А. В. Веденин, В. С. Воеводкин, В. Д. Галкин, Е. Ю. Каратецкая, И. Д. Ремизов, Скорость сходимости черновских аппроксимаций решений эволюционных уравнений, *Матем. заметки*, 2020, том 108, выпуск 3, 463–468

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12704

Скорость сходимости черновских аппроксимаций решений эволюционных уравнений

А. В. Веденин, В. С. Воеводкин, В. Д. Галкин, Е. Ю. Каратецкая, И. Д. Ремизов

Ключевые слова: черновские аппроксимации, эволюционные уравнения, полугруппы операторов, задача Коши, скорость сходимости.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12704

Введение. С середины 20 века классическим является [1], [2] тот факт, что решение корректно поставленной задачи Коши для линейного эволюционного уравнения с частными производными (примеры: уравнение Шрёдингера, параболические уравнения) дается сильно непрерывной полугруппой линейных ограниченных операторов, генератором которой является (как правило, неограниченный) линейный оператор, стоящий в правой части эволюционного уравнения. Далее мы раскроем эту идею подробнее, заодно вводя требуемые в дальнейшем обозначения.

Пусть X – бесконечное множество, а $\mathscr{F}$ – банахово пространство (не обязательно всех) числовых функций на X, причем пусть в $\mathscr{F}$ действует замкнутый линейный оператор $L\colon \operatorname{Dom}(L) \to \mathscr{F}$ с плотной в $\mathscr{F}$ областью определения $\operatorname{Dom}(L) \subset \mathscr{F}$; также предполагается, что X наделено всеми необходимыми структурами для корректного задания оператора L. Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x), \\ u(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in X$, $f \in \mathscr{F}$, $u(t,\,\cdot\,) \in \mathscr{F}$ для всех $t \geqslant 0$, а L – это, например, в тривиальном случае лапласиан Δ (и тогда $u'_t = Lu$ – это уравнение теплопроводности), или (в менее тривиальном случае) более сложно устроенный линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, не зависящими от t, но зависящими (как правило, нелинейно) от x. Как известно [1], [2], в случае существования C_0-полугруппы $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(L, \operatorname{Dom}(L))$ решение задачи Коши (1) существует (в смысле равенства левой и правой частей в $\mathscr{F}$) и дается равенством

$$u(t,x) = (e^{tL}f)(x), \qquad t \geqslant 0, \quad x \in X.$$

Если $f \in \operatorname{Dom}(L)$, то $u(t,\,\cdot\,) \in \operatorname{Dom}(L)$ для всех $t \geqslant 0$ и решение является классическим (в терминологии [1]), а для произвольного $f \in \mathscr{F}$ решение задачи Коши существует лишь как решение соответствующего интегрального уравнения

$$u(t,\,\cdot\,) = L\int_0^t u(s,\,\cdot\,)\,ds + f.$$

Мы пишем иногда $u(t,x)$, а иногда $u(t,\,\cdot\,)$, допуская, что в роли $\mathscr{F}$ может выступать, например, пространство $L^p(\mathbb{R})$, тогда (1) выполняется лишь для почти всех $x \in \mathbb{R}$. И, хотя в этом случае запись $u(t,x)$ не вполне корректна из-за того, что все версии функции $x \mapsto u(t,x)$ соответствуют одному вектору $u(t,\,\cdot\,) \in L^p(\mathbb{R})$, обычно это не приводит к недоразумениям.

Равенство $u(t,x) = (e^{tL}f)(x)$ показывает, что нахождение полугруппы $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ – это трудная задача, так как она равносильна решению задачи Коши (1) для каждого $f \in \mathscr{F}$. Но если построена так называемая операторно-значная функция Чернова G, т.е. по определению функция, удовлетворяющая условиям теоремы Чернова (в частности, равенству

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931).

$G(t) = I + tL + o(t)$ при $t \to +0$), то полугруппа дается равенством $e^{tL} = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n$. Преимущество такого подхода состоит в том, что обычно удается задать G не очень длинной явной формулой, содержащей коэффициенты оператора L и, тем самым, получить приближения к решению задачи Коши (1), сходящиеся к решению в $\mathscr{F}$ при $n \to \infty$. Функции $G(t/n)^n u_0$ как раз и называются черновскими аппроксимацями решения задачи Коши (1).

