RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAMBERTO CATTABRIGA

Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 308-340

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__308_0>

SU UN PROBLEMA AL CONTORNO RELATIVO AL SISTEMA DI EQUAZIONI DI STOKES *

Nota (**) *di* LAMBERTO CATTABRIGA (*a Bologna*)

Sia Ω un insieme aperto limitato dello spazio euclideo a tre dimensioni, la cui frontiera $\dot{\Omega}$ sia costituita da un numero finito di superficie continue. Diremo che Ω è di classe C^s, $s \geqslant 2$, se la sua frontiera $\dot{\Omega}$ ammette nell'intorno di ogni suo punto una rappresentazione cartesiana del tipo

$$\xi_3 = \gamma(\xi_1, \xi_2)$$

con γ dotata di derivate continue fino a quelle di ordine s, ed i punti di Ω contenuti nell'intorno suddetto verificano la relazione $\xi_3 > \gamma(\xi_1, \xi_2)$. Si potrà allora ricoprire $\dot{\Omega}$ con un numero finito di intorni tridimensionali U_h, tali che ciascuno degli $\overline{U}_h \cap \overline{\Omega}$ risulti trasformato biunivocamente nella chiusura di un emisfero $\Sigma_{R_h} \{x_3 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant R_h^2\}$ di raggio $R_h \leqslant 1$, con $\overline{U}_h \cap \dot{\Omega}$ trasformato nella parte piatta di tale emisfero, mediante una trasformazione che abbia assieme alla sua inversa, derivate continue fino a quelle di ordine s. Supporremo inoltre che il piano ξ_1, ξ_2 coincida con il piano tangente ad $\dot{\Omega}$ nel punto considerato. Diremo poi che Ω è di classe C^{s+h}, se le derivate di ordine s della

(*) Lavoro eseguito in adempimento al contratto AF 61(052)-414, con l'U.S. Air Force.

(**) Pervenuta in Redazione il 12 giugno 1961.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

funzione γ soddisfano ad una condizione di Hölder di esponente h, $0 < h < 1$.

Indicando con $\mathfrak{A}$ un insieme aperto, che supporremo sia limitato e di classe C^2 oppure il semipiano $x_3 > 0$, per ogni intero non negativo j ed ogni $q > 1$, poniamo

$$| u |_{j,L_q} = \Big(\sum_{|\beta|=j} \int_{\mathfrak{A}} | D^\beta u |^q \, dx \Big)^{1/q} , \qquad \| u \|_{l,L_q} = \big(\sum_{j\leq l} (| u |_{j,L_q})^q \big)^{1/q}$$

ove

$$| \beta | = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 , \; D^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \partial x_3^{\beta_3}}$$

ed u è una funzione od un vettore definito in $\mathfrak{A}$. In quest'ultimo caso si intende che $| D^\beta u | = (\sum_1^3 {}_i \, | D^\beta u_i |^2)^{1/2}$.

Useremo invece la notazione $[u]_{j,L_q}$, per la prima delle quantità scritte quando intenderemo riferirci all'intero spazio anziché ad $\mathfrak{A}$. Con $H_{l,L_q}(\mathfrak{A})$ indicheremo lo spazio di Banach completamento dell'insieme delle funzioni o vettori di classe C^∞ in $\overline{\mathfrak{A}}$, rispetto alla norma $\| \quad \|_{l,L_q}$ e con $\mathring{H}_{l,L_q}(\mathfrak{A})$ lo spazio di Banach completamento rispetto alla stessa norma dell'insieme delle funzioni o vettori di classe C^∞ a supporto compatto in $\mathfrak{A}$. Denoteremo poi con $H_{-l,L_q}(\mathfrak{A})$ lo spazio duale di $\mathring{H}_{l,L_{q'}}(\mathfrak{A})$, $1/q + 1/q' = 1$, la norma in esso essendo definita in modo tale che per ogni $u \in H_{0,L_q}(\mathfrak{A})$

$$\| u \|_{-l,L_q} = \sup_{|\psi|_{l,L_{q'}} \leq 1} \left| \int u \cdot \psi dx \right| , \qquad \psi \in \mathring{H}_{l,L_{q'}}(\mathfrak{A}) ,$$

ove il prodotto che figura a secondo membro dovrà intendersi come prodotto scalare fra vettori dello spazio euclideo, nel caso in cui u e ψ siano vettori di tale spazio. Se $\mathfrak{A}$ è limitato indicheremo con $H_{l,L_q}(\mathfrak{A})/K$, con l intero, lo spazio quoziente di $H_{l,L_q}(\mathfrak{A})$ rispetto al sottospazio delle funzioni costanti in $\mathfrak{A}$. In esso introdurremo la norma

$$\| \{u\} \|_l = \inf_k \| u + k \|_l ,$$

l'estremo inferiore essendo preso relativamente a tutte le costanti k. Rispetto a questa norma lo spazio quoziente considerato diviene, come è noto, uno spazio di Banach.

Per funzioni o vettori Φ definiti su $\dot{\mathfrak{A}}$ porremo per ogni $j > 0$

$$| \Phi |_{j-1/q, L_q} = \inf | v |_{j, L_q} , \qquad \| \Phi \|_{j-1/q, L_q} = \inf \| v \|_{j, L_q} ,$$

l'estremo inferiore essendo preso rispetto a tutte le funzioni o vettori $v \in H_{j,L_q}(\mathfrak{A})$, che hanno la loro traccia γv su $\dot{\mathfrak{A}}$ eguale a Φ. Lo spazio, pure di Banach, delle funzioni o vettori Φ con $\| \Phi \|_{j-1/q, L_q} < \infty$, lo indicheremo con $H_{j-1/q, L_q}(\mathfrak{A})$. [1]) Dai simboli introdotti ometteremo frequentemente l'indice L_q, quando non vi sarà luogo ad equivoci.

Studieremo il sistema

$$\begin{aligned} \Delta u - \operatorname{grad} p &= f \quad \text{in} \quad \Omega \quad (\Delta = \text{operatore di Laplace}) \\ \operatorname{div} u &= g \quad » \quad » \\ u &= \Phi \quad \text{su} \quad \dot{\Omega} \end{aligned} \tag{1}$$

nel vettore incognito u e nella funzione incognita p, con g e Φ soddisfacenti alla

$$\int_{\Omega} g dx = \int_{\dot{\Omega}} \Phi \cdot n d\sigma \tag{2}$$

n indicando il versore normale ad $\dot{\Omega}$, diretto verso l'esterno di Ω e $d\sigma$ l'elemento d'area su $\dot{\Omega}$. Considereremo soluzioni $u \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $p \in L_q(\Omega)$ e perciò, mentre la seconda e la terza equazione si intenderanno soddisfatte in senso ordinario, la prima sarà intesa nel senso che per tutti i vettori $v \in \overset{\circ}{H}_{1,L_{q'}}(\Omega)$ si abbia

$$\int \Big(\sum_{ij}^{3}{}_{1} D_j u_i D_j v_i - p \operatorname{div} v\Big) dx = < f, v > \text{[2]}).$$

Il risultato a cui perveniamo è espresso dal seguente

---

[1]) Questi spazi e le relative norme possono, definirsi in modo autonomo, senza fare ricorso alle funzioni o vettori v. Cfr. S. V. USPENSKIĬ [12].

[2]) Si è posto $D_j^r = D_{x_j}^r = \partial^r / \partial x_j^r$, $j = 1, 2, 3$. Con $< f, v >$ si intende indicare un funzionale lineare continuo in $\overset{\circ}{H}_{1,L_{q'}}(\Omega)$.

TEOREMA: *Se Ω è di classe C^s, $s = \max(l, 2)$, $f \in H_{l-2,L_q}(\Omega)$, $g \in H_{l-1,L_q}(\Omega)$, $\Phi \in H_{l-1/q,L_q}(\dot{\Omega})$, $l \geqslant 1$, $1 < q < \infty$, ed è soddisfatta la condizione* (2), *esiste uno ed un solo vettore $u \in H_{l,L_q}(\Omega)$ ed una ed una sola $p \in H_{l-1,L_q}(\Omega)/K$ soluzioni del sistema* (1); *per essi risulta*

$$(3) \qquad \| u \|_l + \| \{p\} \|_{l-1} \leqslant C \{ \| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} \} ,$$

ove la costante C dipende soltanto da l, q, Ω.

Da V. Solonnikov [11] è affermata senza alcun cenno di dimostrazione la validità della maggiorazione (3) per $\| u \|_l$, nel caso particolare in cui sia $l = 2$, $g \equiv \Phi \equiv 0$, mentre per questo stesso caso, ove di più sia $q = 2$, un risultato più debole si trova enunciato da P. E Sobolevskiĭ [10]. Quest'ultimo Autore fornisce qualche indicazione per una dimostrazione del risultato che egli enuncia, completamente diversa da quella da noi qui esposta, imponendo di più che sia $f \in L_r(\Omega)$ con $r > 2$. L'esistenza ed unicità di un vettore $u \in H_{1,L_2}(\Omega)$, soluzione di (1) con $f \in L_{6/5}(\Omega)$, $g \equiv \Phi \equiv 0$, si trova invece già provata nello studio [4] di O. A. Ladyzenskaia.

