

## 論文

## 2축 김벌의 가변속도 CMG를 이용한 인공위성 자세제어

방효충\*, 박영웅\*\*

## Spacecraft Attitude Control with a Two-axis Variable Speed Control Momentum Gyro

Hyochoong Bang\* and Youngwoong Park\*\*

## ABSTRACT

CMG(Control Momentum Gyro) is a control device being used for spacecraft attitude control constructing relatively large amount of torque compared to conventional body-fixed reaction wheels. The CMG produces gyroscopic control torque by continuously varying the angular momentum vector direction with respect to the spacecraft body. The VSCMG(Variable Speed Control Momentum Gyro) has favorable advantages with variable speed to lead to better control authority as well as singularity avoidance capability. Attitude dynamics with a VSCMG mounted on a two-axis gimbal system are derived in this study. The dynamic equation may be considered as an extension of the single-axis counterpart. Also, a feedback control law design is addressed in conjunction with the dynamic equations of motion.

## 초 록

CMG(Control Momentum Gyro)는 일반적으로 동체에 부착된 반작용휠에 비해 큰 토크의 크기를 발생시켜 인공위성의 자세제어에 이용되는 장치이다. CMG는 휠의 각운동량벡터의 방향을 위성체의 동체축에 대하여 연속적으로 변화시킴으로써 자이로스코픽 토크를 발생하게 된다. 가변속도 CMG는 휠의 속도도 함께 변화시킴으로써 보다 다양한 제어 명령을 생성할수 있게 되고 또한 특이(Singularity) 조건을 피하는데 장점을 지니고 있다. 본 연구에서는 2축의 김벌에 장착된 가변속도 CMG를 이용한 위성체의 자세 동역학 방정식을 유도하기로 한다. 이러한 운동방정식은 기존의 1축 김벌 시스템의 경우를 확장한 것이다. 또한 유도된 운동방정식을 활용하여 피드백 자세기동 제어 법칙을 제안하기로 한다.

**Key Words** : Attitude Control(자세제어), CMG(제어용 모멘텀 자이로), VSCMG(가변속도 제어용 모멘텀 자이로), Attitude Dynamics(자세 동역학), Attitude Maneuver(자세 기동), Feedback Control(피드백 제어)

## 1. 서 론

인공위성의 정밀 자세제어를 위해 연속적인

토크 명령을 발생하는 장치가 필요하다. 현재 대부분의 위성에 탑재되고 있는 연속적인 토크 발생장치로 반작용휠(Reaction Wheel, RW)이 있다 [1]. 반작용 휠은 서보모터를 이용하여 휠의 속도를 조절함으로써 생성되는 반작용 토크를 활용하는 원리이다. 대개 반작용휠은 위성체의 동체축에 회전축이 고정되어 있고 각운동량의 변화량을 이용하는 원리이다. 즉 휠의 속도 변화를 유발시

† 2003년 12월 29일 접수 ~ 2004년 2월 18일 심사완료

\* 정회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공  
연락처, E-mail : hcbang@fdcl.kaist.ac.kr

\*\* 정회원, 한국항공우주연구원

킴으로써 제어 토크를 생성하게 된다.

반작용휠의 단점으로서 발생하는 토크가 크기가 제한되어 있고 또한 각운동량의 방향이 고정되어 있어 제어 명령이 일정한 범위내로 제한된다는 점이다. 특히 명령 토크가 크게 요구되면 휠의 속도가 제한치에 도달하여 포화(Saturation)되는 문제가 발생하게 된다. 대부분의 반작용휠의 경우 관성모멘트를 임의로 크게 설계할 수 없기 때문에 휠의 포화는 자세제어의 성능을 결정하는 중요한 요소로 작용한다.

반작용휠의 단점을 보완하기 위해 최근에 많이 연구되고 있는 구동기로 CMG(Control Momentum Gyro)가 있다[2-5]. CMG는 반작용휠과 달리 휠의 회전축 방향이 동체축에 대해서 연속적으로 변하는 원리이다. 즉 휠 자체의 각운동량(Angular momentum) 벡터가 동체축에 대하여 각속도 성분을 가지게 되어 이로 인하여 자이로스코픽(Gyroscopic) 토크가 발생하게 된다. 휠 자체의 각운동량이 작다 하여도 각운동량 벡터를 구동시키는 각속도의 크기를 상대적으로 크게 유지함으로써 큰 제어 토크를 발생시킬 수 있게 된다. 이와 같은 CMG는 종래에는 신속한 자세기동이 요구되는 군사 위성에 많이 활용되고 있으나 최근에 저궤도 지구관측위성에도 일반적으로 탑재되는 경향이 있다. 즉 스테레오 영상을 위해서 카메라가 부착된 동체축을 지구를 향해 신속하고 정확하게 지향해야 하며 이러한 임무 수행을 위해 CMG가 필수적인 장비로 탑재되고 있다. 최근 지구 관측위성의 소형화 및 자세제어의 정밀화 경향과 함께 CMG도 소형화되고 보다 일반화되어 가고 있다고 볼 수 있다.

CMG에는 휠의 각운동량은 고정되어 있고 각운동량 벡터만을 이용하여 제어 토크를 생성하는 방식과 휠 자체의 각운동량도 동시에 변하는 VSCMG(Variable Speed Control Momentum Gyro)가 있다. 또한 휠이 장착되는 김벌의 방식에 따라 1축 김벌(Gimbal)과 2축 김벌 방식이 있다. 1축 김벌 CMG는 보통 4개가 피라미드 형태로 배치되어 어느 휠에 이상이 발생하는 경우에도 정상적인 3축의 자세제어를 수행할 수 있도록 설계되어 있다[5]. 이때 4개의 휠을 이용하여 3축의 동체축에 대한 토크를 생성하게 되므로 김벌 각도에 따라서 필요한 제어 토크를 생성할 수 없는 특이(Singularity) 조건이 발생할 수 있다[6-7].

