А. В. Иванов, Е. В. Осипов, Степень дискретной порожденности компактов, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 396–401

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4177

Математические заметки

Том 87 выпуск 3 март 2010

УДК 515.12

Степень дискретной порожденности компактов

А. В. Иванов, Е. В. Осипов

В работе в предположении континуум-гипотезы построен пример дискретно-порожденного компакта X, квадрат которого не является дискретно-порожденным. Для всякого компакта X определена ординальнозначная характеристика $\mathrm{idc}(X)$, которая является наименьшим числом итераций d-замыкания, дающим в итоге замыкание любого исходного подмножества X. Установлено, что если $\chi(X) \leqslant \omega_\alpha$, то $\mathrm{idc}(X) \leqslant \alpha + 1$.

Библиография: 2 названия.

В работе рассматриваются только компактные хаусдорфовы пространства. Компакт X называется *дискретно-порожденным*, (см. [1]), если для любого подмножества $A \subset X$ d-замыкание A совпадает с замыканием: $[A]_d = [A]$. При этом d-замыкание $[A]_d$ определяется как объединение замыканий всех дискретных подмножеств A. Дискретно-порожденными являются, в частности, все пространства счетной тесноты и все упорядоченные пространства (см. [1]). В [1] поставлен следующий вопрос: верно ли, что квадрат дискретно-порожденного компакта является дискретно-порожденным? В настоящей работе в предположении CH построен компакт X, являющийся контрпримером к этому вопросу. Вес X равен c и в X имеется ровно одна точка несчетного характера. Отметим также, что X является компактным расширением полуинтервала $[0,1)$, наростом которого является одноточечная компактификация трансфинитной прямой. Для построения компакта X используется метод вполне замкнутых отображений Федорчука [2].

В [1] показано, что последовательное применение оператора d-замыкания к подмножеству $A \subset X$ на некотором (тринсфинитном) шаге α дает $[A]$: $[A]_{d^\alpha} = [A]$. Это позволяет определить следующую ординальнозначную характеристику компакта X:

$$\mathrm{idc}(X) = \min\{\alpha : [A]_{d^\alpha} = [A] \text{ для всех } A \subset X\}.$$

Доказано, что если $\chi(X) \leqslant \omega_\alpha$, то $\mathrm{idc}(X) \leqslant \alpha+1$. Для всякого дискретно-порожденного компакта X $\mathrm{idc}(X^n) \leqslant n$. В частности, в описанном выше примере $\mathrm{idc}(X^2) = 2$.

Теорема 1 (CH). *Существует дискретно-порожденный компакт X, квадрат которого X^2 не является дискретно-порожденным. При этом $w(X) = c$ и в X имеется ровно одна точка несчетного характера.*

Доказательство. Рассмотрим систему множеств $X_\alpha = \alpha \times [-1,0) \oplus \{x_\alpha\}$, где $\alpha \leqslant \omega_1$ и x_α – некоторая выделенная точка в X_α (в частности, $X_0 = \{x_0\}$). Определим отображение $p^\alpha_\beta\colon X_\alpha \to X_\beta$ следующим образом:

$$p^\alpha_\beta(x_\alpha) = x_\beta, \qquad p^\alpha_\beta(\gamma, t) = \begin{cases} x_\beta & \text{при } \beta \leqslant \gamma < \alpha,\ t \in [-1,0), \\ (\gamma, t) & \text{при } \gamma < \beta. \end{cases}$$

Ясно, что система множеств и отображений $S = \{X_\alpha,\, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\}$ образует непрерывный обратный спектр множеств, предел которого $\lim S$ можно отождествить с X_{ω_1}, а предельные проекции p_α – с отображениями $p^{\omega_1}_\alpha$.

На $X_1 = [-1,0) \oplus \{x_1\}$ зададим топологию отрезка $[-1,0]$ ($x_1 \equiv 0$). Пусть $A_1 = [-1,0) \subset X_1$ и $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ – семейство счетных подмножеств A_1, занумерованных ординалами. В X_1^2 рассмотрим множество

$$B_1 = \{(t_1, t_2) : t_2 = 2t_1,\ -1 \leqslant t_2 < 0\}$$

и занумеруем все его дискретные подмножества: $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Отметим, что каждое D_α счетно и нигде не плотно в B_1.