Настоящее сообщение посвящено исследованию того, с какой скоростью (при фиксированном $t > 0$) в зависимости от $f \in \mathscr{F}$ убывает при $n \to \infty$ норма разности приближенного и точного решений $\|G(t/n)^n f - e^{tL} f\|$. Даются первые определения этой новой области исследований в теории C_0-полугрупп, разбираются модельные примеры полугрупп и их черновских аппроксимаций и приводится первый (модельный) пример быстро сходящихся черновских аппроксимаций для приближенного вычисления (известных и до появления теоремы Чернова) решений одномерного уравнения теплопроводности.

1. Аппроксимационные подпространства в теореме Чернова. Играющее ключевую роль в дальнейшем понятие касания по Чернову было введено в [3] и названо там Chernoff tangency.

Определение 1. Говорят, что операторно-значная функция G *касается по Чернову* оператора L (подробности приведены ниже), если выполняются следующие условия:

(CT0) пусть $\mathscr{F}$ – банахово пространство и $\mathscr{L}(\mathscr{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{F}$; пусть G – это отображение $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathscr{F})$ или, иначе говоря, семейство линейных ограниченных операторов $(G(t))_{t\geqslant 0}$; замкнутый линейный оператор $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to \mathscr{F}$ имеет плотную в $\mathscr{F}$ область определения $\mathrm{Dom}(L) \subset \mathscr{F}$;

(CT1) семейство G сильно непрерывно (= непрерывно в сильной операторной топологии пространства $\mathscr{L}(\mathscr{F})$), т.е. отображение $t \mapsto G(t)f \in \mathscr{F}$ непрерывно на $[0,+\infty)$ для каждого $f \in \mathscr{F}$;

(CT2) $G(0) = I$, т.е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in \mathscr{F}$;

(CT3) существует такое плотное в $\mathscr{F}$ линейное подпространство $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$, что при всех $f \in \mathscr{D}$ существует предел $\lim_{t\to 0}(G(t)f - f)/t$, значение которого обозначим символом $G'(0)f$;

(CT4) замыкание оператора $(G'(0), \mathscr{D})$ существует и равно $(L, \mathrm{Dom}(L))$.

Замечание 1. Плотность $\mathrm{Dom}(L)$ в $\mathscr{F}$ следует из условий (CT3) и (CT4), поэтому отдельно требовать это в (CT0) не обязательно. Классическую теорему Чернова (Chernoff [4], 1968) можно сформулировать теперь следующим образом, отделяя в ее условиях (E)xistence condition и (N)orm growth condition от (CT), ср. [1]–[4].

Теорема Чернова (современная формулировка) (Ремизов [3], 2016). *Пусть $\mathscr{F}$ – банахово пространство. Пусть дано отображение $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathscr{F})$ и замкнутый линейный оператор $L\colon \mathrm{Dom}(L) \to \mathscr{F}$, где $\mathrm{Dom}(L) \subset \mathscr{F}$. Пусть выполнены следующие условия*:

(E) *существует C_0-полугруппа $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$*;

(CT) *G касается по Чернову оператора L*;

(N) *существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leqslant e^{\omega t}$ при всех $t \geqslant 0$.*

Тогда для каждых $f \in \mathscr{F}$ и $T > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| = 0. \tag{2}$$

Пусть в силу теоремы Чернова равенство (2) верно, т.е. имеет место сходимость

$$G\left(\frac{t}{n}\right)^n f \to e^{tL} f \qquad \text{для каждого} \quad f \in \mathscr{F}.$$

Но с какой скоростью происходит эта сходимость, как быстро убывает невязка с ростом n? Более того, какие правильные вопросы о скорости сходимости можно ставить, чем ее измерять, чего ожидать и чего не ожидать? Несмотря на разбор некоторых частных случаев [5] построение этой теории не завершено, и тема привлекает внимание исследователей [6], [7]. Выскажем некоторые соображения предварительного характера в качестве первого шага на этом пути. С одной стороны, можно при каждом $t>0$ для каждой функции Чернова G определить функцию $C_G(t)$, отображающую пространство $\mathscr{F}$ в пространство c_0 убывающих к нулю последовательстей по правилу

$$(C_G(t)f)(n)=\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f-e^{tL}f\right\|,$$

и изучать ее свойства, которые дадут полную информацию по интересующему нас вопросу. С другой стороны, функция эта нелинейна и имеет слишком много параметров/аргументов (G, t, f) для того, чтобы ее было легко исследовать. Однако, все, что мы будем узнавать о скорости сходимости черновских аппроксимаций, так или иначе будет являеться утверждением об этой функции.

Далее мы будем использовать (при $n\to\infty$) стандартные символы “о малое” и “О большое”; напомним, что из определений этих понятий следует, что $a_n=o(b_n)$ влечет за собой $a_n=O(b_n)$.