일반적으로 각운동량이 변하는 시스템과 2축 김벌에 장착된 CMG가 그렇지 못한 경우에 비해서 특이 조건에 강건한 것으로 알려져 있다. CMG의 특이 문제 및 이를 해결하기 위한 다양

한 기술은 CMG의 운용에 있어 매우 중요한 핵심 요소라고 볼 수 있다[4-7]. CMG를 이용한 다양한 제어 법칙이 제시되어 왔다. 본래의 특성에 따라 큰 각도의 자세기동 법칙에 주로 CMG가 많이 활용되어 왔다[8-12]. 외란이 존재하는 경우에 CMG를 이용한 제어기법이 연구되었으며[13], 또한 최근에는 에너지를 저장하는 모드에서의 CMG를 이용한 제어법칙이 연구되었다[14,15]. 대부분 1축 김벌에 고정된 각운동량의 CMG 모델이 주로 채택되어 왔다. 제어 법칙으로는 동체 각속도 및 쿼터니언(Quaternion)을 기반으로 하고 있으며 최근에는 MRP(Modified Rodrigues Parameters) 자세 파라미터를 이용한 자세제어가 제안되고 있다.

본 연구에서는 2축 김벌에 장착된 가변속도 CMG(VSCMG)에 대한 운동 방정식을 유도하고 이를 이용한 제어 법칙을 제안하기로 한다. 이를 위해 기존에 주로 연구된 1축 김벌 시스템의 결과를 활용하여 2축 김벌 시스템으로 확장하기로 한다[16]. 1축 김벌의 경우와 비교하여 2축 김벌의 경우 자유도가 증가함으로써 자세 역학 방정식에 차이가 나며 결과적으로 얻어지는 제어법칙도 다른 형태를 보이게 된다. 본 연구는 참고문헌 [16]에 주로 기초하며 김벌의 자유도를 추가하여 보다 일반화된 형태의 운동방정식과 김벌의 구동법칙(Steering laws)을 제시하게 된다.

## II. 운동방정식의 유도

### 2.1 2축 김벌 CMG 시스템

운동 방정식을 유도하기 전에 먼저 2축 김벌 시스템의 원리를 간단히 살펴보기로 한다. Fig. 1은 위성체 동체축에 고정된 2축의 김벌 시스템에 부착된 CMG 형상도를 보여주고 있다. 김벌은 일정한 관성 모멘트를 보유한 것으로 가정한다.

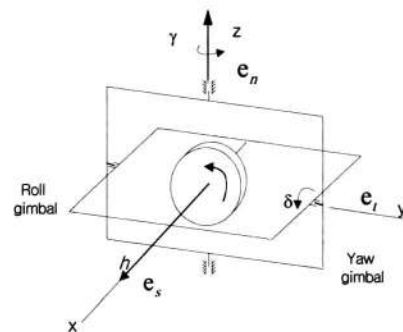


Fig. 1. A CMG attached to a two-axis gimbal

휠의 속도를 변화시킴으로써 휠 자체의 각운동량 ( $H_W$ )의 크기를 변화시킬 수 있고 또한 김벌의 회전 ( $\delta, \gamma$ )을 이용한 자이로스코픽 토크를 생성할수 있다. 자이로스코픽 토크는 사실상 동체축에 대한 김벌축의 각속도 운동( $\dot{\delta}, \dot{\gamma}$ )으로부터 발생하게 된다. 김벌 프레임에 부착된 단위 벡터를 각각  $\{e_t, e_n\}$ 으로 하고 휠의 회전 (Spin)축에 일치하는 단위벡터를  $e_s$ 로 명명하도록 한다. 이와 같이 김벌 및 휠축에 부착된 단위 벡터는 실질적으로 휠 및 김벌의 운동에 의해 토크가 가해지는 방향으로서 뒷부분에서 운동방정식을 표현하는 기준축이 된다. 참고로 1축 김벌의 경우  $\gamma$  축의 회전운동만이 허용된다.

### 2.2 운동 방정식

운동 방정식의 유도를 위해 전체 시스템을 크게 위성체, 김벌(Gimbal), 그리고 휠의 3개의 부분 시스템으로 분류한다. 전체 각운동량 벡터는 각 부분 시스템의 각운동량 벡터의 합으로 표현될수 있다[16-18].

$$H = H_B + H_W + H_G \quad (1)$$

여기서  $H_B$ 는 위성체 자체의 각운동량 벡터를,  $H_G$ 는 김벌의 각운동량 벡터를, 그리고  $H_W$ 는 휠의 각운동량 벡터를 나타낸다.

먼저 김벌의 각 운동량 벡터는 다음과 같이 표현된다[16].

$$H_G = [I_G] \omega_{G/N} \quad (2)$$

여기서  $\omega_{G/N}$ 은 관성축( $N$ )에 정의된 김벌의 각속도 벡터를 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$\omega_{G/N} = \omega_{G/B} + \omega_{B/N} \quad (3)$$

따라서

$$H_G = [I_G]^B \omega_{G/B} + [I_G]^B \omega_{B/N} \quad (4)$$

와 같다. 여기서  $[I_G]^B$ 는 동체축을 기준으로 한 김벌의 관성 모멘트를 나타내는데 동체축에서 관찰할 때 김벌의 관성 모멘트는 시간의 함수가 된다. 김벌의 각 축에 정의된 주 관성 모멘트를  $\{I_{Gs}, I_{Gt}, I_{Gn}\}$ 라고 했을 때 관성 모멘트 변환

공식에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[I_G]^B = [BG]^T [I_G] [BG] = I_{Gs} e_s e_s^T + I_{Gt} e_t e_t^T + I_{Gn} e_n e_n^T \quad (5)$$

