dans lui-même, cela implique $\varphi_\alpha\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_\alpha(\mu)$, et de même $\varphi_\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \rho_{-\alpha}(\mu)$.

L'homomorphisme construit satisfait donc bien aux propriétés (10) et (11) exigées; il est d'autre part clair que ces propriétés le déterminent, d'où l'unicité annoncée. Comme la formule (12) se déduit de (13) en faisant $t = 1$ dans cette dernière, il reste à démontrer (13). Or, si $\delta = ad\text{-}bc$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/\delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\varphi_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \rho_\alpha(a)\, \rho_{-\alpha}(\delta)\, x_{-\alpha}(c/\delta)\, x_\alpha(b/a),$$

$$\varphi_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} t = \rho_\alpha(a)\, \rho_{-\alpha}(\delta)\, t x_{-\alpha}(c\alpha(t)/\delta)\, x_\alpha(b/a\alpha(t)),$$

et enfin

$$\varphi_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \star t = f\left(\varphi_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} t\right) = \rho_\alpha(a)\, \rho_{-\alpha}(\delta)\, t f(x_{-\alpha}(c\alpha(t)/\delta)\, \rho_\alpha(1 + b/a\alpha(t)))$$
$$= \rho_\alpha(a)\, \rho_{-\alpha}(\delta)\, t \rho_\alpha(1 + b/a\alpha(t))\, \rho_{-\alpha}(1 + c\alpha(t)/\delta + bc/a\delta),$$

ce qui, après simplification, n'est autre que (13).

C. Q. F. D.

Corollaire 1. — *L'élément non trivial s_α du groupe de Weyl de* $\mathrm{Cent}_G(\mathrm{Ker}\,\alpha)$ *opère sur* T *par*

$$s_\alpha(t) = t \rho_\alpha(\alpha(t))^{-1} \rho_{-\alpha}(\alpha(t)), \tag{18}$$

et sur M *et* M* *par*

$$s_\alpha(m) = m - \langle \rho_\alpha - \rho_{-\alpha}, m \rangle \alpha, \tag{19}$$

$$s_\alpha(m^*) = m^* - \langle m^*, \alpha \rangle (\rho_\alpha - \rho_{-\alpha}). \tag{20}$$

En effet, la coracine associée à α est $\alpha^* = \rho_\alpha - \rho_{-\alpha}$ [formule (17)], et on applique SGA 3, XX, 3.1 (iii).

On note w_α l'élément de $\mathrm{Norm}_G(T)\,(k)$ défini par

$$w_\alpha = \varphi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

et on a aussitôt les relations

$$w_\alpha t w_\alpha^{-1} = s_\alpha(t), \tag{22}$$

$$w_\alpha \star t = s_\alpha(t), \tag{23}$$

$$w_\alpha^2 = 1. \tag{24}$$

Corollaire 2. — *Si* $\beta \in \mathrm{R}$, *alors* $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}$, *et on a*

$$\rho_{s_\alpha(\beta)} = s_\alpha(\rho_\beta), \tag{25}$$

$$\mathrm{int}(w_\alpha) \circ x_\beta = x_{s_\alpha(\beta)}. \tag{26}$$

La première assertion est claire puisque $\operatorname{int}(w_\alpha)$ est un automorphisme de G induisant s_α sur T. Pour t et λ assez généraux, calculons l'expression $w_\alpha x_\beta(\lambda)\, w_\alpha^{-1} \star t$. On a successivement

$$w_\alpha x_\beta(\lambda)\, w_\alpha^{-1} \star t = w_\alpha x_\beta(\lambda) \star s_\alpha(t) = w_\alpha \star (s_\alpha(t)\, \rho_\beta(1+\lambda\beta(s_\alpha(t))^{-1}))$$
$$= t s_\alpha(\rho_\beta(1+\lambda/\gamma(t))) = t\rho(1+\lambda/\gamma(t)),$$

où $\gamma = s_\alpha(\beta)$ et $\rho = s_\alpha(\rho_\beta)$. D'autre part, il existe $z \in k^*$ tel que $w_\alpha x_\beta(\lambda)\, w_\alpha^{-1} = x_\gamma(z\lambda)$, donc

$$w_\alpha x_\beta(\lambda)\, w_\alpha^{-1} \star t = x_\gamma(z\lambda) \star t = t\rho_\gamma(1+z\lambda/\gamma(t)).$$

Comparant les deux relations obtenues, on obtient les formules (25) et (26).

Corollaire 3. — *Le groupe* $\mathrm{Norm}_{G^0}(T)$ *est produit semi-direct d'un groupe constant* W^* *par* T. *Le groupe* $\mathrm{Norm}_{G^0}(T)/T$ *est constant, égal à* W_k *où* W *est engendré par les* s_α, $\alpha \in R_s$. *Si* $w \in W$ *et* $\beta \in R$, *on a* $w(\beta) \in R$ *et* $\rho_{w(\beta)} = w(\rho_\beta)$.

Soit W^* le sous-groupe de $\mathrm{Norm}_{G^0}(T)(k)$ engendré par les w_α, $\alpha \in R_s$. Il est clair que $w \star t$ est défini pour tout $w \in W^*$ et tout $t \in T(S)$, et qu'on a $w \star t = e$. Il s'ensuit que $W^* \cap T = e$. D'autre part, le groupe de Weyl W de G^0 relativement à T est le même que celui de L, donc est constant et engendré par les s_α, $\alpha \in R_s$. Comme $W^* \to W$ est surjectif, cela implique les deux premières assertions. La dernière résulte du corollaire 2.

Remarque. — Il s'ensuit que $n \star t$ est défini dès que $n \in \mathrm{Norm}_{G^0}(T)(S)$ et $t \in T(S)$, et que l'opération de $\mathrm{Norm}_{G^0}(T)$ sur T ainsi définie induit sur $T \subset \mathrm{Norm}_{G^0}(T)$ les translations et sur $W^* \simeq W$ l'opération naturelle de W sur T.

Pour chaque racine β, notons X_β l'élément $\mathrm{Lie}(x_\beta)(1)$ de $\mathfrak{g}$; c'est un élément de base de $\mathfrak{g}^\beta$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^0$ de T s'identifie canoniquement à $M^* \otimes_{\mathbf{Z}} k$; si $\alpha \in R_s$, notons H_α l'élément $\alpha^* \otimes 1$ de $\mathfrak{g}^0$. On a alors

(27) $$\text{si } \alpha \in R_s, \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha,$$

(28) $$\text{si } \alpha \in R_s \text{ et } \beta \in R, \quad (\mathrm{Ad}\, w_\alpha) X_\beta = X_{s_\alpha(\beta)}.$$

Définition 2. — *Soient* G *un* k-*groupe algébrique lisse*, T *un sous-tore déployé de* G, f *un pseudo-projecteur de* G *sur* T. *On appelle système d'Enriques associé à* (G, T, f) *le triplet* (M, R, ρ) *où* M *est le groupe des caractères de* T, $R \subset M$ *l'ensemble des racines de* G *relativement à* T *et* ρ *l'application* $\alpha \mapsto \rho_\alpha$ *de* R *dans* M^* *définie par* f.

Notons que $(M, R_s, \alpha \mapsto \alpha^*)$ est la *donnée radicielle* associée au groupe réductif connexe déployé (L, T) (*cf.* [2], 3.1).

4. Relations entre deux racines. — Nous gardons les notations du numéro précédent.

Proposition 3. — *Soient* $\alpha, \beta \in R$. *Pour que* U_α *et* U_β *commutent, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soient satisfaites :*

a. $\rho_\alpha = \rho_\beta$;

b. $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle = 0$.

Soient $a \in U_\alpha(\bar{k})$, $b \in U_\beta(\bar{k})$, $t \in T(\bar{k})$. Pour t assez général, on a

$$f(abt) = tf(t^{-1}at.t^{-1}bt), \qquad f(bat) = tf(t^{-1}bt.t^{-1}at).$$

D'après la condition (P 3) du n° 1, on en conclut que U_α et U_β commutent si et seulement si on a $f(xy) = f(yx)$ pour $x \in U_\alpha(\bar{k})$ et $y \in U_\beta(\bar{k})$ assez généraux. Or si on pose $n = \langle \rho_\beta, \alpha \rangle$ et $m = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle$, on a

$$f(x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)) = f(x_\alpha(\lambda)\, \rho_\beta(1+\mu)) = \rho_\beta(1+\mu)\, \rho_\alpha(1+\lambda(1+\mu)^{-n}),$$

et de même

$$f(x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)) = \rho_\alpha(1+\lambda)\, \rho_\beta(1+\mu(1+\lambda)^{-m}).$$

Si $\rho_\alpha = \rho_\beta$, on a $n = m = 1$, et ces deux expressions sont égales; si $n = m = 0$, elles le sont aussi. Inversement, si $f(x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)) = f(x_\alpha(\mu)\, x_\alpha(\lambda))$, on a $\rho_\alpha(A) = \rho_\beta(B)$, avec

$$A = \frac{1+\lambda(1+\mu)^{-n}}{1+\lambda}, \qquad B = \frac{1+\mu(1+\lambda)^{-m}}{1+\mu}.$$

Appliquant α et β aux deux membres de l'égalité $\rho_\alpha(A) = \rho_\beta(B)$, on trouve

$$A = B^m, \qquad B = A^n,$$

donc $A^{mn} = A$, $B^{mn} = B$. Si $m = n = 1$, on a $A = B$, donc $\rho_\alpha = \rho_\beta$ et on est dans le cas (a). Si $m = n = -1$, alors $AB = 1$, ce qui est visiblement impossible. Si $mn \neq 1$, alors on a identiquement $A = B = 1$ (puisque A et B doivent être des racines de l'unité valant 1 pour $\lambda = \mu = 0$), ce qui implique $m = n = 0$, et on est dans le cas (b).

Remarque. — Si $\alpha_i \in R$, avec $\rho_{\alpha_i} = \rho$, $i = 1, \ldots, r$, on a

$$f(x_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots x_{\alpha_r}(\lambda_r)) = \rho(1+\lambda_1+\ldots+\lambda_r);$$

si $\alpha_i \in R$, avec $\langle \rho_{\alpha_i}, \alpha_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, $i = 1, \ldots, r$, on a

$$f(x_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots x_{\alpha_r}(\lambda_r)) = \rho_{\alpha_1}(1+\lambda_1) \ldots \rho_{\alpha_r}(1+\lambda_r).$$

COROLLAIRE. — *Soient* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.

a. Si $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$, *on a* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle \leq 0$.

b. Si $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$ *et* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle < 0$, *alors* $\alpha + \beta = 0$.

Soient en effet $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, avec $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$, $\alpha + \beta \neq 0$. Alors α et β sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{Q}$, et il existe $a, b \in \mathbf{N}$ tels que $a\alpha + b\beta \in \mathrm{R}$ et que $m(a\alpha + b\beta) + n\alpha$ et $m(a\alpha + b\beta) + n\beta$ ne soient jamais racines pour $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n > 0$. Alors $\mathrm{U}_{a\alpha+b\beta}$ commute à U_α et U_β. Comme $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$, on peut, quitte à permuter α et β, supposer que $\rho_{a\alpha+b\beta} \neq \rho_\alpha$.
D'après la proposition, deux cas sont alors possibles :

$$1^{\circ} \qquad \rho_{a\alpha+b\beta} = \rho_\beta \neq \rho_\alpha, \qquad \langle \rho_{a\alpha+b\beta}, \alpha \rangle = \langle \rho_\alpha, a\alpha + b\beta \rangle = 0,$$

$$2^{\circ} \qquad \langle \rho_{a\alpha+b\beta}, \alpha \rangle = \langle \rho_{a\alpha+b\beta}, \beta \rangle = \langle \rho_\alpha, a\alpha + b\beta \rangle = \langle \rho_\beta, a\alpha + b\beta \rangle = 0.$$

Dans le cas 1°, on a $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_{a\alpha+b\beta}, \alpha \rangle = 0$ d'une part,

$$a + b\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = \langle \rho_\alpha, a\alpha + b\beta \rangle = 0,$$

donc $b \neq 0$ et $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = -a/b \leq 0$ d'autre part. Dans le cas 2°, on a

$$1 = \langle \rho_{a\alpha+b\beta}, a\alpha + b\beta \rangle = a\langle \rho_{a\alpha+b\beta}, \alpha \rangle + b\langle \rho_{a\alpha+b\beta}, \beta \rangle = 0,$$

ce qui est impossible. Cela prouve le corollaire.

D'après la proposition 3 et son corollaire, si α et β sont deux racines, alors *ou bien* $\alpha + \beta = 0$, *ou bien* U_α et U_β commutent, *ou bien*, quitte à permuter α et β, on a $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$, $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$. Dans ce dernier cas, la relation de commutation entre U_α et U_β est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Soient* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ *avec* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$. *Posons*

$$n = -\langle \rho_\alpha, \beta \rangle \geq 0.$$

a. Si $a\alpha + b\beta \in \mathrm{R}$ *avec* $a, b \in \mathbf{N}$, $b > 0$, *on a* $b = 1$, $0 \leq a \leq n$ *et* $\rho_{a\alpha+b\beta} = \rho_\beta$.

b. Si $i \in \mathbf{N}$ *est tel que* $\binom{n}{i} 1_k \neq 0$, *alors* $\beta + i\alpha \in \mathrm{R}$.

c. Pour tout k-schéma S *et tous* $\lambda, \mu \in \boldsymbol{\alpha}_k(\mathrm{S})$, *on a*

$$(1) \qquad x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)^{-1} = \prod x_{\beta+i\alpha}\left((-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i \mu\right),$$

où le produit au second membre est étendu aux $i \in \mathbf{N}$ *tels que* $\binom{n}{i} 1_k \neq 0$.

Si $a\alpha + b\beta \in \mathrm{R}$ avec $a, b \in \mathbf{N}$, on a $b = \langle \rho_\beta, a\alpha + b\beta \rangle$; d'après la proposition 3 et son corollaire, on a donc nécessairement $b = 0$ ou $b = 1$ et $\rho_{a\alpha+b\beta} = \rho_\beta$; dans ce dernier cas, on a $\rho_{a\alpha+b\beta} \neq \rho_\alpha$, donc

$$0 \geqq \langle \rho_\alpha, a\alpha + b\beta \rangle = a - n,$$

ce qui démontre (a). Montrons maintenant qu'il existe une formule de commutation

$$x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)^{-1} = \prod x_{\beta+i\alpha}(c_i \lambda^i \mu), \tag{2}$$

où le produit est étendu aux $i \in \mathbf{N}$ tels que $\beta + i\alpha \in \mathrm{R}$.

Il existe un ordre total sur R tel qu'un ouvert dense Ω de G^0 se décompose en produit $\mathrm{T}\prod\limits_{\gamma\in\mathrm{R}} \mathrm{U}_\gamma$. On a donc, pour (λ, μ) assez près de $(0, 0)$, une formule

$$x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)^{-1} = \tau(\lambda, \mu) \prod x_\gamma(\varphi_\gamma(\lambda, \mu));$$

faisant opérer int (t), où t est un point arbitraire de T, on obtient

$$\tau(\alpha(t)\,\lambda, \beta(t)\,\mu) = \tau(\lambda, \mu),$$
$$\varphi_\gamma(\alpha(t)\,\lambda, \beta(t)\,\mu) = \gamma(t)\,\varphi_\gamma(\lambda, \mu).$$

La première relation implique $\tau = 1$, puisque α et β sont linéairement indépendants; de même la seconde implique $\varphi_\gamma = 0$ si $\gamma \notin \mathbf{Q}\alpha + \mathbf{Q}\beta$. Si $\gamma = a\alpha + b\beta$, avec $a, b \in \mathbf{Q}$, on a $b = \langle \rho_\beta, \gamma \rangle \in \mathbf{Z}$, $a = \langle \rho_\alpha + n\rho_\beta, \gamma \rangle \in \mathbf{Z}$; il s'ensuit que $\varphi_\gamma(\lambda, \mu) = c_\gamma \lambda^a \mu^b$, $c_\gamma \in k$, donc que $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ puisque φ_γ est définie au voisinage de $(0, 0)$. D'après (a), on a $b = 1$, donc $\gamma = \beta + i\alpha$, $i \geqq 0$, d'où la relation (2).

Appliquant f au second membre de (2), on trouve, compte tenu de (a) et de la remarque, $\rho_\beta\left(1 + \mu \sum c_i \lambda^i\right)$; appliquant f au premier, on obtient

$$\begin{aligned} f(x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)\, x_\alpha(-\lambda)) &= f(x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)\, \rho_\alpha(1-\lambda)) \\ &= \rho_\alpha(1-\lambda)\, f\left(x_\alpha\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) x_\beta(\mu(1-\lambda)^n)\right) \\ &= \rho_\alpha(1-\lambda)\, \rho_\beta(1 + \mu(1-\lambda)^n)\, \rho_\alpha\left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \rho_\beta\left(1 + \mu \sum (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^n \mu\right), \end{aligned}$$

d'où les assertions (b) et (c).

Corollaire 1. — *Sous les conditions de la proposition, on a*

$$x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)^{-1} = x_\alpha(\lambda) \prod_{1 \leq i \leq n} x_{\beta+i\alpha}\left(\binom{n}{i} \lambda^i \mu\right), \tag{3}$$

$$(\mathrm{Ad}\, x_\alpha(\lambda))\, X_\beta = \sum (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i X_{\beta+i\alpha}, \tag{4}$$

$$(\mathrm{Ad}\, x_\beta(\mu))\, X_\alpha = X_\alpha + n\mu X_{\alpha+\beta}, \tag{5}$$

(*où* $nX_{\alpha+\beta}$ *signifie* o *lorsque* $n\,1_k = 0$).

Corollaire 2. — *Si* $\alpha, \beta \in R$ *avec* $\alpha + \beta \neq 0$, *alors*

$$[X_\alpha, X_\beta] = (\langle \rho_\alpha, \beta \rangle - \langle \rho_\beta, \alpha \rangle)\, X_{\alpha+\beta}, \tag{6}$$

où on convient que cela signifie $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ *lorsque* $(\langle \rho_\alpha, \beta \rangle - \langle \rho_\beta, \alpha \rangle) 1_k = 0$.

Lorsque $\rho_\alpha = \rho_\beta$, on a $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ (prop. 3) et la relation est vraie. Lorsque $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$, on peut, quitte à permuter α et β, supposer $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$. On dérive alors la formule (4).

Corollaire 3. — *Si* $\alpha, \beta \in R$ *avec* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = -n \leq 0$, *alors* $\beta + n\alpha \in R \cup \{0\}$.

Si $n = 0$, l'assertion est claire. Si $\alpha + \beta = 0$, alors $n = 1$ et $\beta + n\alpha = 0$. Si $n > 0$ et si $\alpha + \beta \neq 0$, on est dans les conditions de la proposition 4 et on applique (*b*).

5. Le théorème d'isomorphisme.

Théorème 4. — *Soient* G (resp. G′) *un k-groupe algébrique lisse connexe*, T (resp. T′) *un sous-tore déployé de* G (resp. G′), f (resp. f') *un pseudo-projecteur de* G *sur* T (resp. *de* G′ *sur* T′), $S = (M, R, \rho)$ [resp. $S' = (M', R', \rho)$] *le système d'Enriques associé* (déf. 2). *Soit h un isomorphisme de* S *sur* S′ [h est donc un isomorphisme de groupes $h : M \to M'$, induisant une bijection de R sur R′, et tel que, si on note $h^*: M^* \to M'^*$ l'isomorphisme contragrédient, on ait $h^*(\rho(\alpha)) = \rho'(h(\alpha))$ pour tout $\alpha \in R$]. *Il existe un k-homomorphisme unique* $u : G \to G'$ *tel que :*

1° $u(T) \subset T'$ *et u induit l'homomorphisme de* T *dans* T′ *associé à h ;*

2° *pour tout* $\alpha \in R$, *on a* $u \circ x_\alpha = x'_{h(\alpha)}$ (où x_α et $x'_{h(\alpha)}$ sont les isomorphismes $\boldsymbol{\alpha}_k \to U_\alpha$ et $\alpha_k \to U'_{h(\alpha)}$ définis par f et f').

De plus, u est un isomorphisme qui transforme T *en* T′, *f en f′*.

Démonstration. — Notons U(resp. U′) le radical unipotent de G(resp. G′) et L(resp. L′) le plus grand sous-groupe réductif connexe de G(resp. G′) contenant T(resp. T′), de sorte que G(resp. G′) est le produit semi-direct de L(resp. L′) par U(resp. U′), d'après le théorème 2, (*e*) du n° 2. Posons $R_s = R \cap (-R)$, $R'_s = R' \cap (-R')$ et pour $\alpha \in R_s$, $\alpha' \in R'_s$, posons $\alpha^\star = \rho_\alpha - \rho_{-\alpha}$, $\alpha'^\star = \rho'_{\alpha'} - \rho'_{-\alpha'}$. Alors (L, T) est un groupe réductif déployé de donnée radicielle $(M, R_s, \alpha \mapsto \alpha^\star)$, et de même pour (L′, T′) et h est un isomorphisme de $(M, R_s, \alpha \mapsto \alpha^\star)$ sur $(M', R'_s, \alpha' \mapsto \alpha'^\star)$. Soit R_0 un système de racines simples de R_s; d'après le *théorème d'isomorphisme des groupes réductifs* ([2], 3.6.5), il existe un (unique) isomorphisme $u_L : L \to L'$ induisant sur T l'homomorphisme $u_T : T \to T'$ dual de h et tel que $u_L \circ x_\alpha = x'_{h(\alpha)}$ pour $\alpha \in R_0$. *Montrons que* $u_L \circ x_\alpha = x'_{h(\alpha)}$ *pour tout* $\alpha \in R_s$. Comme x_α et $x_{-\alpha}$ sont « appariés » (th. 3 du n° 2), de même que $x_{h(\alpha)}$ et $x'_{-h(\alpha)}$, on peut supposer que α est positive relativement à R_0 ; soit m son ordre. Si $m = 1$, alors $\alpha \in R_0$ et l'assertion est claire; raisonnons par récurrence sur m. Si $m > 1$, il existe $\beta \in R_0$ et $\gamma \in R$ tels que $\alpha = \beta + \gamma$; comme γ est d'ordre $m - 1$, il s'ensuit que α s'écrit $\beta + \gamma$, l'assertion étant vraie pour β et γ. Comme β et γ ne commutent pas, on a, quitte à permuter β et γ, $\langle \rho_\beta, \gamma \rangle < 0$ (n° 4), donc nécessairement $\langle \rho_\beta, \gamma \rangle = -1$ (puisque $\langle \rho_\beta, -\gamma \rangle = -\langle \rho_\beta, \gamma \rangle \leq 1$, d'après le corollaire à la proposition 3, n° 4). D'après la proposition 4, du n° 4, on a

$$x_\beta(\lambda)\, x_\gamma(\mu)\, x_\beta(-\lambda) = x_\alpha(-\lambda\mu),$$

et de même

$$x'_{h(\beta)}(\lambda)\, x'_{h(\gamma)}(\mu)\, x'_{h(\beta)}(-\lambda) = x'_{h(\alpha)}(-\lambda\mu),$$

donc $u_L \circ x_\alpha = x'_{h(\alpha)}$, vu l'hypothèse faite sur β et γ.

