Sui fibrati con struttura quaternionale generalizzata (*) (**).

STEFANO MARCHIAFAVA - GIULIANO ROMANI (Roma)

Summary. – *Quaternion generalized fiber bundles* $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} \to X$ *are studied, both isomorphic to global tensorial product* $E_n^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} E_1^{\mathbb{Q}}$ ($E_n^{\mathbb{Q}}$, $E_1^{\mathbb{Q}}$ *ordinary quaternion fiber bundles right and left respectively) and quite general ones. A cohomology class* $\varepsilon(\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ *is considered which represents the obstruction in order the fiber bundle be a tensorial product. Several properties and a splitting principle are proved for bundles* $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$. *On this ground and founding on a convenient bundle* $B_E \to X$ *associated to* $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$ *(that we call Bonan's bundle and for wich* $\varepsilon(\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}) = \varepsilon(B_E)$*) relations are stated among Stiefel-Whitney classes of* $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$, B_E *and the class* ε.

Il presente lavoro (1) è rivolto allo studio dei fibrati quaternionali generalizzati (fibrati q.g.) ovvero di quei fibrati vettoriali reali il cui gruppo strutturale $GL(4n, \mathbb{R})$ ammette una riduzione a $GL(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$, gruppo lineare q.g.

Nelle considerazioni svolte ci siamo giovati essenzialmente di due modi di riguardare il gruppo lineare q.g. (Cap. I).

Secondo il primo punto di vista, messo in evidenza da E. MARTINELLI [9], detto gruppo viene pensato come un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{R}_{4n}$ (previa identificazione con $\mathbb{Q}_n$) che amplia convenientemente (« di poco ») il gruppo $GL(n, \mathbb{Q})$: sicchè pur non riuscendo assegnata in $\mathbb{R}_{4n}$ una ben determinata struttura quaternionale $\mathcal{Q}$ risulta tuttavia individuata una famiglia $\{\mathcal{Q}\}$ di tali strutture, ottenibili una dall'altra mediante automorfismi interni dell'algebra $\mathbb{Q}$. Ciò consente di introdurre per i fibrati q.g. enti geometrici fondamentali (faccette caratteristiche, metrica hermitiana) che hanno significato negli ordinari fibrati quaternionali.

Ebbene, osservato che si ha quanto basta per effettuare alcune essenziali costruzioni quale quella del fibrato proiettivo e del fibrato lineare canonico quaternionali associati ad un fibrato q.g., perveniamo a stabilire uno « splitting principle » per fibrati q.g. che generalizza quello valido per i corrispondenti fibrati quaternionali (Cap. IX).

(*) Entrata in Redazione il 14 agosto 1974.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R., nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(1) Un riassunto di una parte dei risultati qui stabiliti è esposto in una Nota degli stessi Autori: *Classi caratteristiche dei fibrati quaternionali generalizzati,* Rend. Acc. Naz. Lincei, giugno 1974.

Adottando invece il secondo punto di vista il gruppo $GL(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ può essere definito come il sottogruppo degli automorfismi $\mathbb{R}$-lineari del prodotto tensoriale $V_n^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} T_1^{\mathbb{Q}}$ di spazi vettoriali quaternionali $V_n^{\mathbb{Q}}$ (destro, di dimensione n), $T_1^{\mathbb{Q}}$ (sinistro, di dimensione 1) che si ottengono assegnando una coppia di automorfismi $\mathbb{Q}$-lineari dei fattori $V_n^{\mathbb{Q}}$, $T_1^{\mathbb{Q}}$. Secondo il nuovo punto di vista un fibrato q.g., $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} \to X$, può essere riguardato come un fibrato localmente prodotto tensoriale di fibrati propriamente quaternionali (cioè non soltanto q.g.). Ciò conduce spontaneamente a chiedersi quando un fibrato localmente prodotto tensoriale di fibrati quaternionali sia prodotto tensoriale globalmente. Stabiliamo che tale eventualità si avvera se e solo se si annulla una opportuna classe di coomologia, che denominiamo classe $\varepsilon(\tilde{E}) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ (Cap. VI).

Il cap. VII è dedicato allo studio delle classi caratteristiche dei fibrati q.g. che sono globalmente prodotto tensoriale.

Passando al caso generale dei fibrati q.g. $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$ vi è in primo luogo da osservare che per $n = 1$ essi coincidono con i fibrati reali orientabili (di dimensione 4) e che la relativa $\varepsilon(\tilde{E})$ coincide con la classe di Stiefel-Whitney $W_2(\tilde{E})$ (Cap. VIII).

Per l'esame del caso n-dimensionale si rivela utile la considerazione di un fibrato q.g., $B_E \to X$, di dimensione quaternionale 1 che chiamiamo fibrato di Bonan di $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$ e per il quale $\varepsilon(B_E) = \varepsilon(\tilde{E})$ (di tale fibrato vengono messe in luce particolari proprietà nel cap. III).

Infine, nel cap. X, sulla base dello « splitting principle », stabiliamo una serie di relazioni che collegano le classi di Stiefel-Whitney di $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$, B_E e la classe $\varepsilon(\tilde{E})$: da esse risulta in particolare che le classi di Stiefel-Whitney $W_i(\tilde{E})$ con $i \not\equiv 0$ (mod. 4) sono esprimibili come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ nelle sole $W_2(B_E)$, $W_3(B_E)$, $W_{4l}(\tilde{E})$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$.

I. – Preliminari e richiami.

§ 1. – Sia $\mathbb{Q}_n$ lo spazio numerico quaternionale n-dimensionale delle n-uple $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \dots, \xi^n)$ di quaternioni $\xi^i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$. Penseremo $\mathbb{Q}_n$ come spazio vettoriale quaternionale destro con assegnato il *prodotto hermitiano* (in forma canonica)

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = \sum_i \bar{\xi}^i \eta^i \tag{1.1}$$

per vettori $\boldsymbol{\xi} = (\xi^i)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta^i)$.

Indicheremo con $GL(n, \mathbb{Q})$, $Sp(n, \mathbb{Q})$ rispettivamente il *gruppo lineare*, il *gruppo unitario quaternionali* (omogenei) nello spazio $\mathbb{Q}_n$ le cui trasformazioni sono definite dalle formule

$$'\xi^i = A^i_j \xi^j \text{ (1)} \qquad (i, j = 1, \dots, n) \tag{1.2}$$

(1) Sottintenderemo spesso, come qui, le sommatorie rispetto ad indici ripetuti in alto e in basso.

ove $A = (A^i_j)$ è una matrice quaternionale invertibile per $GL(n, \mathbb{Q})$ e unitaria ($\bar{A}^* = A^{-1}$) per $Sp(n, \mathbb{Q})$.

Denoteremo poi con $GL(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ e $Sp(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ il *gruppo lineare* e il *gruppo unitario quaternionali generalizzati* (¹) (q.g.) che si ottengono come ampliamenti dei precedenti considerando le trasformazioni di $\mathbb{Q}_n$ del tipo

$$\xi^i = A^i_j \xi^j q \qquad (i, j = 1, \dots, n) \tag{1.3}$$

ove q è un quaternione di modulo *unitario* e la matrice $A = (A^i_j)$ è quaternionale invertibile, unitaria rispettivamente.

Per la generica trasformazione generalizzata (1.3), indicata anche brevemente con $\sigma_{A,q}$, il quaternione q e la matrice A sono individuati a meno di un cambiamento simultaneo di segno potendosi sostituire q e A^i_j con $\tilde{q} = -q$ e $\tilde{A}^i_j = -A^i_j$.

Si osservi che una trasformazione $\sigma_{A,q}$ del gruppo unitario q.g. non lascia in generale invariato il prodotto hermitiano (1.1) risultando

$$'\boldsymbol{\xi} \cdot {}'\boldsymbol{\eta} = \bar{q}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})\, q \, ; \tag{1.4}$$

si conservano però i *prodotti hermitiani reali* poichè le componenti reali del primo e secondo membro della (1.4) coincidono. In particolare, si conserva la *misura hermitiana di un vettore* $\boldsymbol{\xi}$, il cui quadrato è espresso da

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \bar{\xi}^i \cdot \xi^i \, ; \tag{1.5}$$

anzi, è opportuno richiamare (²) che *le trasformazioni del gruppo unitario q.g. sono caratterizzate, fra quelle del gruppo lineare q.g., dal conservare la misura hermitiana.*

Sottointenderemo spesso di identificare $\mathbb{Q}_n$ con $\mathbb{R}_{4n}$ ponendo

$$(\xi^r = x^r + ix^{r+n} + jx^{r+2n} + kx^{r+3n}) \equiv (x^\alpha) \, , \qquad (r = 1, \dots, n; \, \alpha = 1, \dots, 4n), \ x^\alpha \in \mathbb{R} \, ,$$

e riguardando $\mathbb{Q}_n$ come spazio vettoriale reale. Si intenderà in tal caso di usare la componente reale del prodotto hermitiano come prodotto scalare, cioè

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \, , \tag{1.6}$$

e si penserà quest'ultimo individuante una « metrica hermitiana » in $\mathbb{R}_{4n}$ nel senso della sola misura hermitiana dei vettori.

Si noti che nella detta identificazione le trasformazioni di $GL(n, \mathbb{Q})$, $GL(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ e di $Sp(n, \mathbb{Q})$, $Sp(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ definiscono rispettivamente in $GL_+(4n, \mathbb{R})$ (³) e in $SO(4n, \mathbb{R})$ sottogruppi che indicheremo ancora con gli stessi simboli.

(¹) Cfr. E. MARTINELLI [9]; l'uso che qui facciamo del simbolismo di « prodotto tensore » per tali gruppi verrà giustificato dalle considerazioni del n. 4.

(²) Cfr. MARTINELLI [9], pp. 357, 358.

(³) Cfr. ad es. E. BONAN [1], p. 15.

§ 2. – Se $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ è uno spazio vettoriale reale ricordiamo [1] che una *struttura quaternionale* (destra) $\mathcal{Q}$ in $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ può assegnarsi mediante un $\mathbb{R}$-isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Q}_n \to V^{\mathbb{R}}_{4n}$; se φ' è un altro tal isomorfismo e $\varphi^{-1}\circ\varphi' \in GL(n, \mathbb{Q})$ le strutture φ, φ' sono le stesse; quando si abbia invece $\varphi^{-1}\circ\varphi' = \sigma_{A,q} \in GL(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ la moltiplicazione per il quaternione λ definita in $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ da φ coincide con la moltiplicazione per $\lambda' = \bar{q}\lambda q$ definita da φ' e le relative strutture $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ si dicono *coerenti*. Una famiglia di strutture quaternionali coerenti, $\{\mathcal{Q}\}$, si dice una *struttura quaternionale generalizzata* (struttura q.g.) per $V^{\mathbb{R}}_{4n}$.