행렬  $[BG]$ 는 김벌과 동체축 사이의 방향 코사인 행렬을 의미한다. 따라서 김벌의 각운동량 벡터는

$$H_G = (I_{Gs} e_s e_s^T + I_{Gt} e_t e_t^T + I_{Gn} e_n e_n^T) \omega_{B/N} + [I_G] \omega_{G/B} \quad (6)$$

와 같다. 여기서 동체축의 각속도를 김벌 축에 대하여 투영시킨 성분들을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\begin{aligned} \omega_s &= e_s^T \omega_{B/N} \\ \omega_t &= e_t^T \omega_{B/N} \\ \omega_n &= e_n^T \omega_{B/N} \end{aligned} \quad (7)$$

또한 동체에 대한 김벌 자체의 각운동( $\delta, \gamma$ )을 고려하면 결과적으로 다음과 같은 표현식을 얻게 된다.

$$H_G = I_{Gs} \omega_s e_s + I_{Gt} (\omega_t + \dot{\delta}) e_t + I_{Gn} (\omega_n + \dot{\gamma}) e_n \quad (8)$$

한편 반작용휠의 각운동량 벡터는

$$H_W = [I_W] \omega_{W/N} \quad (9)$$

와 같고 마찬가지로 김벌과 유사한 방법을 적용하여 다음과 같은 표현식을 유도할 수 있다.

$$H_W = I_{Ws} (\omega_s + \Omega) e_s + I_{Wt} (\omega_t + \dot{\delta}) e_t + I_{Wn} (\omega_n + \dot{\gamma}) e_n \quad (10)$$

반작용 휠의 경우 기하학적인 대칭 형태가 되어 회전축과 직각방향( $e_t, e_n$ )의 축의 관성 모멘트가 서로 동일하다는 가정을 채택하였다.

지금부터 관성축에 대한 동체 각속도 벡터  $\omega_{B/N}$ 를 편의상  $\omega$ 로 표시하기로 한다. 한편 위성체의 각운동량 벡터는

$$H_B = [I_B] \omega_{B/N} = [I_B] \omega \quad (11)$$

와 같으며 여기서  $[I_B]$ 는 김벌과 휠을 제외한 위성체 자체의 관성모멘트 행렬을 표시한다.

지금까지 유도한 각운동량 벡터를 이용하면 오일러(Euler) 공식에 의해 전체 회전운동 방정식은

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{L} \quad (12)$$

와 같고 이때  $\mathbf{L}$ 은 외부에서 가해진 토크 입력을 표시한다[17]. 각운동량의 시간에 대한 변화율을 구하기 위해서는 각운동량 벡터가 김벌축에 대해 정의되어 있고 김벌축은 동체축에 대해서 연속적인 회전운동을 하게 되므로 김벌축의 단위 벡터에 대한 시간 변화율을 산출하여야 한다. 즉

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_s &= -(\dot{\delta} + \omega_t) \mathbf{e}_n + (\dot{\gamma} + \omega_n) \mathbf{e}_t \\ \dot{\mathbf{e}}_t &= -(\dot{\gamma} - \omega_n) \mathbf{e}_s + \omega_s \mathbf{e}_n \\ \dot{\mathbf{e}}_n &= (\dot{\delta} + \omega_t) \mathbf{e}_s - \omega_s \mathbf{e}_t \end{aligned} \quad (13)$$

와 같은 관계식을 얻을 수 있다. 또한 동체축 각속도의 김벌축 성분들의 시간 변화율을 다음과 같이 유도할 수 있다[16].

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_s &= \dot{\mathbf{e}}_s^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{e}_s^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &= (\dot{\gamma} \omega_t - \dot{\delta} \omega_n) + \mathbf{e}_s^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\omega}_t &= \dot{\mathbf{e}}_t^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{e}_t^T \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\gamma} \omega_s + \mathbf{e}_t^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\omega}_n &= \dot{\mathbf{e}}_n^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{e}_n^T \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\delta} \omega_s + \mathbf{e}_n^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \quad (14)$$

지금까지 유도한 관계식을 이용하여 휠의 각운동량 벡터를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_W &= [I_{W_s}(\dot{\Omega} + \mathbf{e}_s^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\gamma} \omega_t - \dot{\delta} \omega_n)] \mathbf{e}_s \\ &+ [I_{W_s}(\dot{\gamma}(\omega_s + \Omega) + \Omega \omega_n) + (I_{W_s} - I_{W_t})\omega_s \omega_n \\ &- 2I_{W_t} \dot{\gamma} \omega_s + I_{W_t}(\mathbf{e}_t^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\delta})] \mathbf{e}_t \\ &+ [I_{W_n}(\dot{\gamma} + \mathbf{e}_n^T \dot{\boldsymbol{\omega}}) + 2I_{W_t} \dot{\delta} \omega_s - I_{W_s}(\omega_s + \Omega) \dot{\delta} \\ &+ (I_{W_t} - I_{W_s})\omega_t \omega_s - I_{W_s} \Omega \omega_t] \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (15)$$

한편 휠을 구동하기 위해서는 토크 입력을 가해야 한다. 휠의 경우 회전축이  $\mathbf{e}_s$ 축과 일치하고 있으므로 이 방향에 서보 모터를 이용하여 토크 입력을 가하는 경우 역시 같은 축에 대한 각운동량의 변화가 발생하게 된다. 따라서 식 (15)의  $\mathbf{e}_s$ 축 성분을 이용하면 토크 평형 방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_s = I_{W_s}(\dot{\Omega} + \mathbf{e}_s^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\gamma} \omega_t - \dot{\delta} \omega_n) \quad (16)$$

여기서  $u_s$ 는 휠의 회전축에 가해지는 토크 입력을 나타낸다. 김벌 시스템의 각운동량의 시간 변화율을 구하기 위해 식 (8)에 정의된 각운동량 벡터를 이용하면 아래의 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_G &= I_{G_s} \dot{\omega}_s \mathbf{e}_s + I_{G_t}(\dot{\omega}_t + \dot{\delta}) \mathbf{e}_t + I_{G_n}(\dot{\omega}_n + \dot{\gamma}) \mathbf{e}_n \\ &+ I_{G_s} \omega_s \dot{\mathbf{e}}_s + I_{G_t}(\omega_t + \dot{\delta}) \dot{\mathbf{e}}_t + I_{G_n}(\omega_n + \dot{\gamma}) \dot{\mathbf{e}}_n \end{aligned} \quad (17)$$