Considérons maintenant les groupes U et U′, et munissons $R_a = R - R_s$ et $R'_a = R' - R'_s$ d'ordres totaux se correspondant par h; on a des décompositions en produit semi-direct

$$U = \prod_{\alpha \in R_a} U_\alpha, \qquad U' = \prod_{\alpha' \in R'_a} U'_{\alpha'}.$$

Utilisant la proposition 4 du n° 4, on voit sans difficultés qu'il existe un k-isomorphisme (unique) $u_U : U \to U'$ tel que $u_U \circ x_\alpha = x'_{h(\alpha)}$ pour $\alpha \in R_a$. Comme T et les U_α, $\alpha \in R_s$, engendrent L, il résulte aussi de *loc. cit.* que les k-isomorphismes $u_L : L \to L'$ et $u_U : U \to U'$ sont compatibles avec les opérations par automorphismes intérieurs de L sur U et de L′ sur U′; il s'ensuit qu'il existe un k-isomorphisme $u : G \to G'$ induisant u_L sur L et u_U sur U. Celui-ci transforme f en f' d'après le corollaire 3 au théorème 2, n° 2. Enfin, l'assertion d'unicité du théorème résulte de ce que T et les U_α, $\alpha \in R$, engendrent G.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — En modifiant légèrement la démonstration précédente, on peut éviter le recours à la partie difficile du théorème d'isomorphisme des groupes réductifs.

Remarque 2. — Une démonstration analogue à celle du théorème 4 permet d'obtenir la généralisation suivante : soient G, G', T, T', f, f', M, M', R, R', ρ, ρ' comme dans le théorème 4. Soit $\psi : M' \to M$ un homomorphisme tel que $\psi^\star(\rho_{\psi(\alpha')}) = \rho'_{\alpha'}$ pour $\alpha' \in R'$ (on note $\psi^\star : M^\star \to M'^\star$ le transposé de ψ).

Il existe alors un k-homomorphisme unique $u : G \to G'$ tel que :

1° $u(T) \subset T'$ et u induit sur T l'homomorphisme associé à h;

2° $u \circ x_{\psi(\alpha')} = x'_{\alpha'}$ pour α' dans R'.

De plus, Ker u est le dual de Coker ψ et u est un épimorphisme si et seulement si ψ est injectif.

Corollaire 1. — *Soit* G(resp. G') *un sous-groupe algébrique lisse connexe de* $\mathbf{Cr}_{nk}$ *possédant un tore déployé* T (resp. T') *de dimension n. Soit* (**n° 1, th. 1**) f(resp. f') *un pseudo-projecteur de* G(resp. G') *sur* T(resp. T') *adapté à l'inclusion de* G(resp. G') *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$ *et soit* S(resp. S') *le système d'Enriques associé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe* $a \in \mathbf{Cr}_{nk}(k)$ *tel que* $\mathrm{int}(a)\, G = G'$;

(ii) *il existe* $a \in \mathbf{Cr}_{nk}(k)$ *tel que* $\mathrm{int}(a)\, G = G'$, $\mathrm{int}(a)\, T = T'$, *et* $f'(aga^{-1}) = af(g)\, a^{-1}$ *pour tout point g de* G *tel que* $f(g)$ *soit défini;*

(iii) S *et* S' *sont isomorphes.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) : c'est trivial.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : cela résulte de la proposition 1 du n° 1 et du corollaire 1 au théorème 2 du n° 3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : c'est clair.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : si S et S' sont isomorphes, il existe d'après le théorème 4 un isomorphisme $u : G \to G'$ transformant T en T' et f en f'. Il suffit alors de prendre pour a l'élément de $\mathbf{Cr}_{nk}(k)$ associé à l'automorphisme

φ de $k(t_1, \ldots, t_n)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} k(\mathrm{T}) & \xrightarrow{\nu} & k(t_1, \ldots, t_n) \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ k(\mathrm{T}') & \xrightarrow{\nu'} & k(t_1, \ldots, t_n), \end{array}$$

où ν est associé à f et ν' à f' (*cf.* n° 1) et où ψ provient de l'isomorphisme $u_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ induit par u.

En particulier, on voit que la classe d'isomorphisme de S ne dépend que de la classe de conjugaison du sous-groupe G, et qu'il revient au même de classer les S ou de classer, à conjugaison près, les sous-groupes algébriques lisses connexes de $\mathbf{Cr}_{nk}$ contenant un tore déployé de dimension n. Le corollaire suivant permet de classer les groupes non connexes :

COROLLAIRE 2. — *Soit* G *un sous-groupe algébrique lisse connexe de* $\mathbf{Cr}_{nk}$, *possédant un sous-tore déployé* T *de dimension* n.

a. Le normalisateur N *de* G *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$ *est un groupe lisse, dont la composante neutre est* G.

b. Si N(T) *est le normalisateur de* T *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$, *on a* $\mathrm{N} = \mathrm{G}.(\mathrm{N} \cap \mathrm{N}(\mathrm{T}))$.

c. Soient f *un pseudo-projecteur de* G *sur* T *adapté à l'inclusion de* G *dans* $\mathbf{Cr}_{nk}$, $\mathrm{S} = (\mathrm{M}, \mathrm{R}, \rho)$ *le système d'Enriques associé,* Aut(S) *le sous-groupe de* Aut(T) *formé des automorphismes de* S, $\mathrm{W} \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{T})$ *le groupe de Weyl de* G *relativement à* T. *Alors* $(\mathrm{N} \cap \mathrm{N}(\mathrm{T}))/\mathrm{T}$ *s'identifie naturellement à* $\mathrm{Aut}(\mathrm{S})_k$ *et* N/G *à* $(\mathrm{Aut}(\mathrm{S})/\mathrm{W})_k$.

Soient d'abord S un k-schéma et u un point de $\mathbf{Cr}_{nk}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(u)\cdot\mathrm{G}_{\mathrm{S}} = \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$; posons $\mathrm{T}' = \mathrm{int}(u)\,\mathrm{T}_{\mathrm{S}}$, et considérons le S-schéma V transporteur de T′ dans T_{S} [pour tout S-schéma S_1, $\mathrm{V}(\mathrm{S}_1)$ est l'ensemble des $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_1)$ tels que $\mathrm{int}(g)\,\mathrm{T}'_{\mathrm{S}_1} = \mathrm{T}_{\mathrm{S}_1}$]. Comme $\mathrm{Cent}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$, on voit facilement que V est un torseur (à gauche) sous T_{S} ; comme T_{S} est un tore déployé, il en résulte que V possède localement une section. Il existe donc un recouvrement ouvert U_i de S et pour chaque i un $g_i \in \mathrm{G}(\mathrm{U}_i)$ tels que $\mathrm{int}(g_i)\,\mathrm{T}'_{\mathrm{U}_i} = \mathrm{T}_{\mathrm{U}_i}$, donc que $\mathrm{int}(g_i u)\,\mathrm{T}_{\mathrm{U}_i} = \mathrm{T}_{\mathrm{U}_i}$, et enfin que $g_i u \in (\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{N})\,(\mathrm{U}_i)$; cela démontre (*b*) comme égalité de faisceaux pour la topologie de Zariski. Il s'ensuit que le faisceau-quotient N/G s'identifie à $\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{N}/\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{G}$; or $\mathrm{N}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$ est le k-schéma constant $\mathrm{Aut}(\mathrm{T})_k$ (§1, n° 6, cor. 5 à la prop. 10), tandis que $(\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{G})/\mathrm{T}$ est le k-schéma constant W_k (n° 3, cor. 3 au th. 3). Pour achever la démonstration du corollaire, il suffit de prouver que $\mathrm{N}(k) \cap \mathrm{N}(\mathrm{T})\,(k)/\mathrm{T}(k)$ s'identifie par l'application naturelle à Aut(S), ce qui résulte aussitôt du théorème 4 et de la proposition 1 du n° 1.

Dans les conditions du corollaire 2, on voit donc que les sous-groupes localement algébriques lisses H de $\mathbf{Cr}_{nk}$ tels que $H^0 = G$ correspondent bijectivement aux sous-groupes K de Aut(S) contenant W : au k-groupe H on fait correspondre le quotient $K = W_H(k)/W$, où $W_H = (H \cap N(T))/T$ est le groupe de Weyl de H relativement à T.

3. Systèmes d'Enriques.

1. Définitions.

Définition 1. — *Soient* M *un groupe abélien libre de type fini,* M^* *son dual. On appelle* système d'Enriques *dans* M *un couple* (R, ρ), *où* R *est une partie de* M *et* $\rho : \alpha \mapsto \rho_\alpha$ *une application de* R *dans* M^* *satisfaisant aux axiomes suivants :*

(SE 1) R *est fini.*

(SE 2) *Pour tout* $\alpha \in R$, *on a* $\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$.

(SE 3) *Si* $\alpha, \beta \in R$ *et si* $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$, *on a* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle \leqq 0$.

On dit que le système d'Enriques (R, ρ) *est saturable s'il satisfait à la condition suivante :*

(S) *Si* $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ *est une famille d'éléments de* R *telle que* $\langle \rho(\alpha_{i+1}), \alpha_i \rangle < 0$ *pour tout* i, *alors* $\sum \alpha_i = 0$.

Notons en particulier que (S) implique la condition (S′) ci-dessous :

(S′) *Si* $\alpha, \beta \in R$ *avec* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$ *et* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle < 0$, *alors* $\alpha + \beta = 0$.

Si le système d'Enriques (R, ρ) satisfait à (S′) (par exemple s'il est saturable) et si $\alpha, \beta \in R$, quatre cas sont possibles :

1° $\rho_\alpha = \rho_\beta$;

2° $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle = 0$;

3° $\alpha + \beta = 0$;

4° quitte à permuter α et β, on a $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$ et $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$.

En particulier, supposons que $\alpha + \beta \in R$; alors on est nécessairement dans le cas 4° et on a $\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta$; en effet, on a

$$1 = \langle \rho_{\alpha+\beta}, \alpha + \beta \rangle = \langle \rho_{\alpha+\beta}, \alpha \rangle + \langle \rho_{\alpha+\beta}, \beta \rangle;$$

quitte à permuter α et β, on peut donc supposer $\langle \rho_{\alpha+\beta}, \beta \rangle > 0$; alors $\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta$ d'après (SE 3), donc $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_{\alpha+\beta}, \alpha \rangle = 1 - \langle \rho_{\alpha+\beta}, \beta \rangle = 0$; on a donc $\rho_\alpha \neq \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta}$, donc $\langle \rho_\alpha, \alpha + \beta \rangle \leqq 0$, donc $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$.

Définition 2. — *On dit que le système d'Enriques* (R, ρ) *est saturé s'il est saturable* [i. e. *s'il satisfait à* (S)] *et s'il satisfait à l'axiome* (Sat) *ci-dessous :*

(Sat) *Si* α, $\beta \in \mathrm{R}$, *avec* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$ *et* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$, *alors* $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$.

Comme on l'a vu ci-dessus, on a avec les notations de (Sat), $\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta$, donc $\langle \rho_{\alpha+\beta}, \alpha \rangle = 0$, tandis que $\langle \rho_\alpha, \alpha + \beta \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle + 1$. Il s'ensuit que le système d'Enriques saturé (R, ρ) jouit de la propriété suivante, plus forte en apparence que (Sat) :

(Sat′) *Si* α, $\beta \in \mathrm{R}$, *avec* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$ *et* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = -n$, *on a* $\beta + i\alpha \in \mathrm{R}$ *et* $\rho_{\beta+i\alpha} = \rho_\beta$ *pour* $0 \leq i \leq n$.

En particulier, tout système d'Enriques saturé satisfait à

(S″) *Si* α, $\beta \in \mathrm{R}$, *avec* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$, *on a* $\beta - \langle \rho_\alpha, \beta \rangle \alpha \in \mathrm{R}$.

Proposition 1. — *Si un système d'Enriques satisfait aux axiomes* (S′) *et* (S″), *il est saturable; s'il satisfait à* (S′) *et* (Sat), *il est saturé.*

La seconde assertion résulte aussitôt de la première et de ce qu'on a vu ci-dessus. La première résulte de l'assertion plus précise suivante :

Lemme 1. — *Soient* (R, ρ) *un système d'Enriques satisfaisant aux axiomes* (S′) *et* (S″), *et* $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ *une famille d'éléments de* R *telle que* $\langle \rho(\alpha_{i+1}), \alpha_i \rangle < 0$ *pour tout i. Alors :*

(i) *on a* $\langle \rho(\alpha_{i+1}), \alpha_i \rangle = -1$ *pour chaque i;*

(ii) *on a* $-\alpha_i \in \mathrm{R}$ *pour chaque i;*

(iii) *on a* $\sum \alpha_i = 0$.

Posons $\langle \rho(\alpha_{i+1}), \alpha_i \rangle = -m_i$. Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où tous les $\rho(\alpha_i)$ sont distincts; supposons en effet, par exemple, que l'on ait $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_i)$. Alors $\langle \rho(\alpha_1), \alpha_{i-1} \rangle = -m_{i-1} < 0$ et $\langle \rho(\alpha_i), \alpha_n \rangle = -m_n < 0$, de sorte qu'on est ramené à démontrer séparément le lemme pour les deux familles $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ et $(\alpha_i, \ldots, \alpha_n)$.

Montrons ensuite qu'il existe des $a_i \in \mathbf{N}$, non tous nuls, tels que $\sum a_i \alpha_i = 0$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et construisons par récurrence une suite infini d'éléments distincts de R, ce qui sera absurde. On a d'abord $\langle \rho(\alpha_n), \alpha_{n-1} \rangle = -m_{n-1} < 0$, donc $\alpha_{n-1} + m_{n-1}\alpha_n \in \mathrm{R}$, puisque $\alpha_n + \alpha_{n-1} \neq 0$; posant $\alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1} + m_{n-1}\alpha_n$, on a

$$\langle \rho(\alpha'_{n-1}), \alpha_{n-2} \rangle = \langle \rho(\alpha_{n-1}), \alpha_{n-2} \rangle = -m_{n-2} < 0$$

et

$$\alpha'_{n-1} + \alpha_{n-2} = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + m_{n-1}\alpha_n \neq 0;$$

on a alors $\alpha_{n-2} + m_{n-2}\alpha'_{n-1} \in R \ldots$

On obtient ainsi :

a. que $\alpha'_2 = \alpha_2 + m_2\alpha_3 + \ldots + m_2 \ldots m_{n-1}\alpha_n \in R$;

b. que, si on pose $\beta = m_n\alpha_1 + m_n m_1 \alpha_2 + \ldots + m_n m_1 \ldots m_{n-1}\alpha_n$, on a $\alpha_n + \beta \in R$, puis $\alpha_n + N\beta \in R$ pour tout $N \geqq 0$, d'où la contradiction cherchée.

Il existe donc une relation linéaire $\sum a_i\alpha_i = 0$ avec des a_i positifs non tous nuls. Soit $j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; appliquant $\rho(\alpha_j)$ à cette relation, et compte-tenu des relations $\langle \rho(\alpha_j), \alpha_j \rangle = 1$, $\langle \rho(\alpha_j), \alpha_{j-1} \rangle = -m_{j-1}$ et $\langle \rho(\alpha_j), \alpha_k \rangle \leqq 0$ pour $k \neq j$, on obtient $a_j \geqq m_{j-1}a_{j-1}$. Comme cela est vrai pour tout j, on en conclut que les a_j sont égaux, soit (i) et que les m_j sont égaux à 1, soit (iii). De plus, cela implique qu'il n'existe pas de relations $\sum a_r\alpha_i = 0$, du type précédent, telle que $a_1 = 0$. Reprenant alors la démonstration ci-dessus, on voit que l'assertion (a) reste valable, donc que $\alpha'_2 = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\alpha_1$ est un élément de R, d'où aussitôt (ii).

Corollaire. — *Le système d'Enriques associé à un pseudo-projecteur* (§ 2, n° 3, déf. 2) *est saturé lorsque le corps k est de caractéristique* 0.

Cela résulte aussitôt du paragraphe 2 (n° 4, cor. de la prop. 3 et de la prop. 4).

Pour tenir compte des phénomènes liés aux caractéristiques $\neq 0$, nous posons la définition suivante :

Définition 3. — *Soit p un nombre premier. On dit que le système d'Enriques* (R, ρ) *est p-saturé s'il est saturable et s'il satisfait à l'axiome suivant :*

(p-Sat) *Si* $\alpha, \beta \in R$, *avec* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$ *et* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = -n$, *alors* $\beta + i\alpha \in R$ *pour* $0 \leqq i \leqq n$ *et* $\binom{n}{i}$ *non divisible par p.*

Proposition 2. — *Un système d'Enriques satisfaisant à* (S′) *et* (p-Sat) *est p-saturé.*

En effet, comme (p-Sat) implique (S″), cela résulte de la proposition 1.

Corollaire. — *Le système d'Enriques associé à un pseudo-projecteur* (§ 2, n° 3, déf. 2) *est p-saturé lorsque le corps k est de caractéristique $p \neq 0$.*

La démonstration est la même que celle du corollaire à la proposition 1.

Nous avons donc associé aux groupes munis de pseudo-projecteurs des systèmes d'Enriques saturés (resp. p-saturés) qui les déterminent à conjugaison près dans le groupe de Cremona (§ 2, n° 5). Inversement, nous allons prouver dans la suite (§ 4, n° 7) qu'on obtient ainsi *tous les systèmes d'Enriques saturés* (resp. *p-saturés*).

2. Saturation d'un système d'Enriques. — Si (R, ρ) est un système d'Enriques et si $R' \subset R$, alors $(R', \rho \mid R')$ est également un système d'Enriques, qui est saturable si (R, ρ) l'est. En particulier, pour qu'on puisse compléter un système d'Enriques en un système d'Enriques saturé, il est nécessaire que le système donné soit saturable. Inversement, cette condition est suffisante; plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soit* (R, ρ) *un système d'Enriques saturable dans le groupe abélien libre* M. *Il existe un système d'Enriques saturé* $(\overline{R}, \overline{\rho})$ *tel que* $R \subset \overline{R} \subset \mathbf{N}.R$ (on note $\mathbf{N}.R$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des éléments de R) *et que* $\overline{\rho} \mid \overline{R} = \rho$. *De plus, celui-ci est unique, on a* $\overline{\rho}(\overline{R}) = \rho(R)$, *et pour qu'un élément* $\gamma \in \mathbf{N}.R$ *appartienne à* $\overline{R}$, *il faut et il suffit qu'il existe un* $\lambda \in M^*$ *tel que* $\langle \lambda, \gamma \rangle = 1$ *et que, pour tout* $r \in R$, *chacune des relations* $\langle \lambda, \alpha \rangle > 1$ *et* $\langle \rho_\alpha, \gamma \rangle > 1$ *implique* $\rho_\alpha = \lambda$.

La démonstration utilise plusieurs lemmes.

Lemme 2. — *Soit* (R, ρ) *un système d'Enriques saturable. Il existe un entier* N *tel que, pour tout système* (R', ρ') *tel que* $R \subset R' \subset \mathbf{N}.R$ *et* $\rho' \mid R = \rho$, *et satisfaisant aux axiomes* (SE 2), (SE 3), *on ait* $\mathrm{Card}(R') \leq N$.

Notons tout de suite qu'il résulte du lemme qu'un tel R' est fini, donc est un système d'Enriques.

Soient $C = \mathrm{Card}(R)$ et $M = \sup(-\langle \rho_r, s \rangle)_{r, s \in R}$. Montrons que $N = C!\,2(M+2)\ldots((C-1)M+2)$ convient. Soit donc (R', ρ') un système satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et soit $\gamma \in R'$. Il existe des entiers positifs $a(\alpha)$, $\alpha \in R$, tels que $\gamma = \sum a(\alpha)\,\alpha$; choisissons une telle écriture de façon que $\sum a(\alpha)$ soit minimal. En vertu de (Sat), on ne peut trouver parmi les $\alpha \in R$ tels que $a(\alpha)$ soit $\neq 0$, aucun cycle $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ tel que $\langle \rho(\alpha_{i+1}), \alpha_i \rangle < 0$. On peut donc écrire $\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_m\alpha_m$, où les a_i sont ≥ 0, les α_i distincts, et où $\langle \rho(\alpha_j), \alpha_i \rangle \geq 0$ pour $i < j$. Posant $\lambda_{ij} = \langle \rho(\alpha_j), \alpha_i \rangle$, on a $\lambda_{ii} = 1$, $\lambda_{ij} \geq 0$ pour $i < j$, et $\lambda_{ij} \geq -M$.

Comme on a pour chaque j,

$$1 \geqq \langle \rho(\alpha_j), \gamma \rangle = \sum_i \lambda_{ij}\, a_i,$$

c'est-à-dire $a_m \leqq 1$, $a_{m-1} \leqq 1 + Ma_m$, $\ldots$, $a_1 \leqq 1 + Ma_2 + \ldots + Ma_m$, le nombre des familles (a_i) possibles, la famille (α_i) étant donnée, est majoré par $2(M+2)\ldots((m-1)M+2)$, d'où le résultat annoncé.

Lemme 3. — *Soit* (R, ρ) *un système d'Enriques saturable. Soient* $\alpha, \beta \in R$ *tels que* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0, \langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$ *et* $\alpha + \beta \notin R$. *Posons* $R' = R \cup \{\alpha + \beta\}$, *et prolongeons* ρ *en une application* $\rho' : R' \to M^*$ *en posant* $\rho'(\alpha + \beta) = \rho_\beta$. *Alors* (R', ρ') *est un système d'Enriques saturable.*

Les conditions (SE 1) et (SE 2) sont évidentes. Vérifions (SE 3). Comme (SE 3) est satisfait pour R, il s'agit de vérifier que si $\gamma \in R$, avec $\rho_\gamma \neq \rho_\beta$, on a $\langle \rho_\gamma, \alpha + \beta \rangle \leqq 0$, c'est-à-dire $\langle \rho_\gamma, \alpha \rangle + \langle \rho_\gamma, \beta \rangle \leqq 0$. Comme $\rho_\gamma \neq \rho_\beta$, ceci ne peut être en défaut que si $\langle \rho_\gamma, \alpha \rangle > 0$, c'est-à-dire si $\rho_\gamma = \rho_\alpha$; mais alors $\langle \rho_\gamma, \alpha \rangle = 1$ et $\langle \rho_\gamma, \beta \rangle < 0$, donc $\langle \rho_\gamma, \alpha + \beta \rangle \leqq 0$. Vérifions (S); comme (S) est satisfait pour R, il s'agit de montrer que si $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ et si

$$\langle \rho(\alpha_2), \alpha + \beta \rangle < 0, \qquad \langle \rho(\alpha_3), \alpha_2 \rangle < 0, \qquad \ldots, \qquad \langle \rho_\beta, \alpha_n \rangle < 0,$$

on a $(\alpha + \beta) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$. D'après le raisonnement du lemme 1, on peut supposer que ρ_β et les $\rho(\alpha_i)$ sont deux à deux distincts. La relation cherchée est vraie lorsque $\langle \rho(\alpha_2), \alpha \rangle < 0$, puisqu'il suffit alors d'appliquer (S) au cycle $(\beta, \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Il suffit donc de prouver qu'il est impossible que $\langle \rho(\alpha_2), \alpha \rangle \geqq 0$. Si cela était, on aurait $\langle \rho(\alpha_2), \beta \rangle < 0$, donc $\beta + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$ [appliquer (S) au cycle $(\beta, \alpha_2. \ldots, \alpha_n)$]. Appliquant $\rho(\alpha_2)$ à l'égalité précédente, on obtient $\langle \rho(\alpha_2), \beta \rangle \geqq -1$, donc $\langle \rho(\alpha_2), \alpha \rangle = \langle \rho(\alpha_2), \alpha + \beta \rangle - \langle \rho(\alpha_2), \beta \rangle \leqq 0$. Cela implique $\rho_\alpha \neq \rho(\alpha_2)$. Mais l'égalité

$$0 = \langle \rho_\alpha, \beta + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle + \langle \rho_\alpha, \alpha_2 \rangle + \ldots + \langle \rho_\alpha, \alpha_n \rangle,$$

où $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$ et $\langle \rho_\alpha, \alpha_2 \rangle < 0$, implique l'existence d'un $i > 2$ tel que $\langle \rho_\alpha, \alpha_i \rangle > 0$, donc $\rho_\alpha = \rho(\alpha_i)$. Alors $\beta + \alpha_i + \ldots + \alpha_n = 0$ d'après (S), donc $\alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-1} = 0$. Appliquant $\rho(\alpha_i)$ à cette relation, on obtient $0 < 0$, d'où la contradiction cherchée.