Una struttura quaternionale $\mathcal{Q}$ individua in $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ una famiglia di sottospazi vettoriali $\overset{(c)}{V}{}^{\mathbb{R}}_{4t}$ $(t = 1, \ldots, n)$, *sottospazi caratteristici*, immagini reali tramite una qualunque $\varphi\colon \mathbb{Q}_n \to V^{\mathbb{R}}_{4n}$ dei sottospazi quaternionali Q_t di $\mathbb{Q}_n$ (per $t = 1$ si tratta delle *faccette caratteristiche*). *I sottospazi caratteristici di* $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ *rispetto a strutture* $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ *coerenti sono gli stessi*; in particolare, le faccette caratteristiche quaternionali.

§ 3. – Se [2] $\langle\ ,\ \rangle\colon V^{\mathbb{R}}_{4n} \times V^{\mathbb{R}}_{4n} \to \mathbb{Q}$ è un qualunque prodotto hermitiano in $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ relativamente alla struttura di spazio vettoriale quaternionale definita dall'isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Q}_n \to V^{\mathbb{R}}_{4n}$ e se $\varphi^{-1}\circ\varphi' = \sigma_{A,q} \in GL(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$ allora $\langle\ ,\ \rangle' = \bar{q}\langle\ ,\ \rangle q$ è un prodotto hermitiano per la struttura relativa a φ'. Inoltre la componente reale dei due prodotti risulta uguale e dà un prodotto scalare $(\ ,\ ) = \mathrm{Re}\langle\ ,\ \rangle$ in $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ la cui forma quadratica associata coincide con le forme quadratiche (reali) associate ai due prodotti hermitiani. Mediante un prodotto scalare $(\ ,\ )$ così individuato ovvero anche tramite la forma quadratica ad esso associata (forma quadratica hermitiana) può dunque assegnarsi la nozione di « metrica hermitiana » in uno spazio vettoriale $V^{\mathbb{R}}_{4n}$ dotato di una struttura q.g.

§ 4. – Siano $V^{\mathbb{Q}}_n$, $T^{\mathbb{Q}}_1$ spazi vettoriali quaternionali rispettivamente destro, di dimensione n, e sinistro, di dimensione 1, su $\mathbb{Q}$. Indichiamo con $V^{\mathbb{Q}}_n \otimes_{\mathbb{Q}} T^{\mathbb{Q}}_1$ o brevemente con $V_n \otimes_{\mathbb{Q}} T_1$ il prodotto tensoriale di $V^{\mathbb{Q}}_n$ e $T^{\mathbb{Q}}_1$ pensati come $\mathbb{Q}$-moduli: lo spazio così ottenuto è, come noto, uno spazio vettoriale reale $4n$-dimensionale il quale non ammette una struttura quaternionale « canonica ». Possono tuttavia introdursi in $V_n \otimes_{\mathbb{Q}} T_1$, a partire dalle coordinate quaternionali su V_n e T_1, opportune « coordinate » quaternionali nel modo seguente.

Sia $\{\boldsymbol{e}_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ una base di $V^{\mathbb{Q}}_n$ e $\{\boldsymbol{e}\}$ una base di $T^{\mathbb{Q}}_1$ sicchè per vettori $\boldsymbol{u} \in V^{\mathbb{Q}}_n$ e $\boldsymbol{t} \in T^{\mathbb{Q}}_1$ si scriverà rispettivamente $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i u^i$, $\boldsymbol{t} = t\boldsymbol{e}$ essendo (u^i), t le coordinate nelle relative basi. Per il prodotto $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{t} = (\boldsymbol{e}_i u^i) \otimes (t\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}_i(u^i t) \otimes \boldsymbol{e}$ scriveremo anche formalmente $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{t} = (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}) u^i t$.

Per un generico elemento $\boldsymbol{v} \in V_n \otimes_{\mathbb{Q}} T_1$ si potrà scrivere, con la convenzione introdotta,

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}) v^i \tag{4.1}$$

---

(1) Cfr. E. MARTINELLI [10], p. 401; E. BONAN [1], p. 46.

(2) Cfr. E. MARTINELLI [10], pp. 402-405.

con i coefficienti v^i individuati: diremo le v^i coordinate di $\boldsymbol{v}$ nella « base » $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}\}$. Se $v^r = \underset{0}{v}^r + i\underset{1}{v}^r + j\underset{2}{v}^r + k\underset{3}{v}^r$, le $\underset{a}{v}^r$ $(r = 1, \ldots, n;\ a = 0, 1, 2, 3)$ sono coordinate reali nella base reale $\{\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_r i \otimes \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_r j \otimes \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_r k \otimes \boldsymbol{e}\}$ $(r = 1, \ldots, n)$ di $V_n \otimes_{\mathrm{Q}} T_1$.

Se $\{'\boldsymbol{e}_i\}$, $\{'\boldsymbol{e}\}$ sono nuove basi per V_n^{Q}, T_1^{Q} sarà $\boldsymbol{e}_i = {}'\boldsymbol{e}_j A_i^j$, $\boldsymbol{e} = q\,'\boldsymbol{e}$ con $A = (A_i^j)$ matrice quaternionale invertibile e q un quaternione non nullo. Risulterà dunque

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e})v^i = \boldsymbol{e}_i v^i \otimes \boldsymbol{e} = ('\boldsymbol{e}_j A_i^j v^i) \otimes q\,'\boldsymbol{e} = {}'\boldsymbol{e}_j (A_i^j v^i q) \otimes {}'\boldsymbol{e}$$

ovvero

$$\boldsymbol{v} = ('\boldsymbol{e}_j \otimes {}'\boldsymbol{e})\,'v^j$$

con le coordinate $'v^j$ che si ottengono dalle v^i mediante le

$$'v^j = A_i^j v^i q \tag{4.2}$$

Nella (4.2) si può sostituire A_i^j, q con $\tilde{A}_i^j = A_i^j h$, $\tilde{q} = qh^{-1}$ ove h è reale, non nullo, uguale al modulo $\sqrt{q\bar{q}}$ di q: poichè allora $|\tilde{q}| = 1$ nella nuova forma la (4.2) appare del tipo (1.3), cioè si tratta di una trasformazione di $GL(n, \mathrm{Q}) \otimes Sp(1, \mathrm{Q})$. Ne segue che le strutture quaternionali definite dalle coordinate quaternionali (v^i), $('v^i)$ non sono in generale le stesse ma mediante esse *risulta assegnata su* $V_n \otimes_{\mathrm{Q}} T_1$ *una struttura q.g. ben determinata.*

Se V_n^{Q}, T_1^{Q} si suppongono dotati di metriche hermitiane e se ci si limita a considerare per $V_n \otimes_{\mathrm{Q}} T_1$ coordinate v^i relative a base ortonormali $\{\boldsymbol{e}_i\}$, $\{\boldsymbol{e}\}$ per V_n^{Q}, T_1^{Q} la matrice A che compare nella (4.2) sarà unitaria e il quaternione q di norma 1: la (4.2) apparterrà dunque a $Sp(n, \mathrm{Q}) \otimes Sp(1, \mathrm{Q})$.

Le considerazioni fatte sopra mostrano dunque che, sostituito il punto di vista dei cambiamenti di coordinate di uno spazio vettoriale con quello (equivalente) degli automorfismi, i gruppi $GL(n, \mathrm{Q}) \otimes Sp(1, \mathrm{Q})$, $Sp(n, \mathrm{Q}) \otimes Sp(1, \mathrm{Q})$ sono le immagini dei prodotti $GL(n, \mathrm{Q}) \times GL(1, \mathrm{Q})$, $Sp(n, \mathrm{Q}) \times Sp(1, \mathrm{Q})$ dei due gruppi lineari, risp. unitari degli spazi vettoriali V_n^{Q}, T_1^{Q} nel gruppo $GL(4n, \mathrm{R})$ del prodotto tensoriale $V_n \otimes_{\mathrm{Q}} T_1$. Inoltre, ragionando come si è fatto per la (4.2), da questo punto di vista coincidono i gruppi $GL(n, \mathrm{Q}) \otimes GL(1, \mathrm{Q})$ e $GL(n, \mathrm{Q}) \otimes Sp(1, \mathrm{Q})$.

II. – Fibrati con struttura quaternionale generalizzata.

§ 5. – Assumendo come gruppo fondamentale per fibrati reali il gruppo $GL(n, \mathrm{Q}) \otimes$ $\otimes\, Sp(1, \mathrm{Q})$ si ottiene la nozione di « struttura quaternionale generalizzata ». Più precisamente, sia $E \xrightarrow{p} X$ un fibrato con assegnati un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di X e una famiglia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di omeomorfismi $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \times \mathrm{Q}_n \to p^{-1} U_\alpha$ per i quali $p \circ$ $\circ\, \varphi_\alpha(x, v) = x$ per ogni $(x, v) \in U_\alpha \times \mathrm{Q}_n$. Le coordinate v^i $(i = 1, \ldots, n)$ dell'elemento $v \in \mathrm{Q}_n$ si diranno allora le *coordinate quaternionali* di $\boldsymbol{e} = \varphi_\alpha(x, v)$ nella carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e si indicheranno con $\underset{(\alpha)}{v}^i$.

Se per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, supposta non vuota, e per ogni $\boldsymbol{e} \in E_x = p^{-1}(x)$ le cui coordinate in U_α, U_β siano rispettivamente $\underset{(\alpha)}{v^i}$, $\underset{(\beta)}{v^i}$ si ha

$$\underset{(\beta)}{v^i} = (A_{\alpha\beta})^i_j \underset{(\alpha)}{v^j} q_{\alpha\beta} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

con $A_{\alpha\beta} = \left((A_{\alpha\beta})^i_j\right)$ matrice quaternionale invertibile e $q_{\alpha\beta}$ quaternione unitario funzioni continue di x, si dirà allora che il fibrato è un *fibrato quaternionale generalizzato* (fibrato q.g.), *destro* (¹), di dimensione n e si indicherà anche con $\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n \xrightarrow{p} X$ o anche brevemente con $\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n$.