휠의 경우와 마찬가지로 앞에서 유도한 김벌축 단위 벡터에 대한 시간 변화율 및 김벌축에 대한 동체 각속도 성분의 시간 변화율을 대입하여 정리하면 김벌 시스템의 각운동량 벡터의 시간 변화율을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_G &= [(I_{G_s} - I_{G_t} + I_{G_n}) \dot{\gamma} \omega_t + (I_{G_n} - I_{G_t}) \omega_t \omega_n \\ &+ (I_{G_n} - I_{G_t})(\dot{\delta} \omega_n + \dot{\delta} \dot{\gamma}) - I_{G_s} \dot{\delta} \omega_n + I_{G_s} \mathbf{e}_s^T \dot{\boldsymbol{\omega}}] \mathbf{e}_s \\ &+ [(I_{G_s} - I_{G_t} - I_{G_n}) \dot{\gamma} \omega_s + I_{G_t} \mathbf{e}_t^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &+ (I_{G_s} - I_{G_n}) \omega_n \omega_s + I_{G_t} \dot{\delta}] \mathbf{e}_t \\ &+ [I_{G_n}(\dot{\delta} \omega_s + \dot{\gamma} + \mathbf{e}_n^T \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\ &+ (I_{G_t} - I_{G_s}) \omega_s \omega_t + (I_{G_t} - I_{G_s}) \dot{\delta} \omega_s] \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (18)$$

지금까지 김벌 시스템과 휠의 각운동량 벡터에 대한 표현식을 유도하였다. 참고문헌 [16]의 1축 김벌시스템의 경우  $\gamma$ 만이 수식에 나타나지만 2축의 경우 추가적인 김벌 운동변수인  $\delta$ 가 포함되어 있다. 여기서 기호의 단순화를 위해 다음과 같이 휠과 김벌에 대한 관성모멘트 합을 정의하도록 한다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}] &= [I_G] + [I_W] \\ &= \begin{bmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

주어진 2축 김벌 시스템의 경우 김벌에 가해지는 토크에 의해 휠과 김벌의 각운동량의 변화가 유발된다. 즉 김벌 토크와 휠-김벌 시스템의 각운동량 변화가 평형을 이루게 된다. 수식적으로 표현하면

$$\dot{\mathbf{H}}_G + \dot{\mathbf{H}}_W = \mathbf{L}_G \quad (20)$$

와 같은데 여기서  $\mathbf{L}_G$ 는 김벌에 가해지는 토크 벡터를 의미한다. 김벌 토크는 각각 김벌의  $\mathbf{e}_t$ ,  $\mathbf{e}_n$ 축에 가해지므로 식 (15)과 (18)에서 유도한 각운동량벡터의 시간 변화율을 이용하면 다음과 같은 토크평형 방정식으로 표현된다.

$$u_g^t = J_t(\dot{\delta} + \mathbf{e}_t^T \dot{\boldsymbol{\omega}}) + (J_s - J_n)\omega_s \omega_n + (J_s - J_t - J_n) \dot{\gamma} \omega_s + I_{W_s}(\dot{\gamma} + \omega_n)\Omega \quad (21)$$

$$u_g^n = J_n(\dot{\gamma} + \mathbf{e}_n^T \dot{\boldsymbol{\omega}}) + (J_t - J_s)\omega_s \omega_t + (J_n + J_t - J_s) \dot{\delta} \omega_s - I_{W_s}(\dot{\delta} + \omega_t)\Omega + I_{W_t} \dot{\delta} \omega_s \quad (22)$$

이때  $u_g^t, u_g^n$ 는 각각 김벌의  $e_t, e_n$  축으로 가해진 토크 입력을 나타낸다.

지금까지 식 (11), (15), 및 (17)에서 구한 인공 위성, 휠 및 김벌 시스템의 각운동량 벡터에 대한 시간 변화율과 식 (12)에 주어진 오일러 방정식으로부터 전체 시스템의 회전 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [I] \dot{\omega} + \omega \times [I] \omega &= -e_s [J_s \dot{\gamma} \omega_t + I_{WS} (\dot{\Omega} - \delta \dot{\omega}_n) - (J_t - J_g) \omega_t \dot{\gamma} \\
 &+ (I_{Gn} - I_{Gt} - I_{Gs}) \delta \dot{\omega}_n + (I_{Gn} - I_{Gt}) \delta \dot{\gamma}] \\
 &- e_t [J_s \dot{\gamma} \omega_s + I_{WS} (\dot{\gamma} + \omega_n) \Omega - (J_t + J_n) \dot{\gamma} \omega_s \\
 &+ J_t \dot{\delta}] - e_n [J_n \dot{\gamma} - I_{WS} \Omega \omega_t - J_s \delta \dot{\omega}_s \\
 &+ (J_t + J_n) \delta \dot{\omega}_s] + L
 \end{aligned} \quad (23)$$

새로운 파라미터  $[I] (= [I_B] + [J])$ 는 위성체 및 휠과 김벌을 결합한 전체 시스템의 관성 모멘트를 나타낸다. 이때 휠과 김벌의 관성모멘트  $[J]$ 는 동체 좌표계에서 볼때 연속적으로 변하게 되므로 식 (5)를 이용하면[16]

$$\begin{aligned}
 [I] &= [I_B] + [J] \\
 &= [I_B] + J_s e_s e_s^T + J_t e_t e_t^T + J_n e_n e_n^T \quad (24)
 \end{aligned}$$