Il nostro risultato si fonda sulla maggiorazione (3), che si stabilisce a priori, e su alcuni risultati di F. K. Odqvist [7]. I nn. che seguono sono dedicati a provare la maggiorazione (3), cui si perviene alla fine del n. 6, per tutte le coppie $u \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $p \in H_{0,L_q}(\Omega)/K$ eventuali soluzioni di (1). Ciò è ottenuto adattando al nostro caso il metodo ideato da S. Agmon-A. Dougiis-L. Nirenberg [1], per ottenere formule di maggiorazione, per le soluzioni di problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico. Peraltro a differenza di (1), in cui la maggiorazione analoga a (3) è stabilita per valori di l non inferiori all'ordine della equazione considerata, la nostra maggiorazione vale anche per $l = 1$, ciò che consente di ottenere risultati più completi nella regolarizzazione delle soluzioni (Cfr. V. e VII.). Mediante le funzioni di Green del problema (1) costruite da Odqvist, si dà al n. 6 una formula di rappresentazione della soluzione del problema (1) nel caso in cui Ω sia di classe C^2, $f \in L_q(\Omega)$, $g \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $\Phi \in H_{2-1/q,L_q}(\dot{\Omega})$, dalla quale si trae l'unicità della soluzione $u \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $p \in H_{0,L_q}(\Omega)/K$ del problema (1).

Quando è $g \equiv 0$, il teorema enunciato assicura l'esistenza di un vettore $u \in H_{l,L_q}(\Omega)$, $l \geqslant 1$, a divergenza nulla in Ω, avente per traccia su $\dot{\Omega}$ un qualunque vettore assegnato $\Phi \in H_{l-1/q,L_q}(\dot{\Omega})$, soddisfacente alla sola condizione (2). Poichè viceversa ogni vettore u di tale tipo ha traccia su $\dot{\Omega}$ che appartiene ad $H_{l-1/q,L_q}(\dot{\Omega})$ e verifica la (2), ne segue che

COROLLARIO 1: *Se Ω è di classe C^{s} le traccie su $\dot{\Omega}$ dei vettori $u \in H_{l,L_q}(\Omega)$, $l \geqslant 1$, a divergenza nulla in Ω, sono rappresentate da tutti e soli i vettori $\Phi \in H_{l-1/q,L_q}(\dot{\Omega})$ per i quali risulta*

$$\int_{\dot{\Omega}} \Phi \cdot n d\sigma = 0 .$$

Per $f \equiv \Phi \equiv 0$, il teorema assicura l'esistenza di un vettore $u \in H_{l,L_q}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}_{1,L_q}(\Omega)$ la cui divergenza sia eguale ad una qualunque assegnata funzione $g \in H_{l-1,L_q}(\Omega)$ ad integrale nullo su Ω e tale che

$$\| u \|_l \leqslant C \| g \|_{l-1} , \qquad l \geqslant 1.$$

Se $l = 1$, e $\varphi \in L_q(\Omega)$ è una funzione ad integrale nullo su Ω, avremo quindi

$$\| \varphi \|_{0,L_q} = \sup_{\|g\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int_\Omega \varphi g dx \right| = \sup_{\|g\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int_\Omega \varphi \operatorname{div} u dx \right| =$$

$$= \sup_{\|g\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} | < \operatorname{grad} \varphi, u > | \leqslant \text{cost.} \| \operatorname{grad} \varphi \|_{-1} .$$

Da questa se $\varphi \in L_q(\Omega)$ non ha integrale nullo su Ω segue che

$$\| \varphi \|_0 \leqslant \frac{\left| \int_\Omega \varphi dx \right|}{(\operatorname{mis} \Omega)^{1-1/q}} + \text{cost.} \| \operatorname{grad} \varphi \|_{-1} ,$$

mentre poi si verifica subito che per ogni $\varphi \in L_q(\Omega)$ è

$$\left|\int_{\Omega} \varphi dx\right| + \| \operatorname{grad} \varphi \|_{-1} \leq 2 \| \varphi \|_0 .$$

Abbiamo così il

COROLLARIO 2: *Se Ω è di classe C^2, per ogni funzione φ di $L_q(\Omega)$ la espressione*

$$\left|\int_{\Omega} \varphi dx\right| + \| \operatorname{grad} \varphi \|_{-1}$$

è una norma equivalente alla $\| \varphi \|_0$.

Mi è gradito ringraziare il Prof. Giovanni Prodi, dell'Università di Trieste, per avermi proposto la presente ricerca e per gli assai utili scambi di idee avuti con Lui sull'argomento.

1. - Nel semispazio $x_3 \geq 0$ dello spazio euclideo tridimensionale x_1, x_2, x_3 consideriamo il sistema

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Delta u - \operatorname{grad} p &= 0 \qquad \text{per} \quad x_3 > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \qquad \quad » \qquad » \\ u(x, 0) &= \Phi(x) , \\ & \qquad x = (x_1, x_2), \ | x | = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

nell'incognito vettore u di componenti u_1, u_2, u_3 e nella funzione incognita p. In (4) $\Phi(x)$ è un vettore assegnato sul piano $x_3 = 0$, le cui componenti supporremo di classe C^∞ ed a supporto compatto. Da Odqvist [7], si trae immediatamente che il vettore u di componenti

$$(5_1) \qquad u_i(x, x_3) = \int K_{ij}(x - y, x_3) \Phi_j(y) dy ,$$

con

$$K_{ij}(x - y, x_3) = \frac{3}{2\pi} \frac{x_3(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{(| x - y |^2 + | x_3^2)^{5/2}} , \ (y_3 \equiv 0)$$

e la funzione

$$(5_2)\qquad p(x, x_3) = \int k_j(x-y, x_3)\Phi_j(y)dy\,,$$

con

$$k_j(x-y, x_3) = -\frac{1}{\pi} D_j \frac{x_3}{(|x-y|^2+x_3^2)^{3/2}},\ i, j=1, 2, 3$$

sono soluzioni del sistema (4). Nelle formule scritte, così come nel seguito, si sottointende di sommare rispetto agli indici che figurano ripetuti. In $(5_{1,2})$ gli integrali si considerano estesi a tutto il piano x_1, x_2.

Poniamo

$$K_{ij}(x, x_3) = \frac{3}{2\pi}\frac{\dfrac{x_i}{|P|}\dfrac{x_j}{|P|}\dfrac{x_3}{|P|}}{|x|^2+x_3^2} =$$

$$= \frac{\Omega_{ij}\left(\dfrac{x}{|P|}, \dfrac{x_3}{|P|}\right)}{|x|^2+x_3^2}\,, \qquad |P| = (|x|^2+x_3^2)^{1/2}$$

$$k(x, x_3) = -\frac{1}{\pi}\frac{\dfrac{x_3}{|P|}}{|x|^2+x_3^2} = \frac{\omega\left(\dfrac{x_3}{|P|}\right)}{|x|^2+x_3^2}\,.$$

Ognuno dei nuclei $K_{ij}(x, x_3)$ e $k(x, x_3)$ è omogeneo di grado -2 nelle x_1, x_2, x_3; per $|x| \neq 0$ è sempre $\Omega_{ij}(x, 0) \equiv \omega(0) \equiv 0$, mentre le sue derivate di qualunque ordine sono continue nel semispazio $x_3 > 0$ e limitate sull'emisfero $|P| = 1$, $x_3 > 0$. Ne segue, come d'altra parte subito si verifica, che per $x_3 > 0$ è

$$\int K_{ij}(x, x_3)dx = \text{cost.}\,, \qquad \int k(x, x_3)dx = \text{cost.}$$

e quindi

$$\int D_3^r K_{ij}(x, x_3)dx = 0\,, \qquad \int D_3^r k(x, x_3)dx = 0\,.$$

Per ciascuna delle trasformazioni

$$\int K_{ij}(x-y, x_3)\Phi_j(y)dx\,, \qquad \int k(x-y, x_3)\Phi_j(y)dy\,, \qquad x_3 > 0\,,$$

si possono pertanto ripetere i ragionamenti che conducono al teorema 3.3 di [1]. Si giunge così, per u e p dati dalle $(5_{1,2})$, a

I. *Se* $\Phi \in L_q$, $|\Phi|_{1-1/q} < \infty$, $1 < q < \infty$, *allora sono finite anche* $|u|_1$ *e* $|p|_0$ *e risulta*

$$|u|_1 + |p|_0 \leqslant \text{cost.}\ |\Phi|_{1-1/q}\,,$$

ove la costante a secondo membro è indipendente da Φ.

2. Siano ora u e p di classe C^∞ ed a supporto compatto in $x_3 \geqslant 0$. Poniamo

$$(6)\qquad \begin{aligned} \Delta u - \operatorname{grad} p &= f\,, & x_3 &> 0\,,\\ \operatorname{div} u &= g\,, & &\text{»}\,,\\ u(x, 0) &= \Phi(x) \end{aligned}$$

e cerchiamo una rappresentazione di u e p mediante f, g e Φ, che riusciranno esse pure di classe C^∞ ed a supporto compatto. A questo scopo prolunghiamo f e g su tutto lo spazio, in modo da ottenere funzioni ivi di classe C^N con N convenientemente grande. Ciò può essere fatto, con una opportuna scelta delle costanti λ_k, ponendo [3])

$$f_{iN}(x, x_3) = \begin{cases} \sum_0^N{}_k\, \lambda_k f_i(x, -kx_3) & \text{per} \quad x_3 < 0\,,\\ f_i(x, x_3) & \text{per} \quad x_3 \geqslant 0\,, \end{cases}$$

$$g_N(x, x_3) = \begin{cases} \sum_0^N{}_k\, \lambda_k g(x, -kx_3) & \text{per} \quad x_3 < 0\,,\\ g(x, x_3) & \text{per} \quad x_3 \geqslant 0\,, \end{cases}$$

ove le costanti λ_k dipendono solo da N. Risulta subito

$$|f|_j \leqslant [f_N]_j \leqslant \text{cost.}\ |f|_j\,, \qquad j \geqslant 0\,,$$

una analoga relazione valendo fra g e g_N.

---

[3]) Cfr. [1] p. 652.