Su ogni aperto coordinato U_α il fibrato $\tilde{E}_{|U_\alpha}$ è quaternionale ma sulla intersezione $U_\alpha \cap U_\beta$ le due strutture quaternionali di $\tilde{E}_{|U_\alpha}$, $\tilde{E}_{|U_\beta}$ non sono le stesse bensì coerenti.

Un notevole esempio di fibrato quaternionale generalizzato è costituito dal fibrato tangente $\tau(\mathbf{P}^{\mathbf{Q}}_n)$ dello spazio proiettivo quaternionale $\mathbf{P}^{\mathbf{Q}}_n$ (destro) (²). Un procedimento per determinare varietà con fibrato tangente dotato di struttura q.g. può trovarsi in J. A. WOLF [16].

Si osservi che in particolare, per $n = 1$, il gruppo $Sp(1, \mathbf{Q}) \otimes Sp(1, \mathbf{Q})$ è isomorfo a $SO(4, \mathbf{R})$ (³) sicchè *ogni fibrato 4-dimensionale reale orientabile è dotato di una struttura quaternionale generalizzata.*

Dati due fibrati q.g. $\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n \xrightarrow{p} X$, $\tilde{F}^{\mathbf{Q}}_n \xrightarrow{r} Y$ un *morfismo* tra di essi è definito da una applicazione di fibrati

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n & \xrightarrow{f} & \tilde{F}^{\mathbf{Q}}_n \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle r} \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \end{array}$$

tale che per ogni coppia di aperti coordinati U_α, V_β di $\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n$, $\tilde{F}^{\mathbf{Q}}_n$ con $U_\alpha \cap \bar{f}^{-1} V_\beta \neq \Phi$ e per ogni $x \in U_\alpha \cap \bar{f}^{-1} V_\beta$, dette $\underset{(\alpha)}{u^i}$ e $\underset{(\beta)}{v^i}$ le coordinate su U_α e V_β del generico elemento $\boldsymbol{e} \in \tilde{E}_x = p^{-1}x$ e della sua immagine $f(\boldsymbol{e}) \in \tilde{F}_{\bar{f}(x)}$, si abbia

$$\underset{(\beta)}{v^i} = (B_{\alpha\beta})^i_j \underset{(\alpha)}{u^j} p_{\alpha\beta} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{5.2}$$

con $B_{\alpha\beta} = \left((B_{\alpha\beta})^i_j\right)$ matrice invertibile e $p_{\alpha\beta}$ quaternione di modulo unitario, funzioni continue entrambi di x. Si tratta cioè di un morfismo che conserva le strutture quaternionali dei due fibrati.

I fibrati q.g. $\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n \to X$, $'\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n \to X$ si diranno poi isomorfi se sono dati morfismi $\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n \xrightarrow{f} {'\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n}$, $\quad {'\tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n} \xrightarrow{'f} \tilde{E}^{\mathbf{Q}}_n$ tali che $f'f = 1$, $'ff = 1$

(¹) La trattazione dei fibrati q.g. sinistri è ovviamente analoga.

(²) Cfr. E. MARTINELLI [9].

(³) Cfr. ad es. P. DU VAL [4], p. 42.

e inoltre

$$\bar{f} = {}'\bar{f} = Id_X$$

§ 6. – *Il fibrato* q.g. $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} \to X$ *si dice a parte scalare reale, oppure complessa* se è possibile considerarvi un opportuno sistema di carte quaternionali $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che nelle trasformazioni di coordinate (5.1) ad esso relative il fattore $q_{\alpha\beta}$ sia sempre reale, oppure sempre complesso (e non sempre reale); diversamente il fibrato si dice a *parte scalare quaternionale* (1).

Si noti che *se il fibrato è a parte scalare complessa esso è dotato di una struttura complessa*, quella definita dalla moltiplicazione per *i*. *Qualora invece il fibrato sia a parte scalare reale esso è un fibrato quaternionale* (non q.g.) e le strutture complesse che vi si possono considerare sono, come noto, infinite.

§ 7. – *Il gruppo strutturale di un fibrato* q.g. *su X paracompatto* (2) *può sempre ridursi al gruppo unitario* $Sp(n, \mathbb{Q}) \otimes Sp(1, \mathbb{Q})$; ciò nel senso che si può assumere sempre un opportuno sistema di carte quaternionali $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tali che per le coordinate $\underset{(\alpha)}{v}^i$ ad esso relative le (5.1) diano luogo appunto ad una trasformazione del gruppo unitario generalizzato.

Sia data infatti una partizione dell'unità $\{\varrho_\alpha \colon U_\alpha \to (0, 1]\}$ relativa a un ricoprimento coordinato localmente finito $\{U_\alpha\}$ di X. Si scelga poi su ogni aperto U_α, ove è definita una struttura quaternionale ben determinata relativa alle coordinate $\underset{(\alpha)}{v}^i$, un prodotto hermitiano $\langle\, ,\rangle_\alpha$ a forma quadratica definita positiva. Si consideri la forma quadratica hermitiana definita positiva $\sum\limits_\alpha \varrho_\alpha \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_\alpha$: benchè tale forma induca prodotti hermitiani a priori diversi nei vari U_α, in ogni U_α, con un cambiamento del gruppo $GL(n, \mathbb{Q})$ possiamo ridurre la forma predetta a forma canonica. Allora le nuove coordinate $'\underset{(\alpha)}{v}^i$, $'\underset{(\beta)}{v}^i$ in $U_\alpha \cap U_\beta$ saranno collegate da una trasformazione (5.1) che, per quanto osservato a proposito della (1.5), apparterrà al gruppo unitario q.g.

Come si vede, analogamente a quanto avviene per i fibrati quaternionali, la riduzione del gruppo strutturale di un fibrato q.g. equivale all'introdurvi una metrica hermitiana (generalizzata).

Aggiungiamo che, ovviamente,

(7.1) *il gruppo strutturale di* $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$ *può ridursi a* $Sp(n, \mathbb{Q}) \otimes U(1, \mathbb{Q})$ *oppure* $Sp(n, \mathbb{Q})$ *se il fibrato è a parte scalare complessa oppure reale.*

III. – Il fibrato di Bonan.

§ 8. – Ad ogni fibrato q.g. $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} \to X$ risulta associato un fibrato vettoriale reale, 4-dimensionale, $B_E \xrightarrow{q_B} X$ che diremo *fibrato di Bonan* (3) di $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$: esso descrive come

(1) Cfr. J. A. WOLF [16], p. 1037, ove peraltro la definizione di parte scalare è data adottando un altro punto di vista.

(2) Supporremo gli spazi sempre paracompatti.

(3) Cfr. E. BONAN [1], p. 48, ove viene introdotto tale fibrato.

avvengono i cambiamenti di struttura nei cambiamenti di carte quaternionali di $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$.

La fibra di B_E su x può definirsi come l'algebra Q_x delle trasformazioni lineari di $\tilde{E}_x$ indotte dalla moltiplicazione per gli elementi di Q in una qualunque delle strutture quaternionali (coerenti) che vi si possono considerare: quanto osservato al n. 2 mostra che tra Q_x e Q vi è un isomorfismo definito a meno di automorfismi interni di Q.

Assegnato un sistema di carte quaternionali $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ammissibili per $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ si hanno banalizzazioni locali ψ_α: $U_\alpha \times \mathrm{Q} \to B_{E|U_\alpha}$ associando a ogni (x, q) la trasformazione $\bar{q}_x$ di $\tilde{E}_x$ corrispondente alla moltiplicazione per q nella struttura quaternionale indotta da φ_α su $\tilde{E}_x$.

Se $\underset{(\alpha)}{v}$, $\underset{(\beta)}{v}$ sono quaternioni rappresentanti lo stesso elemento di $(B_E)_x$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, nelle banalizzazioni ψ_α, ψ_β sarà

(8.1) $$\underset{(\beta)}{v} = \bar{q}_{\alpha\beta}\, \underset{(\alpha)}{v}\, q_{\alpha\beta}$$

con $q_{\alpha\beta}$ lo stesso quaternione unitario, funzione continua di x, che compare nelle (5.1) esprimenti il cambiamento di coordinate per $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ nel passaggio da $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β).

Poichè gli automorfismi interni di Q conservano tutti la norma di un quaternione *il prodotto scalare espresso su ogni fibra di B_E nell'aperto coordinato U_α da*

(8.2) $$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \mathrm{Re}\,(\underset{(\alpha)}{\bar{v}}\, \underset{(\beta)}{u})$$

dà una metrica hermitiana per B_E.

Quando si supponga, come consueto, di identificare $\underset{0}{x} + i\underset{1}{x} + j\underset{2}{x} + k\underset{3}{x} \in \mathrm{Q}$ con $(\underset{0}{x}, \underset{1}{x}, \underset{2}{x}, \underset{3}{x}) \in \mathrm{R}_4$

(8.3) *il gruppo degli automorfismi interni di Q, che è un sottogruppo di $Sp(1) \otimes Sp(1)$, coincide con il gruppo $1 \times SO(3)$* (¹) *delle rotazioni di R_4 che lasciano fissi gli elementi dell'asse $\underset{0}{x}$.*

Stabiliamo esplicitamente qui appresso alcune relazioni che intercorrono tra sistemi $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, $\{(U'_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ di coordinate per B_E ottenuti nel modo sopra descritto a partire da diversi sistemi $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ per $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$. Limitiamoci per semplicità, al caso in cui i due ricoprimenti $\{U_\alpha\}$, $\{U'_\alpha\}$ coincidono e denotiamo con $\underset{(\alpha)}{v^i}$, $\underset{(\alpha)}{'v^i}$ le coordinate definite su U_α rispettivamente da φ_α, φ'_α. Si avrà

(8.4) $$\underset{(\alpha)}{'v^i} = (\Gamma_\alpha)^i_j\, \underset{(\alpha)}{v^j}\, q_\alpha$$

con $\Gamma_\alpha = ((\Gamma_\alpha)^i_j)$ matrice quaternionale invertibile e q_α quaternione unitario funzioni continue di $x \in U_\alpha$. Si passa dunque dalle coordinate $\underset{(\alpha)}{v}$ definite su B_E da ψ_α alle coordinate $\underset{(\alpha)}{'v}$ relative a ψ'_α mediante la trasformazione

(8.5) $$\underset{(\alpha)}{'v} = \bar{q}_\alpha\, \underset{(\alpha)}{v}\, q_\alpha$$

(¹) Cfr. ad es. P. DU VAL [4], p. 38.