와 같이 쓸수 있다. 식 (23)에서 볼수 있듯이 2축 김벌운동( $\delta, \dot{\gamma}$ )과 휠의 각운동량( $I_{WS} \Omega$ ) 변화로부터 3축의 자세기동이 가능하게 된다. 기존의 연구에 많이 이용되고 있는 1축 김벌의 경우 식 (23)에서 김벌의 자유도를  $\gamma$ 로 한정하면 아래의 식을 얻게 되는데

$$\begin{aligned}
 [I] \dot{\omega} + \omega \times [I] \omega &= -e_s [J_s \dot{\gamma} \omega_t + I_{WS} \dot{\Omega} - (J_t - J_g) \omega_t \dot{\gamma}] \\
 &- e_t [(J_s \omega_s + I_{WS} \Omega) \dot{\gamma} - (J_t + J_n) \dot{\gamma} \omega_s \\
 &+ I_{WS} \Omega \omega_n] - e_n (J_n \dot{\gamma} - I_{WS} \Omega \omega_t) + L
 \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)는 참고문헌 [16]의 식과 정확히 일치한다. 따라서 지금까지 유도한 2축 김벌 시스템에 대한 운동방정식이 보다 일반화된 식이라 볼 수 있다. 또한 식 (23)에서 휠의 각속도가 고정된 경우( $\Omega \equiv$ 상수)를 고려하면 김벌의 운동에 의해 2축에 대한 토크를 생성할 수 있음을 알 수 있다.

### III. 자세제어 법칙 설계

앞장에서 유도한 운동 방정식을 이용하여 제어기 설계를 수행하도록 한다. 인공위성의 자세 제어를 위한 제어 법칙의 설계 방법은 일반적인

로 선형 및 비선형 방법이 있는데 본 연구에서는 비선형 방정식을 그대로 이용하도록 한다. 제어 법칙 설계를 위해 자세 기동시 모멘트 평형을 나타내는 자세 동역학과 함께 자세 운동을 기술하기로 한다. 먼저 자세 운동을 표시하기 위한 매개 변수로 최근 인공위성 자세제어 연구에 많이 채택되고 있는 변형된 로드리게 파라미터 (Modified Rodrigues Parameters, MRP)를 이용하기로 한다. MRP 벡터인  $\sigma$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_i = \frac{\beta_i}{1 + \beta_0} \quad i=1, 2, 3 \quad (26)$$

여기서  $\beta_i$ 는 오일러 파라미터(Euler parameters)를 나타낸다. 또한 오일러의 주축(Principal axis) 이론을 도입하면

$$\sigma = \tan \frac{\phi}{4} l \quad (27)$$

와 같이 나타낼 수 있는데 여기서  $\phi$ 는 오일러의 주각(Principal angle)을 그리고  $l$ 는 주축을 나타내는 벡터이다.

한편 MRP 파라미터와 동체 각속도 벡터 성분은 다음의 미분 방정식을 만족시킨다[16].

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} \Gamma(\sigma) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

행렬  $\Gamma(\sigma)$ 는

$$\Gamma(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 - \sigma^2 + 2\sigma_1^2 & 2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) & 2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2) \\ 2(\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3) & 1 - \sigma^2 + 2\sigma_2^2 & 2(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1) \\ 2(\sigma_3\sigma_1 - \sigma_2) & 2(\sigma_3\sigma_2 + \sigma_1) & 1 - \sigma^2 + 2\sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

와 같이 주어진다. 식 (27)을 다시 벡터 형태로 표현하면 아래의 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= \frac{1}{4} [(1 - \sigma^2)[I_{3 \times 3}] + 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma \sigma^T] \omega \\
 &= \frac{1}{4} [\Gamma(\sigma)] \omega
 \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 행렬  $[\Gamma(\sigma)]$ 는 다음의 관계식을 만족시킴을 보일수 있다.

$$[\Gamma]^{-1} = \frac{1}{(1 + \sigma^2)^2} [\Gamma]^T \quad (30)$$

따라서 식 (28)로부터 역 관계를 취하면

$$\omega = \frac{4}{(1+\sigma^2)^2} [\Gamma]^T \dot{\sigma} \quad (31)$$

와 같은 관계식을 얻게 된다.

지금까지 운동 역학 방정식과 인공위성 자세 표현 파라미터를 이용한 운동식을 살펴보았다. 다음에 제어법칙 설계를 위해 동체각속도 벡터에 대한 오차 파라미터를 도입하기로 한다[15,16].

$$\Delta \omega = \omega - \omega_r \quad (32)$$

여기서  $\omega_r$ 은 기준(Reference) 프레임의 동체 각속도 벡터를 나타낸다. 이때 자세 변수  $\sigma$ 는 동체축과 기준축과의 자세 오차를 의미한다고 볼 수 있으며 다음과 같은 운동학 관계식을 만족시킨다.

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} [\Gamma(\sigma)] \Delta \omega \quad (33)$$

한 가지 주목해야 할 점은 자세오차가 정해지는 기준축이다. 즉 자세오차 변수( $\sigma$ )는 동체축과 기준축( $r$ -프레임) 사이의 자세각으로 관성축과 무관하게 정의된다는 것이다.