Топологизируем множества спектра S по рекурсии. Предположим, что на множествах X_β при $\beta < \alpha$ уже задана топология, так что выполняются следующие условия:

1_α) X_β – метризуемые компакты и все отображения $p^\beta_{\beta'}$ непрерывны, $\beta' < \beta < \alpha$;

2_α) множество $A_\beta = (p^\beta_1)^{-1} A_1$ всюду плотно в X_β и разность $F_\beta = X_\beta \setminus A_\beta$ гомеоморфна отрезку с концевой точкой x_β, $\beta < \alpha$;

3_α) множества $(p^{\beta+1}_\beta)^{-1} x_\beta$ и $[(p^{\beta+1}_\beta)^{-1}(F_\beta \setminus \{x_\beta\})]$ гомеоморфны отрезкам, которые пересекаются по общей концевой точке, $\beta + 1 < \alpha$;

4_α) если $\gamma < \alpha$ и $x_\gamma \in [(p^\gamma_1)^{-1} C_\gamma]$, то в C_γ выбрано дискретное подмножество G_γ так, что $x_\beta \in [(p^\beta_1)^{-1} G_\gamma]$ при $\gamma \leqslant \beta < \alpha$;

5_α) $(x_\beta, x_\beta) \in [B_\beta]$, где $B_\beta = ((p^\beta_1)^2)^{-1} B_1$, $\beta < \alpha$;

6_α) $(x_{\beta+1}, x_{\beta+1}) \notin [((p^{\beta+1}_1)^2)^{-1} D_\beta]$ при $\beta + 1 < \alpha$.

Если α предельное, то на X_α зададим топологию предела спектра $S_\alpha = \{X_\beta,\, p^\beta_{\beta'} : \beta, \beta' < \alpha\}$: $X_\alpha = \lim S_\alpha$. При этом, если $x_\alpha \in [(p^\alpha_1)^{-1} C_\alpha]$, то возьмем в $(p^\alpha_1)^{-1} C_\alpha$ какую-нибудь последовательность G', сходящуюся к точке x_α, и положим $G_\alpha = p^\alpha_1(G')$. В силу условий 2_α), 3_α) предел спектра

$$\lim\{F_\beta, (p^\beta_{\beta'})|_{F_\beta} : \beta, \beta' < \alpha\} = F_\alpha$$

гомеоморфен отрезку с концевой точкой x_α. Таким образом, условия $1_{\alpha+1}$)–$6_{\alpha+1}$) выполнены.

Пусть теперь $\alpha = \xi + 1$. Поскольку отображения p^β_1 взаимно однозначны в точках множества A_1, можно считать, что $A_\beta = A_1 = [-1,0)$, $\beta \leqslant \xi$. Пусть

$$\Gamma = \{\gamma : \gamma \leqslant \xi \text{ и } x_\gamma \in [(p^\gamma_1)^{-1} C_\gamma]\}.$$

В каждом множестве $(p^\xi_1)^{-1} G_\gamma \subset A_\xi = [-1,0)$, $\gamma \in \Gamma$, выберем последовательность H_γ, сходящуюся к x_ξ, так, что $H = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ также является последовательностью, сходящейся к x_ξ. Занумеруем точки H по возрастанию: $H = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ и потребуем дополнительно, что $2y_{n+1} > y_n$, $n \in \mathbb{N}$ (возможно, для выполнения этого условия придется "проредить" последовательность H). Выберем интервальные окрестности (a_n, b_n) точек y_n, $a_n, b_n \in [-1, 0)$ так, что $2b_n < a_n$, $2a_{n+1} > b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Множество $[((p_1^\xi)^2)^{-1} D_\xi]$ нигде не плотно в B_ξ. Поэтому в $B_\xi \subset A_\xi^2 = [-1, 0)^2$ можно выбрать последовательность $E_\xi = \{(c_k, 2c_k) : k \in \mathbb{N}\}$, сходящуюся к (x_ξ, x_ξ) так, что

$$c_k, 2c_k \notin \pi_\xi^i[((p_1^\xi)^2)^{-1} D_\xi] = F_\xi^i, \qquad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\pi_\xi^i \colon X_\xi^2 \to X_\xi$, $i = 1, 2$, – проекции квадрата X_ξ на 1-й и 2-й сомножители.