Nella intersezione $U_\alpha \cap U_\beta$ supposta non vuota risulterà poi

$$\underset{(\beta)}{'v^i} = (A'_{\alpha\beta})^i_j \underset{(\alpha)}{'v^j} q'_{\alpha\beta}\,, \qquad \underset{(\beta)}{v^i} = (A_{\alpha\beta})^i_j \underset{(\alpha)}{v^j} q_{\alpha\beta} \tag{8.6}$$

e dovrà aversi tenuto conto delle (8.4),

$$(\Gamma_\beta)^i_j (A_{\alpha\beta})^j_h \underset{(\alpha)}{v^h} q_{\alpha\beta} q_\beta = (A'_{\alpha\beta})^i_j (\Gamma_\alpha)^j_h \underset{(\alpha)}{v^h} q_\alpha q'_{\alpha\beta} \tag{8.7}$$

da cui, per l'arbitrarietà delle $\underset{(\alpha)}{v^h}$, si trae la relazione

$$q'_{\alpha\beta} = \pm \bar{q}_\alpha q_{\alpha\beta} q_\beta \tag{8.8}$$

della quale ci serviremo in seguito.

Riuscirà utile osservare anche che un morfismo di fibrati q.g., $f\colon \tilde{E}^{\mathrm{Q}}_n \to \tilde{F}^{\mathrm{Q}}_n$, del tipo descritto al n. 5 induce un morfismo

$$\begin{array}{ccc} B_E & \xrightarrow{f_B} & B_F \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r_B} \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \end{array}$$

tra i rispettivi fibrati di Bonan $B_E \xrightarrow{q_B} X$, $B_F \xrightarrow{r_B} Y$: infatti la fibra di B_E su x si applica isomorficamente sulla fibra di B_F su $\bar{f}(x)$ corrispondendo ad ogni trasformazione di Q_x, mediante la f, una trasformazione di $\mathrm{Q}_{\bar{f}(x)}$, come risulta dalle (5.2).

Possiamo esprimere tutto ciò in forma equivalente dicendo che

(8.9) *se* $\tilde{E}^{\mathrm{Q}}_n \to X$ *è un fibrato* q.g. *e se* $\bar{f}\colon Y \to X$ *è una applicazione continua allora* $\bar{f}^* B_E = B_{\bar{f}^*\tilde{E}}$.

Cioè il fibrato indotto di $\tilde{E}^{\mathrm{Q}}_n$ mediante una applicazione continua $\bar{f}\colon Y \to X$ ha come fibrato di Bonan proprio l'indotto, mediante la stessa applicazione, del fibrato di Bonan di $\tilde{E}^{\mathrm{Q}}_n$.

§ 9. – *Il fibrato di Bonan B_E di $\tilde{E}^{\mathrm{Q}}_n$ ammette almeno una sezione reale mai nulla*, fornita su ogni $x \in X$ dalla trasformazione identica di $\tilde{E}_x$ che appartiene sempre a Q_x (corrispondendo alla moltiplicazione per l'unità di Q): ciò d'altra parte risulta anche dall'osservare che l'unità di Q è lasciata invariata dalle funzioni di collegamento (8.1), poichè $\bar{q}_{\alpha\beta} \cdot 1 \cdot q_{\alpha\beta} = 1$. Dunque B_E è somma diretta su X di un fibrato banale con fibra isomorfa ad $\mathbb{R}$ e di un fibrato, in generale non banale, $E^{\mathbb{R}}_3$, con fibra $\hat{\mathrm{Q}}_x$ data dalle trasformazioni di $\tilde{E}_x$ indotte dalla moltiplicazione per quaternioni immaginari. Risulta poi che

(9.1) *il fibrato $\tilde{E}^{\mathrm{Q}}_n$ è a parte scalare complessa o reale se e solo se il fibrato B_E ammette due sezioni reali indipendenti oppure è banale.*

Infatti se $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ è a parte scalare complessa le $q_{\alpha\beta}$ possono ottenersi tutte complesse di maniera che risulta, per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\bar{q}_{\alpha\beta}\, i\, q_{\alpha\beta} = i$ e dunque la sezione i assieme alla sezione 1 sono due sezioni per B_E, indipendenti su $\mathbf{R}$; se $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ è a parte scalare reale, cioè si tratta di un fibrato quaternionale, le $q_{\alpha\beta}$ si possono ridurre tutte uguali a 1 e B_E è il fibrato banale su X con fibra $\mathbf{Q}$. Viceversa, se assieme alla sezione 1 vi è un'altra sezione indipendente $\mathfrak{J}\colon X \to B_E$ si può sempre supporre, previa eventuale combinazione lineare con la sezione 1, che essa abbia valori nell'insieme dei vettori unitari dell'ortogonale $E_3^{\mathbf{R}}$ di 1 in B_E e inoltre le banalizzazioni $\psi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbf{Q} \to q_B^{-1} U_\alpha$ possono essere sempre scelte in modo che risulti $\psi_\alpha(x, i) = \mathfrak{J}(x)$, per quanto osservato in (8.3): dunque le $q_{\alpha\beta}$ relative alle coordinate così scelte debbono verificare la relazione $\bar{q}_{\alpha\beta}\, i\, q_{\alpha\beta} = i$ la quale, come può vedersi con un semplice calcolo, implica $q_{\alpha\beta} \in \mathbf{C} \subset \mathbf{Q}$.

È facile vedere con simili ragionamenti che se B_E è banale, cioè ammette 4 sezioni reali indipendenti, allora $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ è un fibrato quaternionale.

Infine, collegando quanto sopra osservato con le classi di Stiefel-Whitney di B_E osserviamo che $W_4(B_E)$ è sempre nulla e dovrà essere $W_3(B_E) = 0$ oppure $W_3(B_E) = 0$, $W_2(B_E) = 0$ se la parte scalare di $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ è complessa oppure reale.

IV. – Somma diretta di fibrati quaternionali generalizzati.

§ 10. – È noto che i fibrati somma diretta interna o esterna di fibrati quaternionali risultano dotati anche essi di una struttura quaternionale [1]. Ciò non avviene in generale per fibrati q.g.: J. A. WOLF [16] ha mostrato ad esempio che la somma diretta esterna dei fibrati tangenti a varietà q.g. non è un fibrato q.g. Vogliamo qui prendere in esame la possibilità di introdurre una struttura q.g. nella somma diretta *interna* di fibrati q.g.

Conviene dapprima fare alcune osservazioni sul caso degli spazi vettoriali.

Innanzitutto è ovvio che

(10.1) *una struttura* q.g. $\{\mathfrak{Q}\}$ *dello spazio vettoriale reale* $V_{4n}^{\mathbf{R}}$ *induce una ben determinata struttura* q.g. $\{\mathfrak{Q}'\}$ *su ogni spazio caratteristico* $\overset{(c)}{V}{}_{4t}^{\mathbf{R}} \subset V_{4n}^{\mathbf{R}}$.

Notiamo poi che se $\varphi_1\colon \mathbf{Q}_n \to V_{4n}^{\mathbf{R}}$, $\varphi_2\colon \mathbf{Q}_m \to V_{4m}^{\mathbf{R}}$ definiscono strutture quaternionali per $V_{4n}^{\mathbf{R}}$, $V_{4m}^{\mathbf{R}}$ possiamo allora considerare nella somma diretta $V_{4n}^{\mathbf{R}} \oplus V_{4m}^{\mathbf{R}}$ la struttura definita dall'isomorfismo

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2\colon \mathbf{Q}_{n+m} \equiv \mathbf{Q}_n \oplus \mathbf{Q}_m \to V_{4n}^{\mathbf{R}} \oplus V_{4m}^{\mathbf{R}}$$

Se in luogo di φ_1, φ_2 si considerano altri isomorfismi $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ risulta che

---

(1) Cfr. ad es. D. HUSEMOLLER [8], p. 26.

(10.2) *le strutture definite da* $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \oplus \tilde{\varphi}_2$ *sono coerenti se e solo se* $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \circ \sigma_{A_1,q_1}$, $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \circ \sigma_{A_2,q_2}$ (*cioè* $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ *sono coerenti rispettivamente con* φ_1, φ_2) *e inoltre* $q_1 = \pm q_2$.

La parte diretta è ovvia. Per l'inversa si osservi che

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^{-1} \circ (\tilde{\varphi}_1 \oplus \tilde{\varphi}_2)_{|\mathbf{Q}_n} = \varphi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 , \qquad (\varphi_1 \oplus \varphi_2)^{-1} \circ (\tilde{\varphi}_1 \oplus \tilde{\varphi}_2)_{|\mathbf{Q}_m} = \varphi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 ,$$

pertanto $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^{-1} \circ (\tilde{\varphi}_1 \oplus \tilde{\varphi}_2) = (\varphi_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1) \oplus (\varphi_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2)$ e dunque si avrà $(\tilde{\varphi}_1 \oplus \tilde{\varphi}_2) = (\varphi_1 \oplus \varphi_2) \circ \sigma_{A,q}$ solo se la matrice A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \circ \\ \circ & A_2 \end{pmatrix}$$

con $A_1 \in GL(n, \mathbf{Q})$, $A_2 \in GL(m, \mathbf{Q})$ e $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \circ \sigma_{A,q}$, $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \circ \sigma_{A,q}$.

Poichè fissato φ_1 la struttura q.g. definita da $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ cambia al variare di φ_2 possiamo asserire che, mediante il procedimento descritto,

(10.3) *assegnate strutture* q.g. *su* $V_{4n}^{\mathbf{R}}$, $V_{4m}^{\mathbf{R}}$ *rispettivamente, le strutture* q.g. *su* $V_{4n}^{\mathbf{R}} \oplus V_{4m}^{\mathbf{R}}$ *sono in corrispondenza con gli automorfismi interni di* $\mathbf{Q}$.

Passiamo ora al caso dei fibrati. Sia $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}} \to X$ un fibrato q.g. e $E_{4t}^{\mathbf{R}} \subset \tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ un suo sottofibrato reale: diremo che $E_{4t}^{\mathbf{R}}$ è un *sottofibrato caratteristico* di $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ se per ogni $x \in X$ la fibra $(E_{4t}^{\mathbf{R}})_x$ è un sottospazio caratteristico, $4t$-dimensionale, di $(\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}})_x$. In tal caso scriveremo anche $\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}} \to X$ in luogo di $E_{4t}^{\mathbf{R}} \to X$.

In corrispondenza della (10.1) si ha la seguente proposizione

(10.4) *Sia* $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}} \to X$ *un fibrato* q.g. *e* $\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}}$ *un suo sottofibrato caratteristico: allora* $\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}} \to X$ *risulta dotato di una struttura* q.g., *indotta da quella di* $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$.