Lemme 4. — *Soient* (R, ρ) *un système d'Entiques saturé,* A *une partie de* R *telle que* $R \subset \mathbf{N}.A$ *et soient* $\gamma \in \mathbf{N}.A$ *et* $\lambda \in M^*$ *tels que* $\langle \lambda, \gamma \rangle = 1$ *et que pour* $\alpha \in A$, *chacune des relations* $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqq 1$ *et* $\langle \rho_\alpha, \gamma \rangle \geqq 1$ *implique* $\rho_\alpha = \lambda$. *Alors* $\gamma \in R$ *et* $\lambda = \rho_\gamma \in \rho(A)$.

Écrivons $\gamma = \sum \alpha_i$, avec $\alpha_i \in \mathrm{A}$. Comme $\langle \lambda, \gamma \rangle = 1$, il existe un i tel que $\langle \lambda, \alpha_i \rangle > 0$ donc $\lambda = \rho(\alpha_i) \in \rho(\mathrm{A})$. On peut donc écrire $\gamma = \sum \alpha_j$ avec $\rho(\alpha_j) \in \rho(\mathrm{A})$, l'un des $\rho(\alpha_j)$ soit $\rho(\alpha_i)$ étant égal à λ; choisissons une telle écriture de longueur minimale. Soit N le nombre des l pour lesquels $\rho(\alpha_l) = \lambda$; on a $\mathrm{N} \geq 1$, montrons que $\mathrm{N} = 1$. Si $\mathrm{N} > 1$, l'égalité

$$1 = \langle \rho(\alpha_i), t \rangle = \sum \langle \rho(\alpha_i), \alpha_j \rangle$$

implique qu'il existe j tel que $\langle \rho(\alpha_i), \alpha_j \rangle < 0$, ce qui entraîne, soit que $\alpha_i + \alpha_j = 0$ (auquel cas l'écriture proposée n'était pas minimale), soit que $\alpha_i + \alpha_j \in \mathrm{R}$ avec $\rho(\alpha_i + \alpha_j) = \rho(\alpha_j) \in \varphi(\mathrm{A})$ (auquel cas, regroupant α_i et α_j, on contredit le caractère minimal de l'écriture choisie).

On peut donc écrire $\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, avec $\rho(\alpha_0) = \lambda$, $\langle \rho(\alpha_0), \alpha_i \rangle = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\rho(\alpha_i) \in \rho(\mathrm{A})$ pour tout i. Supposons n minimal, et montrons que $n = 0$, ce qui achèvera la démonstration. Si $n \neq 0$, l'inégalité $\langle \rho(\alpha_1), \gamma \rangle \leq 0$ implique l'existence d'un $i \neq 1$ tel que $\langle \rho(\alpha_1), \alpha_i \rangle < 0$; si $i = 0$, alors $\alpha'_0 = \alpha_0 + \alpha_1 \in \mathrm{R}$ et $\rho(\alpha'_0) = \rho(\alpha_0) = \lambda$ et l'écriture $\gamma = \alpha'_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ contredit le caractère minimal de n; si $i \neq 0$, on a $\alpha'_i = \alpha_1 + \alpha_i \in \mathrm{R}$ et $\rho(\alpha'_i) = \rho(\alpha_i) \in \rho(\mathrm{A})$, d'où une contradiction analogue.

Démontrons maintenant le théorème. Soit (R, ρ) un système d'Enriques saturable. Considérons l'ensemble des systèmes d'Enriques saturables (R', ρ') prolongeant le système donné et tel que $\mathrm{R}' \subset \mathbf{N}.\mathrm{R}$. D'après le lemme 2, cet ensemble possède des éléments maximaux; soit $(\overline{\mathrm{R}}, \overline{\rho})$ un tel élément maximal.

D'après le lemme 3, $(\overline{\mathrm{R}}, \overline{\rho})$ est saturé. D'autre part, le lemme 4 montre l'unicité d'un système saturé $(\overline{\mathrm{R}}, \overline{\rho})$ prolongeant (R, ρ), ainsi que la caractérisation annoncée.

3. Exemples de systèmes d'Enriques.

Exemple 1 : Quotient central. — Soit (R, ρ) un système d'Enriques dans M. Si N est un sous-groupe de M contenant R, considérons l'application composée $\rho' : \mathrm{R} \xrightarrow{\rho} \mathrm{M}^\star \to \mathrm{N}^\star$. Alors (R, ρ') est un système d'Enriques dans N, qui est saturable (resp. saturé, resp. p-saturé) si et seulement si (R, ρ) l'est.

Si (R, ρ) est le système d'Enriques associé à un pseudo-projecteur f d'un groupe affine lisse connexe G sur un tore trivial T, et si N correspond à un quotient $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ de T, où Z est central dans G puisque contenu dans les noyaux des racines, alors (R, ρ') est le système d'Enriques associé au triplet $(G/Z, T/Z, \bar{f})$ [§ 2, nº 2, (*d*)].

Exemple 2 : *Le groupe linéaire général.* — Considérons le k-groupe $\mathbf{GL}_{nk}$ $(n \geq 2)$, son tore maximal diagonal $\mathbf{D}_{nk}$ et l'opération naturelle de $\mathbf{GL}_{nk}$ sur l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$. L'orbite du point $a = (1, \ldots, 1)$ sous $\mathbf{D}_{nk}$ est un espace homogène principal sous $\mathbf{D}_{nk}$; on obtient donc un pseudo-projecteur f de $\mathbf{GL}_{nk}$ sur $\mathbf{D}_{nk}$ par $f(g) = g(a)$ c'est-à-dire $f((a_{ij})) = \mathrm{diag}\left(\left(\sum a_{ij}\right)\right)$.

Notons $\rho_i : \boldsymbol{\mu}_k \to T$, $i = 1, \ldots, n$, les homomorphismes tels que

$$\mathrm{diag}((\mu_i)) = \rho_1(\mu_1) \ldots \rho_n(\mu_n);$$

alors le groupe des caractères M *de* $\mathbf{D}_{nk}$ *admet comme base la base duale* (ω_i) définie par $\omega_i\,(\mathrm{diag}((\mu_i))) = \mu_i$. *Les racines de* $\mathbf{GL}_{nk}$ *relativement à* $\mathbf{D}_{nk}$ *sont les* $\omega_i - \omega_j$ *avec* $i \neq j$. *Le système d'Enriques* (R, ρ) *associé à* (G, T, f) *est tel que* $\rho(\omega_i - \omega_j) = \rho_i$. En effet, pour i et j fixés, soit $x_{ij}(\lambda)$ la matrice $1 + \lambda E_{ij}$ où E_{ij} est l'unité matricielle d'indices i et j. On a

$$t x_{ij}(\lambda)\, t^{-1} = x_{ij}\left(\lambda \frac{\omega_i(t)}{\omega_j(t)}\right)$$

pour tout point t de $\mathbf{D}_{nk}$ et tout point λ de $\boldsymbol{\alpha}_k$; d'autre part,

$$f(x_{ij}(\lambda)) = \rho_i(1 + \lambda),$$

d'où l'assertion annoncée.

4. Systèmes d'Enriques réductifs.

Proposition 3. — *Soit* (R, ρ) *un système d'Enriques dans le groupe abélien libre* M. *On suppose que* $R = -R$ *et que* (R, ρ) *satisfait aux axiomes* (S′) *et* (S″) *du* nº 1 (*par exemple est saturé ou p-saturé pour un nombre premier p donné*).

a. Le système (R, ρ) *est saturé.*

b. Pour $\alpha \in R$, *posons* $\alpha^* = \rho_\alpha - \rho_{-\alpha} \in M^*$. *Alors* $(R, \alpha \mapsto \alpha^*)$ *est un système de racines réductif dans* M. *De plus, les composantes irréductibles de ce système de racines sont toutes de type* A.

Soient $\alpha, \beta \in R$; si $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle < 0$, on a $\langle \rho_\beta, -\alpha \rangle > 0$, donc $\rho_\beta = \rho_{-\alpha}$ et $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = -1$. L'axiome (S″) implique donc (Sat), d'où (*a*) d'après la proposition 1 du nº 1.

Posons pour $\alpha \in R$, $x \in M$ et $u \in M^*$,

$$s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^*, x \rangle \alpha, \qquad s_\alpha(u) = u - \langle u, \alpha \rangle \alpha^*.$$

Dire que $(R, \alpha \mapsto \alpha^\star)$ est un système de racines réductif signifie que pour α, $\beta \in R$, on a $s_\alpha(\beta) \in R$ et $s_\alpha(\beta^\star) = (s_\alpha(\beta))^\star$. Démontrons plus généralement que, si α, $\beta \in R$, on a $s_\alpha(\beta) \in R$ et $\rho_{s_\alpha(\beta)} = s_\alpha(\rho_\beta)$. Distinguons plusieurs cas :

1° $\rho_\alpha = \rho_\beta$. Alors $\langle \rho_\beta, -\alpha \rangle = -1$, donc $\langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle = 0$ et $\beta - \alpha \in R$ avec $\rho_{\beta-\alpha} = \rho_{-\alpha}$. Mais cela entraîne $\langle \alpha^\star, \beta \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle - \langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle = 1$, donc $s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha$ et $s_\alpha(\rho_\beta) = \rho_\beta - (\rho_\alpha - \rho_{-\alpha}) = \rho_{-\alpha}$, d'où l'assertion.

2° $\rho_{-\alpha} = \rho_\beta$. Le même raisonnement s'applique en échangeant les rôles de α et $-\alpha$.

3° $\rho_\alpha = \rho_{-\beta}$. Alors $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = -1$, donc $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$, $\alpha + \beta \in R$ et $\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta$. Si $\langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle$ n'était pas nul, on aurait $\langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle < 0$, donc $\rho_{-\alpha} = \rho_{-\beta} = \rho_\alpha$, ce qui est exclu; on a donc $\langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle = 0$, donc $\langle \alpha^\star, \beta \rangle = -1$, $s_\alpha(\beta) = \beta + \alpha$ et $s_\alpha(\rho_\beta) = \rho_\beta - \langle \rho_\beta, \alpha \rangle \alpha^\star = \rho_\beta$, d'où l'assertion.

4° $\rho_{-\alpha} = \rho_{-\beta}$. Le raisonnement ci-dessus s'applique en échangeant les rôles de β et $-\beta$.

5° Si l'on est dans aucun des quatre cas précédents, on a nécessairement $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = \langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle = \langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_{-\beta}, \alpha \rangle = 0$ et alors $s_\alpha(\beta) = \beta$ et $s_\alpha(\rho_\beta) = \rho_\beta$.

Avant de démontrer la dernière assertion, prouvons un lemme :

Lemme 5. — *Soit* R_0 *un système de racines simples de* R, *et soient* α, $\beta \in R_0$. *Alors, ou bien* α *et* β *ne sont pas liées et on a*

$$\langle \rho_\alpha, \beta \rangle = \langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle = \langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_{-\beta}, \alpha \rangle = 0,$$

ou bien α *et* β *sont liées par une liaison simple, et quitte à permuter* α *et* β, *on a* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_{-\alpha}, \beta \rangle = 0$, $\rho_\alpha = \rho_{-\beta}$.

Comme α et β appartiennent à un système de racines simples, on a $\langle \alpha^\star, \beta \rangle \leq 0$, $\langle \beta^\star, \alpha \rangle \leq 0$, ce qui exclut les cas 1° et 4° ci-dessus. Le cas 2° se ramène à 3° en échangeant les rôles de α et β, d'où le lemme.

Démontrons maintenant la dernière assertion de la proposition. Considérons un système de racines simples de R et le diagramme de Dynkin correspondant. Si α et β sont deux sommets liés du diagramme, on a, soit $\rho_\alpha = \rho_{-\beta}$, soit $\rho_\beta = \rho_{-\alpha}$, les deux cas s'excluant (lemme 5). Orientons alors la liaison de α vers β, resp. β vers α. On obtient ainsi un graphe orienté; les sous-diagrammes du type $\overset{\alpha}{\bullet} \rightarrow \overset{\beta}{\bullet} \leftarrow \overset{\gamma}{\bullet}$ et $\overset{\alpha}{\bullet} \leftarrow \overset{\beta}{\bullet} \rightarrow \overset{\gamma}{\bullet}$ sont impossibles : le premier impose en effet $\rho_\alpha = \rho_{-\beta} = \rho_\gamma$, le second $\rho_{-\alpha} = \rho_\beta = \rho_{-\gamma}$, ce qui est exclu, d'après le lemme 5 puisque α et γ ne peuvent être liés. En chaque sommet du graphe « part » donc au plus une liaison et « arrive » au plus une liaison; le graphe ne peut avoir de point triple, donc est formé de chaînes, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Gardons les notations précédentes. Soient $R^{(1)}$ une composante irréductible de R et S un système de racines simples de $R^{(1)}$; soit δ l'opposé de la somme des éléments de S; alors $\Delta = S \cup \{\delta\}$ (diagramme de Dynkin complété) est un cycle (lorsque S n'a qu'un élément, ce diagramme est de la forme $\bullet \overset{\infty}{\text{—}} \bullet$; on convient de le représenter par $\bullet \rightleftarrows \bullet$). Orientons chaque liaison de ce cycle comme ci-dessus : dans la situation $\overset{\alpha}{\bullet} - \!\!\leftarrow\!\! - \overset{\beta}{\bullet}$, on a $\rho_\beta = \rho_{-\alpha}$. Comme les dispositions $\bullet - \!\!\rightarrow\!\! - \bullet - \!\!\leftarrow\!\! - \bullet$ et $\bullet - \!\!\leftarrow\!\! - \bullet - \!\!\rightarrow\!\! - \bullet$ sont impossibles, on obtient un cycle orienté. Il existe donc une unique numérotation $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de Δ telle que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha_1$ et que $\alpha_n = \delta$. Cette numérotation de Δ (ou la numérotation induite sur S) sera dite *canonique*. Les racines de $R^{(1)}$, combinaisons linéaires des éléments de S, sont les sommes de parties ni pleines ni vides de Δ; une telle partie P est totalement ordonnée, et possède un plus petit élément α_i et un plus grand élément α_{j-1}; inversement, si i et j sont deux entiers distincts compris entre 1 et n, il existe une unique partie P ayant les propriétés précédentes, on la note $P = \{\alpha \mid \alpha_i \leq \alpha < \alpha_j\}$; si α est la somme des éléments de P, on a, par application répétée de l'axiome (Sat′) $\rho_\alpha = \rho_{\alpha_i}$; d'ailleurs, $-\alpha$ est la somme de la partie complémentaire, donc $\rho_{-\alpha} = \rho_{\alpha_j}$. De plus, comme les ρ_{α_i}, $i = 1, \ldots, n$ sont distincts, ces deux dernières relations déterminent uniquement α.

Soit $\lambda_S = \rho_{\alpha_1} + \ldots + \rho_{\alpha_n}$; on a $\langle \lambda_S, \alpha \rangle \leq 0$, donc $\langle \lambda_S, \alpha \rangle = 0$ pour toute racine α (si α est définie par $\rho_\alpha = \rho_{\alpha_i}$, $\rho_{-\alpha} = \rho_{\alpha_j}$, on a donc $\langle \rho_{\alpha_k}, \alpha \rangle = 1$, -1, 0 selon que k vaut i, j ou autre chose). Nous dirons que la composante irréductible de R définie par S est *de type projectif* (nous verrons au numéro suivant la raison de cette terminologie) si $\lambda_S = 0$.

PROPOSITION 4. — *Soit* (R, ρ) *un système d'Enriques dans le groupe* M, *saturé ou p-saturé pour un nombre premier p convenable. Soit* $R_s = R \cap (-R)$ *la partie symétrique de* R, *soient* $R_s^{(1)}, \ldots, R_s^{(c)}$ *ses différentes composantes irréductibles* (prop. 3), *et* $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(c)}$ *les éléments de* M^* *correspondant.*

a. Le sous-groupe de M *orthogonal aux* $\lambda^{(i)}$ *est somme directe des sous-groupes engendrés par les* $R_s^{(i)}$ *et de l'orthogonal de* $\rho(R_s)$.

b. Si la composante $R_s^{(1)}$ *est de type projectif, et si* $\alpha \in R$, $\alpha \notin R_s^{(1)}$, *alors* α *est orthogonal à* $\rho(R_s^{(1)})$ *et* ρ_α *orthogonal à* $R_s^{(1)}$.

Soit S un système de racines simples de R_s; numérotons canoniquement chaque $S \cap R_s^{(i)}$; alors la matrice des $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle$ pour $\alpha, \beta \in S$ est triangulaire, de termes diagonaux égaux à 1 d'après ce qu'on a vu plus haut, d'où (*a*). Avec les hypothèses et notations de (*b*), soit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \alpha_1$ la numérotation canonique du diagramme de Dynkin complété associé à $R_s^{(1)} \cap S$; on a $\rho_{\alpha_1} + \ldots + \rho_{\alpha_n} = 0$. Si α appartient à R et n'est pas orthogonal à $\rho(R_s^{(1)})$, la relation précédente impose l'existence de deux entiers i, j avec $\langle \rho_{\alpha_i}, \alpha \rangle > 0$, $\langle \rho_{\alpha_j}, \alpha \rangle < 0$; si α_0 est l'élément de $R_s^{(1)}$ défini par $\rho_{\alpha_0} = \rho_{\alpha_i}$, $\rho_{-\alpha_0} = \rho_{\alpha_j}$, on a alors

$$\langle \rho_{-\alpha_0}, \alpha \rangle < 0, \qquad \langle \rho_\alpha, -\alpha_0 \rangle = \langle \rho_{\alpha_i}, -\alpha_0 \rangle = -1 < 0,$$

donc $\alpha - \alpha_0 = 0$, soit $\alpha = \alpha_0 \in R_s^{(1)}$. Enfin, si $\alpha \in R$, $\alpha \notin R_s^{(1)}$, on a $\rho_\alpha \neq \rho_{\alpha_i}$ d'après ce qui précède, donc $\langle \rho_{\alpha_i}, \alpha \rangle \leqq 0$, pour chaque i, donc $\langle \rho_{\alpha_i}, \alpha \rangle = 0$ pour chaque i.

Il résulte notamment de (*a*) et (*b*) ci-dessus que, si $R_s^{(1)}$ est de type projectif, M se décompose en somme directe $M' \oplus M''$ avec $R_s^{(1)} \subset M'$, $R - R_s^{(1)} \subset M''$, $\rho(R_s^{(1)}) \subset M'^*$, $\rho(R - R_s^{(1)}) \subset M''^*$; le système d'Enriques (M, R, ρ) est donc « *somme directe* » de $(M', R_s^{(1)}, \rho \mid R_s^{(1)})$ et $(M'', (R - R_s^{(1)}), \rho \mid (R - R_s^{(1)}))$; de plus, cela implique que $R_s^{(1)}$ est un système d'Enriques *maximal* dans M'.

THÉORÈME 2. — *Soient* k *un corps,* G *un* k*-groupe réductif connexe,* T *un tore maximal déployé de* G, f *un pseudo-projecteur de* G *sur* T, (M, R, ρ) *le système d'Enriques correspondant. Soient* S *un système de racines simples de* G, $(S_c)_{c \in C}$ *la famille de ses composantes irréductibles,* $(\Delta_c)_{c \in C}$ *les diagrammes de Dynkin complétés correspondants,* $(\alpha_{c,1}, \ldots, \alpha_{c,n(c)})$ *la numérotation canonique de* Δ_c, $c \in C$. *Posons* $\rho_{c,i} = \rho(\alpha_{c,i})$, *et* $\lambda_c = \rho_{c,1} + \ldots + \rho_{c,n(c)}$.

a. Le centre Z *de* G *est un sous-tore de* T; *pour chaque* $c \in C$, *l'image de* $\lambda_c : \boldsymbol{\mu}_k \to T$ *est contenue dans* Z.

b. Soit $c \in C$. *Il existe un homomorphisme* $\varphi_c : \mathbf{GL}_{n(c),k} \to G$, *uniquement déterminé, possédant les propriétés suivantes :*

1° $\varphi_c(\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{n(c)})) = \rho_{c,1}(\mu_1) \ldots \rho_{c,n(c)}(\mu_c)$;

2° *si* $P = \{ \alpha \mid \alpha_{c,i} \leqq \alpha < \alpha_{c,j} \}$ *est une partie connexe non pleine et non vide de* Δ_c *et* α_P *sa somme, on a* $\varphi_c(1 + \lambda E_{ij}) = x_\alpha(\lambda)$.

c. Les homomorphismes φ_c, $c \in C$, *commutent deux à deux. L'homomorphisme* $\varphi : Z \times \prod_{c \in C} \mathbf{GL}_{n(c)k} \to G$ *déduit de l'injection canonique de* Z *dans* G *et des* φ_c *est un épimorphisme. Le noyau de* φ *est le sous-tore de* $Z \times \boldsymbol{\mu}_k^C$ (*on* *identifie le centre de* $\mathbf{GL}_{nk}$ *à* $\boldsymbol{\mu}_k$) *graphe de l'homomorphisme de* $\boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{C}}$ *dans* Z *déduit des* λ_c.

d. φ *commute à* f *et au pseudo-projecteur canonique de* $\mathrm{Z}\times\prod \mathbf{GL}_{n(c)k}$: *plus précisément, on a*

$$f\Big(z\cdot\prod_{c\in\mathrm{C}}\varphi_c((a_{ij}))\Big)=z\cdot\prod_{c\in\mathrm{C}}\prod_{i=1}^{n(c)}\rho_{c,i}\Big(\sum_{j=1}^{n(c)}a_{i,j}\Big).$$

La partie (a) résulte de ce qui précède la proposition 4 et de la partie (a) de cette proposition (le sous-groupe engendré par R est facteur direct dans M). Considérons alors le groupe $\mathrm{G}'=\mathrm{Z}\times\prod_{c\in\mathrm{C}}\mathbf{GL}_{n(c)k}$, son tore maximal $\mathrm{T}'=\mathrm{Z}\times\prod_{c\in\mathrm{C}}\mathbf{D}_{n(c)k}$, et le pseudo-projecteur f' défini par

$$f'\Big(z\prod(a_{i,j})\Big)=z\prod \mathrm{diag}\Big(\sum_j a_{i,j}\Big)$$

(*cf.* exemple 2, n° 3). Le système d'Enriques (M′, R′, ρ') correspondant est défini comme suit. Notons N le groupe dual de Z, c'est-à-dire le quotient de M par le sous-groupe engendré par R; on a $\mathrm{M}'=\mathrm{N}\times\prod_{c\in\mathrm{C}}\mathbf{Z}^{n(c)}$; R′ et ρ' s'obtiennent par produit à partir des systèmes d'Enriques des différents facteurs $\mathbf{GL}_{n(c)k}$ (exemple 2). Soit ψ : M $\rightarrow$ M′ l'homomorphisme tel que pour $m\in\mathrm{M}$, on ait

$$\psi(m)=(n,\ (\rho_{c,i}(m))_{c\in\mathrm{C},\,1\leq i\leq n(c)}),$$

où n est la classe de m dans N; on peut alors appliquer à ψ la *remarque* 2 du n° 5 (§ 2) (nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les conditions de *loc. cit.* sont bien satisfaites) et on obtient un homomorphisme φ de G′ dans G qui satisfait à la condition (d). On note alors φ_c l'homomorphisme induit sur le facteur d'indice c de G′, et la vérification des assertions (b) et (c) est facile.