Предложение 1 (Ремизов [8], 2018). *Пусть для множества $\tau\subset[0,+\infty)$ выполнено $\tau\setminus\{0\}\neq\varnothing$, и пусть $w\colon[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty}w(x)=0$. Тогда множество*

$$A_w^\tau=\left\{f\in\mathscr{F}:\sup_{t\in\tau}\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f-e^{tL}f\right\|=O(w(n))\ \textit{при}\ n\to\infty\right\}$$

представляет собой линейное подпространство в $\mathscr{F}$. Более того, из

$$w_2(x)=o(1),\quad w_1(x)=O(w_2(x))\qquad \textit{при}\quad x\to+\infty$$

следует $A_{w_1}^\tau\subset A_{w_2}^\tau$. (Иными словами, при $n\to\infty$ на векторах $f\in A_w^\tau$ ошибка убывает не медленнее, чем $\mathrm{const}\cdot w(n)$. Включение $A_{w_1}^\tau\subset A_{w_2}^\tau$ означает, что на векторах из $A_{w_1}^\tau$ ошибка убывает не медленнее, чем на векторах из $A_{w_2}^\tau$.)

Определение 2 (Ремизов [8], 2018). Будем называть множество A_w^τ *аппроксимационным подпространством порядка $w(n)$ на множестве τ для функции Чернова G*, а включение $A_{w_1}^\tau\subset A_{w_2}^\tau$ будем называть *иерархией аппроксимационных подпространств, ассоциированной с функцией Чернова G и множеством τ*. Произвольное линейное подпространство $K\subset\mathscr{F}$ называется *аппроксимационным*, если существует такая функция $w(n)\to0$ и такое содержащее хотя бы одну отличную от нуля точку множество $\tau\subset\mathbb{R}$, что $A_w^\tau=K$.

Замечание 2. Доказательство предложения 1 сводится к простой проверке: пусть числа α и β произвольны, а векторы f и g лежат в A_w^τ; докажем, что $h=\alpha f+\beta g$ тоже принадлежит множеству A_w^τ:

$$\begin{aligned}\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n h-e^{tL}h\right\|&=\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n(\alpha f+\beta g)-e^{tL}(\alpha f+\beta g)\right\|\\&\leqslant|\alpha|\cdot\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f-e^{tL}f\right\|+|\beta|\cdot\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n g-e^{tL}g\right\|=O(w(n))+O(w(n))=O(w(n)).\end{aligned}$$

Осталось только от левой и правой частей неравенства взять $\sup_{t\in\tau}$. Включение $A_{w_1}^\tau\subset A_{w_2}^\tau$ прямо следует из определения пространства A_w^τ.

Заметим также, что из $\tau_1\subset\tau_2$ следует $A_w^{\tau_2}\subset A_w^{\tau_1}$, так как супремум от неотрицательной функции по меньшему множеству не превосходит супремума по большему множеству. Будем далее считать, что множество τ фиксировано, и писать A_w вместо A_w^τ.

Замечание 3. Множество A_w строится по w однозначно (это очевидно), но восстановить w по A_w однозначно нельзя: например, функциям $n \mapsto w(n)$ и $n \mapsto 2w(n) + w(n)/n$ отвечает одно аппроксмационное подпространство, так как каждая из них есть O большое от другой.

Замечание 4. Каждый вектор $f \in \mathscr{F}$ принадлежит некоторому аппроксимационному подпространству, в частности, пространству A_w при $w(n) = \|G(t/n)^n f - e^{tL} f\|$. Поэтому справедливо равенство

$$\mathscr{F} = \bigcup_{w(n)=o(1),\, w(n)\geqslant 0} A_w,$$

т.е. каждый вектор (вместе с аппроксимационным подпространством, которому принадлежит) занимает свое место в иерахии, которая имеет структуру упорядоченного множества, если порядок понимать в смысле включения подпространств. В невырожденных случаях этот порядок частичный.

Замечание 5. Не каждое линейное подпространство в $\mathscr{F}$ является аппроксимационным. Например, если положить $G(t) = e^{tL}$, то $\|G(t/n)^n f - e^{tL} f\| = 0$ для всех f, поэтому аппроксимационное подпространство для такой функции Чернова G только одно – само $\mathscr{F}$. Более того, $\mathscr{F} = A_w$ для любой функции $w(n) = o(1)$. Этот пример также показывает, что скорость сходимости в теореме Чернова может быть сколь угодно быстрой, если функция Чернова G выбрана удачно.