Per vedere ciò procuriamoci dapprima un addendo diretto di $\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}}$ in $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ il quale sia anch'esso caratteristico; ciò può sempre farsi assegnando in $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$ una metrica hermitiana e considerando il sottofibrato $\tilde{E}_{n-t}^{\mathbf{Q}} = (\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}})^{\perp}$ ortogonale di $\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}}$ in $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$. Possiamo poi sempre assumere per $\tilde{E}_n^{\mathbf{Q}}$, utilizzando le strutture quaternionali locali, un sistema di coordinate ammissibili $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che, fatta l'identificazione canonica $Q_n \equiv \mathbf{Q}_t \oplus \mathbf{Q}_{n-t}$ risulti

$$\varphi'_\alpha = \varphi_{\alpha|U_\alpha \times \mathbf{Q}_t} \colon U_\alpha \times \mathbf{Q}_t \to \tilde{E}_{t|U_\alpha} , \qquad \varphi''_\alpha = \varphi_{\alpha|U_\alpha \times \mathbf{Q}_{n-t}} \colon U_\alpha \times \mathbf{Q}_{n-t} \to \tilde{E}_{n-t|U_\alpha}$$

sicchè $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$, $\{(U_\alpha, \varphi''_\alpha)\}$ risultano sistemi di coordinate quaternionali, ammissibili, per $\tilde{E}_t^{\mathbf{Q}}, \tilde{E}_{n-t}^{\mathbf{Q}}$. Indicata ora con $\varphi_{\alpha,x} \colon \mathbf{Q}_n \to \tilde{E}_x$ l'applicazione data dalla composizione di $i_{\alpha,x} \colon \mathbf{Q}_n \to x \times \mathbf{Q}_n$ con $\varphi_{\alpha|x \times \mathbf{Q}_n}$ si ha, per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\varphi_{\alpha,x} = \varphi'_{\alpha,x} \oplus \varphi''_{\alpha,x}$, $\varphi_{\beta,x} = \varphi'_{\beta,x} \oplus \varphi''_{\beta,x}$ e facendo uso della (10.2) ne segue che devono sussistere le relazioni

$$\varphi'^{-1}_{\alpha,x} \circ \varphi'_{\beta,x} = \sigma_{A'_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}}, \ \varphi''^{-1}_{\alpha,x} \circ \varphi''_{\beta,x} = \sigma_{A''_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}} , \qquad \varphi^{-1}_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x} = \sigma_{A_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}}$$

con

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A'_{\alpha\beta} & \circ \\ \circ & A''_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

Ciò significa appunto che $\tilde{E}_t^{\mathrm{Q}}, \tilde{E}_{n-t}^{\mathrm{Q}}$ rimangono dotati, mediante gli assegnati sistemi di coordinate, di strutture q.g., indotte da quella di $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ fibra per fibra.

Da quanto precede risulta anche che *i fibrati di Bonan di* $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}, \tilde{E}_t^{\mathrm{Q}}$ *e* $\tilde{E}_{n-t}^{\mathrm{Q}}$ *sono gli stessi* essendo uguali i $q_{\alpha\beta}$ per tutti e tre i sistemi di coordinate considerati. Quest'ultima asserzione può invertirsi in quanto sussiste la seguente proposizione (in corrispondenza alla (10.2))

(10.5) *Assegnati i fibrati q.g.* $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}, \tilde{E}_m^{\mathrm{Q}}$ *su* X *la somma diretta* $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}} \oplus \tilde{E}_m^{\mathrm{Q}}$ *ammette almeno una struttura q.g. la quale induca sugli addendi le strutture di cui sono dotati se e solo se i fibrati di Bonan* B_{E_n}, B_{E_m} *sono isomorfi (e in tal caso risulteranno isomorfi anche a* $B_{E_n \oplus E_m}$*).*

Dalla dimostrazione della proposizione (10.4) risulta già la necessità della condizione. Per la sufficienza osserviamo quanto segue. Considerati su $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}, \tilde{E}_m^{\mathrm{Q}}$ sistemi di coordinate $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$, $\{(U_\alpha, \varphi''_\alpha)\}$ relativi allo stesso ricoprimento di X, per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulterà

$$\varphi'^{-1}_{\alpha,x} \circ \varphi'_{\beta,x} = \sigma_{A'_{\alpha\beta}, q'_{\alpha\beta}}\,, \qquad \varphi''^{-1}_{\alpha,x} \circ \varphi''_{\beta,x} = \sigma_{A''_{\alpha\beta}, q''_{\alpha\beta}}$$

Nell'ipotesi che sia $B_{E_n} = B_{E_m}$ si potrà sempre supporre che $q'_{\alpha\beta} = q''_{\alpha\beta}$ effettuando eventualmente sugli aperti U_α cambiamenti di coordinate ad es. di $\tilde{E}_m^{\mathrm{Q}}$ del tipo

$$'\underset{(\alpha)}{v}^i = \underset{(\alpha)}{v}^i q_\alpha \qquad (i = 1, \dots, n)$$

La possibilità di scegliere i $q_{\alpha\beta}$ è data appunto dalla equivalenza dei fibrati di Bonan costruiti a partire dalle $q'_{\alpha\beta}, q''_{\alpha\beta}$. Basterà ora considerare, al solito, per $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}} \oplus \tilde{E}_m^{\mathrm{Q}}$ il sistema di coordinate $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ definito dagli omeomorfismi

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathrm{Q}_{m+n} \to \tilde{E}_m \oplus \tilde{E}_n$$

con $\varphi_{\alpha,x} = \varphi'_{\alpha,x} \oplus \varphi''_{\alpha,x}$. Per quanto osservato in (10.2) ne segue che $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}} \oplus \tilde{E}_m^{\mathrm{Q}}$ risulta dotato di una struttura q.g. del tipo desiderato. È ovvio infine che il fibrato $B_{E_n \oplus E_m}$ è isomorfo a B_{E_n}, B_{E_m}.

V. – Fibrati quaternionali generalizzati prodotto tensoriale di fibrati quaternionali.

§ 11. – Siano $E_n^{\mathrm{Q}}, F_1^{\mathrm{Q}}$ fibrati quaternionali (e *non* q.g.) rispettivamente destro, di dimensione n, e sinistro di dimensione 1, su X. Si può allora considerare il fibrato $E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1$ *prodotto tensoriale su* Q di $E_n^{\mathrm{Q}}, F_1^{\mathrm{Q}}$ per il quale $(E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1)_x = (E_n)_x \otimes_{\mathrm{Q}} (F_1)_x$, $x \in X$.

Il fibrato $E_n \otimes_{\mathbb{Q}} F_1$ *risulta dotato di una struttura q.g.*, in base a quanto osservato al n. 4.

Più precisamente, sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento di X su cui sono definiti sistemi di coordinate $\underset{(\alpha)}{u}^i$, $\underset{(\alpha)}{t}$ $(i = 1, \ldots, n)$ rispettivamente per $E_n^{\mathbb{Q}}$, $F_1^{\mathbb{Q}}$ e siano

$$\underset{(\beta)}{u}^i = (A_{\alpha\beta})^i_j \underset{(\alpha)}{u}^j, \qquad \underset{(\beta)}{t} = \underset{(\alpha)}{t}\, q_{\alpha\beta} \tag{11.1}$$

le relative funzioni di incollamento su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Se sull'aperto U_α si considerano per $E_n \otimes_{\mathbb{Q}} F_1$ le coordinate quaternionali $\underset{(\alpha)}{v}^i = \underset{(\alpha)}{u}^i \underset{(\alpha)}{t}$, per quanto appunto visto al n. 4, in $U_\alpha \cap U_\beta$ si avrà una trasformazione del tipo (5.1) con $A_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ come nelle (11.1).

Il fibrato di Bonan di $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} = E_n \otimes_{\mathbb{Q}} F_1$ risulta in questo caso isomorfo con il fibrato $\bar{F}_1 \otimes_{\mathbb{Q}} F_1$ prodotto tensoriale su $\mathbb{Q}$ del coniugato $\bar{F}_1^{\mathbb{Q}}$ di $F_1^{\mathbb{Q}}$ (il quale è un fibrato quaternionale destro) per $F_1^{\mathbb{Q}}$.

I fibrati q.g. ottenuti come prodotti tensoriali di fibrati quaternionali forniscono una famiglia di esempi di fibrati q.g. il cui studio si riconduce in parte a quello dei fibrati quaternionali. Il fibrato $\tau(\mathbb{P}_n^{\mathbb{Q}})$ ad es. è di questo tipo (¹). Non avviene però così per tutti i fibrati quaternionali generalizzati i quali come vedremo sono in generale solo localmente dei prodotti tensoriali: vedremo anche nel paragrafo seguente quale sia l'ostruzione, esclusivamente topologica, perchè lo siano globalmente.

VI. – La classe di ostruzione ε.

§ 12. – Sia $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{p} X$ un fibrato q.g. e $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un sistema di carte quaternionali per $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$: supporremo inoltre il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ di X verificante la condizione che per ogni m-upla $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$ $(1 \leqslant m \leqslant 4)$ di aperti l'intersezione $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}$, se non è vuota, sia connessa. Tale ipotesi, e le conseguenze che se ne trarranno, in seguito, può assumersi valida nel caso, in cui sempre penseremo di porci, di X CW-complesso paracompatto (²).

Per una coppia di aperti U_α, U_β con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ denotiamo con $(A_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta})$ le funzioni di collegamento che intervengono nella trasformazione di coordinate (5.1): supponiamo inoltre di avere fatto una scelta opportuna per $q_{\alpha\beta}$, il quale nelle ipotesi fatte sulla (5.1) è definito a meno del segno, e quindi anche per i termini della matrice $A_{\alpha\beta}$. Non è restrittivo supporre tale scelta effettuata in modo che $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}^{-1}$, $q_{\alpha\beta} = \bar{q}_{\beta\alpha}$ e $A_{\alpha\alpha} = \Delta$ (matrice unità), $q_{\alpha\alpha} = 1$, sicchè in $U_\alpha \cap U_\beta$ si avrà

$$A_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\alpha} \equiv \Delta.$$

(¹) Cfr. TH. HANGAN [7].

(²) Se X è una varietà l'esistenza per ogni ricoprimento aperto di X di un raffinamento verificante l'ipotesi fatta per il ricoprimento $\mathcal{U}$ può stabilirsi come in A. WEIL [15].