Poniamo

$$
\begin{aligned}
& w(x, x_3) = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int \frac{g_N(Q)}{|P-Q|}\,dQ\,, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad |P-Q| = [\Sigma_i(x_i - y_i)^2]^{1/2}\,, \\
(7)\qquad & z_i(x, x_3) = -\int v_{ik}(P, Q)[f_{kN}(Q) - \Delta w_k(Q)]dQ\,, \\
& q(x, x_3) = -\int q_k(P, Q)[f_{kN}(Q) - \Delta w_k(Q)]dQ
\end{aligned}
$$

ove le integrazioni si intendono estese a tutto lo spazio e, seguendo Odqvist, si sono indicate con

$$
v_{ik}(P, Q) = \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\delta_{ik}}{|P-Q|} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{|P-Q|^3}\right\},
$$

$$
q_k(P, Q) = \frac{x_k - y_k}{4\pi\,|P-Q|^3}
$$

le soluzioni fondamentali di (4). Per le proprietà del potenziale newtoniano, risulta subito div $w = g_N$ e $\Delta w = \operatorname{grad} g_N$, mentre è [4])

$$
\Delta z - \operatorname{grad} q = f_N - \Delta w\,, \qquad \operatorname{div} z = 0\,.
$$

Posto quindi $u = v + w + z$ e $p = q + s$ avremo

$$
\begin{aligned}
& \Delta v - \operatorname{grad} s = 0\,, \quad x_3 > 0\,, \\
(8)\qquad & \operatorname{div} v = 0\,, \quad x_3 > 0\,, \\
& v(x, 0) = \Phi(x) - w(x, 0) - z(x, 0) = \psi(x)\,.
\end{aligned}
$$

Una rappresentazione di v ed s mediante ψ, si ottiene facendo uso del seguente

LEMMA: *Se u e p, rispettivamente di classe C^2 e C^1, in $x_3 > 0$*

---

[4]) Cfr. [7], teorema I., p. 337.

e di classe C^1 e C^0 in $x_3 \geqslant 0$, soddisfano al sistema (4) *con $\Phi \equiv 0$ ed è*

$$|u| < \text{cost.}\ (1 + |P|)^{-1},$$

$$\left.\begin{array}{l} |p| \\ |Du| \end{array}\right\} < \text{cost.}\ (1 + |P|^{1+\lambda})^{-1}, \qquad 1/2 < \lambda < 1,$$

allora, è necessariamente $u \equiv p \equiv 0$ [5]).

La prova di questo lemma è una immediata conseguenza della formula di Green [6]), la quale, indicata con Σ_r la semisfera $|P| \leqslant r$, $x_3 \geqslant 0$, fornisce nel nostro caso la

$$-\int_{\substack{|P|=r \\ x_3 \geq 0}} T_{ik}(u) n_k u_i d\sigma = 1/2 \int_{\Sigma_r} (D_i u_k + D_k u_i)^2 dQ$$

ove n_k è il coseno direttore della normale esterna a $|P| = r$, $x_3 \geqslant 0$ rispetto all'asse x_k e $T_{ik}(u) = -p\delta_{ik} + (D_k u_i + D_i u_k)$. Passando al limite per $r \to \infty$ nella eguaglianza ottenuta e tenuto conto delle ipotesi del lemma, risulta

$$\int_{x_3 > 0} (D_i u_k + D_k u_i)^2 dQ \equiv 0\ .$$

Da questa segue $\Delta u_i \equiv 0$ e quindi $u \equiv 0$ in $x_3 \geqslant 0$. Sarà perciò $p = \text{cost.}$, anzi, per la condizione all'infinito imposta alla p, $p \equiv 0$.

Osserviamo che, al pari di f e g, anche f_N e g_N e Δw hanno supporto compatto in tutto lo spazio e quindi sarà

$$|D^r w| \leqslant \text{cost.}\ (1 + |P|^{2+r})^{-1},$$
$$|D^r z| \leqslant \text{cost.}\ (1 + |P|^{1+r})^{-1},$$
$$|D^r q| \leqslant \text{cost.}\ (1 + |P|^{2+r})^{-1}$$

---

[5]) Le ipotesi di questo lemma possono essere ridotte; ciò peraltro non è utile per il seguito.

[6]) Cfr. [7] pp. 333-34.

onde pure

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
&| D^r v | \leqslant \text{cost.}\ (1 + | P |^{1+r})^{-1}\,, \\
&| D^r s | \leqslant \text{cost.}\ (1 + | P |^{2+r})^{-1} \\
&| D^r \psi(x) | \leqslant \text{cost.}\ (1 + | x |^{1+r})^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Avranno pertanto senso gli integrali estesi a tutto il piano x_1, x_2

$$
\int K_{ij}(x - y, x_3)\psi_j(y)\, dy, \qquad \int k_j(x - y, x_3)\psi_j(y) dy\,.
$$

Essi rappresentano una soluzione v', s' del sistema (8) tale che

$$
| v' | < \text{cost.}\ (1 + | P |)^{-1}\,,
$$

$$
\left.\begin{matrix} | s' | \\ \\ | Dv' | \end{matrix}\right\} < \text{cost.}\ (1 + | P |^{1+\lambda})^{-1}\,, \qquad 1/2 < \lambda < 1\,.
$$

Risulta infatti

$$
\left| \int K_{ij}(x - y, x_3)\psi_j(y) dy \right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{3}{2\pi} \int \frac{x_3}{(| x - y |^2 + x_3^2)^{3/2}} | \psi_j(y) | \, dy < \text{cost.}\ (1 + | P |)^{-1}
$$

La maggiorazione all'ultimo membro si può provare osservando che gli integrali a secondo membro rappresentano funzioni $\bar{u}_j$ armoniche nel semispazio $x_3 > 0$, convergenti a zero all'infinito ed assumenti sul piano $x_3 = 0$ i valori $| \psi_j(y) |$. Se allora P e P' si corrispondono nella inversione di potenza uno e centro nel punto $B \equiv (0, 0, -1)$, la funzione

$$
u_j^*(P') = | P - B | \bar{u}_j(P)
$$

risulta armonica nella sfera S di centro nel punto $A \equiv (0, 0, -1/2)$ e raggio $1/2$ ed assume sulla frontiera di S i valori della funzione

$$\sqrt{1 + |y|^2}\, |\psi_j(y)|$$

la quale nel nostro caso riesce limitata. Le u_j^* saranno quindi limitate in S e da ciò segue la indicata maggiorazione per v'. Analogamente risulta

$$\left| \int k_j(x - y, x_3)\psi_j(y)dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int \frac{x_3}{(|x - y|^2 + x_3^2)^{3/2}} |D_j\psi_j(y)| \, dy \leqslant$$
$$\leqslant \text{cost.}\ (1 + |P|^{1+\lambda})^{-1}, \qquad j \neq 3$$

$$\left| D_h \int K_{ij}(x - y, x_3)\psi_j(y)dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2\pi} \int \frac{x_3}{(|x - y|^2 + x_3^2)^{3/2}} |D_h\psi_j(y)| \, dy \leqslant$$
$$\leqslant \text{cost.}\ (1 + |P|^{1+\lambda})^{-1}, \qquad h = 1, 2$$

ove ora si osservi in più che i valori assunti sulla frontiera di S dalla funzione armonica in S, che si ottiene in questo caso, si annullano in B ed ivi soddisfano ad una condizione di Lipschitz, onde tale funzione armonica sarà nulla in B ed ivi certamente hölderiana [7]) di esponente λ, con $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Infine, tenuto conto che

$$D_3 K_{ij}(x, x_3) = -\frac{1}{2\pi} D_3^2 \frac{x_i x_j}{|P|^3} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(D_1^2 + D_2^2)\frac{x_i x_j}{|P|^3} + \frac{1}{\pi} D_{ij}^2 \frac{1}{|P|}, \qquad i, j \neq 3$$

e

$$D_3 K_{3j}(x, x_3) = -D_1 K_{1j}(x, x_3) - D_2 K_{2j}(x, x_3), \qquad j = 1, 2, 3$$

---

[7]) Cfr. [3] pp. 506-8.

si avrà

$$\int k_3(x-y,x_3)\psi_3(y)dy = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\Delta\psi_3(y)}{(|x-y|^2+x_3^2)^{1/2}}dy\,,\ \Delta = D_1^2+D_2^2$$

$$\left|D_3\int K_{ij}(x-y,x_3)\psi_j(y)dy\right| \leqslant \text{cost}\int \frac{|(\Delta+D_{ij}^2)\psi_j|}{(|x-y|^2+x_3^2)^{1/2}}dy\,,\quad i,j\neq 3$$

$$D_3\int K_{3j}(x-y,x_3)\psi_j(y)dy = -\int\{D_1K_{1j}(x-y,x_3)+ \\ + D_2K_{2j}(x-y,x_3)\}\psi_j(y)dy\,.$$

Questi integrali si maggiorano come gli ultimi esaminati sopra. Ciò è ovvio per l'ultimo di essi, mentre per i primi due basterà osservare che gli integrali a secondo membro rappresentano funzioni armoniche in $x_3>0$, nulle all'infinito ed assumenti sul piano $x_3=0$ valori maggiorabili con $(1+|y|^2)^{-1}$.