Le théorème précédent permet de décrire à conjugaison près *tous les sous-groupes réductifs déployés de rang maximum de* $\mathbf{Cr}_{nk}$. Ils correspondent aux systèmes (C, n, Z, λ), où C est un ensemble fini, $n=(n(c))_{c\in\mathrm{C}}$ une famille d'entiers ≥ 2, Z un k-tore déployé, et $\lambda:\boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{C}}\rightarrow\mathrm{Z}$ un homomorphisme. Un tel système étant donné, on considère l'opération naturelle de $\mathrm{G}'=\mathrm{Z}\times\prod_{c\in\mathrm{C}}\mathbf{GL}_{n(c)k}$ sur $\mathrm{X}'=\mathrm{Z}\times\prod_{c\in\mathrm{C}}(\mathbf{A}_k^{n(c)}-\{0\})$; on envoie d'autre part $\boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{C}}$ dans G′ par $(\mu_c)_{c\in\mathrm{C}}\mapsto(\lambda((\mu_c)),\ (\mu_c))$, qui est un monomorphisme; par cet homomorphisme $\boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{C}}$ opère librement sur X'. Le quotient X de X' par cette opération est le fibré principal de groupe Z sur $\prod_{c \in \mathrm{C}} \mathbf{P}_k^{n(c)-1}$ associé par λ au fibré canonique $\prod_{c \in \mathrm{C}} (\mathbf{A}_k^{n(c)} - \{0\})$; le quotient G de G' par $\boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{C}}$ opère fidèlement dans X, c'est le groupe cherché.

A chaque famille d'entiers positifs de support fini $m = (m_2, \ldots, m_r, \ldots)$ telle que $2m_2 + 3m_3 + \ldots + rm_r + \ldots = n$, associons le sous-groupe $\mathbf{S}^{(m)}$ de $\mathbf{Cr}_{nk}$ obtenu en faisant agir de manière évidente le groupe

$$\mathbf{PGL}_k^{(m)} = (\mathbf{PGL}_{2k})^{m_2} \times (\mathbf{PGL}_{3k})^{m_3} \times \ldots$$

sur la k-variété rationnelle

$$\mathbf{P}_k^{(m)} = (\mathbf{P}_k^2)^{m_2} \times (\mathbf{P}_k^3)^{m_3} \times \ldots$$

Corollaire. — *Soit* G *un sous-groupe semi-simple connexe déployé de rang n de* $\mathbf{Cr}_{nk}$.

a. Il existe une famille m uniquement déterminée, et un $a \in \mathbf{Cr}_n(k)$ *tel que* int (a) G $= \mathbf{S}^{(m)}$.

b. G *est un sous-groupe algébrique connexe maximal de* $\mathbf{Cr}_{nk}$.

La partie (a) résulte du théorème en y faisant Z $= 1$. La partie (b) résulte de la proposition 4, le système d'Enriques obtenu étant maximal.

Remarque 1. — A côté de $\mathbf{S}^{(m)}$, on pourrait aussi considérer le groupe $\mathbf{A}^{(m)}$ des automorphismes de $\mathbf{P}_k^{(m)}$; c'est le produit semi-direct par $\mathbf{S}^{(m)}$ d'un groupe constant fini, isomorphe au produit $\prod_i \mathfrak{S}_i^{m_i}$. Le corollaire 2 au théorème 4 du paragraphe 2, n° 5 montre alors que $\mathbf{A}^{(m)}$ est le normalisateur de $\mathbf{S}^{(m)}$ dans $\mathbf{Cr}_{nk}$ et que c'est un sous-groupe algébrique maximal de ce dernier.

Remarque 2. — En fait, la démonstration du théorème 2 donne l'existence d'un triplet (G, T, f) correspondant à un système d'Enriques réductif; cela permettrait, si on le désirait, de démontrer en général l'existence d'un groupe correspondant à un système d'Enriques saturé (resp. p-saturé) par dévissage. Nous donnerons au paragraphe suivant une construction basée sur une autre idée, qui a l'avantage de procurer directement un schéma en groupes sur $\mathbf{Z}$.

Remarque 3. — La proposition 4 (*b*) montre plus généralement que si G est un sous-groupe de $\mathbf{Cr}_{nk}$ contenant un tore déployé de dimension n, et si le système d'Enriques correspondant possède une composante irréductible de type projectif, alors G est le produit d'un groupe projectif $\mathbf{PGL}_{mk}$ par un sous-groupe de $\mathbf{Cr}_{n-m,k}$ possédant un tore déployé de dimension $n - m$.

4. Certains schémas à décomposition cellulaire.

1. Schéma défini par un monoïde. — Soit H un monoïde commutatif. Le $\mathbf{Z}$-foncteur qui associe à chaque schéma S, l'ensemble des homomorphismes de H dans le monoïde multiplicatif sous-jacent à l'anneau $H^0(S, \mathcal{O}_S)$, est représentable par le schéma Spec $\mathbf{Z}[H]$, où $\mathbf{Z}[H]$ est l'algèbre du monoïde H. Ce schéma est dit défini par le monoïde H. Par exemple, le schéma défini par $\mathbf{Z}$ est $\boldsymbol{\mu}$, le schéma défini par $\mathbf{N}$ est $\boldsymbol{\alpha}$.

Nous utiliserons cette construction dans la situation suivante. On considère un groupe abélien libre de type fini M, son dual M^*, et une partie K d'une base de M^*. Soit M_K le sous-monoïde de M formé des $m \in M$ tels que $\langle \rho, m \rangle \geqq 0$ pour tout $\rho \in K$; notons V_K le schéma défini par M_K. Si $\mathbf{Z}[M]$ désigne l'algèbre du groupe M et e^m l'élément de base de $\mathbf{Z}[M]$ associé à l'élément m de M, V_K est le spectre du sous-anneau $\mathbf{Z}[M_K]$ de $\mathbf{Z}[M]$ formé des combinaisons linéaires des e^m, $m \in M_K$. Par exemple, si $K = \emptyset$, V_K n'est autre que le $\mathbf{Z}$-tore T dual de M. De toutes façons, l'algèbre $\mathbf{Z}[M_K]$ est munie d'une graduation naturelle de type M, qui correspond à une opération du $\mathbf{Z}$-groupe T sur le $\mathbf{Z}$-schéma V_K (SGA 3, I, 4.7.3).

Lemme 1. — *Soient* M *un groupe abélien libre de type fini*, M^* *son dual*, K (resp. L) *une partie d'une base de* M^*, T *le* $\mathbf{Z}$-*tore dual de* M.

a. Le $\mathbf{Z}$-*schéma* V_K *est affine, lisse et de présentation finie à fibres géométriques intègres.*

b. Si $L \subset K$, *le morphisme canonique* $V_L \to V_K$ *est une immersion ouverte de* $\mathbf{Z}$-*schémas*, $\mathbf{Z}$-*dominante* (§ 1, n° 1), *compatible avec les opérations de* T.

c. Pour que le morphisme canonique $V_{K \cap L} \to V_K \times V_L$ *soit une immersion fermée, il faut et il suffit qu'on ait, entre parties de* M^*, *la relation* $\mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.L = \mathbf{N}.(K \cap L)$.

(Naturellement, si $E \subset M^*$, $\mathbf{N}.E$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers $\geqq 0$ des éléments de E.)

Soit K_1 le complémentaire de K dans une base de M^*, et soit $B \cup B_1$ la base duale de $K \cup K_1$; le monoïde M_K s'identifie naturellement à $\mathbf{N}^B \times \mathbf{Z}^{B_1}$, donc V_K à $\boldsymbol{\alpha}^B \times \boldsymbol{\mu}^{B_1}$, d'où (*a*). Si L est contenu dans K, soit C la partie de B associée à L; dans l'identification précédente, V_L devient $\boldsymbol{\alpha}^C \times \boldsymbol{\mu}^{B-C} \times \boldsymbol{\mu}^{B_1}$, d'où (*b*). Enfin, avec les notations de (*c*), le morphisme proposé est une immersion fermée si et seulement si l'application $\mathbf{Z}[M_K] \otimes \mathbf{Z}(M_L] \to \mathbf{Z}[M_{K \cap L}]$ est surjective, c'est-à-dire si $M_K + M_L = M_{K \cap L}$; d'autre part, l'ensemble des $\rho \in M^*$ tels que $\langle \rho, m \rangle \geqq 0$ pour $m \in M_K$ (resp. M_L, resp. $M_{K \cap L}$) est $\mathbf{N}.K$ [resp. $\mathbf{N}.L$, resp. $\mathbf{N}.(K \cap L)$]; l'égalité $M_K + M_L = M_{K \cap L}$ équivaut par polarité à $\mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.L = \mathbf{N}.(K \cap L)$, d'où (*c*).

Soit K comme ci-dessus, et soit L une partie finie de M^*; considérons l'homomorphisme de $\mathbf{Z}$-groupes $\boldsymbol{\mu}^K \to T$ associé par dualité à l'homomorphisme $M \to \mathbf{Z}^L$ défini par L.

LEMME 2. — *Soit* R *un anneau non nul. Pour qu'il existe un morphisme* $\boldsymbol{\alpha}_R^L \to (V_K)_R$ *prolongeant l'homomorphisme* $\boldsymbol{\mu}_R^L \to T_R$, *il faut et il suffit que* $L \subset \mathbf{N}.K$.

En effet, cela équivaut, à ce que l'homomorphisme $R[M_K] \to R[\mathbf{Z}^L]$ défini par L se factorise par $R[\mathbf{N}^L]$, c'est-à-dire que les éléments de L prennent des valeurs positives sur M_K, ce qui signifie que $L \subset \mathbf{N}.K$.

2. Éventails et schémas associés.

DÉFINITION 1. — *Soit* M^* *un groupe abélien libre de type fini. On appelle* éventail *dans* M^* *un ensemble fini* Σ *de parties de* M *tel que :*

a. chaque élément de Σ *est une partie d'une base de* M^*;

b. toute partie d'un élément de Σ *appartient à* Σ;

c. si K, $L \in \Sigma$, *on a* $\mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.L = \mathbf{N}.(K \cap L)$.

Toute partie héréditaire d'un éventail est un éventail, toute intersection d'éventails est un éventail.

Si Σ est un éventail, *le support* $|\Sigma|$ de Σ est défini par

$$|\Sigma| = \bigcup_{K \in \Sigma} K = \{\rho \in M^*, \{\rho\} \in \Sigma\}.$$

Pour tout $K \in \Sigma$, on a $\mathbf{N}.K \cap |\Sigma| = K$ [en effet, si $\rho \in \mathbf{N}.K \cap |\Sigma|$, on a $\rho \in \mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.\{\rho\} = \mathbf{N}.(K \cap \{\rho\})$, donc $K \cap \{\rho\} \neq \varnothing$ et $\rho \in K$]. D'après (*b*), $|\Sigma|$, muni de la structure défini par l'ensemble de parties Σ est un *schéma simplicial* ([6], p. 37).

Si $K \in \Sigma$, soit $\mathbf{N}_+.K$ l'ensemble des $\sum_{\rho \in K} a_\rho \rho$, où les a_ρ sont des entiers > 0.

En présence de (a), la condition (c) équivaut à

c'. *si* K, $L \in \Sigma$, *on a* $\mathbf{N}_+ . K \cap \mathbf{N}_+ . L = \emptyset$,

de sorte que les $\mathbf{N}_+ . K$, $K \in \Sigma$, forment une partition de la partie Ω de M^* réunion des $\mathbf{N} . K$, $K \in \Sigma$. On dit que Σ est *complet* si $\Omega = M^*$.

Soit n le rang de M^*. Considérons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $M^* \otimes \mathbf{R}$ et l'espace topologique S quotient de $M^* \otimes R - \{0\}$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les demi-droites ouvertes issues de l'origine (S est donc homéomorphe à la sphère euclidienne $\mathbf{S}_{n-1}$); pour chaque $K \in \Sigma$, soit E_K la partie de S image de $\mathbf{R}_+^* . K$, et notons S_Σ la réunion des S_K. Il est clair que S_Σ s'identifie naturellement à la *réalisation géométrique* du schéma simplicial $|\Sigma|$ *et que, pour* $K \in \Sigma$, E_K s'identifie alors à la partie fermée de S_Σ associée au simplexe K.

Exemples. — 1. Prenons $M^* = \mathbf{Z}^n$, soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les éléments de la base canonique, et posons $\rho_{n+1} = -\rho_1 - \ldots - \rho_n$. On prend pour $|\Sigma|$ l'ensemble des ρ_i, $i = 1, \ldots, n+1$ et pour Σ l'ensemble des parties de $|\Sigma|$ distinctes de la partie pleine. Alors Σ est un éventail complet, le schéma simplicial $|\Sigma|$ est le bord du simplexe type de dimension n.

2. Prenons $n = 2$, $M^* = \mathbf{Z}^2$; soit r un entier ≥ 0; posons $\rho_+ = (1, r)$, $\rho_- = (-1, 0)$, $\rho_0 = (0, -1)$, $|\Sigma| = \{\rho_+, \rho_-, \rho_0, -\rho_0\}$, et prenons pour Σ l'ensemble des parties suivantes de $|\Sigma|$: la partie vide, les parties à 1 élément, les parties $\{\rho_+, \pm\rho_0\}$, et $\{\rho_-, \pm\rho_0\}$. Alors Σ est un éventail complet dans M^*.

3. Nous verrons plus tard qu'on peut associer à tout système d'Enriques un éventail (*cf.* n° 7).

Soient M un groupe abélien libre de type fini, M^* son dual et Σ un éventail dans M^*. A chaque $K \in \Sigma$, associons le schéma V_K défini au n° 1, et considérons les morphismes $V_L \to V_K$ associés aux inclusions $L \subset K$, L, $K \in \Sigma$.

Définition 2. — *On appelle schéma défini par l'éventail* Σ *le schéma* X *obtenu par recollement des* V_K, K *parcourant* Σ, *à l'aide des immersions ouvertes* $V_{K \cap L} \to V_K$, $V_{K \cap L} \to V_L$, *pour* K, $L \in \Sigma$.

Proposition 1. — *Le* Z-*schéma* X *est lisse, séparé, de présentation finie, à fibres intègres.*

Cela résulte immédiatement du lemme 1 (n° 1) et des définitions.

Remarques. — 1. Si Σ est un ensemble de parties de M^* satisfaisant aux conditions (*a*) et (*b*) de la définition 1, on peut définir un schéma par la définition 2. Celui-ci est séparé si et seulement si Σ est un éventail (lemme 1).

2. Dans les deux exemples d'éventails donnés ci-dessus, on obtient respectivement pour X l'espace projectif type $\mathbf{P}^n$ et la surface appelée habituellement F_r ([8], p. 151).

Notons T le $\mathbf{Z}$-tore dual de M; il opère naturellement sur X et cette opération induit sur $V_\emptyset = T \subset X$ l'opération par translations de T sur lui-même.

Soit $K \in \Sigma$; posons $A_K = \mathbf{Z}[M_K]$ et considérons le sous-schéma ouvert $V_K = \operatorname{Spec} A_K$ de X; notons $f_K : M \to \mathbf{Z}^K$ l'homomorphisme défini par la partie K de M^*, de sorte que $M_K = f_K^{-1}(\mathbf{N}^K)$; soit M_K^+ la partie de M_K formée des m tels que $f_K(m) \neq 0$; on a $M_K = \operatorname{Ker} f_K \cup M_K^+$. Notons m_K l'idéal de A_K engendré par M_K^+; il définit un sous-schéma fermé $Z_K = \operatorname{Spec} A_K/m_K$ de V_K, et l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z}[\operatorname{Ker} f_K] \to A_K/m_K$ est bijectif. Notons e_K la section de Z_K associée par cet isomorphisme à la section unité du tore dual de $\operatorname{Ker} f_K$, c'est-à-dire du tore-quotient T/T_K, où T_K est le sous-tore de T image du morphisme $\boldsymbol{\mu}^K \to T$ dual de f_K. Avec ces notations, on a sans difficultés :

Proposition 2. — *a. L'ensemble* X *est réunion disjointe des ensembles sous-jacents aux sous-schémas* Z_K, K *parcourant* Σ. *Chaque ouvert* V_L, $L \in \Sigma$, *est réunion des* Z_K *pour* $K \subset L$.

b. Pour chaque $K \in \Sigma$, *l'adhérence dans* X *de la partie* Z_K *est la réunion des* Z_L, *où* $K \subset L$.

c. Pour chaque $K \in \Sigma$, *le morphisme* $t \mapsto t(e_K)$ *de* T *dans* X *induit un isomorphisme de* T/T_K *sur le sous-schéma* Z_K.

En d'autres termes, les *orbites* de T dans X sont des sous-schémas; elles correspondent bijectivement aux éléments de l'éventail Σ, et la relation « Z_L est adhérent à Z_K » équivaut à « $K \subset L$ ».

Notons que $Z_\emptyset = V_\emptyset = T$, et que $e_\emptyset = 1 \in T(Z)$.

Si L est une partie finie de M^*, l'homomorphisme de groupes $M \to \mathbf{Z}^L$ défini par L est associé à un homomorphisme de $\mathbf{Z}$-groupes $\boldsymbol{\mu}^L \to T$, que l'on appelle l'homomorphisme défini par L.

Proposition 3. — *Soit* L *une partie finie de* M^* *et soit* k *un corps. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe* $K \in \Sigma$ *tel que* $L \subset \mathbf{N}.K$;

(ii) *l'homomorphisme* $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{L}} \to \mathrm{T}$ *défini par* L *se prolonge en un morphisme* $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{L}} \to \mathrm{X}$;

(iii) *l'homomorphisme* $\boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{L}} \to \mathrm{T}_k$ *défini par* L *se prolonge en un morphisme de* $\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{L}}$ *dans* X_k.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : cela résulte du lemme 2 (n° 1).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : c'est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : soit $\varphi : \boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{L}} \to \mathrm{X}_k$ un morphisme prolongeant le morphisme $u : \boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{L}} \to \mathrm{T}_k$ défini par L; il existe $\mathrm{K} \in \Sigma$ tel que $\varphi(o, \ldots, o) \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}(k)$. Soit $(a_\rho)_{\rho \in \mathrm{L}}$ une famille d'entiers $> o$, et considérons les morphismes $\varphi_1 : \boldsymbol{\alpha}_k \to \boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{L}}$ et $u_1 : \boldsymbol{\mu}_k \to \boldsymbol{\mu}_k^{\mathrm{L}}$ envoyant x sur $(x^{a_\rho})_{\rho \in \mathrm{L}}$. Le morphisme $u \circ u_1 : \mu_k \to \mathrm{T}_k$ est défini par l'élément $\sum a_\rho \rho$ de M^*; comme

$$\varphi \circ \varphi_1(o) = \varphi(o, \ldots, o) \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}(k),$$

$\varphi \circ \varphi_1$ se factorise par $(\mathrm{V}_{\mathrm{K}})_k$. D'après le lemme 2 (n° 1), on a donc $\sum a_\rho \rho \in \mathbf{N}.\mathrm{K}$. Comme ceci est vrai pour toute famille (a_ρ) telle que $a_\rho > o$, on a $\mathrm{L} \subset \mathbf{N}.\mathrm{K}$.

Corollaire 1. — *Soit k un corps. Le k-schéma* X_k *et l'inclusion de* T_k *dans* X_k *déterminent l'éventail* Σ.

En effet, ils déterminent les parties $\mathbf{N}.\mathrm{K}$ de M^*, $\mathrm{K} \in \Sigma$, et chaque $\mathbf{N}.\mathrm{K}$ détermine la partie K dont elle provient.

Rappelons que les $\mathbf{N}_+.\mathrm{K}$, $\mathrm{K} \in \Sigma$, forment une partition de $\Omega = \bigcup_{\mathrm{K} \in \Sigma} \mathbf{N}.\mathrm{K} \subset \mathrm{M}^*$.

Corollaire 2. — *Soit* $\rho \in \mathrm{M}^*$. *Pour que le morphisme* $\rho : \boldsymbol{\mu} \to \mathrm{T}$ *se prolonge en un morphisme* $\bar{\rho} : \boldsymbol{\alpha} \to \mathrm{X}$, *il faut et il suffit que* $\rho \in \Omega$. *De plus, si cette condition est réalisée, on a les équivalences :*

$$(\bar{\rho}(o) \in \mathrm{Z}_{\mathrm{K}}(\mathbf{Z})) \iff (\bar{\rho}(o) = e_{\mathrm{K}}) \iff (\rho \in \mathbf{N}_+.\mathrm{K}),$$
$$(\bar{\rho}(o) \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}(\mathbf{Z})) \iff (\rho \in \mathbf{N}.\mathrm{K}).$$

La première assertion résulte de la proposition. Les autres se déduisent des constructions explicites données.

Lemme 3. — *Supposons l'éventail* Σ *complet. Soient* $\rho \in \mathrm{M}^*$ *et* $\mathrm{K} \in \Sigma$. *Il existe* $\mathrm{L} \in \Sigma$ *et* $\rho' \in \mathbf{N}.\mathrm{K}$ *tels que* $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$ *et* $\rho + \rho' \in \mathbf{N}.\mathrm{L}$.

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_r$ les éléments de K et considérons les éléments $\lambda_a = \rho + a(\rho_1 + \ldots + \rho_r) \in \mathrm{M}^\star$, $a \in \mathbf{N}$. Comme Σ est complet et fini, il existe $\mathrm{L} \in \Sigma$ tel que l'ensemble des $a \in \mathbf{N}$ tels que $\lambda_a \in \mathbf{N}.\mathrm{L}$ soit infini. On a alors nécessairement $\rho_1 + \ldots + \rho_r \in \mathbf{N}.\mathrm{L}$, donc

$$\rho_1 + \ldots + \rho_r \in \mathbf{N}.\mathrm{L} \cap \mathbf{N}.\mathrm{K} = \mathbf{N}.(\mathrm{L} \cap \mathrm{K}),$$

ce qui implique $\mathrm{L} \cap \mathrm{K} = \mathrm{K}$ et achève la démonstration.

Notons en particulier qu'il résulte de ce lemme que, lorsque Σ est complet, *tout élément maximal de* Σ *est une base de* M.