Dati tre aperti distinti U_α, U_β, U_γ con intersezione $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ non vuota, e quindi connessa per ipotesi, per ogni x appartenente a tale intersezione sarà

$$A_{\beta\gamma}(x)\,A_{\alpha\beta}(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\gamma}(x)\,; \qquad q_{\alpha\beta}(x)\,q_{\beta\gamma}(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,q_{\alpha\gamma}(x) \tag{12.1}$$

ove $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \pm 1$ è costante e indipendente dall'ordine degli indici α, β, γ.

Osserviamo subito che nel caso in cui la scelta delle $(A_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta})$ dia le $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ tutte uguali ad 1 le funzioni $A_{\alpha\beta}$ e le $q_{\alpha\beta}$ scelte definiscono su X rispettivamente un fibrato quaternionale destro $E_n^{\mathbb{Q}}$ di dimensione n ed un fibrato quaternionale sinistro $F_1^{\mathbb{Q}}$ di dimensione 1 e risulta anche ovviamente $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}} = E_n^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} F_1^{\mathbb{Q}}$.

In generale, possiamo dire che

(12.2) *le $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ definiscono un cociclo $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$, di dimensione 2, a valori in $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$* (¹) *per il nervo del ricoprimento $\mathfrak{U}$.*

Infatti, dalla seconda delle (12.1), supposto $U_\varrho \cap U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ e moltiplicando ambo i membri a sinistra per $q_{\varrho\alpha}$, si ha

$$(q_{\varrho\alpha}q_{\alpha\beta})\,q_{\beta\gamma} = q_{\varrho\alpha}q_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

donde, utilizzando successivamente ancora la citata (12.1), risulta

$$\varepsilon_{\varrho\alpha\beta}\varepsilon_{\varrho\beta\gamma}\,q_{\varrho\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\varrho\alpha\gamma}\,q_{\varrho\gamma}$$

sicchè ne segue la relazione

$$\varepsilon_{\varrho\alpha\beta}\varepsilon_{\varrho\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\varrho\alpha\gamma} = 1 \tag{12.3}$$

la quale esprime appunto che il cobordo di $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi} \equiv \{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\}$ è nullo.

La definizione di $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ dipende ovviamente, oltre che dal sistema di coordinate $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, dalla scelta del segno delle $q_{\alpha\beta}$ (o delle $A_{\alpha\beta}$, il che è la stessa cosa). Se con $q'_{\alpha\beta}$ si indica un'altra scelta di tale segno sarà $q'_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}$, con $c_{\alpha\beta} = \pm 1$.

Ebbene

(12.4) *le $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, $'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, definiscono cocicli cobordanti; quindi la classe di coomologia di $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$, $[\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}] \in H^2(\mathfrak{U}; \mathbb{Z}_2)$, è ben individuata.*

In effetti risulta, ricordando che

$$q_{\gamma\alpha} = \bar{q}_{\alpha\gamma} = q_{\alpha\gamma}^{-1}\,, \qquad {}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = q'_{\alpha\beta}q'_{\beta\gamma}q'_{\gamma\alpha} = c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha}q_{\alpha\beta}q_{\beta\gamma}q_{\gamma\alpha} = c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

e la relazione

$${}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tag{12.5}$$

(¹) Gruppo moltiplicativo.

esprime appunto che il cobordo della 1-catena $c = \{c_{\alpha\beta}\}$ è la « differenza » di $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$ e $'\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$.

Siano $q_{\alpha\beta}$ le funzioni che definiscono il cociclo $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Le $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ danno la classe nulla in $H^2(\mathfrak{U}; \mathbb{Z}_2)$ se e solo se esiste una cocatena $c_{\alpha\beta}$ tale che $c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Ma allora, posto $q'_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}$, risulta $'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = q'_{\alpha\beta}q'_{\beta\gamma}q'_{\gamma\alpha} = \varepsilon^2_{\alpha\beta\gamma} = 1$. Dunque, ricordando anche quanto osservato a proposito delle (12.1), si ha che

(12.6) $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ *è un prodotto tensoriale su* Q *se e solo se* $[\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}] = 0$.

Vogliamo ora dimostrare che

(12.7) *le* $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$ *relative alle diverse scelte dei sistemi di carte su* X *definiscono una ben determinata classe* ε *di coomologia in* $H^2(X; \mathbb{Z}_2)$.

All'uopo mostriamo dapprima che la definizione di ε è « invariante » per raffinamenti. Se è dato un sistema coordinato $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e un raffinamento $\mathfrak{U}' = \{U_{\alpha'}\}$ di $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}' \xrightarrow[\mu]{<} \mathfrak{U}$, sui cui aperti $U_{\alpha'}$, $U_{\alpha'} \subset U_{\mu\alpha'}$, si considerano le coordinate definite dalle restrizioni $\varphi_{\alpha'} = \varphi_{\mu\alpha|U_{\mu\alpha}\times \mathrm{Q}_{n'}}$ le relative trasformazioni ad es. nel passaggio da $(U_{\alpha'}\,\varphi_{\alpha'})$ a $(U_{\beta'}, \varphi_{\beta'})$ si ottengono subito dalle (5.1), per $\alpha = \mu\alpha'$, $\beta = \mu\beta'$, pensandole valide in $U_{\alpha'} \cap U_{\beta'} \subset U_{\mu\alpha'} \cap U_{\mu\beta'}$ e può porsi, in $U_{\alpha'} \cap U_{\beta'}$, $q_{\alpha'\beta'} = q_{\mu\alpha'\mu\beta'}$. Se allora $U_{\alpha'} \cap U_{\beta'} \cap U_{\gamma'} \neq \emptyset$ si ha $q_{\alpha'\beta'}q_{\beta'\gamma'}q_{\gamma'\alpha'} = \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}$ e $q_{\mu\alpha'\mu\beta'}q_{\mu\beta'\mu\gamma'}q_{\mu\gamma'\mu\alpha'} = \varepsilon_{\mu\alpha'\mu\beta'\mu\gamma'}$ con $\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \varepsilon_{\mu\alpha'\mu\beta'\mu\gamma'|U_{\alpha'}\cap U_{\beta'}\cap U_{\gamma'}}$ donde $['\varepsilon] = \mu^*[\varepsilon]$.

In secondo luogo facciamo vedere che la ε non dipende da cambiamenti di coordinate, del tipo (8.4), sugli aperti coordinati del medesimo sistema $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. In effetti la relazione (8.8) a suo tempo stabilita si può scrivere, scelti (indipendentemente) i segni per $q_{\alpha\beta}$, $q'_{\alpha\beta}$ e per le q_α,

$$q'_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\bar{q}_\alpha q_{\alpha\beta} q_\beta \tag{12.8}$$

con $c_{\alpha\beta} = \pm 1$.

Sostituendo nella relazione $q'_{\gamma\alpha} = {}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q'_{\gamma\beta}q'_{\beta\alpha}$ le espressioni delle $q'_{\alpha\beta}$ date dalla (12.8) si ha

$$c_{\gamma\alpha}\bar{q}_\gamma q_{\gamma\alpha}q_\alpha = {}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}c_{\gamma\beta}\bar{q}_\gamma q_{\gamma\beta}q_\beta c_{\beta\alpha}\bar{q}_\beta q_{\beta\alpha}q_\alpha = {}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}c_{\gamma\beta}c_{\beta\alpha}\bar{q}_\gamma\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_{\gamma\alpha}q_\alpha$$

ovvero anche

$${}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = c_{\gamma\alpha}c_{\gamma\beta}c_{\beta\alpha} \tag{12.9}$$

Quest'ultima relazione significa che i cocicli $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$, $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi'}$ sono coomologhi e dunque $[\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi'}] = [\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}]$.

Dalle considerazioni fatte sopra risulta infine che eseguendo un limite diretto le $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$ definiscono lo stesso elemento della coomologia di Cech $H^2(X; \mathbb{Z})$.

Per quanto osservato in (12.6) è chiaro che

(12.10) $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ *è un prodotto tensoriale su* Q *se e solo se* $\varepsilon = 0$.

Con una argomentazione analoga a quella di cui si è fatto uso per dimostrare la precedente (12.7) si può vedere poi che

(12.11) *la classe ε è naturale; cioè se $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}} \xrightarrow{f} {}'\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ è un morfismo di fibrati q.g. allora $f^*[\varepsilon'] = \varepsilon$.*

Osserviamo infine che

(12.12) *Il fibrato $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}}$ e il relativo fibrato di Bonan B_E hanno la stessa ε.*

Ciò risulta immediatamente dalle (8.1) e dalla definizione della ε.

§ 13. – Quanto fin qui fatto per fibrati quaternionali destri ha un analogo per fibrati quaternionali sinistri. In particolare osserviamo che nel caso di fibrati unidimensionali per i quali i cambiamenti di coordinate sono del tipo

$$\underset{(\alpha)}{v} = a_{\alpha\beta}\,\underset{(\beta)}{v}\,q_{\alpha\beta} \tag{13.1}$$

essi possono essere pensati fibrati q.g. sia destri che sinistri. Si ha così luogo a considerare il fibrato di Bonan B' del fibrato destro e quello B'' del fibrato sinistro con funzioni di collegamento rispettivamente

$$\underset{(\beta)}{{}'v} = \bar{q}_{\alpha\beta}\,\underset{(\alpha)}{{}'v}\,q_{\alpha\beta}\,, \qquad \underset{(\beta)}{{}''v} = a_{\alpha\beta}\,\underset{(\alpha)}{{}''v}\,\bar{a}_{\alpha\beta} \tag{13.2}$$

Evidentemente $\varepsilon(B') = \varepsilon(B'')$ ma risulta anzi che

(13.3) *se sono assegnati fibrati vettoriali reali 4-dimensionali B', B'' su X con gruppo strutturale $1 \times SO(3)$, e quindi con funzioni di transizione rappresentabili nella forma (13.2), essi danno luogo a un fibrato q.g. di cui risultano fibrati di Bonan rispettivamente destro e sinistro se e solo se $\varepsilon(B') = \varepsilon(B'')$.*

Infatti supponiamo che sia $\varepsilon(B') = \varepsilon(B'')$, condizione che si è visto necessaria. Allora, scelto un comune ricoprimento coordinato $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ di X, per le $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi}$, $\varepsilon_{\mathfrak{U},\varphi'}$ relative alle coordinate scelte in tali aperti per i due fibrati dovrà risultare ${}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}$ ed anzi, fatto uso della cocatena $\{c_{\alpha\beta}\}$ si potrà cambiare i segni per esempio per le $q_{\alpha\beta}$ in modo che risulti proprio ${}'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. In tale ipotesi si ha, per ogni terna di aperti distinti con intersezione non vuota

$$q_{\alpha\beta}\, q_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, q_{\alpha\gamma}\,, \qquad a_{\beta\gamma}\, a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\alpha\gamma}$$

ma ciò implica che relativamente al ricoprimento $\{U_\alpha\}$ trasformazioni del tipo (13.1) con $a_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ quelli scelti definiscono un fibrato q.g. su X e la conclusione è immediata.