Le differenze $v-v'$, $s-s'$ soddisfano quindi alle ipotesi del lemma premesso, onde sarà $v\equiv v'$, $s\equiv s'$. In particolare varranno per v' ed s' le prime due delle (9). Abbiamo così provato che

II. - *Se u, p di classe C^∞ ed a supporto compatto in $x_3\geqslant 0$, soddisfano al sistema* (6), *risulta*

$$u(x,x_3) = w(x,x_3)+z(x,x_3)+\int K_{ij}(x-y,x_3)\psi_j(y)dy\,,$$

$$p(x,x_3) = q(x,x_3)+\int k_j(x-y,x_3)\psi_j(y)dy\,,$$

ove i vettori w e z e la funzione q sono definiti dalle (7) *ed è $\psi(x) = \Phi(x)-w(x,0)-z(x,0)$.*

3. - Utilizzando la rappresentazione di u e p ottenuta nel n. precedente ed il risultato di I., proviamo ora alcune maggiorazioni per u e p supposte di classe C^∞, nulle per $|P|\geqslant 1$ in $x_3\geqslant 0$ e soddisfacenti al sistema (6). Osserviamo anzitutto che

i nuclei

$$DD_i \mid P \mid^{-1}, \qquad D^2 v_{ik} = - D^2 D^2_{ik} \mid P \mid + 2\delta_{ik} D^2 \mid P \mid^{-1},$$

$$Dq_k = \frac{1}{4\pi} DD_k \mid P \mid^{-1},$$

soddisfano alle ipotesi del teorema di Calderon e Zygmund [8]), poichè ad esse soddisfano i nuclei $D^4 \mid P \mid$ e $D^2 \mid P \mid^{-1}$, essendo $\mid P \mid$ e $\mid P \mid^{-1}$ soluzioni fondamentali degli operatori $\Delta\Delta$ e Δ rispettivamente. Dalle

$$\begin{aligned} Dw_i &= -(1/4\pi) DD_i \mid P \mid^{-1} * g_N + \text{cost.}\, g_N, \\ D^2 z_i &= D^2 v_{ik} * (f_{kN} - D_k g_N) + \text{cost.}\, (f_{iN} - D_i g_N), \\ D_i q &= D_i q_k * (f_{kN} - D_k g_N) + \text{cost.}\, (f_{iN} - D_i g_N), \end{aligned}$$

ove $*$ indica il prodotto integrale rispetto a tutte le variabili, seguono allora per il citato teorema di Calderon e Zygmund, le

$$\begin{aligned} \mid w \mid_1 &\leqslant [w]_1 \leqslant \text{cost.}\, [g_N]_0 \leqslant \text{cost.} \mid g \mid_0, \\ \mid z \mid_2 &\leqslant [z]_2 \leqslant \text{cost.}\, \{[f_N]_0 + [g_N]_1\} \leqslant \text{cost.}\, \{\mid f \mid_0 + \mid g \mid_1\}, \\ \mid q \mid_1 &\leqslant [q]_1 \leqslant \text{cost.}\, \{[f_N]_0 + [g_N]_1\} \leqslant \text{cost.}\, \{\mid f \mid_0 + \mid g \mid_1\}. \end{aligned}$$

Inoltre, poichè g_N, f_N, sono nulle per $\mid P \mid \geqslant 1$, mediante successive integrazioni per parti e l'applicazione dello stesso teorema di Calderon e Zygmund, si ottengono per $l \geqslant 2$ le

$$\begin{aligned} \mid w \mid_{l-1} &\leqslant [w]_{l-1} \leqslant \text{cost.}\, [g_N]_{l-2} \leqslant \text{cost.} \mid g \mid_{l-2}, \\ \mid z \mid_l &\leqslant [z]_l \leqslant \text{cost.}\, \{[f_N]_{l-2} + [g_N]_{l-1}\} \leqslant \\ &\leqslant \text{cost.}\, \{\mid f \mid_{l-2} + \mid g \mid_{l-1}\}, \\ \mid q \mid_{l-1} &\leqslant [q]_{l-1} \leqslant \text{cost.}\, \{[f_N]_{l-2} + [g_N]_{l-1}\} \leqslant \\ &\leqslant \text{cost.}\, \{\mid f \mid_{l-2} + \mid g \mid_{l-1}\} \end{aligned} \tag{10}$$

ove le costanti non dipendono da f e g.

---

[8]) Cfr. [2], teorema 1.

Proviamo ora che

$$(11)\quad |v_i|_l = \left| \int K_{ij}(x-y,\, x_3)\psi_j(y)dy \right|_l \leqslant \text{cost.}\, |D^{l-1}\psi|_{1-1/q},\ l \geqslant 1.$$

Per $l = 1$ ciò è già affermato in I., mentre per $l > 1$ dopo $l-1$ integrazioni per parti, avremo

$$D_h^{l-1} v_i = (-1)^{l-1} \int K_{ij}(x-y,\, x_3) D_h^{l-1} \psi_j(y) dy\,, \qquad h \neq 3.$$

Dunque ancora per I. sarà

$$|DD_h^{l-1} v|_0 \leqslant \text{cost.}\, |D^{l-1}\psi|_{1-1/q}\,, \qquad h \neq 3.$$

Per completare la prova di (11), osserviamo che è

$$D_3^2 K_{ij} = -\Delta_x K_{ij} + D_{ij}^2 k\,, \qquad \Delta_x = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2\,,$$

e quindi se uno almeno degli indici i, j è $\neq 3$, la (11) per $l = 2$ è ancora conseguenza di I. Se poi è $i = j = 3$, potremo scrivere

$$D_3^2 K_{33} = -\Delta_x (K_{33} + k)$$

da cui segue ancora la (11) mediante integrazione per parti. In generale potremo esprimere le derivate di K_{ij} rispetto ad x_3, mediante le

$$D_3^{2r} K_{ij} = (-1)^r \Delta_x^{r-1} \{\Delta_x K_{ij} - D_{ij}^2 k\}\,,$$

se uno almeno degli i, j è $\neq 3$,

$$D_3^{2r} K_{33} = (-1)^r \Delta_x^r (K_{33} + k)\,,$$

$$D_3^{2r+1} K_{ij} = (-1)^r D_3 \Delta_x^{r-1} \{\Delta_x K_{ij} - D_{ij}^2 k\}\,, \qquad \text{se} \qquad i, j \neq 3,$$

$$D_3^{2r+1} K_{ij} = (-1)^r \Delta_x^r \{D_3 K_{ij} + Dk\}$$

se uno almeno degli i, j è $= 3$. Eseguendo $l - 1$ integrazioni per parti potremo perciò sempre scrivere $D^l v_i$ come somma di termini dei due tipi

$$D\int K_{ij}(x - y, x_3) D^{l-1}\psi_j(y) dy\ , \qquad D\int k(x - y, x_3) D^{l-1}\psi_j(y) dy\ ,$$

il secondo di questi potendo anche non presentarsi. Ciò consente, tramite I., di completare la prova di (11). Allo stesso modo si mostra che per $l \geqslant 1$ è

$$(12) \qquad |\, s\,|_{l-1} = \left|\int k_j(x - y, x_3)\psi_j(y) dy\right|_{l-1} \leqslant \text{cost.}\ |\, D^{l-1}\psi\,|_{1-1/q}\,.$$

Dalle (10) segue d'altra parte

$$|\, D_h^{l-1} w(y, 0)\,|_{1-1/q} \leqslant |\, w\,|_l \leqslant \text{cost.}\ |\, g\,|_{l-1}\,, \quad \text{per} \quad l \geqslant 1\,, \quad h \neq 3$$

e

$$|\, D_h^{l-1} z(y, 0)\,|_{1-1/q} \leqslant |\, z\,|_l \leqslant \text{cost.}\ \{|\, f\,|_{l-2} + |\, g\,|_{l-1}\}\,,$$
$$\text{per} \quad l \geqslant 2\,, \quad h \neq 3$$

onde per $l \geqslant 2$ la

$$(13) \qquad |\, D_h^{l-1}\psi\,|_{1-1/q} \leqslant |\, D_h^{l-1}\Phi\,|_{1-1/q} + |\, D_h^{l-1} w(y, 0)\,|_{1-1/q} + $$
$$+ |\, D_h^{l-1} z(y, 0)\,|_{1-1/q} \leqslant \text{cost.}\ \{\, |\,\Phi\,|_{l-1/q} + |\, f\,|_{l-2} + |\, g\,|_{l-1}\}.$$

Dalle (10), (13) si trae così la

$$(14) \quad |\, u\,|_l + |\, p\,|_{l-1} \leqslant \text{cost.}\ \{|\, f\,|_{l-2} + |\, g\,|_{l-1} + |\,\Phi\,|_{l-1/q}\}\,, \quad l \geqslant 2.$$