Замечание 6. В [8] было высказано предположение: чем больше производных по переменной t в нуле совпадает у функций $t \mapsto e^{tL}$ и $t \mapsto G(t)$, тем более высокую скорость сходимости можно получить на нетривиальных подпространствах. Так, при $S(t) = I + tL + o(t)$ возможна скорость сходимости C/n, при $S(t) = I + tL + (1/2)t^2L^2 + o(t^2)$ возможна скорость сходимости C/n^2 и т.д.

К моменту выхода из печати настоящей статьи это предположение уже доказано, и доказательство вскоре будет опубликовано в работе О. Е. Галкина и И. Д. Ремизова.

2. Полугруппа сдвигов на прямой. Рассмотрим случай $X = \mathbb{R}$, $(Lf)(x) = f'(x)$, и $\mathscr{F} = UC_b(\mathbb{R})$ – банахово пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. В этом случае задача Коши (1) приобретает вид $[u_t'(t,x) = u_x'(t,x),\ u(0,x) = u_0(x)]$, а ее решением является функция $u(t,x) = u_0(x+t)$, поэтому $(e^{tL}f)(x) = f(x+t)$ – функция f, "сдвинутая" на t. Непосредственно проверяется, что $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет определению C_0-полугруппы. Этот пример оказывается уже достаточно богатым для того, чтобы с его помощью отвечать на некоторые вопросы общего характера.

Теорема 1. *Скорость сходимости в теореме Чернова может быть сколь угодно медленной. А именно, если дана функция w и $\lim_{x\to+\infty} w(x) = 0$, то существуют такие X, $\mathscr{F}$, L, e^{tL}, G, f, что*

$$w\left(\frac{n}{t}\right) = O\left(\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f - e^{tL} f\right\|\right) \qquad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для каждого} \quad t > 0.$$

Доказательство. Обратимся к только что рассмотренному примеру полугруппы сдвигов и положим

$$(G(t)f)(x) = f\left(x + t + tw\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad \text{для} \quad t > 0, \qquad G(0)f = f.$$

Проверка условий (CT0)–(CT4) показывает, что G является функцией Чернова для полугруппы сдвигов. Из определения функции G следует, что

$$\left(G\left(\frac{t}{n}\right)f\right)(x) = f\left(x + \frac{t}{n} + \left(\frac{t}{n}\right)w\left(\frac{n}{t}\right)\right), \qquad \left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n f\right)(x) = f\left(x + t + tw\left(\frac{n}{t}\right)\right).$$

Если функция f имеет непрерывную производную, то

$$\left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n f\right)(x) - (e^{tL}f)(x) = f\left(x + t + tw\left(\frac{n}{t}\right)\right) - f(x+t) = f'(\xi)tw\left(\frac{n}{t}\right),$$

где $\xi \in [x+t, x+t+tw(n/t)]$ и ξ зависит от x и t. Следовательно,

$$\begin{aligned}\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f - e^{tL}f\right\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n f\right)(x) - (e^{tL}f)(x)\right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(\xi)tw\left(\frac{n}{t}\right)\right| \geqslant |f'(\xi)|tw\left(\frac{n}{t}\right) \qquad \text{для всех}\quad t,\ x,\ n.\end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное $t > 0$ и положим $x = -t$. Тогда окажется, что $\xi \in [0, tw(n/t)]$, поэтому $\lim_{n\to\infty} \xi = 0$ в силу того, что $\lim_{x\to+\infty} w(x) = 0$. Следовательно, для $f(x) = \sin(x)$ имеем $\lim_{n\to\infty} |f'(\xi)| = \cos(0) = 1$ и, в частности, существует такой номер n_0 что для всех $n > n_0$ и $x = -t$ верно $|f'(\xi)| > 1/2$. Поэтому при всех $n > n_0$ верно $\|G(t/n)^n f - e^{tL}f\| \geqslant (1/2)tw(n/t)$, что равносильно $w(n/t) \leqslant (2/t)\|G(t/n)^n f - e^{tL}f\|$, а это и означает, что

$$w\left(\frac{n}{t}\right) = O\left(\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f - e^{tL}f\right\|\right) \qquad \text{для}\quad f(x) = \sin(x).$$

Замечание 7. Рассмотрим ту же полугруппу сдвигов и функцию Чернова $(G(t)f)(x) = f(x+t+at^2)$, где $a \neq 0$. В этом случае $(G(t/n)^n f)(x) = f(x+t+at^2/n)$ и, если функция f гёльдерова (т.е. $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|^\alpha$ для некоторых $C \geqslant 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$), то

$$\begin{aligned}\left\|G\left(\frac{t}{n}\right)^n f - e^{tL}f\right\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n f\right)(x) - (e^{tL}f)(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f\left(x + t + \frac{at^2}{n}\right) - f(x+t)\right| \\ &\leqslant C\left|\frac{at^2}{n}\right|^\alpha = Ct^{2\alpha}|a|^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha\right),\end{aligned}$$

где мы положили $x_1 = x + t + at^2/n$ и $x_2 = x + t$. Таким образом, каждое из пересечений $UC_b(\mathbb{R})$ с пространством гёльдеровых функций с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$ является аппроксимационным подпространством порядка $w_\alpha(n) = (1/n)^\alpha$.