VII. – Fibrati quaternionali prodotto tensoriale e loro classi di Stiefel-Whitney.

§ 14. – Indichiamo con $\eta_n(\mathrm{Q}) \to G_n(\mathrm{Q})$ il classificante dei fibrati quaternionali destri (¹) di dimensione $n = 1, 2, \ldots$, e con $\eta_n^*(\mathrm{Q}) \to G_n(\mathrm{Q})$ quello dei fibrati quaternionali sinistri, duale del primo. Sia $\eta_n(\mathrm{Q}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \eta_1^*(\mathrm{Q}) \to G_n(\mathrm{Q}) \times G_1(\mathrm{Q})$ il fibrato q.g.-*prodotto tensoriale esterno* di $\eta_n(\mathrm{Q})$ e $\eta_1^*(\mathrm{Q})$, con fibra su $(x, y) \in G_n(\mathrm{Q}) \times G_1(\mathrm{Q})$ lo spazio $(\eta_n(\mathrm{Q}))_x \otimes_{\mathrm{Q}} (\eta_1^*(\mathrm{Q}))_y$. Poichè per fibrati quaternionali E_n^{Q}, F_1^{Q}, rispettivamente destro e sinistro, su X dovrà aversi $E_n^{\mathrm{Q}} = f^* \eta_n$, $F_1^{\mathrm{Q}} = g^* \eta_1^*$ per opportune applicazioni $f\colon X \to G_n(\mathrm{Q})$, $g\colon X \to G_1(\mathrm{Q})$, risulta ovviamente che

(14.1) *ogni fibrato* $\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}} = E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1 \to X$ *è indotto da una applicazione* $f \times g\colon X \to$ $\to G_n(\mathrm{Q}) \times G_1(\mathrm{Q})$, *cioè*

$$\tilde{E}_n^{\mathrm{Q}} = (f \times g)^* (\eta_n(\mathrm{Q}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \eta_1^*(\mathrm{Q})) .$$

Osserviamo esplicitamente che però *il fibrato* $\eta_n(\mathrm{Q}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \eta_1^*(\mathrm{Q})$ *non è « classificante » i fibrati prodotto tensoriale* (²), cioè applicazioni $f \times g, f' \times g'\colon X \to G_n(\mathrm{Q}) \times G_1(\mathrm{Q})$ che inducano fibrati isomorfi non sono necessariamente omotope. Poichè $f \times g, f' \times g'$ sono omotope (se e) solo se lo sono f e f', g e g' una affermazione equivalente è che un isomorfismo q.g., su X, $\Phi\colon E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1 \to E_n' \otimes_{\mathrm{Q}} F_1'$ tra fibrati prodotto tensoriale non è detto si ottenga sempre da isomorfismi $\Phi_1\colon E_n \to E_n'$, $\Phi_2\colon F_1 \to F_1'$ tra i fattori (in quest'ultimo caso scriveremo $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$, con ovvio significato del simbolo). Mostriamo in effetti che

(14.2) *assegnato un isomorfismo q.g.,* $\Phi\colon E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1 \to {}'E_n \otimes_{\mathrm{Q}} {}'F_1$ *risulta individuata una classe di coomologia* $[c] \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ *a priori non nulla e che si annulla se e solo se l'isomorfismo è della forma* $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$.

Scegliamo per i fibrati in considerazione un ricoprimento coordinato $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ comune. Se $\boldsymbol{v} \in (E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1)_x$ e $\boldsymbol{v}' = \Phi(\boldsymbol{v}) \in (E_n' \otimes_{\mathrm{Q}} F_1')_x$ indichiamo con $\underset{(\alpha)}{v^i}$, $\underset{(\alpha)}{{}'v^i}$ le coordinate di $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$, relativamente ad un aperto coordinato U_α contenente x, come costruite al n. 11. Sull'aperto U_α l'isomorfismo Φ si rappresenterà mediante una trasformazione del tipo (8.4) e, ragionando come per la (12.8) e la (12.9), se ne dedurrà che $q_{\alpha\beta}' = c_{\alpha\beta} \bar{q}_\alpha q_{\alpha\beta} q_\beta$ con $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ e che $c = \{c_{\alpha\beta}\}$ è un cociclo. Se si effettuano cambiamenti di coordinate può poi vedersi che tale cociclo varia nella stessa classe di coomologia in $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$. Se $[c]$ è nulla si avrà $c_{\alpha\beta} = c_\alpha c_\beta$ per un opportuno cociclo $\{c_\alpha\}$ in $H^0(X; \mathbb{Z}_2)$: sostituiti Γ_α e q_α nella (8.4) con $\tilde{\Gamma}_\alpha = c_\alpha \Gamma_\alpha$ e $\tilde{q}_\alpha = c_\alpha q_\alpha$ saranno valide le relazioni

$$A_{\alpha\beta}' = \tilde{\Gamma}_\beta A_{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_\alpha^{-1}, \qquad q_{\alpha\beta}' = \bar{\tilde{q}}_\alpha q_{\alpha\beta} \tilde{q}_\beta$$

(¹) Cfr. ad es. D. HUSEMOLLER [8], p. 83.

(²) Non risulta a priori che tali fibrati debbano avere uno spazio classificante.

(vedasi le (8.7)) le quali esprimono appunto che le trasformazioni espresse sugli aperti U_α da

$$'\underset{(\alpha)}{u}^i = (\Gamma_\alpha)^i_j \underset{(\alpha)}{u}^j, \qquad '\underset{(\alpha)}{t} = \underset{(\alpha)}{t}\, q_\alpha$$

definiscono isomorfismi $\Phi_1\colon E_n^{\mathbb{Q}} \to {'E_n^{\mathbb{Q}}}$, $\Phi_2\colon F_1^{\mathbb{Q}} \to {'F_1^{\mathbb{Q}}}$ tra i fattori (e per i quali evidentemente $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$). Infine, è ovvia la necessità dell'annullarsi di $[c]$ affinchè sia $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$.

§ 15. – Il calcolo delle classi di Stiefel-Whitney dei fibrati q.g. che sono prodotto tensore si riconduce a quello delle medesime classi per i singoli fattori. Osserviamo innanzitutto che dalla (14.1) risulta

$$W_l(E_n \otimes_{\mathbb{Q}} F_1) = 0 \qquad \text{per } l \not\equiv 0 \pmod 4 \tag{15.1}$$

Infatti

$$W_l(\eta_n(\mathbb{Q}) \,\widehat{\otimes}\, \eta_1^*(\mathbb{Q})) \in H^l(G_n(\mathbb{Q}) \times G_1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i+j=l} H^i(G_n(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2) \otimes H^j(G_1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2)$$

e $H^i(G_n(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2) = 0$ se $i \not\equiv 0 \pmod 4$ (1): la validità delle (15.1) per fibrati $E_n^{\mathbb{Q}}$, $F_1^{\mathbb{Q}}$ qualunque segue dalla proposizione sopra richiamata e dalla naturalità delle W_l.

Mostriamo ora che sussistono le relazioni

$$W_{4i}(E_n \otimes_{\mathbb{Q}} F_1) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} W_{4j}(E_n)\, W_4^{i-j}(F_1) \qquad i > 0 \tag{15.2}$$

dove prodotti e potenze a destra sono prodotti cup e si conviene di porre

$$\binom{h}{0} = 1 \qquad \text{per } h \geqslant 0\,.$$

Cominciamo con lo stabilire la (15.2) per $n = i = 1$, nel qual caso si scrive

$$W_4(E_1 \otimes_{\mathbb{Q}} F_1) = W_4(E_1) + W_4(F_1) \tag{15.3}$$

Poichè

$$W_4(\eta_1(\mathbb{Q}) \,\widehat{\otimes}\, \eta_1^*(\mathbb{Q})) \in H^4(G_1(\mathbb{Q}) \times G_1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2) = H^4(G_1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2) \oplus H^4(G_1(\mathbb{Q}); \mathbb{Z}_2)$$

---

(1) Cfr. ad es. D. HUSEMOLLER [8], p. 266, per la coomologia di $G_n(\mathbb{C})$; il caso di $G_n(\mathbb{Q})$ è analogo.

e $H^4(G_1(\mathrm{Q}))$ è generata da $W_4(\eta_1(\mathrm{Q}))$ ovvero da $W_4(\eta_1^*(\mathrm{Q}))$ dovrà essere

$$W_4(\eta_1(\mathrm{Q})\,\widehat{\otimes}\,\eta_1^*(\mathrm{Q})) = h\big(W_4(\eta_1(\mathrm{Q}))\otimes 1\big) + k\big(1\otimes W_4(\eta_1^*(\mathrm{Q}))\big)$$

con h, k interi modulo 2. Se $E_1^{\mathrm{Q}} = f^*(\eta_1(\mathrm{Q}))$, $F_1^{\mathrm{Q}} = g^*(\eta_1^*(\mathrm{Q}))$ sono due qualunque fibrati quaternionali su X e se $E_1\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{Q}} F_1$ è il loro prodotto tensoriale esterno, indotto da $f\times g\colon X\times X \to G_1(\mathrm{Q})\times G_1(\mathrm{Q})$, si avrà, per la naturalità di W_4,

$$W_4(E_1\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{Q}} F_1) = h(W_4(E_1)\otimes 1) + k(1\otimes W_4(F_1))$$

Essendo inoltre chiaramente $E_1 \otimes_{\mathrm{Q}} F_1 = \Delta^*(E_1\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{Q}} F_1)$ ove $\Delta\colon X \to X\times X$ è l'applicazione diagonale risulta

$$W_4(E_1\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{Q}} F_1) = h(W_4(E_1)) + k(W_4(F_1))$$

Ora, se si sceglie F_1 banale avremo $E_1 \otimes_{\mathrm{Q}} F_1 \cong E_1$ e dunque

$$W_4(E_1) = W_4(E_1 \otimes_{\mathrm{Q}} F_1) = hW_4(E_1)\,,$$

da cui $h = 1$ essendo in generale $W_4(E_1) \neq 0$. Analogamente, scegliendo F_1 banale si trova $k = 1$ donde la (15.3).