제어기 설계를 위해 리아푸노프(Lyapunov) 방법을 적용하기로 한다. 이를 위해 후보 리아푸노프 함수를 아래와 같이 도입하도록 한다[16].

$$U = \frac{1}{2} \Delta \omega^T [\Lambda] \Delta \omega + 2K \log(1 + \sigma^T \sigma) \quad (34)$$

이때  $G$ 는 양한정(Positive definite)의 이득 행렬을 나타내며 따라서 선택한 리아푸노프 함수 역시 양한정 특성을 지니게 된다. 제어기 설계를 위해 주어진 리아푸노프 함수로부터 다음의 과정을 거친다.

$$\frac{dU}{dt} = \Delta \omega^T \left( [\Lambda] \Delta \dot{\omega} + \frac{1}{2} \frac{d[\Lambda]}{dt} \Delta \omega \right) + 4K \frac{1}{1 + \sigma^T \sigma} \dot{\sigma}^T \sigma \quad (35)$$

한편 관성 모멘트 행렬( $[\Lambda]$ )이 식 (24)와 같이 시간에 대한 함수 형태로 주어지므로 따라서 동체축에 대한 김벌축의 회전으로 인한 관성 모멘트의 시간 변화율을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d[\Lambda]}{dt} = \dot{\gamma}(J_s - J_t)(e_s e_t^T + e_t e_s^T) + \dot{\delta}(J_n - J_t)(e_s e_n^T + e_n e_s^T) \quad (36)$$

한편 각속도 오차인  $\delta \dot{\omega}$ 의 관계식과 본래의 식 (29)로 주어진 운동식을 대입하면

$$\frac{dU}{dt} = \Delta \omega^T \left( [\Lambda](\dot{\omega} - \dot{\omega}_r) + \frac{1}{2} \frac{d[\Lambda]}{dt} \Delta \omega + K \sigma \right) \quad (37)$$

와 같다. 따라서 리아푸노프 안정성 이론으로부터 다음과 같이 시스템을 안정화시키기 위한 제어 입력의 관계식을 이끌어 낼 수 있다.

$$[\Lambda](\dot{\omega} - \dot{\omega}_r) + \frac{d[\Lambda]}{2dt} \Delta \omega + K \sigma = -D \Delta \omega \quad (38)$$

여기서  $D$ 는 역시 양한정의 이득행렬이며 이때 리아푸노프 함수의 시간 변화율은

$$\frac{dU}{dt} = -\Delta \omega^T D \Delta \omega \leq 0 \quad (39)$$

을 만족시켜 안정화된 시스템이 된다.

본래의 운동방정식인 식 (23)을 이용하면 식 (38)로 주어진 제어 법칙은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & -e_s [J_s \dot{\gamma} \omega_t + I_{ws} (\dot{\Omega} - \dot{\delta} \omega_n) - (J_t - J_g) \omega_t \dot{\gamma} \\ & + (I_{Gn} - I_{Gt} - I_{Gs}) \dot{\delta} \omega_n + (I_{Gn} - I_{Gt}) \dot{\delta} \dot{\gamma}] \quad (40) \\ & - e_t [J_{us} \dot{\gamma} \omega_s + I_{ws} (\dot{\gamma} + \omega_n) \Omega - (J_t + J_n) \dot{\gamma} \omega_s + \\ & J_t \dot{\delta}] - e_n [J_n \dot{\gamma} - I_{ws} \Omega \omega_t + ((J_t + J_n - I_{ws}) \dot{\delta} \omega_s) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d[\Lambda]}{dt} \Delta \omega \\ & = -\omega \times [\Lambda] \omega + [\Lambda] \dot{\omega}_r - K \sigma - D \Delta \omega \end{aligned}$$

한편 외부에서 가해지는 토크입력( $L$ )을 제어를 위한 내부의 휠-김벌 시스템으로부터 생성되는 토크로 대체하여 식 (40)을 다시 표현하면

$$[F] \begin{Bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + [G] \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = L_r \quad (41)$$

와 같다. 행렬  $[F]$ 를 다음과 같이 표현할 때

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (42)$$

각 행렬의 요소는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} f_{11} &= -I_{ws} \\ f_{12} &= -(J_s - J_t + J_n) \omega_s + \frac{1}{2} (J_s - J_t) \omega_t \\ & \quad + \frac{1}{2} (J_n - J_t) \omega_n \\ f_{13} &= -(I_{Gn} - I_{Gt} - I_{Gs}) \omega_n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f_{21} &= 0 \\ f_{22} &= -(I_{W_s} - J_t - J_n)\omega_s - I_{W_s}\Omega + \frac{1}{2}(J_s - J_t)\omega_s \\ f_{23} &= 0 \\ f_{31} &= 0, \quad f_{32} = 0 \\ f_{33} &= -(J_t + J_n - J_s)\omega_s + \frac{1}{2}(J_n - J_t)\omega_s \end{aligned}$$

또한 행렬  $[G]$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_n & 0 \\ 0 & 0 & -J_t \end{bmatrix} \quad (43)$$

요구되는 토크입력  $L_r$ 은 제어 목적을 달성하기 위한 것으로

$$L_r = \frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} \omega_r - \omega \times [J] \omega + [J] \dot{\omega}_r + I_{W_s} \omega_n \Omega e_t - I_{W_s} \omega_n \Omega e_n - K \sigma - D \Delta \omega \quad (44)$$

와 같이 주어진다.

종래의 CMG는 김벌의 가속도( $\ddot{\delta}, \ddot{\gamma}$ ) 명령에 의존하기보다 김벌의 각속도( $\dot{\delta}, \dot{\gamma}$ ) 명령에 의한 자이로스코프 토크를 생성하는 원리를 채택해 왔다. 한편 VSCMG는 휠의 회전 각속도( $\Omega$ )를 변화시키는 기능을 추가함으로써 3축에 대한 토크를 생성하게 된다. 따라서 식 (41)로부터 김벌의 가속도 입력을 무시하고 정리하여 다시 표현하면 아래의 식과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = [F]^{-1} L_r \quad (45)$$

위 식에서 볼수 있듯이 자세기동을 위해 필요한 토크입력  $L_r$ 을 구성하기 위해 휠의 가속도( $\ddot{\Omega}$ ) 입력 및 김벌 축의 각속도( $\dot{\delta}, \dot{\gamma}$ ) 명령을 산출할 수 있게 된다. 한편 행렬  $[F]$ 의 역행렬이 존재하지 않는 경우 바로 CMG의 특이조건(Singularity)이 발생하며 이를 극복하기 위한 다양한 기법이 기존에 많이 연구되어 왔다. 본 연구에서 주요 내용이 아니므로 더 이상 해석을 진행하지 않기로 하며, 본 시뮬레이션 수행시 특이조건이 발생하는 경우 수치적인 방법으로 적절하게 대처하기로 한다. 항상 역행렬이 존재하는 형태이므로 식 (44)에서 유일한 해를 구할 수 있다. 따라서 가변 각속도의 휠이 장착된 2축 김벌의 CMG 시스템을 이용한 3축 자세제어가 가능하다는 것을 알수 있다. 이와 유사한 결론은 참고문

헌 [18,19]에서 선형화된 방정식을 이용하여 입증된 적이 있다. 또한 기존에 주로 연구되어온 피라미드 형태의 1축 김벌 시스템 CMG와 비교해서 근본적인 차이가 있다.