Определим отображение $h_{x_\xi} : X_\xi \setminus \{x_\xi\} \to [-1, 0]$. Положим

$$h_{x_\xi}\left(\left((X_\xi \setminus A_\xi) \cup \left(F_\xi^1 \cup F_\xi^2 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)\right)\right) \setminus \{x_\xi\}\right) = \{-1\},$$

$$h_{x_\xi}(H \cup \{c_k, 2c_k : k \in \mathbb{N}\}) = \{0\}.$$

При этом, если $x_\xi \notin [(F_\xi^1 \cup F_\xi^2 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)) \cap A_\xi]$, то потребуем дополнительно, что $h_{x_\xi}(E) = \{-1\}$ для некоторой последовательности $E \subset A_\xi$, сходящейся к x_ξ такой, что $E \cap (H \cup \{c_k, 2c_k : k \in \mathbb{N}\}) = \varnothing$. Таким образом, отображение h_{x_ξ} корректно определено на замкнутом в $X_\xi \setminus \{x_\xi\}$ подмножестве. Продолжим это отображение до непрерывного отображения h_{x_ξ} всего пространства $X_\xi \setminus \{x_\xi\}$ в отрезок $[0, 1]$. Положим

$$X_\alpha = B(X_\xi,\, [0, 1]_x,\, h_x : x = x_\xi),$$

где $B(\dots)$ – пространство Федорчука (см. [2]). При этом мы отождествляем p_ξ^α с проекцией $\pi \colon B \to X_\xi$, а прообраз $(p_\xi^\alpha)^{-1}(x_\xi) = \{\xi\} \times [-1, 0) \cup \{x_\alpha\}$ – с отрезком $[-1, 0]$, $x_\alpha \equiv 0$. Если $x_\alpha \in [(p_1^\alpha)^{-1} C_\alpha]$, то, как и в случае предельного α, выберем дискретное $G_\alpha \subset C_\alpha$, для которого $x_\alpha \in [(p_1^\alpha)^{-1} G_\alpha]$.

Проверим выполнение условий $1_{\alpha+1}$)–$6_{\alpha+1}$). Множество A_α всюду плотно в X_α, поскольку в A_ξ можно указать две последовательности E^1 и E^2, сходящиеся к x_ξ, для которых

$$h_{x_\xi}(E^1) = \{-1\}, \qquad h_{x_\xi}(E^2) = \{0\}, \qquad h_{x_\xi}(X_\xi \setminus (A_\xi \cup \{x_\xi\})) = \{-1\}.$$

Множество F_α гомеоморфно отрезку, поскольку оно является результатом склейки полуинтервала $(p_\xi^\alpha)^{-1}(F_\xi \setminus \{x_\xi\})$ и отрезка $[-1, 0]_{x_\xi}$ (конец полуинтервала $(p_\xi^\alpha)^{-1}(F_\xi \setminus \{x_\xi\})$ совмещен с началом -1 отрезка $[-1, 0]_{x_\xi}$). Таким образом, условия $2_{\alpha+1}$) и $3_{\alpha+1}$) выполнены. Выбор подпоследовательностей $H_\gamma \subset H$ при построении отображения h_{x_ξ} гарантирует выполнение условия $4_{\alpha+1}$). Последовательность $E_\xi = \{(c_k, 2c_k)\}$ по построению сходится к (x_ξ, x_ξ) и $h_{x_\xi}(\{c_k, 2c_k\}) = \{0\} = \{x_\alpha\}$. Следовательно, $(x_\alpha, x_\alpha) \in [((p_\xi^\alpha)^2)^{-1} E_\xi]$ – условие $5_{\alpha+1}$) выполнено.

Докажем, наконец, что $(x_\alpha, x_\alpha) \notin [((p_1^\alpha)^2)^{-1} D_\xi]$. Пусть $V = (-1, 0] \subset [-1, 0]_{x_\xi}$ и $O = O(x_\xi, X_\xi, V)$ – окрестность точки x_α в X_α (см. [2]). Покажем, что

$$O^2 \cap ((p_1^\alpha)^2)^{-1} D_\xi = \varnothing.$$

Пусть $(d, 2d) \in D_\xi$. Если $d \notin \cup(a_n, b_n)$, то $d \in F_\xi^1 \setminus \cup(a_n, b_n)$. (Напомним, что мы имеем право отождествлять $A_1 = [-1, 0)$ и A_ξ). Следовательно, $h_{x_\xi}(d) = -1$

и $d \notin O$. Если же $d \in (a_n, b_n)$, то $2d \in (2a_n, 2b_n)$. По построению $b_{n-1} < 2a_n < 2b_n < a_n$. Следовательно, $2d \notin \cup(a_n, b_n)$ и, аналогично, $2d \notin O$. Итак, $(d, 2d) \notin O^2$. Свойство $6_{\alpha+1}$) доказано.