PROPOSITION 4. — *Soit k un corps. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le* **Z**-*schéma* X *est propre;*

(ii) *le k-schéma* X_k *est propre;*

(iii) *l'éventail* Σ *est complet.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : c'est trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : si X_k est propre, tout homomorphisme $\rho : \boldsymbol{\mu}_k \to \mathrm{T}_k$ se prolonge en un morphisme $\boldsymbol{\alpha}_k \to \mathrm{X}_k$; d'après la proposition 3, cela entraîne que Σ est complet.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : utilisons le critère valuatif de propreté (EGA, II, 7.3.8). Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions F, et soit $x \in \mathrm{X}(\mathrm{F})$. Soit $\mathrm{K} \in \Sigma$ tel que $x \in \mathrm{Z}_\mathrm{K}(\mathrm{F})$ (prop. 2). Reprenons les notations introduites avant la proposition 2. Le point x est donc défini par un homomorphisme de monoïdes u de M_K dans le monoïde multiplicatif F, qui envoie M_K^+ sur o, et $\mathrm{Ker} f_\mathrm{K}$ dans $\mathrm{F}^\star$. Composant $u \mid \mathrm{Ker} f_\mathrm{K}$ avec la valuation v de F, on obtient un homomorphisme de groupes $\varphi : \mathrm{Ker} f_\mathrm{K} \to \mathbf{Z}$, que l'on peut prolonger en un homomorphisme $\rho : \mathrm{M} \to \mathbf{Z}$. D'après le lemme 3, il existe une partie L de Σ, contenant K et un élément ρ' de $\mathbf{N}.\mathrm{K}$ tel que $\rho + \rho' \in \mathbf{N}.\mathrm{K}$; quitte à remplacer ρ par $\rho + \rho'$, on peut donc supposer que $\rho \in \mathbf{N}.\mathrm{L}$. Cela implique que $u : \mathrm{M}_\mathrm{K} \to \mathrm{F}$ envoie $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{M}_\mathrm{L}$ dans A et $\mathrm{M}_\mathrm{K}^+ \cap \mathrm{M}_\mathrm{L}$ sur o, donc que $u(\mathrm{M}_\mathrm{L}) \subset \mathrm{A}$. En d'autres termes, le point $x \in \mathrm{Z}_\mathrm{K}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{V}_\mathrm{L}(\mathrm{F})$ provient d'un élément de $\mathrm{V}_\mathrm{L}(\mathrm{A})$; l'application canonique $\mathrm{X}(\mathrm{A}) \to \mathrm{X}(\mathrm{F})$ est donc surjective et X est propre.

3. MODULES INVERSIBLES SUR X. — Gardons les notations précédentes. Soit $\mathbf{n} = (n_\rho)_{\rho \in |\Sigma|}$ un élément de $\mathbf{Z}^{|\Sigma|}$. Pour chaque $\mathrm{K} \in \Sigma$, soit $\mathrm{E}_{\mathrm{K},\mathbf{n}}$ le sous-$\mathbf{Z}$-module de $\mathbf{Z}[\mathrm{M}]$ engendré par les e^m tels que $\langle \rho, m \rangle \geqq - n_\rho$ pour $\rho \in \mathrm{K}$. Alors $\mathrm{E}_{\mathrm{K},\mathbf{n}}$ est un $\mathbf{Z}[\mathrm{M}_\mathrm{K}]$-module libre de rang 1 et, pour $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$, le morphisme canonique $\mathrm{E}_{\mathrm{K},\mathbf{n}} \otimes_{\mathbf{Z}[\mathrm{M}_\mathrm{K}]} \mathbf{Z}[\mathrm{M}_\mathrm{L}] \to \mathrm{E}_{\mathrm{K},\mathbf{n}}$ est bijectif.

DÉFINITION 3. — *On note $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ le $\mathcal{O}_X$-module inversible obtenu par recollement des $\mathcal{O}_{V_K}$-modules libres de rang un associés aux $\mathbf{Z}[M_K]$-modules* $E_{K,\mathbf{n}}$.

Notons Pic(X) le groupe de Picard de X (EGA, IV, 21.3.2).

PROPOSITION 5. — *L'application $\mathbf{n} \to \mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}})$ est un homomorphisme de groupes $\gamma : \mathbf{Z}^{|\Sigma|} \to \mathrm{Pic}(X)$ et, si $\sigma : M \to \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$ est l'homomorphisme $m \mapsto (\langle \rho, m \rangle)$, la suite*

$$M \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z}^{|\Sigma|} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}(X)$$

est exacte.

La première assertion résulte de ce que, si $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' \in \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$, la multiplication de $\mathbf{Z}[M]$ induit des isomorphismes $E_{K,\mathbf{n}} \otimes_{\mathbf{Z}[M_K]} E_{K,\mathbf{n}'} \xrightarrow{\sim} E_{K,\mathbf{n}+\mathbf{n}'}$. D'autre part, le module $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ est libre si et seulement si il existe $m \in M$ tel que e^m soit une $\mathbf{Z}[M_K]$-base de $E_{K,\mathbf{n}}$ pour tout K, c'est-à-dire tel que $\langle \rho, m \rangle = -n_\rho$ pour tout $\rho \in |\Sigma|$, ce qui prouve la deuxième assertion.

Soit P le groupe des relations entre les éléments de $|\Sigma|$; on a donc une suite exacte

$$0 \to P \to \mathbf{Z}^{|\Sigma|} \to M^*,$$

qui implique en particulier que P est facteur direct dans $\mathbf{Z}^{|\Sigma|}$, donc que l'on obtient par dualité une suite exacte

$$M \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z}^{|\Sigma|} \xrightarrow{\alpha} P^* \to 0.$$

La proposition 5 signifie donc que γ induit un monomorphisme du groupe libre de type fini P^* dans Pic(X).

Exemples. — 1. Soit Ω_X le module des différentielles de X et posons $\omega_X = \Lambda^n \Omega_X$, où $n = \dim X$. Alors ω_X *s'identifie naturellement à $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$, où* $\mathbf{n} = (-1, \ldots, -1)$.

En effet, le module des différentielles de $\mathbf{Z}[M]$ s'identifie à $\mathbf{Z}[M] \otimes_{\mathbf{Z}} M$, la différentielle de e^m étant de $e^m \otimes m$; le module des différentielles de $\mathbf{Z}[M_K]$ s'identifie alors au sous-$\mathbf{Z}[M_K]$-module de $\mathbf{Z}[M] \otimes_{\mathbf{Z}} M$ engendré par les $e^m \otimes m$ pour $m \in M_K$. Si on choisit une base e du $\mathbf{Z}$-module $\Lambda^n M$, il s'ensuit que ω_K est défini par recollement des $\mathcal{O}_{V_K}$-modules $\tilde{F}_K$ associés aux $\mathbf{Z}[M_K]$-modules F_K définis comme suit : si on choisit un isomorphisme

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n$$

de $\mathbf{N}^p \times \mathbf{Z}^{n-p}$ sur M_K tel que $m_1 \wedge \ldots \wedge m_n = e$, F_K est le sous-$\mathbf{Z}[M_K]$-module de $\mathbf{Z}[M]$ engendré par $e^{m_1+\ldots+m_n}$. Comme les $\rho \in K$ sont les formes linéaires $(a_i) \mapsto a_j$, $j = 1, \ldots, p$, on voit aussitôt que $F_K = E_{K,(-1,\ldots,-1)}$, ce qui implique le résultat annoncé.

2. Prenons pour Σ l'éventail donné dans l'exemple 1 du n° 2, de sorte que $X = \mathbf{P}^n$. Le module P des relations entre éléments de $|\Sigma|$ est engendré par l'unique élément $\rho_1 + \ldots + \rho_{n+1}$, de sorte que l'application $\mathbf{Z}^{|\Sigma|} \xrightarrow{\alpha} P^* \simeq \mathbf{Z}$ est donnée par la somme des coordonnées. *On a* $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} = \mathcal{O}_X(\alpha(\mathbf{n}))$. En effet, comme Pic(X) est le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par la classe de $\mathcal{O}_X(1)$ (résultat que nous retrouverons ci-dessous), on a $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} = \mathcal{O}_X(a\,\alpha(n))$ où $a \in \mathbf{Z}$; mais $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$, ce qui donne $a = 1$ d'après l'exemple 1.

Nous nous proposons maintenant de déterminer les groupes $H^i(X, \mathcal{L}_{\mathbf{n}})$. Remarquons d'abord que l'opération de T sur X se relève naturellement en une opération de T sur le X-module $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$, donc induit une représentation linéaire de T dans les groupes $H^i(X, \mathcal{L}_{\mathbf{n}})$, représentation qui les munit d'une graduation de type M. Plus généralement, pour tout anneau A, le A-module $H^i(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A)$ est muni d'une graduation de type M, dont nous noterons ${}^mH^i(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A)$ la composante homogène de degré $m \in M$.

Proposition 6. — *Soit* A *un anneau. Soit* $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$ *et soit* $m \in M$. *Notons* Σ_m *le sous-schéma simplicial de* Σ *formé des simplexes* K *tels que* $\langle \rho, m \rangle < -n_\rho$ *pour tout* $\rho \in K$. *Alors :*

1° *Si* $\Sigma_m = \{\emptyset\}$, *on a*

$$ {}^mH^0(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A) = A \quad \text{et} \quad {}^mH^i(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A) = 0 \quad \text{pour } i > 0. $$

2° *Si* $\Sigma_m \neq \{\emptyset\}$, *on a*

$$ {}^mH^0(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A) = 0, $$

$$ {}^mH^1(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A) \simeq \tilde{H}^0(\Sigma_m, A) \quad \text{et} \quad {}^mH^i(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A) \simeq H^{i-1}(\Sigma_m, A) \quad \text{pour } i > 1. $$

Calculons en effet les A-modules $H^i(X \otimes A, \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A)$ à l'aide du recouvrement ouvert affine $(V_K \otimes A)_{K \in \Sigma}$ de $X \otimes A$. Le complexe correspondant est

$$ \coprod E_{K,\mathbf{n}} \otimes A \to \coprod E_{K \cap L,\mathbf{n}} \otimes A \to \coprod E_{K \cap L \cap H,\mathbf{n}} \otimes A \to \ldots $$

où les produits sont étendus aux ensembles d'indices $K \in \Sigma$, $(K, L) \in \Sigma^2$, ..., les opérateurs-cobords étant donnés par la formule habituelle. Ce complexe est gradué de type M; sa partie homogène de degré m est le sous-complexe $C^\cdot$ du complexe « trivial »

$$ D^\cdot : \quad A^\Sigma \to A^{\Sigma \times \Sigma} \to A^{\Sigma \times \Sigma \times \Sigma} \to \ldots $$

tel que C^i soit formé des $(a_{K_0, \ldots, K_i}) \in A^{\Sigma^{i+1}}$ tels que $a_{K_0, \ldots, K_i} = 0$ si m n'appartient pas à $M_{K_0 \cap \ldots \cap K_i}$. Notant $E^\cdot$ le complexe quotient $C^\cdot/D^\cdot$, la suite exacte de cohomologie donne une suite exacte

$$0 \to H^0(C^\cdot) \to Z \to H^0(E^\cdot) \to H^1(C^\cdot) \to 0$$

et des isomorphismes $H^i(E^\cdot) \simeq H^{i+1}(C^\cdot)$ pour $i > 0$. Si $\Sigma_m = \{\varnothing\}$, alors $C^\cdot = D^\cdot$, d'où l'assertion 1°. Si $\Sigma_m \neq \{\varnothing\}$, on voit aussitôt que $H^0(C^\cdot) = 0$, et il suffit, pour achever la démonstration, d'exhiber des isomorphismes $H^i(E^\cdot) \simeq H^i(\Sigma_m, A)$.

Or, notons B_i la partie de Σ^{i+1} formée des suites $(K_0, \ldots, K_i)$ telles que $m \notin M_{K_0 \cap \ldots \cap K_i}$; il est clair que E. s'identifie au complexe

$$A^{B_0} \to A^{B_1} \to A^{B_2} \to \ldots,$$

où le cobord de $a = (a_{K_0, \ldots, K_i}) \in A^{B_i}$ est $da = ((da)_{K_0, \ldots, K_{i+1}})$ avec

$$(da)_{K_0, \ldots, K_{i+1}} = \sum_{i=0}^{i+1} (-1)^j a_{K_0, \ldots, \hat{K}_j, \ldots, K_{i+1}}.$$

D'autre part, si $K \in \Sigma$, la condition « $m \notin M_K$ » équivaut à « $K \cap |\Sigma_m| \neq \varnothing$ », où $|\Sigma_m| = \left\{ \rho \in |\Sigma| \,\middle|\, \langle \rho, m \rangle > -n_\rho \right\}$. Notant V la réalisation géométrique du schéma simplicial Σ_m, il s'ensuit que le complexe précédent s'identifie au complexe associé à A et au recouvrement *fermé* de V formé des réalisations géométriques des $K \cap |\Sigma_m|$, $K \in \Sigma$. Comme toute intersection de tels fermés est acyclique, on peut appliquer le théorème de Leray ([6], cor. au th. 5.2.4) et obtenir des isomorphismes $H^i(C^\cdot) \simeq H^i(V, A)$, d'où le résultat cherché.

COROLLAIRE 1. — *Si* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, *alors* $H^1(X \otimes A, \mathcal{O}_X \otimes A) = 0$ *pour tout anneau* A.

En effet, cela résulte de ce que $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathbf{Z}$-module libre et de la formule des coefficients universels.

COROLLAIRE 2. — *Si* Σ *n'est pas complet, on a* $H^n(X, \mathcal{L}_\mathbf{n}) = 0$ *pour* $n = \dim X$ *et tout* $\mathbf{n}$.

En effet, la réalisation géométrique de Σ est contenu dans S (notations du n° 2) mais est distincte de S, donc se plonge dans $\mathbf{R}^{n-1}$; il en est de même *a fortiori* pour les Σ_m.

COROLLAIRE 3. — *Si* Σ *est complet, on a* $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{Z}$ *et* $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *pour* $i > 0$.

En effet, la réalisation géométrique de Σ est S; celle de Σ_m, pour $m \neq 0$, est la réunion des cellules qui se trouvent dans le demi-espace ouvert $\langle \rho, m \rangle > 0$, donc est contractile.

Remarques. — On déduit aussitôt du théorème 1 un isomorphisme $H^n(X, \omega_X) = \mathbf{Z}$ lorsque X est propre.

Si S est un schéma, et si $\mathrm{Top}(S, \mathbf{Z})$ désigne le groupe des applications localement constantes de S dans $\mathbf{Z}$, l'homomorphisme γ de la proposition 5 définit canoniquement un homomorphisme

$$\gamma_S : \quad \mathrm{Top}(S, \mathbf{Z})^{|\Sigma|} \to \mathrm{Pic}(X \times S).$$

D'autre part, on a un homomorphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(X \times S) \to \prod_K \mathrm{Pic}(V_K \times S),$$

dont le composé avec le précédent est nul.

Théorème 1. — *Si* S *est un schéma, la suite*

$$\mathrm{Top}(S, \mathbf{Z})^{|\Sigma|} \xrightarrow{\gamma_S} \mathrm{Pic}(X \times S) \to \prod_{K \in \Sigma} \mathrm{Pic}(V_K \times S)$$

est exacte dans les deux cas suivants :

a. S *est réduit;*

b. $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

On peut évidemment supposer S affine, donc $S = \mathrm{Spec}\,A$, puis, par passage à la limite (les trois foncteurs en S considérés commutent aux limites inductives filtrantes d'anneaux), que A est noethérien. Soit $\mathcal{L}$ un module inversible sur $X \times S$, dont la restriction à chaque ouvert $V_K \times S$ est libre; il s'agit de prouver qu'il existe une partition de S en sous-schémas ouverts et fermés S_i tels que la restriction de $\mathcal{L}$ à chaque $X \times S_i$ soit de la forme $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i} \otimes \mathcal{O}_{S_i}$. Choisissons un isomorphisme des restrictions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{O}_{X \times S}$ à la section $e_\varnothing \times S$, et prolongeons cet isomorphisme en des isomorphismes des restrictions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{O}_{X \times S}$ à chaque ouvert affine $V_K \times S$ de $X \times S$. Alors $\mathcal{L}$ est défini par un 1-cocycle du recouvrement $(V_K \times S)$ à valeurs dans le système de coefficients $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}(V_K \times S)$ soit le groupe multiplicatif $A[M_K]^{(1)}$ des éléments inversibles d'augmentation 1 de l'anneau $A[M_K]$, cocycle que l'on peut modifier par un 1-cobord.

Soit donc $(b_{K,L})_{K,L \in \Sigma}$ un 1-cocycle. On a $b_{K,L} \in A[M_{K \cap L}]^{(1)}$ et $b_{K,L}\, b_{L,H}\, b_{H,K} = 1$ pour K, L, $H \in \Sigma$. Posant $b_K = b_{K,\varnothing}$, on a donc $b_{K,L} = b_L b_K^{-1}$, avec $b_K \in A[M]^{(1)}$.

Choisissons $K \in \Sigma$ et posons $b_K = \sum a_m e^m$. Pour chaque homomorphisme φ de A dans un corps F, $\varphi(b_K) = \sum \varphi(a_m) e^m$ est un élément d'augmentation 1 de F[M], donc est l'un des e^m, ce qui signifie que les $\varphi(a_m)$ sont tous nuls, sauf l'un qui vaut 1. Cela implique que les $\mathrm{Spec}(A)_{a_m}$ forment un recouvrement ouvert et fermé de Spec(A); quitte à remplacer successivement Spec(A) par chacun de ces ouverts, on peut donc supposer qu'il existe un m_K tel que $a_{m_K} - 1$ et les a_m pour $m \neq m_K$ soient nilpotents. Faisant ceci pour tous les K, on peut supposer que chaque b_K s'écrit $e^{m_K}(1 + b'_K)$, où les coefficients de b'_K sont nilpotents. Alors

$$b_{K,L} = e^{m_L - m_K}(1 + b'_L)(1 + b'_K)^{-1} \in A[M_{K \cap K}]^{(1)};$$

envoyant A dans un corps F, on en déduit que $e^{m_K - m_L}$ est un élément inversible de $F[M_{K \cap L}]$, c'est-à-dire que $\rho(m_L - m_K) = 0$ pour $\rho \in K \cap L$. Il s'ensuit qu'il existe une famille $(n_\rho)_{\rho \in |\Sigma|}$, telle que $\rho(m_K) = n_\rho$ pour $\rho \in K$. Quitte à tensoriser $\mathcal{L}$ par le module $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes \mathcal{O}_S$, on peut supposer que $m_K = 0$ pour tout K, de sorte que L est défini par un élément de $Z^1((V_K \times S), \mathcal{N})$, où le système de coefficients $\mathcal{N}$ est tel que $\mathcal{N}(V_K \times S)$ soit le groupe multiplicatif $1 + rA[M_K]$, où r est le nilradical de A. Il nous suffit donc maintenant de prouver que $H^1((U_K \times S), \mathcal{N}) = 0$. C'est clair si A est réduit, puisqu'alors $\mathcal{N} = \{1\}$. Dans le cas général, introduisant les $\mathcal{N}_i$ tels que $\mathcal{N}_i(V_K \times S) = 1 + r^i A[M_K]$, et remarquant que $\mathcal{N}_i / \mathcal{N}_{i+1}$ s'identifie au système de coefficients défini par le faisceau $\mathcal{O}_{X \times S}$, on voit qu'il suffit de prouver que $H^1((V_K \times S), \mathcal{O}_{X \times S}) = 0$. Mais les $V_K \times S$ sont affines, de sorte que ce groupe s'identifie à $H^1(X \times S, \mathcal{O}_{X \times S})$, qui est nul dans le cas (*b*) en vertu du corollaire 1 à la proposition 6.

COROLLAIRE 1. — *Soit* A *un anneau. On suppose satisfaite l'une des deux hypothèses suivantes :*

a. A *est factoriel;*

b. A *est local artinien et* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Alors tout $\mathcal{O}_{X \otimes A}$*-module inversible est de la forme* $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \otimes A$ *où* $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$.

En effet, on a $\mathrm{Pic}(V_K \otimes A) = 0$ si A est factoriel ou local artinien.

Cela s'applique en particulier pour $A = \mathbf{Z}$; il s'ensuit que Pic(X) *est libre de type fini* et qu'on a la suite exacte

$$M \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z}^{|\Sigma|} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}(X) \to 0$$

[ou de manière équivalente, que l'homomorphisme $P^* \to \mathrm{Pic}(X)$ est bijectif].

Considérons maintenant le foncteur de Picard $\mathbf{Pic}_X$ de X [défini ici comme le faisceau (fpqc) associé au préfaisceau $S \mapsto \mathrm{Pic}(X \times S)$]. Si $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{Z}}$ est le schéma constant défini par Pic(X), on a un homomorphisme canonique $\lambda : \mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Pic}_X$.

Corollaire 2. — *Si* X *est propre, l'homomorphisme canonique*

$$\lambda : \quad \mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Pic}_X$$

est un isomorphisme : le foncteur Pic_X *est un schéma constant.*

Par passage aux faisceaux (fpqc) associés, le théorème donne une suite exacte $(\mathbf{Z}^{|\Sigma|})_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Pic}(X) \to \prod \mathbf{Pic}(U_K)$, de sorte que λ est un monomorphisme. Il s'agit de prouver que $\lambda(S)$ est surjectif pour tout schéma S. La démonstration s'effectue en plusieurs temps :

1° $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est local artinien. L'assertion résulte alors du corollaire 1 et du corollaire 3 à la proposition 6.

2° $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est local noethérien complet. Cela résulte de 1° puisque source et but de λ commutent aux limites projectives du genre $A = \varprojlim (A/r(A)^n)$.

3° $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est local noethérien. Notons $\hat{A}$ le complété de A; alors $\lambda(A)$ et $\lambda(\hat{A} \otimes_A \hat{A})$ sont injectifs et $\lambda(\hat{A})$ bijectif d'après 2°; d'où le résultat puisque source et but de λ sont des faisceaux (fpqc).

4° Le passage de 3° au cas général se fait par les techniques habituelles (la source et le but de λ sont des foncteurs locaux et commutent aux limites inductives d'anneaux).

4. Critère d'amplitude. — Conservons les notations précédentes. Soit $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$; posons

$$\Lambda = \{ m \in M \mid \langle \rho, m \rangle > -n_\rho \text{ pour tout } \rho \in |\Sigma| \}.$$

le $\mathbf{Z}$-module $H^0(X, \mathcal{L}_{\mathbf{n}})$ s'identifie naturellement au sous-$\mathbf{Z}$-module libre de base $(e^m)_{m \in \Lambda}$ de $\mathbf{Z}[M]$.

Lemme 4. — *Pour que le* $\mathcal{O}_X$*-module* $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ *soit engendré par ses sections, il faut et il suffit que, pour tout* $K \in \Sigma$, *il existe* $m_K \in \Lambda$ *tel que* $\langle \rho, m_K \rangle = -n_\rho$ *pour tout* $\rho \in K$.

En effet, il s'agit de vérifier que le $\mathbf{Z}[M_K]$-module $E_{K,\mathbf{n}}$ est engendré par Λ pour tout $K \in \Sigma$, ce qui donne aussitôt la condition ci-dessus.

Si $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ est engendré par ses sections, il définit un $\mathbf{Z}$-morphisme canonique

$$\varphi : \quad X \to \mathbf{P}(\mathbf{Z}^{(\Lambda)}),$$

que l'on peut construire ainsi : soit $K \in \Sigma$, et soit m_K un élément de Λ satisfaisant à la condition du lemme 4. Pour chaque $m \in \Lambda$, l'élément $m - m_K$ de M appartient à M_K, donc définit un morphisme de V_K dans la droite affine; on construit ainsi un morphisme $x \mapsto (e^{m-m_K}(x))_{m\in\Lambda}$ de U_K dans le fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathbf{Z}^{(\Lambda)})$. Comme m_K est l'un des m, ce morphisme se factorise par le complémentaire de la section nulle, et on obtient un morphisme $\varphi_K : V_K \to \mathbf{P}(\mathbf{Z}^{(\Lambda)})$ par composition avec la projection canonique. Le morphisme φ associé à $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ induit φ_K sur chaque V_K.

Rappelons que $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ est dit *très ample* s'il est engendré par ses sections et si φ est une immersion. Il revient au même de dire (EGA, II, 4.4.4) qu'il existe une immersion de X dans un fibré projectif telle que $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ soit l'image réciproque du faisceau canonique.