Per provare la maggiorazione ottenuta anche per $l = 1$, poniamo

$$u = w + z - \bar{z} + \bar{v}\,, \quad p = q - \bar{q} + \bar{s}$$

con

$$\bar{z}_i = \int K_{ij}(x-y, x_3) z_j(y, 0) dy ,$$

$$v_i = \int K_{ij}(x-y, x_3)[\Phi_j(y) - w_i(y, 0)] dy$$

$$\bar{q} = \int k_j(x-y, x_3) z_j(y, 0) dy ,$$

$$\bar{s} = \int k_j(x-y, x_3)[\Phi_j(y) - w_j(y, 0)] dy .$$

Sia E un compatto di $x_3 \geqslant 0$ contenente i supporti di u e p nel suo interno e $\varphi \in L_{q'}(E)$, $1/q + 1/q' = 1$; risulta

$$| z - \bar{z} |_{1, L_q(E)} \leqslant \sum_{|r|=1} \sup_{\|\varphi\|_{0, L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int_E \varphi_i(P) dP D^r \left\{ \int v_{ik}(P, Q)[f_{kN}(Q) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - D_k g_N(Q)] dQ - \int K_{ij}(x-y, x_3) dy \int v_{jk}(y, Q)[f_{kN}(Q) - D_k g_N(Q)] dQ \right\} \right| =$$

$$= \sum_{|r|=1} \sup_{\|\varphi\|_{0, L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [f_{kN}(Q) - D_k g_N(Q) dQ D^r \int_E \left[v_{ik}(P, Q) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int K_{ij}(x-y, x_3) v_{jk}(y, Q) dy \right] \varphi_i(P) dP \right| =$$

$$= \sum_{|r|=1} \sup_{\|\varphi\|_{0, L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [f_{kN}(Q) - D_k g_N(Q)] h_{kr}(Q) dQ \right|$$

ove le

$$h_{kr}(Q) = D^r \int_E \left[v_{ik}(P, Q) - \int K_{ij}(x-y, x_3) v_{jk}(y, Q) dy \right] \varphi_i(P) dP$$

sono continue e si annullano quando Q è contenuto nel semispazio $x_3 \leqslant 0$. Infatti in tal caso per tutti i punti P del semispazio $x_3 > 0$ è

$$v_{ik}(P, Q) = \int K_{ij}(x - y, x_3) v_{jk}(y, Q) dy$$

$$q_k(P, Q) = \int k_j(x - y, x_3) v_{jk}(y, Q) dy$$

poichè i due membri rappresentano una soluzione del sistema (4) con la stessa Φ, cui può applicarsi il lemma di unicità del n. precedente. Inoltre è $h_{kr} \in H_{1,L_{q'}}(E)$ e $\| h_{kr} \|_{1,L_{q'}(E)} \leqslant \text{cost.} \| \varphi \|_{0,L_{q'}}$. Avremo quindi

$$(15) \qquad | z - \bar{z} |_{1,L_q(E)} \leqslant \sum_{|r|=1} \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [f_k - D_k g] h_{kr} dQ \right| \leqslant$$
$$\leqslant \text{cost.} \{ \| f \|_{-1} + \| g \|_0 \} .$$

Analogamente se φ è una funzione di $L_{q'}(E)$ avremo successivamente

$$(16) \ \| q - \bar{q} \|_{0.L_q(E)} = \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int_E \varphi(P) dP \left\{ \int q_k(P, Q)[f_{kN}(Q) - D_k g_N(Q)] dQ - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int k_j(x - y, x_3) dy \int v_{jk}(y, Q)[f_{kN}(Q) - D_k g_N(Q)] dQ \right\} \right| =$$
$$= \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [f_{kN}(Q) - D_k g_N(Q)] dQ \int_E \left[q_k(P, Q) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int k_j(x - y, x_3) v_{jk}(y, Q) dy \right] \varphi(P) dP \right| =$$
$$= \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [f_k(Q) - D_k g(Q)] h_k(Q) dQ \right| \leqslant \text{cost.} \{ \| f \|_{-1} + \| g \|_0 \}$$

poichè le

$$h_k(Q) = \int_E \left[q_k(P, Q) - \int k_j(x - y, x_3) v_{jk}(y, Q) dy \right] \varphi(P) dP$$

sono nulle quando Q è contenuto nel semispazio $x_3 \leqslant 0$ ed è $h_k(Q) \in H_{1,L_{q'}}(E)$, $\| h_k \|_{1,L_{q'}(E)} \leqslant \text{cost.} \| \varphi \|_{0,L_{q'}}$. Analogamente alle (11), (13) sarà poi

$$(17) \qquad | \bar{v} |_1 + | \bar{s} |_0 \leqslant \text{cost.} \{ | \Phi |_{1-1/q} + | w |_1 \} \leqslant \leqslant \text{cost.} \{ | \Phi |_{1-1/q} + \| g \|_0 \}.$$

Dalle (15) - (17) si trae così la (14) anche per $l = 1$. In essa alle seminorme possiamo sostituire le relative norme sul semispazio $x_3 \geqslant 0$. Per questo basta per esempio osservare che prolungando le u_i e p come si è fatto nel n. precedente per f_i e g, si possono ottenere funzioni u_{iN} e p_N di classe C^N, con $N \geqslant l$, nulle per $| P | \geqslant 1$, per le quali risulta

$$| u |_r \leqslant [u_N]_r \leqslant \text{cost.} [u_N]_l \leqslant \text{cost.} \, | u |_l \,,$$
$$| p |_s \leqslant [p_N]_s \leqslant \text{cost.} [p_N]_{l-1} \leqslant \text{cost.} \, | p |_{l-1} \,,$$
$$0 \leqslant r \leqslant l \,, \quad 0 \leqslant s \leqslant l - 1.$$

Concludiamo dunque che

III. - *Se u, p nulli per $| P | \geqslant 1$, soddisfano al sistema* (6) *e se per $l \geqslant 1$ è $u \in H_{l,L_q}$, $p \in H_{l-1,L_q}$ in $x_3 \geqslant 0$, vale la*

$$\| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{ \| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} \} \,,$$

la costante a secondo membro essendo indipendente da u e p.

Supponiamo ora che u e p siano di classe C^∞ ed a supporto compatto contenuto in Ω. Dalla formula di Green [9]), si ricava subito la rappresentazione

$$u_i = - \int v_{ik}(P, Q)[\Delta u_k - D_k(p + \operatorname{div} u)]dQ + \\ + \int q_i(P, Q) \operatorname{div} u \, dQ = z' + w'$$

---

[9]) Cfr. loc. cit. in [8]).

$$p = -\int q_k(P, Q)[\Delta u_k - D_k(p + \operatorname{div} u)]dQ.$$

Come più sopra a proposito delle (10) si riconosce che per $l \geqslant 2$ è

$$(14') \quad |u|_l + |p|_{l-1} \leqslant \text{cost.}\,\{|\Delta u - \operatorname{grad} p|_{l-2} + |\operatorname{div} u|_{l-1}\},$$

la costante essendo indipendente da u e p. Se poi φ è un vettore di $L_{q'}(\Omega)$, risulta

$$|z'|_{1,L_q(\Omega)} \leqslant \sum_{|r|=1} \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int_\Omega D^r z_i'(P)\varphi_i(P)dP \right| =$$

$$= \sum_{|r|=1} \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [\Delta u_k - D_k(p + \operatorname{div} u)]dQ \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_\Omega D^r v_{ik}(P, Q)\varphi_i(P)dP \right| \leqslant \text{cost.}\,\{\|\Delta u - \operatorname{grad} p\|_{-1} + \|\operatorname{div} u\|_0\}$$

tenuto conto che

$$\left\| \int_\Omega D^r v_{ik}(P, Q)\varphi_i(P)dP \right\|_{1,L_{q'}(\Omega)} \leqslant \text{cost.}\,\|\varphi\|_{0,L_{q'}}.$$

Analogamente se φ è una funzione di $L_{q'}(\Omega)$, sarà

$$\|p\|_0 = \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int_\Omega \varphi(P)dP \int q_k(P, Q)[\Delta u_k - D_k(p + \operatorname{div} u)]dQ \right| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{0,L_{q'}} \leqslant 1} \left| \int [\Delta u_k - D_k(p + \operatorname{div} u)]dQ \int_\Omega q_k(P, Q)\varphi(P)dP \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{cost.}\,\{\|\Delta u_k - \operatorname{grad} p\|_{-1} + \|\operatorname{div} u\|_0\}$$

tenuto conto che

$$\left\| \int_\Omega q_k(P, Q)\varphi(P)dP \right\|_{1,L_{q'}(\Omega)} \leqslant \text{cost.}\,\|\varphi\|_{0,L_{q'}}.$$

Come per la prima delle (10) è poi $| w' |_1 \leqslant \text{cost.} \| \operatorname{div} u \|_0$. Si ottiene così (14′) anche per $l = 1$, onde si conclude che

III′. – *Se u e p hanno supporto compatto contenuto in Ω e per $l \geqslant 1$, $\Delta u - \operatorname{grad} p \in H_{l-2,L_q}$, $\operatorname{div} u \in H_{l-1,L_q}$, è pure $u \in H_{l,L_q}$, $p \in H_{l-1,L_q}$ e vale la*

$$\| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{ \| \Delta u - \operatorname{grad} p \|_{l-2} + \| \operatorname{div} u \|_{l-1} \} ,$$

ove la costante a secondo membro non dipende da u e p.

4. - Consideriamo in un emisfero $\Sigma_R \{x_3 \geqslant 0, | x |^2 + x_3^2 \leqslant R^2\}$, il sistema

$$\mathfrak{L}_i(u_i, p) = \Delta u_i - D_i p + \sum_{hk}^{3}{}_{1} D_h(a_{hk}(P) D_k u_i) -$$
$$- \sum_{1}^{3}{}_{h} D_h(b_{hi}(P) p) = F_i ,$$

$$\text{(18)} \quad \mathcal{M}(u) = \operatorname{div} u + \sum_{1}^{3}{}_{hi} c_{hi}(P) D_h u_i = G , \qquad P \in \Sigma_R$$
$$u(x, 0) = \Phi(x)$$

e scriviamolo nella forma

$$\Delta u_i - D_i p = F_i - \sum_{1}^{3}{}_{hk} D_h(a_{hk}(P) D_k u_i) -$$
$$- \sum_{1}^{3}{}_{h} D_h(b_{hi}(P) p) = f_i ,$$

$$\text{(18′)} \quad \operatorname{div} u = G - \sum_{1}^{3}{}_{hi} c_{hi}(P) D_h u_i = g ,$$
$$u(x, 0) = \Phi(x) .$$

Supporremo $l \geqslant 1$ e

$$a_{hk}(0) = b_{hi}(0) = c_{hi}(0) = 0 , \quad a_{hk} , \quad b_{hi} , \quad c_{hi} \in C^{l-1}(\Sigma_R).$$