한편 휠의 각속도가 일정하게 유지되는 기존의 CMG의 경우  $\dot{\Omega} = 0$ 이 되어 식 (41)을 변형하여 다음과 같이 다시 쓸수 있게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}^{-1} L_r \quad (46)$$

이와 같은 경우에 주어진  $L_r$ 에 대하여 식 (46)을 만족하는 유일한  $\dot{\gamma}, \dot{\delta}$ 를 구할 수 없게 된다. 즉 1개의 고정속도 휠을 이용한 2축 김벌 시스템으로 3축의 자세제어가 일반적으로 가능하지 않은 것으로 간주할수 있다. 따라서 3축 제어를 위해 휠의 속도에 의한 추가적인 제어 기능이 추가되어야 한다.

### III. 시뮬레이션

지금까지 설계된 제어법칙을 실험하기 위해 간단한 시뮬레이션을 수행하기로 한다. 먼저 시뮬레이션을 위한 모델 데이터는 위성체의 경우  $[J] = \text{diag}[86.285, 1113.6] (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ 와 같고 휠은  $[I_{W_s}, I_{W_n}] = [0.5, 0.2] (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ , 그리고 김벌은  $[I_{G_s}, I_{G_t}, I_{G_n}] = [0.6, 0.4, 0.4] (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ 으로 가정하였다. 또한 자세오차 초기 조건으로  $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] = [0.1, -0.2, 0.3]$ 을 가정하였으며 기준 각속도 궤적은 다음과 주어진다.

$$\omega_r(t) = \begin{Bmatrix} 0.03 \sin(0.2t) \\ -0.05 \cos(0.2t) \\ 0.02 \cos(0.2t) \end{Bmatrix} \quad (47)$$

또한 피드백 이득으로  $K = \text{diag}[50, 50, 50]$ , 그리고  $D = [40, 40, 40]$ 으로 선정하였다. 시뮬레이션 결과가 먼저 Fig. 2에 각속도 반응 결과로 주어져 있다.

시뮬레이션 결과를 통해 볼수 있듯이 각 각속도 성분들이 기준 궤적을 잘 추종하고 있다. 즉 Lyapunov 제어기가 만족할 만한 성능을 보여주고 있음을 알수 있다. 결국 최종 각속도 오차가 0으로 수렴하게 된다.

한편 Fig. 3은 MRP로 표현된 자세오차의 시간 반응 결과를 보여주고 있다. 예상한 바와 같은

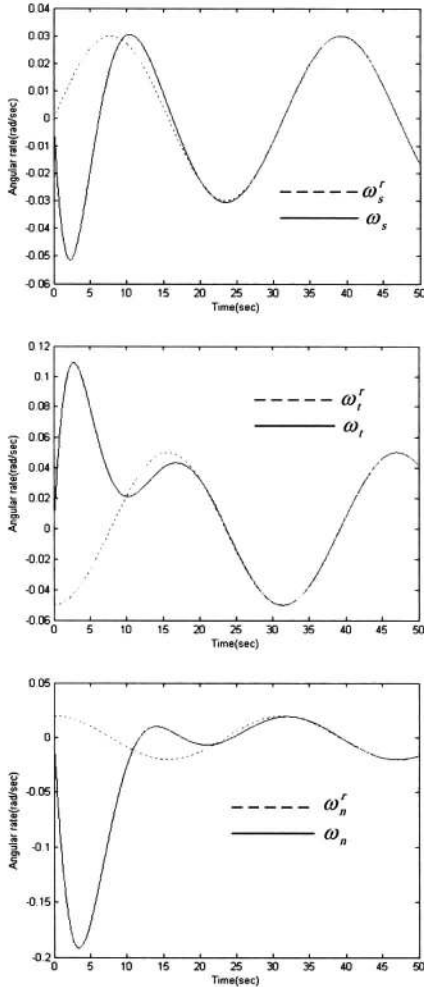


Fig. 2. Time responses of angular velocity

안정화된 제어기 설계 조건에 의하여 최종 오차가 0으로 수렴하는 것으로 알 수 있다.

또한 필요한 제어 토크입력( $L_j$ )에 대한 반응이 편 Fig. 4에 주어져 있다.

필요 토크에 비교적 크게 나타났는데 이것은 제어 이득 및 기타 조건을 적절히 조절함으로써 낮출 수 있을 것으로 기대된다. 또한 시뮬레이션 결과 CMG의 특이조건(Singularity)이 발생하였는데 이 주제는 본 연구의 주 목적이 아니기 때문에 수치적인 방법을 적용하여 적절하게 처리하였다. 특이조건에 대한 연구는 기존에 많은 연구가 되어 왔으며 2축 김벌의 경우 이를 별도의 연구를 통해서 확장할 수 있을 것으로 예상된다. 지금까지 시뮬레이션을 통해 볼 수 있듯이 설계된 제어기가 원하는 추적 성능을 무난히 달성할 수 있음을 보여주었다.