Продолжая рекурсию, мы получим непрерывный спектр $S = \{X_\alpha,\, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\}$ из метризуемых компактов, удовлетворяющий условиям 1_{ω_1})–6_{ω_1}). Предел этого спектра $\lim S$ и есть искомый компакт X. Ясно, что $w(X) = \omega_1$ и x_{ω_1} – единственная точка несчетного характера в X. В силу условия 5_{ω_1})

$$(x_{\omega_1}, x_{\omega_1}) \in [((p_1)^2)^{-1} B_1].$$

В то же время $(x_{\omega_1}, x_{\omega_1}) \notin [((p_1)^2)^{-1} B_1]_d$, поскольку для любого дискретного подмножества $D = D_\alpha \subset B_1$

$$(x_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}) \notin [((p_1^{\alpha+1})^2)^{-1} D_\alpha]$$

и, следовательно, $(x_{\omega_1}, x_{\omega_1}) \notin [((p_1)^2)^{-1} D]$. Таким образом, X^2 не является дискретно-порожденным пространством.

Из условий 2_{ω_1}) и 3_{ω_1}) следует, что $X \setminus p_1^{-1} A_1$ является александровской компактификацией трансфинитной прямой. Значит, $X \setminus p_1^{-1} A_1$ – упорядоченное дискретно-порожденное пространство. Пусть $H \subset p_1^{-1} A_1 = A_1$ и $x_{\omega_1} \in [H]$. Покажем, что $x_{\omega_1} \in [H]_d$. В H есть счетное всюду плотное подмножество $C = C_\alpha$. Поскольку $x_\alpha \in [(p_1^\alpha)^{-1} C_\alpha]$, на шаге α в C_α было выделено дискретное подмножество G_α, для которого $x_\beta \in [(p_1^\beta)^{-1} G_\alpha]$ при $\alpha \leqslant \beta < \omega_1$. Значит, $x_{\omega_1} \in [(p_1)^{-1} G_\alpha]$, т.е. $x_{\omega_1} \in [H]_d$. Из доказанного сразу следует дискретная порожденность X. Теорема доказана.

Определим $[A]_{d^\alpha}$ по рекурсии. Пусть $[A]_{d^1} = [A]_d$. Предположим, что $[A]_{d^\beta}$ уже определены при $\beta < \alpha$. Если $\alpha = \beta + 1$, то полагаем $[A]_{d^\alpha} = [[A]_{d^\beta}]_d$. Если же α предельное, то $[A]_{d^\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} [A]_{d^\beta}$.

Теорема 2. *Пусть $A \subset X$ и $x \in [A] \setminus [A]_d$. Тогда $\psi(x, \{x\} \cup A) < \psi(x, \{x\} \cup [A]_d)$.*

Доказательство. Пусть

$$\psi(x, \{x\} \cup A) = \tau.$$

Рассмотрим такое семейство открытых подмножеств $\gamma = \{U_\alpha : \alpha < \tau\}$, что

$$\Bigl(\bigcap_{\alpha<\tau} U_\alpha\Bigr) \cap A = \varnothing, \quad x \in U_\alpha \qquad \text{для всех} \quad \alpha < \tau.$$

Покажем, что $(\bigcap_{\alpha<\tau} U_\alpha) \cap [A]_d \neq \varnothing$. Пусть $Q = \bigcap_{\alpha<\tau} U_\alpha$. Очевидно Q есть множество типа G_τ. Так как X нормально, то для каждого $\alpha < \tau$ существует замкнутое типа G_δ подмножество H_α такое, что $x \in H_\alpha \subset U_\alpha$. Пусть $F = \bigcap_{\alpha<\tau} H_\alpha$. Очевидно, что F замкнуто и имеет тип G_τ; следовательно, оно компактно и $\chi(F, X) = \tau$. Фиксируем базу $B(F, X) = \{W_\alpha : \alpha < \tau\}$. Достаточно показать, что существует $y \in F$ и дискретное $D \subset A$ такие, что $y \in [D]$.

При $\tau = \omega_0$ утверждение легко проверяется. Пусть теперь τ несчетно.

Существует компакт $F_0 \subset W_0$ типа G_δ такой, что $x \in F_0$. Так как $\tau > \omega_0$, то $F_0 \cap A \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in F_0 \cap A$.

Допустим, что для всех α, меньших фиксированного $\gamma < \tau$, уже построены замкнутые множества F_α типа $G_{|\alpha|}$ такие, что

$$x \in F_\alpha \subset W_\alpha \qquad \text{и} \qquad F_{\alpha+1} \subset F_\alpha,$$

а также выбраны точки x_α такие, что $x_\alpha \in F_\alpha \cap A$, причем $F_\alpha \cap [\{x_\beta : \beta < \alpha\}] = \varnothing$.