Pour énoncer le théorème suivant, posons pour tout K,

$$H_K = \{ m \in M \mid \langle \rho, m \rangle = -n_\rho \text{ pour } \rho \in K \}.$$

Notons que les différences de deux éléments de H_K forment un sous-groupe H_K^0 de M et que H_K est un espace homogène principal sous H_K^0; nous dirons qu'une partie B de H_K engendre l'espace homogène H_K si B est non vide et si, pour $b \in B$, les $m - b$, $m \in B$, engendrent H_K^0.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ *est très ample;*

(ii) *pour tout* $K \in \Sigma$, $\Lambda \cap H_K$ *engendre l'espace homogène* H_K.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : supposons $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ très ample, soit $K \in \Sigma$, et soit $m_K \in \Lambda \cap H_K$ (lemme 4). Considérons l'immersion $T/T_K \to X$ (nº 2, prop. 2) et son composé avec φ. C'est une immersion, donc un monomorphisme. D'autre part, le tore T/T_K est le dual de H_K^0, et le morphisme $t \mapsto (t.e_K)$ considéré applique le point t de T/T_K sur le point de coordonnées homogènes $(a_m)_{M\in\Lambda}$, avec $a_m = m(t)/m_K(t)$ si $m \in \Lambda \cap H_K$, $a_m = 0$ sinon. Il s'ensuit que l'homomorphisme $T/T_K \to \boldsymbol{\mu}^{\Lambda\cap H_K}$ donné par les $m - m_K$ est un monomorphisme, ce qui signifie que les $m - m_K$, $m \in \Lambda \cap H_K$, engendrent H_K^0, d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : supposons (ii) satisfait. D'après le lemme 4, $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ est engendré par ses sections. Pour prouver que φ est une immersion, il suffit de prouver qu'il existe pour tout $K \in \Sigma$ un ouvert V'_K de $\mathbf{P}(\mathbf{Z}^{(\Lambda)})$ tel que $\varphi^{-1}(V'_K) = V_K$ et que φ induise une immersion *fermée* de V_K dans V'_K (EGA, I, 4.2.4).

Fixons donc $K \in \Sigma$; d'après le lemme 4, il existe $m_K \in \Lambda$ tel que $\langle \rho, m_K \rangle = -n_\rho$ pour $\rho \in K$; quitte à remplacer la famille (n_ρ) par la famille $(n_\rho + \langle \rho, m_K \rangle)$, ce qui remplace $\mathcal{L}_\mathbf{n}$ par un module isomorphe, on peut supposer que $n_\rho = 0$ pour $\rho \in K$.

Pour chaque $m \in \Lambda$, notons h_m l'élément de base de $\mathbf{Z}[\mathbf{N}^{(\Lambda)}]$ [algèbre affine de $\mathbf{V}(\mathbf{Z}^{(\Lambda)})$] associé à m; soit $(m_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de $\Lambda \cap H_K$, engendrant H_K, et soit h le produit des h_{m_i}. Nous allons montrer que les conditions ci-dessus sont satisfaites, en prenant pour V'_K l'ouvert défini par la fonction homogène h.

1° *On a* $\varphi^{-1}(V'_K) = V_K$. Il suffit de démontrer que $\varphi^{-1}(V'_K) \cap V_L = V_{L \cap K}$ pour tout L; or, si m_L possède la propriété du lemme 4, les points de $\varphi^{-1}(V'_K) \cap V_L$ sont les points x de V_L tels que $e^{m_i - m_L}(x)$ soit inversible pour tout i; on a donc $\varphi^{-1}(V_K) \cap V_L = V_H$, où H est l'ensemble des $\rho \in L$ tels que $\rho(m_i) = \rho(m_K) = -n_\rho$ pour tout i, donc $\rho(m) = -n_\rho$ pour tout $m \in H_K$. Il s'agit donc de prouver que si $\rho \in |\Sigma|$, et si $\rho(m) = -n_\rho$ pour tout $m \in H_K$, on a $\rho \in K$. Or cela implique que ρ est combinaison linéaire des éléments de K et que $n_\rho = 0$. Écrivons donc $\rho = \sum_{j=1}^{r} a_j \rho_j$, où les ρ_j sont les différents éléments de K; en vertu de la définition des éventails, il suffit de prouver que tous les a_j sont ≥ 0. Si l'un d'eux, par exemple a_1, était < 0, on aurait $\Lambda \cap H_{K'} = \Lambda \cap H_K$ où $K' = \{\rho_2, \ldots, \rho_r\}$, ce qui contredirait (ii) appliqué à K et K'.

2° *Le morphisme* $V_K \to V'_K$ *induit par* φ *est une immersion fermée.* Par définition, l'anneau affine de l'ouvert affine V'_K est formé des fractions homogènes $P((h_m)_{m \in \Lambda}) / Q((h_m)_{m \in \Lambda \cap H_K})$, et il s'agit donc de prouver que tout élément de M_K est différence d'un élément de $\mathbf{N}.\Lambda$ et d'un élément de $\mathbf{N}.(\Lambda \cap H_K)$. Fixons-nous d'abord $\rho \in K$ et posons $L = K - \{\rho\}$; d'après la condition (ii) appliquée à K et L, on a $\Lambda \cap H_K \neq \Lambda \cap H_L$; il s'ensuit que $\langle \rho, \Lambda \cap H_L \rangle$ est un intervalle de $\mathbf{N}$ contenant 0 et non réduit à 0 : il existe donc $m_\rho \in \Lambda$ tel que $\langle \mu, m_\rho \rangle = 0$ pour $\mu \in K$, $\mu \neq \rho$, et $\langle \rho, m_\rho \rangle = 1$. Choisissons donc pour chaque $\rho \in K$ un $m_\rho \in \Lambda$ possédant la propriété précédente. Soit $m \in M_K$; on a $\langle \rho, m \rangle \geq 0$ pour tout $\rho \in K$, et m s'écrit $\sum \langle \rho, m \rangle m_\rho + m'$, où $m' \in H_K$; mais, en vertu de (ii), m' est différence de deux éléments de $\Lambda \cap H_K$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — 1. Soit k un corps. La démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii) reste encore valable si on remplace (i) par (i') $\mathcal{L}_\mathbf{n} \otimes k$ est très ample sur $X \otimes k$.

Il s'ensuit que (i') est équivalent à (i) et (ii).

Rappelons (lemme 3 du n° 2) que si Σ est complet, chaque élément maximal de Σ est une base de M^*.

Corollaire 1. — *Supposons Σ complet et soit $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{|\Sigma|}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ est très ample;*

(ii) *$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ est ample* (i. e. *$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{\otimes m}$ est très ample pour m assez grand*);

(iii) *pour tout élément maximal* K *de* Σ, *l'unique élément* m_K *de* M *tel que* $\langle \rho, m_K \rangle = -n_\rho$ *pour* $\rho \in K$ *est tel que* $\langle \rho, m_K \rangle > -n_\rho$ *pour* $\rho \in |\Sigma|$, $\rho \notin K$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : supposons $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ très ample et soit K un élément maximal de Σ. D'après le théorème 2, il existe m_K dans Λ tel que $\langle \rho, m_K \rangle = -n_\rho$ pour $\rho \in K$ et il s'agit de prouver que $\langle \rho, m_K \rangle > -n_\rho$ pour $\rho \in K$. Quitte à remplacer (n_ρ) par $(n_\rho + \langle \rho, m_K \rangle)$, on peut supposer $m_K = 0$ et $n_\rho = 0$ pour $\rho \in K$. Soit $\rho \notin K$; comme K est une base de M^*, ρ s'écrit $\Sigma a_i \rho_i$ où les ρ_i sont des éléments distincts de K et où $a_i \in Z$; par définition des éventails, l'un des a_i, par exemple a_1, est < 0. Posons alors $L = K - \{\rho_1\}$, et considérons $\Lambda \cap H_L$. Pour $m \in \Lambda \cap H_L$, on a $0 \leqq \langle \rho_1, m \rangle \leqq -n_\rho / a_1$; en vertu du théorème 2 appliqué à L, cela impose $n_\rho > 0$, donc $0 = \langle \rho, m_K \rangle > -n_\rho$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : soit K dans Σ; démontrons que la condition (ii) du théorème 2 est satisfaite pour K par récurrence descendante sur Card(K). Si K est maximal, cela résulte directement de (iii); supposons donc qu'il existe $\rho \in |\Sigma|$, $\rho \notin K$ tel que $K \cup \{\rho\} = K' \in \Sigma$ et que $\Lambda \cap H_{K'}$ engendre $H_{K'}$. Comme ci-dessus, on peut supposer que $n_\rho = 0$ pour $\rho \in K'$. Or, d'après le lemme 3 du n° 2, il existe une partie maximale L de Σ, contenant K et telle qu'il existe $\rho' \in \mathbf{N}.K$ avec $\rho' - \rho \in \mathbf{N}.L$; on a nécessairement $\rho \notin L$, donc d'après (ii), $m_L \in \Lambda \cap H_K$ et $\langle \rho, m_L \rangle > 0$. Il s'ensuit que $\Lambda \cap H_K$ engendre H_K (puisqu'il contient $\Lambda \cap H_{K'}$ qui engendre $H_{K'}$ et m_L qui n'appartient pas à $H_{K'}$).

(i) $\Rightarrow$ (ii) : cela résulte de l'équivalence de (i) et de (iii) et du fait qu'il est manifestement équivalent de vérifier (iii) pour $\mathbf{n}$ ou pour un multiple $k\mathbf{n}$, $k > 0$.

Remarques. — 2. Il n'est pas vrai qu'il existe toujours un $\mathbf{n}$ satisfaisant à la condition (ii) du théorème 2, c'est-à-dire que X soit toujours quasi-projectif (*voir* appendice).

3. Il résulte de la remarque 1 que X est quasi-projectif dès qu'il existe un corps k tel que X_k soit quasi-projectif; cela est en particulier le cas lorsqu'une des fibres de X est un espace homogène.

4. On peut déduire de la condition du théorème 2 que, lorsque X est quasi-projectif, il possède un module ample invariant par tout automorphisme.

5. Racines d'un éventail et groupes à un paramètre d'automorphismes. — Gardons les notations précédentes. Soit $\mathrm{Der}(T)$ le $\mathbf{Z}$-module des dérivations du $\mathbf{Z}$-schéma T, i. e. des dérivations de la $\mathbf{Z}$-algèbre $\mathbf{Z}[M]$. Pour $\alpha \in M$ et $\lambda \in M^*$, on définit une dérivation $D_{\alpha,\lambda}$ de $\mathbf{Z}[M]$ par

$$D_{\alpha,\lambda}(e^m) = \langle \lambda, m \rangle e^{m-\alpha}.$$

Lemme 5. — *Pour toute dérivation* D *de* $\mathbf{Z}[M]$, *il existe une application unique* $\lambda : M \to M^*$ *à support fini, telle que* $D = \sum_{\alpha \in M} D_{\alpha,\lambda(\alpha)}$.

En effet, il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in M}$ d'applications de M dans Z telle que $D(e^m) = \sum e^{m-\alpha} a_\alpha(m)$. Écrivant que D est une dérivation, on voit que chaque a_α est un homomorphisme, d'où le lemme.

Proposition 7. — *L'homomorphisme canonique* $\mathrm{Der}(X) \to \mathrm{Der}(T)$ *est injectif. Pour que* $\sum_{\alpha \in M} D_{\alpha,\lambda(\alpha)} \in \mathrm{Der}(X)$, *il faut et il suffit que* $D_{\alpha,\lambda(\alpha)} \in \mathrm{Der}(X)$ *pour tout* $\alpha \in M$. *Pour que* $D_{\alpha,\lambda} \in \mathrm{Der}(X)$, *il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soient satisfaites :*

1° *pour tout* $\rho \in |\Sigma|$, *on a* $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$;

2° *il existe* $\rho_\alpha \in |\Sigma|$ *tel que :*

a. on a $\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$,

b. si $\rho \in |\Sigma|$ *et* $\rho \neq \rho_\alpha$, *alors* $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$,

c. $\lambda \in \mathbf{Z}\rho_\alpha$.

La première assertion est claire : les dérivations de X sont les dérivations $D = \sum D_{\alpha,\lambda(\alpha)}$ de $\mathbf{Z}[M]$ qui appliquent $\mathbf{Z}[M_K]$ dans $\mathbf{Z}[M_K]$ pour tout $K \in \Sigma$. En particulier, prenons $\rho \in |\Sigma|$ et $K = \{\rho\} \in \Sigma$. Si $m \in M$ avec $\langle \rho, m \rangle \geqq 0$, on doit avoir $\sum \langle \lambda(\alpha), m \rangle e^{m-\alpha} \in \mathbf{Z}[M_K]$, donc pour chaque $\alpha \in M$:

($\star$) si $m \in M$, $\rho \in |\Sigma|$ avec

$$\langle \lambda(\alpha), m \rangle \neq 0, \qquad \langle \rho, m \rangle \geqq 0, \qquad \text{alors } \langle \rho, m-\alpha \rangle \geqq 0.$$

Si $\lambda(\alpha)$ n'est proportionnel à aucun $\rho \in |\Sigma|$, il existe pour chaque ρ un m tel que $\langle \lambda(\alpha), m \rangle \neq 0, \langle \rho, m \rangle = 0$; la condition ($\star$) implique alors $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$, de sorte que α satisfait à la condition 1° de l'énoncé. Si $\lambda(\alpha) = m\rho_0$, où $\rho_0 \in |\Sigma|$ et $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$, le raisonnement précédent montre que $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$ pour tout $\rho \in |\Sigma|$ distinct de ρ_0 et de $-\rho_0$; d'autre part, la condition ($\star$) implique que si $m \in \mathrm{M}$ avec $\langle \rho_0, m \rangle > 0$, alors $\langle \rho_0, m - \alpha \rangle \geqq 0$, ce qui signifie que $\langle \rho_0, \alpha \rangle \leqq 1$. Alors trois cas sont possibles : ou bien $\langle \rho_0, \alpha \rangle = 1$ et on est dans le cas 2° de l'énoncé avec $\rho_\alpha = \rho_0$; ou bien $-\rho_0 \in |\Sigma|$ et $\langle -\rho_0, \alpha \rangle = 1$, et on est dans le cas 2° avec $\rho_\alpha = -\rho_0$; ou bien $\langle \rho_0, \alpha \rangle \leqq 0$ et, si $-\rho_0 \in |\Sigma|, \langle -\rho_0, \alpha \rangle \leqq 0$, et on est dans le cas 1°. Pour achever la démonstration, il suffit maintenant de prouver que si le couple (α, λ) satisfait à l'une des conditions 1° et 2°, on a $\mathrm{D}_{\alpha,\lambda} \in \mathrm{Der}(\mathrm{X})$, ce qui est immédiat.

DÉFINITION 4. — *On appelle racines de* Σ *les éléments* α *de* M *tels qu'il existe* $\rho_\alpha \in \mathrm{M}^\star$ *tel que :*

1° $\rho_\alpha \in |\Sigma|$.

2° *On a* $\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$ *et* $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$ *pour tout* $\rho \in |\Sigma|$ *tel que* $\rho \neq \rho_\alpha$.

3° *Si* $\mathrm{K} \in \Sigma$ *et* $\langle \rho, \alpha \rangle = 0$ *pour tout* $\rho \in \mathrm{K}$, *alors* $\mathrm{K} \cup \{\rho_\alpha\} \in \Sigma$.

Remarques. — 1. Les deux conditions 1° et 2° de la définition déterminent ρ_α.

2. *Si* α *et* β *sont deux racines de* Σ, *et si* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$ *et* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$, *alors* $\alpha + \beta$ *est une racine de* Σ *et* $\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta$. Vérifions en effet les conditions de la définition 4 pour $\alpha + \beta$ avec $\rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta$. On a bien $\langle \rho_\beta, \alpha + \beta \rangle = 1$; d'autre part, si $\rho \in |\Sigma|$ et si $\rho \neq \rho_\beta$, alors ou bien $\rho = \rho_\alpha$ et alors

$$\langle \rho, \alpha + \beta \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle + 1 \leqq 0,$$

ou bien $\rho \neq \rho_\alpha, \rho_\beta$ et alors $\langle \rho, \alpha + \beta \rangle \leqq 0$, d'où 2°. Enfin, soit K tel que $\langle \mathrm{K}, \alpha + \beta \rangle = 0$. Si $\rho_\alpha \notin \mathrm{K}$, on a $\langle \rho, \beta \rangle = 0$ pour tout $\rho \in \mathrm{K}$, et $\mathrm{K} \cup \{\rho_\beta\}$ est un élément de Σ puisque β est une racine de Σ; si $\rho_\alpha \in \mathrm{K}$, posons $\mathrm{K} = \mathrm{K}' \cup \{\rho_\alpha\}$ où $\rho_\alpha \notin \mathrm{K}'$; le raisonnement précédent s'applique à K', de sorte que $\mathrm{K}'' = \mathrm{K}' \cup \{\rho_\beta\} \in \Sigma$; mais $\langle \mathrm{K}'', \alpha \rangle = 0$, donc $\mathrm{K}'' \cup \{\rho_\alpha\} \in \Sigma$, d'où 3°.

3. *Supposons que l'éventail* Σ *soit maximal parmi les éventails de support* $|\Sigma|$ (c'est par exemple le cas lorsque Σ est complet). *Alors la condition* 3° *est conséquence de* 1° *et* 2°. Soient en effet α et ρ_α satisfaisant à 1° et 2°, et soit $\mathrm{K} \in \Sigma$ tel que $\langle \mathrm{K}, \rho_\alpha \rangle = 0$; montrons que $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mathrm{K} \cup \{\rho_\alpha\}\}$ est un éventail (comme $\Sigma \subset \Sigma'$ et $|\Sigma| = |\Sigma'|$, cela impliquera $\Sigma = \Sigma'$, donc

$K \cup \{\rho_\alpha\} \in \Sigma$). Vérifions donc pour Σ' les trois conditions de la définition 1 (n° 2) :

1° il suffit de prouver que $K \cup \{\rho_\alpha\}$ fait partie d'une base de M; or cela est clair puisqu'il en est ainsi de K et que $\langle K, \alpha \rangle = 0$, $\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$;

2° c'est clair;

3° il suffit de prouver que si $L \in \Sigma$, alors

$$\mathbf{N}.(K \cup \{\rho_\alpha\}) \cap \mathbf{N}.L \subset \mathbf{N}.((K \cup \{\rho_\alpha\}) \cap L).$$

Soit $y \in \mathbf{N}.(K \cup \{\rho_\alpha\}) \cap \mathbf{N}.L$; on peut écrire $y = x + \lambda\rho_\alpha$, avec $x \in \mathbf{N}.K$ et $\lambda \in \mathbf{N}$; on a alors $\langle y, \alpha \rangle = \lambda$. Distinguons deux cas. Si $\rho_\alpha \notin L$, alors $\langle \rho, \alpha \rangle \leq 0$ pour $\rho \in L$, donc $\langle y, \alpha \rangle \leq 0$, donc $\lambda = 0$, et

$$x \in \mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.L \subset \mathbf{N}.(K \cap L).$$

Si $\rho_\alpha \in L$, écrivons $L = \{\rho_\alpha\} \cup L'$ avec $\rho_\alpha \notin L'$, donc $\langle \rho, \alpha \rangle \leq 0$ pour $\rho \in L'$; on a $y = x' + \lambda'\rho_\alpha$ où $x' \in \mathbf{N}.L'$, donc $\lambda = \langle y, \alpha \rangle = \langle x', \alpha \rangle + \lambda' \leq \lambda'$; cela donne

$$x = x' + (\lambda' - \lambda)\,\alpha \in \mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.L = \mathbf{N}.(K \cap L) \qquad \text{et} \qquad y \in \mathbf{N}.(K \cap L) + \mathbf{N}\rho_\alpha.$$

Pour chaque $\alpha \in M$, notons $T \dot{\times}_\alpha \boldsymbol{\alpha}$ le produit semi-direct de T par $\boldsymbol{\alpha}$, pour l'opération de T sur $\boldsymbol{\alpha}$ définie par le caractère α de T.

THÉORÈME 3. — *Soit k un corps et soit $\alpha \in M$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *α est une racine de Σ;*

(ii) *il existe une opération de $(T \dot{\times}_\alpha \boldsymbol{\alpha})_k$ sur X_k, prolongeant l'opération donnée de T_k sur X_k, et n'induisant pas l'opération triviale de $\boldsymbol{\alpha}_k$.*

De plus, si ces conditions sont satisfaites, notons $\rho_\alpha \in M^*$ l'élément introduit dans la définition 4. Il existe un unique homomorphisme $x_\alpha : \boldsymbol{\alpha} \to \mathbf{Aut}(X)$ tel que, si S est un k-schéma, si $\lambda \in \boldsymbol{\alpha}(S)$ et $t \in T(S)$, on ait :

a. $t x_\alpha(\lambda) t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\lambda)$;

b. si $1 + \lambda/\alpha(t)$ *est inversible, alors* $x_\alpha(\lambda)$ *transforme* $t \in T(S) \subset X(S)$ *en* $t\rho_\alpha(1 + \lambda/\alpha(t)) \in T(S) \subset X(S)$.

Démonstration. — Démontrons d'abord que (ii) $\Rightarrow$ (i), et soit ψ l'opération donnée dans (ii). D'après le paragraphe 2 [n° 2, (*e*)], il existe $z \in k^*$ et $\rho_0 \in M^*$ tels que $\langle \rho_0, \alpha \rangle = 1$ et

$$(\star) \qquad \psi(\lambda, t) = t\rho_0(1 + z\lambda/\alpha(t)),$$

pour $1 + z\lambda/\alpha(t)$ inversible. Il s'ensuit d'abord que $\psi(\lambda, \rho_0(\mu)) = \rho_0(\lambda + \mu)$, ce qui implique que $\rho_0 : \boldsymbol{\mu}_k \to T_k$ se prolonge en un morphisme $\boldsymbol{\alpha}_k \to X_k$. D'après le corollaire 2 à la proposition 3 du n° 1, il existe donc $K \in \Sigma$ tel que $\rho_0 \in \mathbf{N}.K$; si $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les éléments de K, il existe donc un i tel que $\langle \rho_i, \alpha \rangle > 0$. D'autre part, dérivant la formule (★), on voit que la dérivation D_{α, ρ_0} est une dérivation de X; il s'ensuit que le couple (α, ρ_0) satisfait à l'une des deux conditions de la proposition 7. Comme on a vu plus haut que le cas 1° est impossible, on est dans le cas 2°, et il existe $\rho_\alpha \in |\Sigma|$ avec $\langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$ et $\rho_0 \in \mathbf{Z}\rho_\alpha$. Comme $\langle \rho_0, \alpha \rangle = \langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$, on en conclut que $\rho_0 = \rho_\alpha$. Quitte à faire dans $\boldsymbol{\alpha}_k$ l'homothétie de rapport z, on peut donc supposer que l'opération ψ est donnée par la formule

$$\psi(\lambda, t) = t\rho_\alpha(1 + \lambda/\alpha(t)),$$

où $\rho_\alpha \in |\Sigma|, \langle \rho_\alpha, \alpha \rangle = 1$.

Soit maintenant $\rho \in |\Sigma|$ avec $\langle \rho, \alpha \rangle > 0$. *Montrons que* $\rho = \rho_\alpha$.