Siano u e p di classe C^∞, con supporto contenuto in Σ_r, $r < R$, e soddisfino al sistema (18). Si hanno le

$$
(19)\quad
\begin{aligned}
&\| D_h(a_{hk}(P)D_k u_i) \|_{l-2} \leqslant \text{cost.}\,\{ \max_{P\in\Sigma_r} | a_{hk} | \, \| u \|_l + \| u \|_{l-1} \} ,\\
&\| D_h(b_{hi}(P)p) \|_{l-2} \leqslant \text{cost.}\,\{ \max_{P\in\Sigma_r} | b_{hi} | \, \| p \|_{l-1} + \| p \|_{l-2} \} ,\\
&\| c_{hi}(P)D_k u_i \|_{l-1} \leqslant \text{cost.}\,\{ \max_{P\in\Sigma_r} | c_{hi} | \, \| u \|_l + \| u \|_{l-1} \} .
\end{aligned}
$$

Esse sono evidenti per $l \geqslant 2$; anzi per $l = 2$ si possono omettere gli ultimi termini a secondo membro delle prime due. Lo stesso dicasi della terza per $l \geqslant 1$ e dell'ultimo termine al suo secondo membro per $l = 1$. Se poi $\psi \in \mathring{H}_{1,L_{q'}}(\Sigma_r)$ si avrà

$$
\| D_h(a_{hk}D_k u_i) \|_{-1} = \sup_{|\psi|_{1,L_{q'}}\leqslant 1} \left| \int D_h(a_{hk}D_k u_i)\psi dP \right| =
$$

$$
= \sup_{|\psi|_{1,L_{q'}}\leqslant 1} \left| \int a_{hk} D_k u_i D_h \psi dP \right| \leqslant \max_{P\in\Sigma_r} | a_{hk} | \, | u |_1 ,
$$

$$
\| D_h(b_{hi}p) \|_{-1} = \sup_{|\psi|_{1,L_{q'}}\leqslant 1} \left| \int D_h(b_{hi}p)\psi dP \right| =
$$

$$
= \sup_{|\psi|_{1,L_{q'}}\leqslant 1} \left| \int b_{hi} p D_h \psi dP \right| \leqslant \max_{P\in\Sigma_r} | b_{hi} | \, \| p \|_0 .
$$

Avremo allora per $l \geqslant 1$

$$
\| f \|_{l-2} \leqslant \text{cost.}\,\{ \| F \|_{l-2} + \max_{\substack{h,k\\ P\in\Sigma_r}} | a_{hk}(P) | \, \| u \|_l +
$$

$$
+ \max_{\substack{h,i\\ P\in\Sigma_r}} | b_{hi}(P) | \| p \|_{l-1} + \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2} \}
$$

gli ultimi due termini a secondo membro potendosi omettere per $l = 1, 2$ e

$$\| g \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{ \| G \|_{l-1} + \max_{\substack{h,i \\ P \in \Sigma_r}} | c_{hi}(P) | \, \| u \|_l + \| u \|_{l-1} \}$$

l'ultimo termine a secondo membro potendosi omettere per $l = 1$. La maggiorazione di III. applicata al sistema (18') dà perciò luogo alla

$$\| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant C_1 \{ (\max_{\substack{h,k \\ P \in \Sigma_r}} | a_{hk} | + \max_{\substack{h,i \\ P \in \Sigma_r}} | c_{hi} |) \| u \|_l +$$

$$+ \max_{\substack{h,i \\ P \in \Sigma_r}} | b_{hi} | \, \| p \|_{l-1} + \| F \|_{l-2} + \| G \|_{l-1} +$$

$$+ \| \Phi \|_{l-1/q} + \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2} \} , \qquad l \geqslant 1 .$$

Scegliendo r sufficientemente piccolo, per es. $r < r_1$, potremo rendere minori di $1/2$ le costanti che a secondo membro di quest'ultima maggiorazione moltiplicano $\| u \|_l$ e $\| p \|_{l-1}$, utilizzando la continuità dei coefficienti a_{hk} b_{hi}, c_{hi}. Si ottiene così

$$\| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant 2C_1 \{ \| F \|_{l-2} + \| G \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} +$$

$$+ \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2} \} , \qquad l \geqslant 1 ,$$

gli ultimi due termini a secondo membro potendosi omettere per $l = 1$ e quindi pure, mutando la costante, per ogni l.

Mantenendo inalterate le ipotesi fatte sui coefficienti ed i termini noti del sistema (18), mostriamo ora come basti supporre $u \in H_{1,L_q}$, $p \in L_q$ affinchè si abbia $u \in H_{l,L_q}$, $p \in H_{l-1,L_q}$. Ciò si ottiene con metodi noti. Applicando la maggiorazione ottenuta con $l = 1$ ai rapporti incrementali

$$u^h = \frac{u(x+h, x_2) - u(x, x_2)}{h} , \qquad p^h = \frac{p(x+h, x_2) - p(x, x_2)}{h} ,$$

$$(x + h, x_2) \in \Sigma_r ,$$

otteniamo infatti

$$\| u^h \|_1 + \| p^h \|_0 \leqslant \text{cost.} \{ \| F \|_0 + \| G \|_1 + \| \Phi \|_{2-1/q} \}$$

ove la costante è indipendente da h. Ciò consente di concludere [10]) che $\| D_h u \|_1$ e $\| D_h p \|_0$, $h = 1, 2$, sono finiti. Dal sistema (18) verificato da u e p si trae allora che appartengono ad L_q anche

$$(1 + a_{33}) D_3^2 u_i - (\delta_{3i} + b_{3i}) D_3 p \,, \qquad i = 1, 2, 3$$

e

$$D_3^2 u_3 + \sum_1^3{}_i \, c_{3i} D_3^2 u_i$$

e quindi pure

$$(1 + a_{33})[c_{31} D_3^2 u_1 + c_{32} D_3^2 u_2 + (1 + c_{33}) D_3^2 u_3] -$$
$$- D_3 p [c_{31} b_{31} + c_{32} b_{32} + (1 + b_{33})(1 + c_{33})] \,.$$

Se r è sufficientemente piccolo, l'espressione che moltiplica $D_3 p$, al pari di $1 + a_{33}$, si mantiene diversa da zero e perciò sarà pure $D_3^2 p \in L_q$ e quindi $D_3^2 u_i \in L_q$. Riesce dunque $u \in H_{2,L_q}$, $p \in H_{1,L_q}$. La prova di quanto affermato si completa poi per induzione. Dunque

IV. - *Sia* $l \geqslant 1$, a_{hk}, b_{hi}, $c_{hi} \in C^{l-1}(\Sigma_R)$, $a_{hk}(0) = b_{hi}(0) = = c_{hi}(0) = 0$, *ed* $u \in H_{1,L_q}$, $p \in L_q$ *abbiano supporto contenuto in* Σ_r, $r \leqslant r_1 < R$, *e soddisfino al sistema* (18); *allora è pure* $u \in H_{l,L_q}$, $p \in H_{l-1,L_q}$ *e vale la*

$$\| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{ \| F \|_{l-2} + \| G \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} \} \,,$$

ove la costante dipende soltanto da l, q *e dalle norme* $\| \quad \|_{l-1}$ *dei coefficienti* a_{hk}, b_{hi}, c_{hi} *ed* r_1 *dal modulo di continuità di questi.*

---

[10]) Cfr. per es. [6], lemma 9, § 2.

5. - Sia ora Ω un insieme aperto e limitato di classe C^s, $s = \max(l, 2)$, secondo la notazione introdotta all'inizio, e consideriamo il sistema (1) con la condizione (2). Supponiamo che per ogni punto P di $\dot{\Omega}$, il riferimento cartesiano rispetto al quale pensiamo rappresentata localmente la $\dot{\Omega}$ sia tale che gli assi ξ_1, ξ_2 con origine in P, si trovino sul piano tangente ad $\dot{\Omega}$ in P. La funzione $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ avrà pertanto derivate prime nulle in P. Ogni punto P di Ω sarà perciò centro di un intorno $U(P)$ tale che, mediante il cambiamento di variabili

$$x_1 = \xi_1\,, \qquad x_2 = \xi_2\,, \qquad x_3 = \xi_3 - \gamma(\xi_1, \xi_2)\,, \tag{20}$$

$\overline{U}(P) \cap \overline{\Omega}$ si trasforma in un emisfero chiuso Σ_r di raggio r mentre u_i e p si trasformano nelle funzioni $\widehat{u}_i$ e $\widehat{p}$, soddisfacenti ad un sistema del tipo (18), i cui coefficienti verificano le ipotesi di IV. Possiamo anzi supporre il raggio di $U(P)$ tale che il raggio di Σ_r sia minore del numero r_1 indicato in IV., numero che ora dipenderà dal punto P di $\dot{\Omega}$. Con un numero finito di intorni $U(P)$ così fatti potremo ricoprire la frontiera $\dot{\Omega}$; con ϱ_1 indicheremo d'ora innanzi il più piccolo degli r_1 relativi a questi.

Consideriamo una copertura di $\overline{\Omega}$ mediante insiemi aperti Ω_σ, la cui chiusura, se non è interna ad $\overline{\Omega}$, sia interna ad uno degli $U_h(P)$, con cui si è ricoperto $\dot{\Omega}$. Sia poi $\sum_1^N{}_\sigma\, \omega_\sigma \equiv 1$ una partizione dell'unità, con funzioni di classe C^∞, subordinata al ricoprimento $\{\Omega_\sigma\}$ considerato di $\overline{\Omega}$.