Рассмотрим теперь множество $D_\gamma = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\} \subset A$. Оно дискретно. Действительно, для каждого $\alpha < \gamma$ искомой окрестностью точки x_α, не содержащей остальные точки D, является

$$Ox_\alpha = (W_\alpha \setminus [\{x_\beta : \beta < \alpha\}]) \cap (X \setminus F_{\alpha+1}).$$

По условию $x \notin [A]_d$, поэтому $x \notin [D]$. Выбираем замкнутое H типа G_δ такое, что $x \in H \subset W_\gamma \cap (X \setminus [D_\gamma])$. Теперь полагаем $F_\gamma = H \cap (\bigcap_{\alpha<\gamma} F_\alpha)$. Тогда F_γ замкнутое типа $G_{|\gamma|}$ и так как $|\gamma| < |\tau|$, то $F_\gamma \cap A \neq \varnothing$. Выбираем $x_\gamma \in F_\gamma \cap A$.

Теперь для каждого $\gamma < \tau$ выберем точку x_γ и замкнутое множество F_γ типа $G_{|\gamma|}$. Покажем, что множество $D = \{x_\gamma : \gamma < \tau\}$ дискретно. Действительно, для каждого $\alpha < \tau$ искомой окрестностью точки x_α, не содержащей остальные точки D, является окрестность Ox_α.

Таким образом, D дискретно. Очевидно, что в любой окрестности W_γ замкнутого F содержатся точки D, поэтому существует $y \in F$ такая, что $y \in [D]$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $x \notin [A]_{d^\alpha}$. *Тогда* $\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\alpha}) \geqslant \omega_\alpha$.

Доказательство. По индукции. При $\alpha = 0$ утверждение очевидно.

Допустим, что утверждение верно при всех α, меньших некоторого фиксированного β. Докажем, что оно верно и при β.

Пусть $x \notin [A]_{d^\beta}$. Тогда $x \notin [A]_{d^\alpha}$ для любых $\alpha < \beta$. В силу индукционного предположения получаем $\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\beta}) \geqslant \omega_\alpha$.

Возможны два случая.

1) β – предельный ординал. В силу теоремы 2 получаем

$$\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\beta}) > \psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\alpha}) \geqslant \omega_\alpha,$$

поэтому

$$\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\beta}) \geqslant \lim_{\alpha<\beta} \omega_\alpha = \omega_\beta.$$

2) $\beta = \gamma + 1$. Тогда $\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\gamma}) \geqslant \omega_\gamma$. Так как $x \notin [[A]_{d^\gamma}] = [A]_{d^\beta}$, то по теореме 2 имеем

$$\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\beta}) > \psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\gamma}) \geqslant \omega_\gamma;$$

следовательно, $\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\beta}) \geqslant \omega_\beta$. Следствие доказано.

Следствие. *Если* $\chi(X) \leqslant \omega_\alpha$, *то* $\mathrm{idc}(X) \leqslant \alpha + 1$.

Доказательство. Пусть $x \in [A] \setminus A$. Покажем, что $x \in [A]_{d^{\alpha+1}}$. Если $x \notin [A]_{d^{\alpha+1}}$, то из предыдущего следствия получаем, что $\psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^{\alpha+1}}) \geqslant \omega_{\alpha+1}$. Так как

$$\chi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\alpha}) \geqslant \psi(x, \{x\} \cup [A]_{d^\alpha}) \geqslant \omega_{\alpha+1},$$

то $\chi(X) \geqslant \omega_{\alpha+1}$. Полученное противоречие доказывает следствие.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $f\colon X \to Y$ – *непрерывное отображение* X *на* Y, $\mathrm{idc}(Y) \leqslant \alpha$, $\sup\{\mathrm{idc}(f^{-1}(y)) : y \in Y\} \leqslant \beta$, *то* $\mathrm{idc}(X) \leqslant \alpha + \beta$.

СЛЕДСТВИЕ. *Для дискретно-порожденного* X $\mathrm{idc}(X^n) \leqslant n$.

ВОПРОС. Верно ли, что $\mathrm{idc}(D^{\omega_\alpha}) = \alpha + 1$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Dow, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, “Topologies generated by discrete subspaces”, *Glas. Mat. Ser. III*, **37**:1 (2002), 187–210.

[2] В. В. Федорчук, “Бикомпакт, все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны”, *Матем. сб.*, **96**:1 (1975), 41–62.

А. В. Иванов
Петрозаводский государственный университет
E-mail: ivanov@petrsu.ru

Е. В. Осипов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14.03.2007
Исправленный вариант
07.04.2009