Soient μ et ν inversibles; on a sans difficultés

$$\psi(\mu^{\langle \rho, \alpha \rangle - 1}(\nu - \mu), \rho(\mu)) = \rho(\mu)\rho_\alpha(\mu^{-1}\nu).$$

Le morphisme $(\mu, \nu) \mapsto \rho(\mu)\rho_\alpha(\mu^{-1}\nu)$ de $\boldsymbol{\mu}_k^2$ dans T_k se prolonge donc en le morphisme $(\mu, \nu) \mapsto \psi(\mu^{\langle \rho, \alpha \rangle - 1}(\nu - \mu), \bar{\rho}(\mu))$ de $\boldsymbol{\alpha}_k^2$ dans X_k. D'après la proposition 3 du n° 2, il existe $K \in \Sigma$, avec $\rho_\alpha \in \mathbf{N}.K$ et $\rho - \rho_\alpha \in \mathbf{N}.K$; la première condition implique $\rho_\alpha \in K$ par définition des éventails; la seconde implique alors $\rho \in \mathbf{N}.K$, donc aussi $\rho \in K$; enfin $\rho - \rho_\alpha \in \mathbf{N}.K$ implique $\rho = \rho_\alpha$. On a ainsi démontré les conditions 1° et 2° de la définition 4. Démontrons la troisième; soit $K \in \Sigma$ tel que $\langle K, \alpha \rangle = 0$. Notons $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les éléments de K; si $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n$ sont inversibles, on a

$$\psi(1 - \mu, \rho_1(\mu_1) \ldots \rho_n(\mu_n)) = \rho_1(\mu_1) \ldots \rho_n(\mu_n)\rho_\alpha(\mu).$$

Le morphisme $\boldsymbol{\mu}_k^{n+1} \to T_k$ donné par le second membre se prolonge donc en un morphisme $\boldsymbol{\alpha}_k^{n+1} \to X_k$ en vertu de la proposition 3 du n° 2. D'après cette même proposition, il s'ensuit qu'il existe $L \in \Sigma$, tel que $\rho_\alpha \in \mathbf{N}.L$ et $K \subset \mathbf{N}.L$. Alors $\mathbf{N}.(K \cap L) = \mathbf{N}.K \cap \mathbf{N}.L = \mathbf{N}.K$, donc $K \cap L = K$ et $K \subset L$; de même $\rho_\alpha \in L$, donc $K \cup \{\rho_\alpha\} \subset L$ et $K \cup \{\rho_\alpha\} \in \Sigma$.

Cela achève la démonstration de (ii) ⇒ (i). Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de construire pour toute racine α de Σ, une opération de $\boldsymbol{\alpha}$ sur X satisfaisant aux conditions annoncées. Soit donc α une racine de Σ, et ρ_α l'élément de M^* introduit dans la définition 4. Il suffit de démontrer qu'il existe un morphisme $\boldsymbol{\alpha} \times X \to X$ induisant le pseudo-morphisme $u : (\lambda, t) \mapsto t\rho_\alpha(1 + \lambda/\alpha(t))$.

A. *Si* $K \in \Sigma$ *est tel que* $\rho_\alpha \in K$, *u se prolonge en un morphisme de* $\boldsymbol{\alpha} \times V_K$ *dans* V_K.

Il suffit de prouver que si $e^m \in A_K$, alors $e^m(1 + \lambda e^{-\alpha})^{\langle \rho_\alpha, m \rangle} \in A_K[\lambda]$. Or, comme $\rho_\alpha \in K$, on a $\langle \rho_\alpha, m \rangle \geqq 0$, donc l'expression proposée est combinaison linéaire des $\lambda^i e^{m-i\alpha}$, avec $0 \leqq i \leqq \langle \rho_\alpha, m \rangle$, et il s'agit de prouver que, si $\rho \in K$, on a $\langle \rho, m - i\alpha \rangle \geqq 0$ pour ces i. Mais, ou bien $\rho = \rho_\alpha$, et alors $\langle \rho, m - i\alpha \rangle = \langle \rho_\alpha, m \rangle - i \geqq 0$, ou bien $\rho \neq \rho_\alpha$, et alors $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$, donc $\langle \rho, m - i\alpha \rangle \geqq \langle \rho, m \rangle \geqq 0$.

B. *Soit* $K \in \Sigma$ *tel que* $\rho_\alpha \notin K$. Alors, pour tout $\rho \in K$, on a $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$, donc $e^{-\alpha} \in A_K$.

B 1. Soit g la fonction $(\lambda, x) \mapsto 1 + \lambda e^{-\alpha}(x)$ sur $\boldsymbol{\alpha} \times V_K$. Alors *u se prolonge en un morphisme de* $(\boldsymbol{\alpha} \times V_K)_g$ *dans* V_K.

En effet, si $e^m \in A_K$, on a $e^m(1 + \lambda e^{-\alpha})^{\langle \rho, m \rangle} \in A_K[\lambda][g^{-1}]$.

B 2. Soit $L = \{\rho \in K \mid \langle \rho, \alpha \rangle = 0\} \cup \{\rho_\alpha\} \in \Sigma$ (déf. 4), et soit h la fonction $(\lambda, x) \mapsto e^{-\alpha}(x)$ sur $\boldsymbol{\alpha} \times V_K$. Alors *u se prolonge en un morphisme de* $(\boldsymbol{\alpha} \times V_K)_h$ *dans* V_L.

En effet, soit $e^m \in A_L$, montrons que

$$e^m(1 + \lambda e^{-\alpha})^{\langle \rho_\alpha, m \rangle} \in A_K[\lambda][h^{-1}] = A_K[\lambda, e^\alpha].$$

Comme $\rho_\alpha \in L$, on a $\langle \rho_\alpha, m \rangle = n \geqq 0$, et si N est un entier $\geqq 0$ on peut écrire

$$e^m(1 + \lambda e^{-\alpha})^n = e^{m - N\alpha}(1 + \lambda e^{-\alpha})^n e^{N\alpha},$$

de sorte que $e^m(1 + \lambda e^{-\alpha})^n$ est combinaison linéaire des $e^{N\alpha} \lambda^j e^{m-i\alpha}$, avec $i \geqq N$, et qu'il suffit de prouver que, si N est choisi asssez grand, on a $\langle \rho, m - i\alpha \rangle \geqq 0$ pour $\rho \in K$ et $i \geqq N$. Or, si $\rho \in K$, on a $\rho \neq \rho_\alpha$, donc $\langle \rho, \alpha \rangle \leqq 0$. Si $\langle \rho, \alpha \rangle = 0$, alors $\rho \in L$ et $\langle \rho, m - i\alpha \rangle = \langle \rho, m \rangle \geqq 0$; si $\langle \rho, \alpha \rangle < 0$, alors $\langle \rho, m - i\alpha \rangle \geqq \langle \rho, m \rangle + N$, de sorte qu'il suffit de prendre N supérieur aux $-\langle \rho, m \rangle$, $\rho \in K$.

B 3. Comme $(1 + \lambda e^{-\alpha}) - \lambda e^{-\alpha} = 1$, les ouverts $(\boldsymbol{\alpha} \times V_K)_g$ et $(\boldsymbol{\alpha} \times V_K)_h$ recouvrent $\boldsymbol{\alpha} \times V_K$ et *u se prolonge en un morphisme de* $\boldsymbol{\alpha} \times V_K$ *dans* $V_K \cup V_L$.

Les assertions (A) et (B 3) entraînent alors l'existence du prolongement cherché. C. Q. F. D.

Si α est une racine de $\boldsymbol{\Sigma}$, l'homomorphisme x_α de l'énoncé est un monomorphisme, dont l'image est un sous-schéma en groupes U_α de $\mathbf{Aut}(X)$, isomorphe à $\boldsymbol{\alpha}$, normalisé par T, que l'on appellera *le groupe à un paramètre d'automorphismes de* X *associé à la racine* α. On notera qu'en vertu de la partie (A) de la démonstration précédente, l'opération de U_α sur X laisse stable chacun des V_K tels que $\rho_\alpha \in K$.

PROPOSITION 8. — *Soient* α *et* β *deux racines de* Σ.

a. Si $\rho_\alpha = \rho_\beta$, *ou si* $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = \langle \rho_\alpha, \beta \rangle = 0$, *on a* $x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu) = x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)$ *pour tout schéma* S *et tous* $\lambda, \mu \in \boldsymbol{\alpha}(S)$.

b. Si $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$, *alors* $n = -\langle \rho_\alpha, \beta \rangle$ *est* ≥ 0, $\beta + i\alpha$ *est une racine de* Σ *pour* $0 \leq i \leq n$, *et on a, pour tout schéma* S *et tous* $\lambda, \mu \in \boldsymbol{\alpha}(S)$ *la relation*

$$x_\alpha(\lambda)\, x_\beta(\mu)\, x_\alpha(\lambda)^{-1} = \prod_{0 \leq i \leq n} x_{\beta+i\alpha}\left((-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i \mu\right).$$

c. Si $\alpha + \beta = 0$, *il existe un homomorphisme unique* $\varphi : \mathbf{GL}_{2\mathbf{Z}} \to \mathbf{Aut}(X)$ *tel que*

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(\lambda), \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} = x_\beta(\lambda), \qquad \varphi\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_\alpha(\mu), \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \rho_\beta(\mu)$$

pour tout schéma S *et tous* $\lambda \in \boldsymbol{\alpha}(S)$, $\mu \in \boldsymbol{\mu}(S)$.

Les deux membres de l'égalité proposée dans (*a*) sont des automorphismes de X_S, donc définissent des S-pseudo-automorphismes de T_S, dont on doit démontrer qu'ils sont égaux; il suffit alors de reprendre le calcul fait au paragraphe 2 (nº 4, prop. 3). Dans le cas (*b*), on a bien $n \geq 0$; sinon, en effet, on aurait $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle > 0$, donc $\rho_\alpha = \rho_\beta$ et $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle$ ne serait pas nul; d'après la remarque 2º, il s'ensuit que $\beta + i\alpha$ est une racine de Σ pour $0 \leq i \leq n$ et que $\rho_{\beta+i\alpha} = \rho_\beta$. Pour démontrer l'égalité proposée, il faut prouver que les deux membres définissent le même S-pseudo-automorphisme de T_S; il suffit de reprendre le calcul fait à la fin de la démonstration au paragraphe 2 (nº 4, prop. 4). Démontrons enfin (*c*). Soit Ω l'ouvert **Z**-dense de $\mathbf{GL}_{2\mathbf{Z}}$ tel que « $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega(S)$ » équivale à « a inversible »; soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega(S)$, posons $\delta = ad - bc$; on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/\delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que le morphisme cherché doit être tel que

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \rho_\alpha(a)\, \rho_\beta(\delta)\, x_\beta(c/\delta)\, x_\alpha(b/a).$$

Il s'agit donc de prouver que le morphisme $\varphi : \Omega \to \mathbf{Aut}(X)$ donné par la formule ci-dessus se prolonge en un unique homomorphisme de $\mathbf{GL}_{2\mathbf{Z}}$

de **Aut**(X). D'après SGA, XVIII, 2.3, il suffit de prouver que φ est « génériquement multiplicatif ». Or un calcul analogue à celui qui a été fait au paragraphe 2 (nº 3, th. 3) montre que le S-pseudo-automorphisme de T_S défini par $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $t \mapsto t\rho_\alpha(a + b/\alpha(t))\,\rho_\beta(c\alpha(t) + d)$ et il suffit de vérifier que ce pseudo-automorphisme dépend de façon « génériquement multiplicative » de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ce qui se fait sans difficultés.

6. Sous-groupes représentables de **Aut**(X). — Gardons les notations précédentes. Soit $\mathrm{Rac}(\Sigma)$ l'ensemble des racines de Σ. L'application $\alpha \mapsto \rho_\alpha$ de $\mathrm{Rac}(\Sigma)$ dans $M^\star$ satisfait aux axiomes (SE 2) et (SE 3) de la définition 1 du paragraphe 3, nº 1. Chaque partie *finie* R de $\mathrm{Rac}(\Sigma)$ est donc munie par cette application d'une structure de système d'Enriques (*loc. cit.*).

Théorème 4. — *Soit* R *un ensemble fini de racines de* Σ, *et pour* $\alpha \in R$, *soit* ρ_α *l'élément de* $M^\star$ *qui lui est associé* (déf. 4). *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le système d'Enriques* $(R, \alpha \mapsto \rho_\alpha)$ *est saturé;*

(ii) *les deux conditions suivantes sont réalisées :*

a. si $\alpha, \beta \in R$ *et si* $\alpha + \beta$ *est une racine de* Σ, *alors* $\alpha + \beta \in R$,

b. si $\alpha, \beta \in R$, *et si* $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$, $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle < 0$, *alors* $\alpha + \beta = 0$.

(iii) *Il existe un sous-schéma en groupes* G *de* **Aut**(X), *contenant* T, *affine, lisse et à fibres connexes, tel que* R *soit l'ensemble des racines de* G *relativement à* T.

Remarquons d'abord que l'équivalence de (i) et (ii) résulte de la remarque 2 du nº 5 et du lemme 1 du paragraphe 3, nº 1. D'autre part, si (iii) est satisfait, le groupe $G_{\mathbf{Q}}$ possède un pseudo-projecteur sur $T_{\mathbf{Q}}$ (§ 2), le système d'Enriques correspondant est $(R, \alpha \mapsto \rho_\alpha)$ en vertu du théorème 3, et celui-ci est saturé (§ 3, nº 1, cor. à la prop. 1). Il reste donc à démontrer que (i) [ou (ii)] implique (iii). *Supposons donc que* R *satisfasse aux conditions* (i) *et* (ii).

A. *Supposons d'abord que l'on ait en outre* $R \cap (-R) = \emptyset$.

Lemme 6. — *Supposons* $R \cap (-R) = \emptyset$. *Il existe un sous-schéma en groupes* U_R *de* **Aut**(X) *unique, ayant la propriété suivante :* U_R *contient* U_α *pour chaque* $\alpha \in R$, *et, pour tout ordre total sur* R, *le morphisme de* $\prod_{\alpha \in R} U_\alpha$ *dans* U_R *induit par le produit dans* U_R *est un isomorphisme de schémas.*

De plus, on a $\rho(R) \in \Sigma$, *l'ouvert* $V_{\rho(R)}$ *de* X *est stable sous* U_R *et est un espace homogène sous le sous-groupe* $T.U_R$ *de* **Aut**(X).

D'après le lemme 1 du paragraphe 3, nº 1, il n'existe pas de famille $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ d'éléments de R telle que $\langle \rho(\alpha_{i+1}), \alpha_i \rangle < 0$ pour tout i; on peut donc trouver un ordre total sur R tel que $\alpha > \beta$ implique $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle = 0$. Considérons alors le morphisme φ de $\boldsymbol{\alpha}^R$ dans **Aut**(X) tel que

$$\varphi((\lambda_\alpha)_{\alpha \in R}) = \prod_{\alpha \in R} x_\alpha(\lambda_\alpha);$$

il résulte immédiatement des relations de commutation de la proposition 8 que l'image de φ est un sous-foncteur en groupes de **Aut**(X). De plus, comme $t\varphi((\lambda_\alpha))t^{-1} = \varphi((\alpha(t)\lambda_\alpha))$, et que chaque x_α est un monomorphisme, il est aisé de voir que φ est un monomorphisme. Notons U_R l'image de φ; c'est un sous-schéma en groupes lisse de **Aut**(X) normalisé par T.

Pour un ordre quelconque sur R, le morphisme $\prod_{\alpha \in R} U_\alpha \to U_R$ induit sur chaque fibre un isomorphisme (en vertu de la théorie de Lazard, [1], exp. 13, prop. 1), donc est un isomorphisme; cela démontre la première assertion du lemme 6. Passons à la seconde et revenons pour cela à l'ordre choisi précédemment; l'application répétée de la troisième propriété des racines implique $\rho(R) \in \Sigma$. L'ouvert $V = V_{\rho(R)}$ de X est stable sous chaque U_α, donc sous U_R. Enfin, considérons une suite croissante $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de racines de R telle que les $\rho_i = \rho(\alpha_i)$ soient distincts deux à deux et décrivent $\rho(R)$; alors T se décompose en le produit $N \times I$, où N est l'intersection des noyaux des α_i, et où I est l'image de l'homomorphisme $\boldsymbol{\mu}^{\rho(R)} \to T$ défini par $\rho(R) \subset M^*$; de plus, la définition de V montre que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N \times \mu^{\rho(R)} & \xrightarrow{h} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \times \alpha^{\rho(R)} & \xrightarrow{g} & X, \end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques et où les flèches horizontales sont des isomorphismes. Par définition de la pseudo-opération de U_R sur T, on a, pour tout point t de N et tous scalaires λ_i assez généraux

$$x_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots x_{\alpha_n}(\lambda_n)\, t \star e = t.\prod_i \rho_i(1+\lambda_i) = h(t, (1+\lambda_i)),$$

donc pour t et les λ_i quelconques

$$x_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots x_{\alpha_n}(\lambda_n)\, t \star e = g(t, (1+\lambda_i)).$$

Le morphisme $U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \times N \to V$ défini par le produit dans **Aut**(X), l'opération de **Aut**(X) sur X, et le point $e \in X(Z)$ est donc un isomorphisme. Cela implique bien que V est un espace homogène sous $U_K . T = T . U_K$.

Lorsque $R \cap (-R) = \emptyset$, on prend donc $G = T . U_R$.

B. *Supposons maintenant que l'on ait* $R = -R$, et donnons seulement un schéma de démonstration.

Calquant la démonstration du théorème 2 du paragraphe 3, n° 4, on construit un schéma en groupes réductif G_0, obtenu en « amalgamant » des groupes linéaires généraux, possédant un tore maximal déployé T_0 de groupe dual M, de système de racines R. Pour chaque $\alpha \in R$, le sous-groupe à un paramètre U^0_α de G_0 correspondant à α s'envoie naturellement sur U_α et il s'agit de prouver qu'il existe un homomorphisme (qui sera nécessairement un monomorphisme) de G_0 dans **Aut**(X) induisant sur T_0 et chaque U^0_α l'homomorphisme donné. Pour chaque système de racines positives R_+ de R, la partie (A) de la démonstration implique l'existence d'un homomorphisme dans **Aut**(X) du sous-groupe de Borel de G_0 correspondant à R_+, ayant les propriétés voulues; d'autre part, pour chaque racine $\alpha \in R$, il existe un homomorphisme analogue pour le sous-groupe de rang semi-simple 1 correspondant à α [prop. 8, (*c*)]. Appliquant alors SGA, 3, XXIII, 2.3, on obtient la conclusion voulue.

C. *Cas général.* — Posons $R_s = R \cap (-R)$, $R_u = R - R_s$; par (B), on construit un sous-groupe réductif L contenant T, de système de racines R_s; par (A), on construit un sous-groupe $U = U_{R_u}$ normalisé par T, à fibres unipotentes. En vertu de la proposition 8, chaque U_α, $\alpha \in R_s$, normalise U; donc L normalise U; d'autre part, on vérifie sans peine que $L \cap U = e$. Le produit semi-direct G de U par L est donc un sous-schéma en groupes lisse de **Aut**(X) qui répond aux conditions exigées.

C. Q. F. D.

Le groupe G *dont l'existence est affirmée par* (iii) *est évidemment unique : c'est le sous-faisceau en groupes de* **Aut**(X) (*pour la topologie* (fpqc), *ou même la topologie de Zariski*) *engendré par* T *et les* U_α, $\alpha \in R$. De manière imagée, on doit considérer l'ensemble des racines de Σ comme le système des racines de **Aut**(X); le théorème 4 signifie qu'une partie finie de ce système de racines est l'ensemble (resp. est contenue dans l'ensemble) des racines d'un sous-schéma en groupes de **Aut**(X) contenant T si et seulement si elle est, en tant que système d'Enriques, saturée (resp. saturable).

Proposition 9. — *Soit* R *un ensemble fini de racines de* Σ, *satisfaisant aux conditions* (i), (ii), (iii) *du théorème* 4, *et soit* G *le sous-schéma en groupes de* $\mathbf{Aut}(X)$ *correspondant.*

a. Soit Σ' *l'ensemble des éléments de* Σ *de la forme* $\rho(R')$, *où* R' *est une partie close de* R [i. e. *telle que* $\alpha, \beta \in R'$, $\alpha+\beta \in R$, *implique* $\alpha+\beta \in R'$] *telle que* $R' \cap (-R') = \emptyset$. *Alors* Σ' *est un sous-éventail de* Σ.

b. Soit X' *le sous-schéma ouvert de* X *défini par l'éventail* Σ'. *Alors* X' *est stable et homogène sous* G, *et le morphisme* $G \rightarrow X'$ *associé au point* $e \in T(\mathbf{Z}) \in X'(\mathbf{Z})$ (*morphisme orbital de* e) *est un épimorphisme pour la topologie de Zariski.*

Notons d'abord que si $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R$, alors $\rho_{\alpha+\beta}$ est égal à ρ_α ou ρ_β; il s'ensuit que si R' est une partie close de R, et K une partie de $\rho(R)$, l'ensemble des $\alpha \in R'$ tel que $\rho(\alpha) \in K$ est clos; il s'ensuit que K est de la forme $\rho(R'')$, où R'' est clos et contenu dans R'. Cela implique immédiatement (a). *Démontrons maintenant que chaque élément de* R *est une racine de* Σ'; il s'agit de vérifier que si $K = \rho(R') \in \Sigma'$ et si $\alpha \in R$ est tel que $\langle K, \alpha \rangle = 0$, alors $K \cup \{\rho_\alpha\} \in \Sigma'$, c'est-à-dire il existe une partie close R'' de R, contenant R' et α et telle que $R'' \cap (-R'') = \emptyset$. On prend pour R'' l'ensemble des racines de R de la forme $\beta + i\alpha$, où $\beta \in R'$, et $0 \leq i \leq -\langle \rho_\alpha, \beta \rangle$. Montrons que R'' est clos; soient $\gamma = \beta + i\alpha$, $\gamma' = \beta' + i'\alpha \in R''$, avec $\beta, \beta' \in R'$, $0 \leq i \leq -\langle \rho_\alpha, \beta \rangle$, $0 \leq i' \leq -\langle \rho_\alpha, \beta' \rangle$. Si $\gamma + \gamma' \in R$, on a par exemple $\langle \rho_\gamma, \gamma' \rangle < 0$, c'est-à-dire $\langle \rho_\beta, \beta' + i\alpha \rangle < 0$, c'est-à-dire $\langle \rho_\beta, \beta' \rangle < 0$; cela implique $\beta + \beta' \in R$, donc $\beta + \beta' \in R'$, donc $\gamma + \gamma' = (\beta + \beta') + (i + i')\alpha \in R''$. Montrons que $R'' \cap (-R'') = \emptyset$. Si, avec les notations précédentes, on a $\gamma + \gamma' = 0$, le même raisonnement s'applique et démontre que $\beta + \beta' \in R'$; mais $\beta + \beta' + (i + i')\alpha = 0$ implique alors $-\alpha \in R'$, ce qui contredit $\langle \rho(R'), \alpha \rangle = 0$.

Cela étant, on peut remplacer Σ par Σ', donc supposer $\Sigma = \Sigma'$. D'après le lemme 6, l'orbite de e contient chaque $V_{\rho(R)}$, où R' est une partie close de R telle que $R' \cap (-R') = \emptyset$; comme les $\rho(R')$ décrivent Σ', l'orbite de e est X tout entier. De plus, la démonstration du lemme 6 montre que, pour tout R' comme ci-dessus, il existe un sous-schéma $H_{R'}$ de G tel que le morphisme orbital de e induise un isomorphisme de $H_{R'}$ sur $V_{\rho(R')}$, ce qui achève la démonstration.

En raisonnant comme dans la démonstration du corollaire 2 au théorème 4 (§ 2, n° 5), on obtient l'énoncé suivant :

Proposition 10. — *Soit* R *un ensemble fini de racines de* Σ, *satisfaisant aux conditions équivalentes* (i) *à* (iii) *du théorème* 4, *et soit* G *le sous-schéma en groupes de* $\mathbf{Aut}(X)$ *correspondant.*

a. Le normalisateur N *de* G *dans* **Aut**(X) *est un schéma en groupes lisse, dont la composante neutre est* G. *Le normalisateur* N(T) *de* T *dans* **Aut**(X) *est un schéma en groupes lisse, dont la composante neutre est* T.

b. On a $N = G.(N \cap N(T))$.

c. Les faisceaux-quotients $N(T)/T$, $(N(T) \cap G)/T$ *et* N/G *sont des schémas constants, associés respectivement au groupe abstrait des automorphismes de* M^* *conservant* Σ, *au sous-groupe de celui-ci conservant* R, *et au quotient de ce dernier par le groupe de Weyl de* G [*engendré par les* $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle (\rho_\alpha - \rho_{-\alpha})$, α *parcourant* $R \cap (-R)$].