Se il supporto di ω_σ è interno ad $\overline{\Omega}$, per $\omega_\sigma u$ ed $\omega_\sigma p$ varrà la maggiorazione di III'., ossia per $l \geqslant 1$ sarà

$$\| \omega_\sigma u \|_l + \| \omega_\sigma p \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{ \| \Delta(\omega_\sigma u) - \text{grad}\,(\omega_\sigma p) \|_{l-2} + \\ + \| \text{div}\,(\omega_\sigma u) \|_{l-1} \}$$

e poichè

$$\| \Delta(\omega_\sigma u) - \text{grad}(\omega_\sigma p) \|_{l-2} \leqslant \text{cost.} \{ \| f \|_{l-2} + \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2} \}\,,$$

$$\| \text{div}\,(\omega_\sigma u) \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{ \| g \|_{l-1} + \| u \|_{l-1} \}\,,$$

avremo

$$\| \omega_\sigma u \|_l + \| \omega_\sigma p \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{\| f \|_{l-2} + \\ + \| g \|_{l-1} + \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2}\} . \tag{21}$$

Supponiamo invece che il supporto di ω_σ sia interno ad uno degli $U_h(P)$. Mediante le (20) ω_σ si muta in una funzione $\widehat{\omega}_\sigma$ con supporto contenuto in Σ_{ϱ_1}. Da IV. segue allora

$$\| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{u} \|_l + \| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{p} \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{\Sigma_i \| \mathfrak{L}_i(\widehat{\omega}_\sigma \widehat{u}_i , \widehat{\omega}_\sigma \widehat{p}) \|_{l-2} + \\ + \| \mathcal{M}(\widehat{\omega}_\sigma \widehat{u}) \|_{l-1} + \| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{\Phi} \|_{l-1/q}\} \leqslant \\ \leqslant \text{cost.} \{\| \widehat{f} \|_{l-2} + \| \widehat{g} \|_{l-1} + \| \widehat{\Phi} \|_{l-1/q} + \| \widehat{u} \|_{l-1} + \| \widehat{p} \|_{l-2}\} , \tag{22}$$

ove con $\widehat{f}$, $\widehat{g}$, $\widehat{\Phi}$ si sono indicate le trasformate di f, g, Φ tramite le (20) e le norme all'ultimo membro sono calcolate soltanto relativamente al supporto di $\widehat{\omega}_\sigma$. Si riconosce poi facilmente che

$$\| \omega_\sigma u \|_l + \| \omega_\sigma p \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{\| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{u} \|_l + \| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{p} \|_{l-1}\}$$

e che le norme dei termini all'ultimo membro della (22) sono maggiorabili mediante le corrispondenti norme dei loro trasformati tramite l'inversa della (20) [11]).

Avremo così

$$\| \omega_\sigma u \|_l + \| \omega_\sigma p \|_{l-1} \leqslant \\ \leqslant \text{cost.} \{\| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} + \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2}\} . \tag{23}$$

Dalle (21) e (23) tenuto conto delle

$$\| u \|_l \leqslant \sum_{1}^{N}{}_\sigma \| \omega_\sigma u \|_l , \quad \| p \|_{l-1} \leqslant \sum_{1}^{N}{}_\sigma \| \omega_\sigma p \|_{l-1}$$

---

[11]) Per quanto riguarda la Φ, cfr. [1], lemma 14.2.

si trae

$$(24)\quad \| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \{ \| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} + \| u \|_{l-1} + \| p \|_{l-2} \} .$$

È noto che si possono trovare due costanti C_3 e C_4 indipendenti da u e p, tali che per $l > 1$ risulti

$$\| u \|_{l-1} \leqslant (1/2C_2) \| u \|_l + C_3 \| u \|_0 ,$$
$$\| p \|_{l-2} \leqslant (1/2C_2) \| p \|_{l-1} + C_4 \| p \|_{-1} \quad {}^{12}) .$$

Da queste e dalla (24) segue

$$(25)\quad \| u \|_l + \| p \|_{l-1} \leqslant$$
$$\leqslant \text{cost.} \{ \| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} + \| u \|_0 + \| p \|_{-1} \} .$$

La maggiorazione a cui siamo giunti, ottenuta nella ipotesi che sia $u \in H_l(\Omega)$ $p \in H_{l-1}(\Omega)$, vale nella sola ipotesi che sia $u \in H_1$, $p \in L_q$. Infatti, per la regolarità ammessa per $\dot{\Omega}$ ed i secondi membri di (1), da tale ipotesi segue che sono finite anche le norme $\| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{u} \|_1$ e $\| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{p} \|_0$ e quindi, come si è visto al n. precedente, anche le $\| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{u} \|_l$ e $\| \widehat{\omega}_\sigma \widehat{p} \|_{l-1}$. Da ciò e dal fatto che nelle indicate ipotesi è, come conseguenza di III′, $u \in H_l(\Omega')$, $p \in H_{l-1}(\Omega')$ per ogni insieme aperto Ω' con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, segue senz'altro $u \in H_l(\Omega)$, $p \in H_{l-1}(\Omega)$.

Osserviamo ora che se u, p soddisfano al sistema (1), ad esso soddisferà pure ogni coppia u, p + cost. e per tutte tali coppie varrà la (25). Prendendo gli estremi inferiori di entrambi i membri di questa, al variare della costante arbitraria aggiunta a p, otterremo

---

[12]) Per la prima di queste, cfr. per es. [6] p. 672; la seconda si può trarre da un lemma di J. L. Lions riportato a p. 263 di [5].

V. - *Se* $u \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $p \in L_q(\Omega)$ *soddisfano al sistema* (1), (2) *con* $f \in H_{l-2,L_q}(\Omega)$, $g \in H_{l-1,L_q}(\Omega)$, $\Phi \in H_{l-1/q,L_q}(\dot{\Omega})$, $l \geqslant 1$, $1 < q < \infty$, *ed* Ω *è di classe* C^s, $s = \max\,(l, 2)$, *è pure* $u \in H_{l,L_q}(\Omega)$, $p \in H_{l-1,L_q}(\Omega)$ *ed inoltre*

$$\| u \|_l + \| \{p\} \|_{l-1} \leqslant \\ \leqslant \text{cost.}\, \{\| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q} + \| u \|_0 + \| \{p\} \|_{-1}\},$$

la costante dipendendo soltanto da l, q, Ω.

6. - In [7] Odqvist rappresenta una soluzione del sistema (1), con $f \equiv g \equiv 0$, mediante i potenziali idrodinamici

$$W_i(P) = \int_{\dot{\Omega}} K_{ij}(P, Q)\varphi_j(Q)d\sigma\,, \qquad \Pi(P) = \int_{\dot{\Omega}} k_j(P, Q)\varphi_j(Q)d\sigma$$

con $d\sigma$ elemento d'area su $\dot{\Omega}$, $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $Q \equiv (y_1, y_2, y_3)$ e

$$K_{ij}(P, Q) = \frac{3}{2\pi} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)n_k(Q)}{| P - Q |^5}\,,$$

$$k_j(P) = -\frac{1}{\pi} D_{x_j} \frac{(x_k - y_k)n_k(Q)}{| P - Q |^3}$$

e determina le funzioni incognite φ_j, traducendo il sistema (1) in un sistema di equazioni integrali di Fredholm di seconda specie. Egli giunge tuttavia a risultati completi solo nella ipotesi che Ω sia di classe C^{2+h}. Per estendere tali risultati con la sola condizione che Ω sia di classe C^{1+h}, basterà osservare che le funzioni W_i sono potenziali biarmonici di doppio strato e la funzione, Π una combinazione lineare di derivate di potenziali armonici pure di doppio strato. Nella ipotesi che Ω sia di classe C^{1+h}, questi ultimi sono stati studiati da J. Schauder in [8] ed i primi, con lo stesso metodo, da K. Schröder in [9]. In questa ipotesi essi giungono a stabilire per tali potenziali quelle proprietà che Odqvist aveva ottenuto supponendo Ω di classe C^{2+h}, ciò che consente l'estensione desiderata. In particolare nella sola ipotesi che Ω sia di classe C^{1+h} varranno per le funzioni di Green $G_{ij}(P,Q)$ e $g_j(P,Q)$, i, j, $=1, 2, 3$, del sistema (1) le valutazioni

$$| G_{ij}(P,Q) | \leqslant \frac{C_5}{|P-Q|},$$

$$| D_{x_k} G_{ij}(P,Q) | , \quad | g_j(P,Q) | \leqslant \frac{C_5}{|P-Q|^2}, \qquad k=1,2,3,$$

$$\left.\begin{array}{r} | D_{x_k} G_{ij}(P,Q) - D_{x_k} G_{ij}(P',Q) | \\ | g_j(P,Q) - g_j(P',Q) | \end{array}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left(\frac{|P-P'| \, | \log |P-P'| |}{R^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{|P-P'| \, | \log |P-P'| |^2}{R^2} + \frac{|P-P'|^h}{R} \right)$$

con C_5 costante dipendente da Ω ed $R = \min(|P-Q|, |P'-Q|)$ [13]).

Se pertanto $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $p \in C^1(\overline{\Omega})$ risolvono il sistema (1), risulterà

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} u_i(P) &= \int_{\dot{\Omega}} T'_{ik}(G) n_k(Q) \Phi_j(Q) d\sigma - \int_{\Omega} G_{ij}(P,Q)[f_j(Q) - \\ &\quad - D_j g(Q)] dQ \,, \\ p(P) &= -2D_k \int_{\dot{\Omega}} g_j(P,Q) n_k(Q) \Phi_j(Q) d\sigma - \\ &\quad - \int_{\Omega} g_j(P,Q)[f_j(Q) - D_j g(Q)] dQ \end{aligned} \right.$$

con

$$T'_{ik}(G) = g_j \delta_{ik} + D_{x_k} G_{ij} + D_{x_i} G_{kj}$$

anche quando Ω sia di classe C^{1+h} [14]).