Тем самым для функции Чернова $(G(t)f)(x) = f(x+t+at^2)$ найден фрагмент структуры аппроксимационных подпространств. Интересно было бы найти эту структуру полностью, а также исследовать случай, когда a зависит от x.

3. Полугруппа решений уравнения теплопроводности на прямой. Пусть снова $X = \mathbb{R}$ и $\mathscr{F} = UC_b(\mathbb{R})$, но $(Lf)(x) = a^2 f''(x)$ при фиксированном $a > 0$. В этом случае задача Коши (1) имеет вид $[u_t'(t,x) = a^2 u_{xx}''(t,x),\ u(0,x) = u_0(x)]$ – это уравнение теплопроводности, решение которого (а, следовательно, и полугруппа $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$) задаются интегралом Пуассона

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)u_0(y)\,dy, \qquad \text{где}\quad \Phi(x,t) = (2a\sqrt{\pi t}\,)^{-1}\exp\left(\frac{-x^2}{4a^2t}\right).$$

В работе [9] для более общего уравнения с переменными коэффициентами была построена функция Чернова, которая в этом частном случае имеет вид

$$(G(t)f)(x) = \frac{1}{4}f(x+2a\sqrt{t}\,) + \frac{1}{4}f(x-2a\sqrt{t}\,) + \frac{1}{2}f(x).$$

В работе Веденина [10] была построена функция Чернова

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x+a\sqrt{6t}\,) + \frac{1}{6}f(x-a\sqrt{6t}\,).$$

Гипотеза 1. Функция S обладает аппроксимационным подпространством порядка $1/n^2$ и на некоторых векторах $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ дает более высокую по сравнению с G скорость сходимости к точному решению уравнения теплопроводности.

Замечание 8. Обсуждение перечисленных выше модельных примеров дает надежду на создание универсальных методов построения быстро сходящихся черновских аппроксимаций (в том числе, формул Фейнмана [11] и их аналогов [12], [13]) для эволюционных уравнений с переменными коэффициентами.

И. Д. Ремизов признателен своему научному руководителю профессору О. Г. Смолянову за моральную поддержку, Д. В. Тураеву за обсуждения, О. Е. Галкину и П. С. Прудникову за замечания по рукописи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000. **[2]** В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ*, РХД, Ижевск, 2011. **[3]** I. D. Remizov, *J. Funct. Anal.*, **270**:12 (2016), 4540–4557. **[4]** P. R. Chernoff, *J. Funct. Anal.*, **2**:2 (1968), 238–242. **[5]** Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 122–137. **[6]** V. Zagrebnov, *Notes on the Chernoff Product Formula*, 2019, arXiv: 1911.09480. **[7]** A. Gomilko, S. Kosowicz, Yu. Tomilov, *A General Approach to Approximation Theory of Operator Semigroups*, 2018, arXiv: 1801.06749. **[8]** I. D. Remizov, "On estimation of error in approximations provided by Chernoff's product formula", *International Conference "Shilnikov Workshop-2018"*, Book of Abstracts, Nizhny Novgorod University, Nizhny Novgorod, 2018, 38–41. **[9]** I. D. Remizov, *Appl. Math. Comput.*, **328** (2018), 243–246. **[10]** А. В. Веденин, *Быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению параболического дифференциального уравнения на вещественной прямой*, Дипломная работа, НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, 2019. **[11]** И. Д. Ремизов, *Докл. АН*, **476**:1 (2017), 17–21. **[12]** И. Д. Ремизов, М. Ф. Стародубцева, *Матем. заметки*, **104**:5 (2018), 790–795. **[13]** А. А. Лобода, *Матем. заметки*, **106**:2 (2019), 311–315.

А. В. Веденин
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)

Поступило
26.02.2020
Принято к публикации
18.03.2020

В. С. Воеводкин
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)

В. Д. Галкин
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)

Е. Ю. Каратецкая
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)

И. Д. Ремизов
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: ivremizov@yandex.ru