Pour énoncer le lemme suivant, disons que l'éventail Σ' est *semi-complet* si, pour tout $m \in M$, $m \neq 0$, il existe $\rho \in |\Sigma|$ tel que $\langle \rho, m \rangle > 0$; d'après le n° 4, cette condition équivaut à $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{Z}$.

Lemme 7. — *Supposons* Σ *semi-complet. Alors l'ensemble des racines de* Σ *est fini, est saturé, et* Der(X) *est somme directe de* Lie(T) *et des* $\mathrm{Lie}(U_\alpha)$, α *parcourant les racines de* Σ.

La dernière assertion résulte de la proposition 7 du n° 5 et des définitions. Si l'ensemble des racines de Σ est infini, il existe $\rho \in \Sigma$ tel que le système d'inéquations $\langle \rho, \alpha \rangle = 1$, $\langle \rho', \alpha \rangle \leq 0$ pour $\rho' \neq \rho$, $\rho' \in |\Sigma|$, ait une infinité de solutions; l'ensemble de ces solutions est une partie convexe, infinie de M, donc contient une demi-droite de la forme $\{\alpha + n\mu \mid n \in \mathrm{N}\}$; mais cela implique $\langle \rho, \mu \rangle = 0$, $\langle \rho', \mu \rangle \leq 0$, donc $\mu = 0$, ce qui est exclu. Considérons enfin deux racines α et β de Σ telles que $\langle \rho_\alpha, \beta \rangle < 0$, $\langle \rho_\beta, \alpha \rangle < 0$; alors

$$\langle \rho_\alpha, \alpha + \beta \rangle \leq 0, \qquad \langle \rho_\beta, \alpha + \beta \rangle \leq 0,$$

donc $\langle \rho, \alpha + \beta \rangle \leq 0$ pour tout $\rho \in |\Sigma|$, et $\alpha + \beta = 0$, puisque Σ est semi-complet.

Proposition 11. — *Si* Σ *est complet,* **Aut**(X) *est un schéma en groupes affine et lisse. Sa composante neutre* $\mathbf{Aut}(X)^0$ *est engendrée par* T *et les* U_α, $\alpha \in \mathrm{Rac}(\Sigma)$. *Le quotient* $\mathbf{Aut}(X)/\mathbf{Aut}(X)^0$ *est un schéma en groupes constant fini, associé au quotient du groupe des automorphismes de* M^* *conservant* Σ *par le sous-groupe de celui-ci engendré par les* $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle (\rho_\alpha - \rho_{-\alpha})$, $\alpha \in \mathrm{Rac}(\Sigma) \cap (-\mathrm{Rac}(\Sigma))$.

Soit $R = \mathrm{Rac}(\Sigma)$; considérons le sous-schéma en groupes G de **Aut**(X) associé à R (lemme 7 et théorème 4). D'après le lemme 7, on a $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Der}(X)$; plus généralement le même raisonnement prouve que $\mathrm{Lie}(G \otimes k) = \mathrm{Der}(X \otimes k)$ pour tout corps k; comme X est propre, le raisonnement habituel (passage des corps aux anneaux artiniens, puis locaux noethériens complets, puis...) montre que $G = \mathbf{Aut}(X)^0$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 10.

7. Éventail associé à un système d'Enriques saturé.

Lemme 8. — *Soit* (M, R, ρ) *un système d'Enriques saturé. Soit* Σ *l'ensemble des parties de* M^* *de la forme* $\rho(R')$, *où* R' *est une partie close de* R *telle que* $R' \cap (-R') = \emptyset$. *Alors* Σ *est un éventail dans* M^* *et chaque élément de* R *est une racine de* Σ.

Chaque élément de $\rho(R)$ fait partie d'une base de M^*; l'ensemble des éventails de support $\rho(R)$ est donc non vide; choisissons-en un élément maximal Σ_1. D'après la *remarque* 3 du n° 5, chaque élément de R est une racine de Σ_1; le lemme résulte alors de la proposition 9, (*a*) appliquée à Σ_1 et R.

Théorème 5. — *Soit* (M, R, ρ) *un système d'Enriques saturé. Il existe :*

a. un $\mathbf{Z}$*-schéma en groupes affine lisse à fibres connexes;*

b. un tore maximal T *de* G *et un isomorphisme de* M *avec le dual de* T *identifiant* R *à l'ensemble des racines de* G *relativement à* T;

c. un sous-groupe fermé H *de* G *tel que le faisceau-quotient* G/H *soit un* $\mathbf{Z}$*-schéma lisse et quasi-projectif, que le morphisme canonique* $G \to G/H$ *soit un épimorphisme pour la topologie de Zariski, et le morphisme composé* $T \to G/H$ *une immersion ouverte.*

d. pour chaque $\alpha \in R$, *une immersion fermée*

$$x_\alpha : \ \boldsymbol{\alpha} \to G$$

telle que $x_\alpha(\lambda + \lambda') = x_\alpha(\lambda)\, x_\alpha(\lambda')$, $t x_\alpha(\lambda)\, t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\lambda)$ *pour tout point* λ *de* α *et tout point* t *de* T, *et que le pseudo-morphisme* f *de* G *dans* T *composé de la projection de* G *sur* G/H *et de l'inverse de l'immersion ouverte* $T \to G/H$ *soit tel que, pour* $1 + \lambda$ *inversible, on ait*

$$f(x_\alpha(\lambda)) = \rho_\alpha(1 + \lambda).$$

Soit Σ l'éventail défini dans le lemme 8; soit X le schéma correspondant et G le sous-groupe de $\mathbf{Aut}(X)$ correspondant à R par le théorème 4. D'après la proposition 9, X s'identifie à G/H où H est le stabilisateur de e. Les assertions précédentes résultent alors des théorèmes 3 et 4 et de la remarque 3 du paragraphe 3, n° 4.

Corollaire. — *Soient k un corps de caractéristique* o (resp. $p \neq 0$). *Tout système d'Enriques saturé* (resp. *p-saturé*) *provient d'un triplet* (G, T, f), *où* G *est un k-groupe affine lisse connexe,* T *un tore maximal déployé de* G *et f un pseudo-projecteur de* G *sur* T (*cf.* § 2, n° 3, déf. 2).

Soit (M, R, ρ) un système d'Enriques. S'il est saturé, il provient du triplet (G_k, T_k, f_k) où G, T, f sont donnés par le théorème 5. S'il n'est pas saturé, il existe, d'après le théorème 1 (§ 3, n° 2), un système d'Enriques saturé (M, $\overline{R}$, $\overline{\rho}$) prolongeant (M, R, ρ); soit ($\overline{G}$, T, $\overline{f}$) un triplet dont provient (M, $\overline{R}$, $\overline{\rho}$). D'après le théorème 2 (§ 1, n° 3) et la proposition 4 (§ 1, n° 4), et avec les notations de *loc. cit.*, il est clair que les U_α, $\alpha \in R$, et T engendrent un sous-groupe fermé lisse G de $\overline{G}$ contenant T [c'est le produit semi-direct du sous-groupe de Levi de $\overline{G}$ contenant T par le sous-groupe du radical unipotent de $\overline{G}$ produit semi-direct des U_α pour $\alpha \in R$, $\alpha \notin (-R)$] et que $\overline{f}$ induit un pseudo-projecteur f de G sur T. Le triplet (G, T, f) répond évidemment à la question.

Remarque. — On peut démontrer directement une forme légèrement différente du lemme 8 pour un système d'Enriques *saturable*, et en déduire ainsi une nouvelle démonstration du théorème 1 (§ 3, n° 2).

5. Questions.

Rappelons d'abord une question déjà signalée :

1° *Conjugaison des sous-tores déployés maximaux de* $\mathbf{Cr}_{nk}$(§ 1, n° 6).

Ajoutons-en d'autres :

2° *Classification des systèmes d'Enriques.* Cette question se décompose en :

a. prouver que tout système d'Enriques est contenu dans un système d'Enriques maximal et donner des propriétés de ces systèmes maximaux. Je sais seulement prouver que tout système d'Enriques est contenu dans un système d'Enriques (M, R, ρ) ayant les propriétés suivantes : il est saturé, $\rho(R)$ engendre $M^*\otimes\mathbf{Q}$, chaque $\rho^{-1}(\rho_\alpha)$ est une partie « convexe » de R. Il conviendrait notamment de démontrer, si c'est vrai, que l'on peut ajouter à ces conditions : R engendre M (ce qui signifie que le groupe correspondant a un centre trivial), $\rho(R_s)$ engendre M (ce qui est moins sûr), ...;

b. trouver un principe de classification des systèmes d'Enriques maximaux en termes finis;

c. donner effectivement une classification.

3° *Réalisation des sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona comme groupes d'automorphismes de schémas lisses et propres* (resp. *projectifs*).

La question précise est la suivante : étant donné un système d'Enriques, peut-on compléter l'éventail qui lui est associé en un éventail complet, les racines du système d'Enriques restant racines de ce nouvel éventail ? Plus généralement, étant donné un éventail et une partie de l'ensemble de ses racines, formant un système d'Enriques, compléter l'éventail de façon que les racines données restent racines de l'éventail complété.

4° *Classification des éventails.* Cette question est parallèle à 3°. Notons que l'opération de « subdivision » d'un éventail se traduit géométriquement par un éclatement sur le schéma correspondant; il s'agit donc de classifier les éventails « minimaux ».

5° La définition des éventails étant affaiblie en remplaçant l'axiome (a) « chaque élément de Σ est une partie d'une base de M^* » par (a') « chaque élément de Σ est une partie libre de M^* », étudier les schémas obtenus, et notamment leurs singularités.

APPENDICE.

Une variété rationnelle lisse propre et non projective de dimension 3.

Nous nous proposons de construire dans $M = \mathbf{Z}^3$ un éventail complet (§ 4, n° 2) tel que le schéma associé ne soit pas projectif. Le principe de cette construction est dû à A. Douady (*voir* A. Douady, *Le shaddock à six becs*, à paraître).

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de M, et posons

$$e'_1 = (-3, -2, -1), \qquad e'_2 = (-1, -2, -3), \qquad e'_3 = (-2, -1, -3).$$

Soit G le groupe à six éléments d'automorphismes de M engendré par les deux transformations $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ et $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Notons Σ_0 l'ensemble des douze parties à trois éléments transformées par G de $\{e_1, e'_1, -e_2\}$ (six transformés) et $\{e_1, e'_1, e'_2\}$ (six transformés).

Proposition 1. — *Si Σ est un éventail complet contenant Σ_0, le schéma* X *associé à Σ n'est pas projectif.*

D'après le paragraphe 4, (n° 4, cor. 1 au th. 2), l'existence d'un module ample sur X équivaut à celle d'une famille d'entiers $(n(\rho))$, $\rho \in |\Sigma_0|$, où $|\Sigma_0| = Ge_1 \cup Ge'_1$, possédant entre autres la propriété suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Si } K \in \Sigma_0, \text{ et } x \in |\Sigma_0|, x \notin K, \text{ l'élément } m_K \text{ de M} \\ \text{défini par } \langle \rho, m_K \rangle = -n(\rho) \text{ pour } \rho \in K \text{ est telle que } \langle x, m \rangle > -n(x).\end{array}\right.$$

Appliquons (1) à $K = \{e_1, e'_1, -e_2\}$ et à $x = -e_1, -e'_1, e'_2$; si on pose $a_i = \langle e_i, m_K \rangle$, on obtient

$$\begin{array}{lll} a_1 = -n(e_1), & -3a_1 - 2a_2 - a_3 = -n(e'_i), & -a_2 = -n(e_2), \\ -a_1 > n(-e_1), & 3a_1 + 2a_2 + a_3 > -n(-e'_i), & -a_1 - 3a_2 - 2a_3 > -n(e'_2), \end{array}$$

d'où par un calcul immédiat :

$$(2)\qquad n(e_1) + n(-e_1) > 0,$$

$$(3)\qquad n(e'_1) + n(-e'_1) > 0,$$

$$(4)\qquad -5n(e_1) + n(-e_1) - 2n(e'_1) + n(e'_2) > 0.$$

Ajoutant les six transformés de (3) par les éléments de G, on trouve

$$-4\sum_{i=1}^{3}(n(e_i) + n(-e_i)) - \sum_{i=1}^{3}(n(e'_i) + n(-e'_i)) > 0,$$

ce qui est contradictoire avec les relations déduites de (2) et (3) par permutations circulaires.

2. Il s'agit donc de démontrer l'existence d'un éventail complet contenant Σ_0. Pour ce faire, appelons *chasse-mouches* tout ensemble fini Φ de parties à trois éléments de M satisfaisant aux trois conditions suivantes :

(CM 1) *Chaque élément de Φ est une partie libre de* M.

(CM 2) *Si* $K, L \in \Phi$, *alors* $\mathbf{Q}_+ . K \cap \mathbf{Q}_+ . L = \mathbf{Q}_+ . (K \cap L)$.

(CM 3) *La réunion des* $\mathbf{Q}_+ . K$, *pour* K *dans* Φ, *est* $\mathbf{Q} \otimes M$.

Dans (CM 2) et (CM 3), on note $\mathbf{Q}_+ . K$ l'ensemble des éléments du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes M$ combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de K.

Par définition des éventails complets, il est clair que si le chasse-mouches Φ satisfait à la condition supplémentaire suivante :

(E) *Pour tout* $K \in \Phi$, *le déterminant des trois éléments de* K *est égal à* ± 1, alors l'ensemble formé des parties des éléments de Φ est un *éventail complet.*

D'autre part, si Φ est un chasse-mouches, si $K = \{u_1, u_2, u_3\} \in \Phi$, si $u_0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \in M$, avec a_i rationnel > 0, et si on pose

$$K_1 = \{u_0, u_2, u_3\},\ K_2 = \{u_1, u_0, u_3\}, \qquad K_3 = \{u_1, u_2, u_0\},$$

alors

$$\Phi' = (\Phi - \{K\}) \cup \{K_1, K_2, K_3\}$$

est encore un chasse-mouches (« subdivision de la face K »).

3. Soit Σ_1 la réunion de Σ_0 et de l'ensemble des transformés par G des parties $\{e_1, e'_2, -e_3\}$ (six transformés) et $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ (deux transformés).

PROPOSITION 2. — *Σ_1 est un chasse-mouches.*

La démonstration s'appuie sur deux lemmes.

LEMME 1. — *Si* $K, L \in \Sigma_1$ *et si* $\mathrm{Card}(K \cap L) = 2$, *alors*

$$\mathbf{Q}_+ . K \cap \mathbf{Q}_+ . L = \mathbf{Q}_+ . (K \cap L).$$

Notons d'abord que quitte à remplacer $\{K, L\}$ par $\{g(K), g(L)\}$ où $g \in G$, on peut supposer que $K \cap L$ est l'un des cinq couples $\{e_1, e'_1\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, -e'_3\}$, $\{e_1, e'_2\}$, $\{e'_1, e'_2\}$. D'autre part, si $K = \{a, b, c\}$, $L = \{a, b, d\}$, il existe une relation $\gamma c + \delta d = \alpha a + \beta b$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}$, $\gamma\delta \neq 0$; la relation de l'énoncé équivaut alors à $\gamma\delta > 0$. Il suffit donc de contempler le tableau suivant :

$K \cap L$.	K.	L.	Relation.
e_1, e_1	$e_1, e'_1, -e_2$	e_1, e'_1, e'_2	$e'_2 - e_2 = 5e_1 + 2e'_1$
$e_1, -e_2$	$e_1, e'_1, -e_2$	$-e_2, -e'_3, e_1$	$-3e'_1 + e'_3 = 7e_1 + 5e_2$
$e_1, -e'_3$	$-e_3, -e'_3, e_1$	$-e_2, -e'_3, e_1$	$-e_3 - e_2 = 2e_1 + e'_3$
e_1, e'_2	e_1, e'_1, e'_2	$e_1, e'_2, -e_3$	$3e'_1 - e'_3 = 2e'_2 - 7e'_1$
e'_1, e'_2	e'_1, e'_2, e'_3	e_1, e'_2, e'_2	$e'_3 + 18e_1 = 5e'_2 - 7e'_1$

LEMME 2. — *Posons* $e_0 = (-1, -1, -1,) = -e_1 - e_2 - e_3$. *La relation* $e_0 \in \mathbf{Q}_+ . K$, $K \in \Sigma_1$ *équivaut à* $K = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Comme e_0 est invariant par G au signe près, il suffit de vérifier que $\pm e_0 \notin \mathbf{Q}_+ . K$ lorsque K est l'une des trois parties $\{e_1, e'_1, -e_2\}$, $\{e_1, e'_1, e'_2\}$, $\{e_1, e'_1, -e_3\}$, que $e_0 \in \mathbf{Q}_+ . \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ et que $-e_0 \notin \mathbf{Q}_+ . \{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Or cela résulte des relations

$$e_0 = 2e_1 + e'_1 + e_2 = -3e_1 - e'_1 + e'_2 = \frac{-2e_1 + e'_2 - e_3}{3} = \frac{e'_1 + e'_2 + e'_3}{6}.$$

Démontrons maintenant la proposition. La conditions (CM 1) se vérifie immédiatement pour chacune des cinq parties-type. Soit A l'ensemble des parties à deux éléments des éléments de Σ_1, F la réunion des $\mathbf{R}_+.\mathrm{L}$ pour $\mathrm{L} \subset \mathrm{A}$, et $\mathrm{U} = \mathbf{R} \otimes \mathrm{M} - \mathrm{F}$. La conjonction des assertions (CM 2) et (CM 3) équivaut à

(5) tout élément de U appartient à une partie $\mathbf{R}_+.\mathrm{K}$ et une seule.

Soit donc $x \in \mathrm{U}$; il existe une application continue $f : [0, 1] \to \mathbf{R} \otimes \mathrm{M}$ telle que $f(0) = e_0$, $f(1) = x$, $f(t) \notin \mathbf{R}e_1 \cup \mathbf{R}e_2 \cup \mathbf{R}e_3 \cup \mathbf{R}e'_1 \cup \mathbf{R}e'_2 \cup \mathbf{R}e'_3$ pour tout t et que l'ensemble des t tels que $f(t) \notin \mathrm{U}$ soit fini. Pour $y \in \mathbf{R} \otimes \mathrm{M}$, soit $n(y)$ le nombre de parties $\mathbf{R}_+.\mathrm{K}$ auxquelles appartient y. On a $n(e_0) = 1$ d'après le lemme 2; d'autre part, le lemme 1 montre que si $f(t) \notin \mathrm{U}$, on a $n(f(t - \varepsilon)) = n(f(t + \varepsilon))$ dès que ε est assez petit. Il s'ensuit que $n(f(t))$ est constant pour $t \in \overset{-1}{f}(\mathrm{U})$, donc que $n(x) = n(e_0) = 1$; cela prouve (5) et achève la démonstration.

4. Pour achever la construction, nous allons déduire de Σ_1 par subdivisions successives un chasse-mouches satisfaisant à (E).

Comme $\det(e_1, e'_1, -e_2) = -1$ et $\det(e_1, e'_1, e'_1) = 1$, douze des vingt faces de Σ_1 n'ont pas à être subdivisées.

A. *Subdivision des six faces transformées de* $\{e_1, e'_2, -e_3\}$. — Le barycentre $(e_1 + e'_2 - e_3)/3$ est le point $(0, -1, -1)$. Les trois faces obtenues par subdivision ont déterminant ± 1. On subdivise de même les cinq faces analogues.

B. *Première subdivision des faces* $\pm \{e'_1, e'_2, e'_3\}$. — On utilise les points e_0 et $-e_0$; cela revient à remplacer les deux faces initiales par les six transformés par G de la face $\{e_0, e'_1, e'_2\}$.

C. *Deuxième subdivision de ces faces.* — On a $\det(e_0, e'_1, e'_2) = -3$. Posons $f = (e_0 + e'_1 + 2e'_2)/2 = (-2, -3, -2)$. On a $\det(e_0, e'_1, f) = -2$, $\det(e_0, f, e'_2) = -1$, $\det(f, e'_1, e'_2) = -1$. On subdivise de même les six faces analogues; on obtient douze nouvelles faces de déterminant 1, et six de déterminant 2.

D. *Troisième (et dernière) subdivision de ces faces.* — Posons

$$g = \frac{e_0 + e'_1 + f}{3} = (-3, -3, -2).$$

Les trois faces ainsi obtenues par subdivision de $\{e_0, e'_1, f\}$ sont de déterminant 1. Effectuant la même subdivision des faces transformées on achève le processus.

On construit donc le chasse-mouches cherché par 20 subdivisions successives de Σ_1. Comme Σ_1 possède 12 sommets, 30 arêtes, 20 faces (c'est au point de vue combinatoire un icosaèdre régulier), et que chaque subdivision ajoute 1 sommet, 3 arêtes et 2 faces, *l'éventail complet obtenu possède* 32 sommets, 90 arêtes, 60 faces.

5. En résumé :

THÉORÈME. — *Il existe un* $\mathbf{Z}$*-schéma lisse de type fini propre à fibres connexes* X, *et une opération du tore trivial* $T \simeq \boldsymbol{\mu}^3$ *sur* X *tels que :*

a. l'opération de T *sur* X *possède* 183 *orbites, l'une d'entre elles étant un espace homogène principal* (trivial) *sous* T;

b. X *est obtenu par recollement de* 60 *espaces affines* $\mathbf{A}^3$;

c. le schéma de Picard de X *est constant et libre à* 29 *générateurs*;

d. aucune des fibres de X *n'est projectives*;

e. le schéma des automorphismes de X *est un* $\mathbf{Z}$*-groupe lisse de type fini produit semi-direct d'un groupe constant à six éléments par* T.

BIBLIOGRAPHIE.

EGA : A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique* (*Pub. Math. I. H. E. S.*, nos 4, 7, 11, ..., P. U. F., Paris).

SGA 3 : *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie* n° 3 : *Schémas en groupes*, dirigé par M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, Lectures Notes, Springer Verlag.

[1] C. CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques* (Séminaire 1956-1958, multigraphié).

[2] M. DEMAZURE, *Schémas en groupes réductifs* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 93, 1965, p. 369-413).

[3] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, Masson-North Holland Pub. Cy, Paris, 1970.

[4] ENRIQUES, *Sui gruppi continui di transformazioni cremoniani nel piano* (*Rend. Accad. Lincei*, 1er sem., 1893).

[5] L. GODEAUX, *Les transformations birationnelles du plan* (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, n° 122, Gauthier-Villars, Paris, 1953).

[6] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[7] E. G. KOCHEVOÏ, *On the birational representations of the multiplicative and additive groups* (*Sib. Math. Journ.*, t. 8, n° 6, 1967, p. 1339-1345).

[8] V. ŠAFAREVIČ, *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Tata Institute, Bombay, 1966.

[9] B. SEGRE, *Sur un problème de Zariski, Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres*, Paris, (C. N. R. S.) 1950.

[10] A. BOREL et J. TITS, *Groupes réductifs* (*Pub. Math. I. H. E. S.*, n° 27, 1965).

(Manuscrit reçu le 23 novembre 1970.)

Michel DEMAZURE,
Mathématique, bâtiment 425,
Faculté des Sciences,
91-*Orsay*.