---

[13]) Nella stessa ipotesi su Ω queste valutazioni sono riportate anche da V. Solonnikov [11].

[14]) Cfr. [7] p. 358 e l'osservazione di p. 366.

Sia ora Ω di classe C^2 ed $u \in H_1(\Omega)$, $p \in L_q(\Omega)$ soddisfino al sistema (1), con $f \in L_q(\Omega)$, $g \in H_1(\Omega)$, $\Phi \in H_{2-1/q}(\Omega)$. Da V. segue che è pure $u \in H_2(\Omega)$, $p \in H_1(\Omega)$. Sia poi $\{u^{(n)}, p^{(n)}\}$ una successione di vettori $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e funzioni $p \in C^1(\overline{\Omega})$ convergenti in $H_2(\Omega)$ e $H_1(\Omega)$ rispettivamente ad u e p. Poniamo

$$\Delta u^{(n)} - \operatorname{grad} p^{(n)} = f^{(n)} , \qquad \operatorname{div} u^{(n)} = g^{(n)} , \quad u^{(n)} |_{\dot{\Omega}} = \Phi^{(n)} .$$

Per ciascuna delle coppie $u^{(n)}$, $p^{(n)}$ varranno le (26). Con le notazioni di Odqvist si ha

$$(27) \quad \int_\Omega G_{ij}(P, Q)[f_j^{(n)}(Q) - D_j g^{(n)}(Q)]dQ =$$
$$= \int_\Omega v_{ij}(P, Q)[f_j^{(n)}(Q) - D_j g^{(n)}(Q)]dQ - \int_\Omega A_{ij}(P, Q)[f_j^{(n)}(Q) - D_j g^{(n)}(Q)]dQ$$

ove per ogni fissato punto $P \in \Omega$ è $A_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$. Il primo dei termini a secondo membro, quale somma di prodotti integrali fra le funzioni localmente sommabili v_{ij} e le funzioni $f_j^{(n)} + D_j g^{(n)}$, prolungate con lo zero fuori di Ω, sarà com'è noto contenuto in $L_q(\Omega)$ e risulterà

$$\| v_{ij} * (f_j^{(n)} - D_j g^{(n)}) \|_{0,L_q} \leqslant \text{cost.} \| f_j^{(n)} - D_j g^{(n)} \|_{0,L_q} .$$

La successione dei primi termini a secondo membro di (27) convergerà quindi in $L_q(\Omega)$ a

$$\int_\Omega v_{ij}(P, Q)[f_j(Q) - D_j g(Q)]dQ ,$$

e perciò allo stesso limite convergerà quasi ovunque in Ω una sua sottosuccessione.

Per ogni fissato $P \in \Omega$ si potrà poi passare il limite per $n \to \infty$ sotto il segno di integrale nel secondo termine a secondo membro di (27). Lo stesso dicasi per l'integrale

$$\int_{\dot{\Omega}} T'_{ik}(G) n_k(Q) \Phi_j^{(n)}(Q) d\sigma .$$

Tenuto conto che una sottosuccessione della $\{u^{(n)}\}$ converge ad u quasi ovunque in Ω, segue che la prima delle (26) varrà ora quasi ovunque in Ω. Ragionando allo stesso modo si giunge allo stesso risultato anche per la seconda delle (26), onde si conclude che

VI. - *Se Ω è di classe C^2 ed $u \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $p \in L_q(\Omega)$ soddisfano al sistema* (1), (2) *con $f \in L_q(\Omega)$, $g \in H_{1,L_q}(\Omega)$, $\Phi \in H_{2-1/q}(\dot{\Omega})$, è pure $u \in H_{2,L_q}(\Omega)$, $p \in H_{1,L_q}(\Omega)$ e vale la* (26) *quasi ovunque in Ω. In particolare se è $f \equiv g \equiv \Phi \equiv 0$ è necessariamente $u \equiv 0$, $p =$ cost.*

Da V. e VI., imitando un ragionamento di Agmon-Douglis-Nirenberg [1], si trae che se $u \in H_l(\Omega)$, $p \in H_{l-1}(\Omega)$, $l \geqslant 1$, è

$$\| u \|_0 + \| \{p\} \|_{-1} \leqslant \text{cost.} \{\| \Delta u - \operatorname{grad} p \|_{l-2} + \\ + \| \operatorname{div} u \|_{l-1} + \| \gamma u \|_{l-1/q}\}^{15)} .$$

Infatti se ciò non si verificasse esisterebbe una successione di $u^{(n)} \in H_l$ $p^{(n)} \in H_{l-1}$, con $\| u^{(n)} \|_0 + \| \{p^n\} \|_{-1} = 1$ in corrispondenza ai quali la espressione fra $\{\quad\}$ a secondo membro tenderebbe a zero per $n \to \infty$. Da V. segue allora che le norme $\| u^{(n)}\|_l +$ $+ \|\{p^{(n)}\} \|_{l-1}$, $l \geqslant 1$, sono equilimitate, onde dalle $u^{(n)}$, $p^{(n)}$ si potranno estrarre due successioni debolmente convergenti in H_l ed H_{l-1}/K e fortemente convergenti in H_0 ed H_{-1}/K [16]) rispettivamente ad un vettore $u \in H_l$ e ad una funzione $p \in H_{l-1}$, con $\| u \|_0 + \| \{p\} \|_{-1} = 1$, soddisfacenti al sistema (1), con $f \equiv g \equiv \Phi \equiv 0$, ciò che contraddice VI.

Abbiamo dunque provato che

VII. - *Nelle stesse ipotesi di* V. *vale la maggiorazione*

$$\| u \|_l + \| \{p\} \|_{l-1} \leqslant \text{cost.} \{\| f \|_{l-2} + \| g \|_{l-1} + \| \Phi \|_{l-1/q}\}$$

la costante dipendendo soltanto da l, q, Ω.

---

[15]) Con γu si è indicata la traccia di u su $\dot{\Omega}$.

[16]) L'immersione di $H_{l-1,L_q}(\Omega)/K$ in $H_{-1,L_q}(\Omega)/K$ è infatti completamente continua, per $l \geq 1$, poichè lo è quella di $H_{0,L_q}(\Omega)$ in $H_{-1,L_q}(\Omega)$, come si vede facilmente fondandosi sulla ben nota completa continuità dell'immersione di $\overset{\circ}{H}_{1,L_{q'}}(\Omega)$ in $H_{0,L_{q'}}(\Omega)$.

Siano ora $f^{(m)}$, $g^{(m)} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $\Phi^{(m)} \in C^{\infty}(\dot{\Omega})$ convergenti rispettivamente in $H_{l-2}(\Omega)$, $H_{l-1}(\Omega)$, $H_{l-1/q}(\dot{\Omega})$ ad f, g, Φ, soddisfacenti alle ipotesi di V. Possiamo sempre supporre che sia

$$\int_{\Omega} g^{(m)} dP = \int_{\Omega} g dP \,, \qquad \int_{\dot{\Omega}} \Phi^{(m)} \cdot n d\sigma = \int_{\dot{\Omega}} \Phi \cdot n d\sigma$$

onde segue

$$\int_{\Omega} g^{(m)} dP = \int_{\dot{\Omega}} \Phi^{(m)} \cdot n d\sigma$$

per ogni m. Poichè Ω è di classe C^{s}, $s = \max(l, 2)$, per la soluzione $u^{(m)}$, $p^{(m)}$ del sistema (1), (2), con $f^{(m)}$, $g^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ a secondo membro, sarà sempre, come segue dai risultati di Odqvist, $u^{(m)} \in H_1(\Omega)$, $p^{(m)} \in L_q(\Omega)$ e quindi per V. pure $u^{(m)} \in H_l(\Omega)$, $p^{(m)} \in H_{l-1}(\Omega)$ e varrà la maggiorazione di VII. Per $m \to \infty$ le successioni $\{u^{(m)}\}$ e $\{p^{(m)}\}$ convergeranno perciò in $H_l(\Omega)$ e $H_{l-1}(\Omega)$ rispettivamente ad un vettore u e ad una funzione p, che soddisfano al sistema (1), (2) nelle ipotesi di V. per Ω ed i secondi membri. Ciò completa la prova del teorema enunciato nella introduzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.: *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions*. Comm. Pure Appl. Math., 12, 1959.

[2] Calderon A. P., Zygmund A.: *On Singular Integrals*. Am. Journ. of Math., 78, 1956.

[3] Kellogg O. D.: *On the Derivatives of Harmonic Functions on the Boundary*. Trans. of the Math. Soc., 33, 1931.

[4] Ladyzenskaia O. A.: *Ricerche sulle equazioni di Navier-Stokes del movimento di un fluido incompressibile nel caso stazionario*. Uspechi Mat. Nauk, 14, 3, (87), 1959.

[5] Magenes E., Stampacchia G.: *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, 12, (3), 1958.

[6] NIRENBERG L.: *Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations*. Comm. Pure Appl. Math., 8, 1955.

[7] ODQVIST F. K.: *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flussigkeiten*. Math. Zeitschr., 32, 1930.

[8] SCHAUDER J.: *Potentialtheoretische Untersuchungen I*. Math. Zeitschr., 33, 1931.

[9] SCHRÖDER K.: *Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$*. Math. Zeitschr., 48, 1942-43.

[10] SOBOLEVSKIĬ P. E.: *Sulla regolarità delle soluzioni generalizzate delle equazioni di Navier-Stokes*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 131, 1960.

[11] SOLONNIKOV V.: *Sulle valutazioni del tensore di Green per certi problemi al contorno*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 130, 1960.

[12] USPENSKIĬ S. V.: *Teoremi di immersione per le classi W_p^r di S. L. Sobolev di ordine frazionario*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 130 1960.