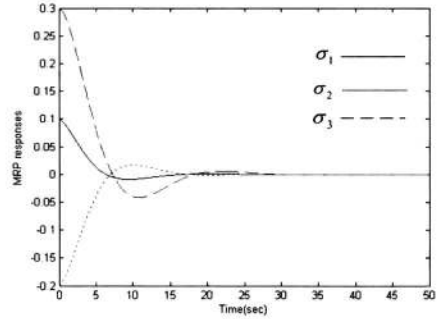


Fig. 3. Attitude error responses in MRP

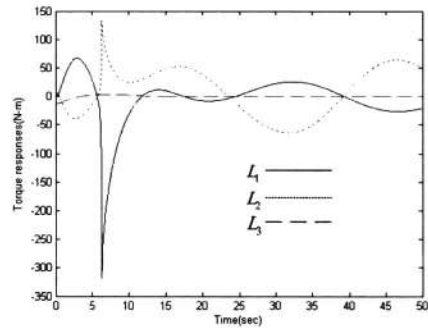


Fig. 4. Required torque command trends

#### IV. 결 론

본 연구에서는 2축의 김벌 시스템에 장착된 가변속도 CMG를 탑재한 인공위성의 자세 동역학 유도 및 이를 이용한 제어기 설계 대한 내용을 소개하였다. 유도한 자세 동역학은 기존의 1축 김벌 시스템의 경우를 확장한 것으로 결과적으로 얻은 식을 통하여 추가된 김벌의 운동에 의해 토크의 생성이 가능함을 확인하였다. 단일 CMG에 의해 3축의 자세제어 가능성을 보여주었다. 또한 기존의 피드백 제어기를 소개하고 이때의 제어 명령을 실현하기 위한 CMG의 구동 법칙을 제안하였다. 또한 설계된 제어법칙은 기본적인 시뮬레이션을 통하여 그 성능을 검증하였다. 본 연구 내용은 향후 지속적인 보강 연구를 통해 국내 개발위성에 유사한 기술을 적용하는 경우 실질적인 자료로 활용될 수 있을 것이다.

#### 후 기

본 연구는 과학기술부(한국과학기술평가원)에서 주관하는 국가지정연구실(2002년 지정)사업(M1- 0203-00-006)의 연구 결과입니다. 지원에 감



사드립니다.

### 참고문헌

- 1) 우병삼, 정보환, 채장수, "반작용휠을 이용한 인공위성의 3축 자세제어기 설계에 관한 연구", 한국항공우주학회지, Vol. 25, No. 3, 1997, pp. 148-156.
- 2) Branets, V.N., et al., "Development Experience of the Attitude Control System Using Single-Axis Control Momentum Gyros for Long-Term Orbiting Space Stations", *38th Congress of the International Astronautical Federation*, IAF-87-04, Oct. 1987.
- 3) Bedrossian, N.S., Paradiso, J., Bergmann, E.V., and Rowell, D., "Steering Law Design for Redundant Single-Gimbal Control Momentum Gyroscopes", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 6, 1990, pp. 1083-1089.
- 4) Bedrossian, N.S., Paradiso, J., Bergmann, E.V., and Rowell, D., "Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyroscope Singularity Analysis", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 6, 1990, pp. 1096-1101.
- 5) Oh, H.S., and Vadali, S.R., "Feedback Control and Steering Laws for Spacecraft Using Single Gimbal Control Momentum Gyroscope", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 39, No. 2, 1991, pp. 183-203.
- 6) Nakamura, Y., and Hanafusa, H., "Inverse Kinematics Solutions with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 108, Sept. 1986, pp. 164-171.
- 7) Kurokawa, H., "Constrained Steering Law of Pyramid-Type Control Moment Gyros and Ground Tests", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 3, 1997, pp. 445-449.
- 8) Heiberg, C.J., Bailey, D., and Wie, B., "Precision Pointing Control of Agile Spacecraft Using Single-Gimbal Control Momentum Gyros", *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, AIAA Washington, DC, 1997, pp. 1620-1632.
- 9) Hoelscher, B.R., and Vadali, S.R., "Optimal Open-Loop and Feedback Control Using Single Gimbal Control Momentum Gyroscopes", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 42, No. 2, 1994, pp. 189-206.
- 10) Schaub, H., and Junkins, J.L., "Stereographic Orientation Parameters for Attitude Dynamics: A Generalization of the Rodrigues Parameters", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 44, No. 1, 1996, pp. 1-19.
- 11) Krishnan, S., and Valdai, S.R., "An Inverse-Free Technique for Attitude Control of Spacecraft Using CMGs," *Acta Astronautica*, Vol. 39, No. 6, 1997, pp. 431-438.
- 12) Schaub, H., Vadali, S.R., and Junkins, J.L., "Feedback Control Law for Variable Speed Control Momentum Gyroscope", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 45, No. 3, 1998, pp. 307-328.
- 13) Heiberg, C.J., Bailey, D., and Wie, B., "Precision Spacecraft Pointing Using Single-Gimbal Control Moment Gyroscopes with Disturbance", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 1, 2000, pp. 77-85.
- 14) Richie, D.J., Tsiotras, P., and Fausz, J.L., "Simultaneous Attitude Control and Energy Storage Using VSCMGs: Theory and Simulation", *Proceeding of the American Control Conference*, American Automatic Control Council, New York, 2001, pp. 3973-3979.
- 15) Yoon, H., and Tsiotra, P., "Spacecraft Adaptive Attitude and Power Tracking with Variable Speed Control Moment Gyroscope", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 6, 2002, pp. 1081-1090.
- 16) Schaub, H., and Junkins, J.L., *Analytical Mechanics of Space Systems*, AIAA Education Series, AIAA, Reston, VA, 2003.
- 17) J.L. Junkins and J.D. Turner, *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*, Elsevier Science Publishers, Netherlands, 1986.
- 18) M.H. Kaplan, *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, John Wiley & Sons, U.S.A., 1976.
- 19) 박영웅, 방효충, "더블김벌 모멘텀휠을 이용한 롤/요 제어기 설계," 한국자동제어학술회의, 1996년 10월, pp.1099-1102.