Passiamo ora al caso $n > 1$. Basterà dimostrare le (15.2) nel caso in cui E_n^{Q} è somma diretta di n fibrati lineari quaternionali e fare poi uso dello « splitting principle » per fibrati quaternionali ([1]). Secondo tale principio per ogni $E_n^{\mathrm{Q}} \to X$ esiste una applicazione $f\colon X' \to X$ tale che $f^*(E_n) = \bigoplus_{j=1}^{n} E_1^{(j)}$ e inoltre il morfismo $f^*\colon H^*(X) \to$ $\to H^*(X')$ indotto in coomologia è un monomorfismo.

Sia dunque $E_n^{\mathrm{Q}} = \bigoplus_{j=1}^{n} E_1^{(j)}$: denotando con W la classe di Stiefel-Whitney totale risulterà

$$W(E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1) = W[(\textstyle\bigoplus_{1}^{n}{}_j\, E_1^{(j)}) \otimes_{\mathrm{Q}} F_1] = W[\textstyle\bigoplus_{1}^{n}{}_j (E_1^{(j)} \otimes_{\mathrm{Q}} F_1)] =$$

$$= \prod_{1}^{n}{}_j\,[1 + W_4(E_1^{(j)} \otimes F_1)] = \prod_{1}^{n}{}_j\,[(1 + W_4(F_1)) + W_4(E_1^{(j)})] = \sum_{0}^{n}{}_k\,\sigma_k (1 + W_4(F_1))^{n-k}$$

ove σ_k è la k-esima funzione simmetrica elementare ([2]) nelle $W_4(E_1^{(j)})$, uguale per la

([1]) Cfr. ad es. D. HUSEMOLLER [8], p. 235.

([2]) Cfr. D. HUSEMOLLER [8], p. 176.

formula di Whitney a $W_{4k}(\overset{n}{\underset{1}{\oplus}}{}_j E_1^{(j)})$. Dunque

$$W(E_n \otimes F_1) = \sum_0^n{}_k W_{4k}(E)_n \sum_0^{n-k}{}_s \binom{n-k}{s} W_4^s(F_1) =$$

$$= \sum_0^n{}_k \sum_0^{n-k}{}_s \binom{n-k}{s} W_{4k}(E_n)\, W_4^s(F_1) = \sum_0^n{}_i \sum_0^{n-j}{}_s \binom{n-j}{i-j} W_{4j}(E_n)\, W_4^{i-j}(F_1)$$

avendo posto j in luogo di k e $s = i - j$. La classe $W_{4i}(E_n \otimes_{\mathrm{Q}} F_1)$ è data a secondo membro dalla somma dei prodotti per i quali $j + s = i$ cioè si ha appunto la (15.2).

VIII. – La classe ε e le classi di Stiefel-Whitney dei fibrati quaternionali generalizzati di dimensione 1.

§ 16. – Considereremo nel presente paragrafo fibrati q.g., $\tilde{E}_1^{\mathrm{Q}}$, di dimensione reale 4. Essi, come fibrati orientabili hanno la classe W_1 nulla; inoltre mostriamo che

(16.1) *per* $\tilde{E}_1^{\mathrm{Q}} \to X$ *si ha sempre* $W_2(\tilde{E}_1) = \varepsilon(\tilde{E}_1)$.

Sia $\eta_4^+(\mathbb{R}) \to G_4^+(\mathbb{R})$ il classificante dei fibrati reali orientabili di dimensione 4 e quindi anche dei fibrati q.g. della stessa dimensione reale giacchè coincidono con i primi avendo gruppo strutturale isomorfo.

È noto (1) che $H^2(G_4^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ è generato da $W_2(\eta_4^+(\mathbb{R}))$: dunque poichè $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbb{R})) \in H^2(G_4^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ sarà o $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbb{R})) = 0$ o $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbb{R})) = W_2(\eta_4^+(\mathbb{R}))$. Ma nel primo caso per la naturalità della ε *tutti* i fibrati q.g. di dimensione reale 4 dovrebbero avere la ε nulla, ovverosia dovrebbero essere tutti dei prodotti tensori: ciò d'altronde non può essere perchè per un prodotto tensoriale, in base alla proposizione (15.1), si annullano la W_2 e la W_3 e corrispondentemente si avrebbe l'annullarsi di dette classi per tutti i fibrati reali orientabili di dimensione 4. Rimane allora vera la seconda ipotesi, $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbb{R})) = W_2(\eta_4^+(\mathbb{R}))$, e da questa la tesi per naturalità.

Dalla (16.1) può dedursi che

(16.2) *assegnato* $\tilde{E}_1^{\mathrm{Q}} \to X$, *fibrato q.g.* 1-*dimensionale*,

$$W_2(B_{E_1}) = W_2(\tilde{E}_1)\,, \qquad W_3(B_{E_1}) = W_3(\tilde{E}_1)$$

La prima uguaglianza risulta dalle (16.1) e (12.12) che applicate successivamente porgono

$$W_2(B_{E_1}) = \varepsilon(B_{E_1}) = \varepsilon(\tilde{E}_1) = W_2(\tilde{E}_1)\,.$$

(1) Cfr. ad es. A. BOREL [2], p. 183.

Per stabilire la seconda uguaglianza ricordiamo una nota proposizione ([1]) secondo la quale, indicato con β_2 l'omomorfismo di Bockstein relativo alla successione esatta $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, $\beta_2 \colon H^*(X; \mathbb{Z}_2) \to H^*(X, \mathbb{Z}_2)$, si ha, per ogni fibrato reale su X,

$$\beta_2(W_{2i}) = W_{2i+1} + W_1 \cup W_{2i}\,.$$

Nel nostro caso, per $i = 1$, la richiamata relazione dà rispettivamente

$$\beta_2(W_2(\tilde{E}_1)) = W_3(\tilde{E}_1)\,, \qquad \beta_2(W_2(B_{E_1})) = W_3(B_{E_1})$$

e dunque, poichè $W_2(\tilde{E}_1) = W_2(B_{E_1})$, si può concludere.

§ 17. – Completiamo questo paragrafo con una osservazione che, nell'ordine di idee in cui fin qui ci siamo posti, fornisce una interpretazione geometrica della riduzione mod. 2 della classe di Chern c_1 dei fibrati lineari complessi.

Sia, brevemente, B il fibrato di Bonan di un fibrato q.g. E a parte scalare complessa e per il quale dunque le funzioni di collegamento $q_{\alpha\beta}$ nelle (8.1) siano complesse. Introduciamo in B le coordinate complesse $\underset{(\alpha)}{v}'$, $\underset{(\alpha)}{v}''$ definite a partire dalle $\underset{(\alpha)}{v}$ ponendo $\underset{(\alpha)}{v} = \underset{(\alpha)}{v}' + j\underset{(\alpha)}{v}''$: sostituendo nella (8.1) si ha

$$\underset{(\beta)}{v}' + j\underset{(\beta)}{v}'' = \bar{q}_{\alpha\beta}(\underset{(\alpha)}{v}' + j\underset{(\alpha)}{v}'')\,q_{\alpha\beta} = \underset{(\alpha)}{v}' + \bar{q}_{\alpha\beta}\,j\underset{(\alpha)}{v}''\,q_{\alpha\beta} = \underset{(\alpha)}{v}' + jq^2_{\alpha\beta}\underset{(\alpha)}{v}''$$

osservato che, dall'essere le $q_{\alpha\beta}$ complesse, $\bar{q}_{\alpha\beta}j = jq_{\alpha\beta}$. Uguagliando i coefficienti complessi del primo e ultimo membro si traggono le

$$\underset{(\beta)}{v}' = \underset{(\alpha)}{v}'\,, \qquad \underset{(\beta)}{v}'' = q^2_{\alpha\beta}\underset{(\alpha)}{v}'' \tag{17.1}$$

donde risulta che $B = \mathbb{I}_{\mathbb{C}} \oplus E_1^{\mathbb{C}}$ ove $\mathbb{I}_{\mathbb{C}} = X \times \mathbb{C}$ è il fibrato banale su X, descritto dalle coordinate $\underset{(\alpha)}{v}'$, e $E_1^{\mathbb{C}}$ è un fibrato lineare complesso, descritto dalle coordinate $\underset{(\alpha)}{v}''$ ([2]). Si osservi ora che dalla indeterminatezza del segno delle $q_{\alpha\beta}$ si deduce che ogni fibrato lineare complesso $E_1^{\mathbb{C}}$ può pensarsi ottenuto come il fibrato di cui sopra. Si osservi poi che la possibilità di scegliere i segni per le $q_{\alpha\beta}$ in modo da risultare $q_{\alpha\beta}\,q_{\beta\gamma} = q_{\alpha\gamma}$ corrisponde alla possibilità della scelta di una radice di $q^2_{\alpha\beta}$, nel qual caso risulterà

$$E_1^{\mathbb{C}} = {}'E_1^{\mathbb{C}} \otimes {}'E_1^{\mathbb{C}} \tag{17.2}$$

con ${}'E_1^{\mathbb{C}}$ fibrato lineare complesso avente per funzioni di collegamento le determinate $q_{\alpha\beta}$. Poichè per quanto visto al n. 16 si ha

$$\varepsilon(B) = W_2(B) = W_2(E_1^{\mathbb{C}}) = c_1(E_1^{\mathbb{C}}) \qquad (\text{mod. } 2)$$

([1]) Cfr. E. H. SPANIER [13], p. 281.

([2]) Dalla dimostrata prop. 9.1) risulta già lo spezzamento di B.

possiamo concludere che *la riduzione modulo 2 della classe di Chern* c_1 *di un fibrato lineare complesso* $E_1^{\mathbb{C}}$ *è l'ostruzione affinchè* $E_1^{\mathbb{C}}$ *sia isomorfo ad un prodotto tensore su* $\mathbb{C}$ *di un fibrato complesso per se stesso, cioè della forma* (17.2).

IX. – « Splitting principle » per fibrati quaternionali generalizzati.

§ 18. – Allo scopo di stabilire uno « splitting principle » per fibrati q.g. analogo a quello valido per fibrati quaternionali cominciamo con l'introdurre la nozione di *fibrato proiettivo associato a un fibrato quaternionale generalizzato*, il quale coincida con l'omonimo fibrato nel caso di fibrati quaternionali non q.g. [1].

La possibilità di introdurre tale nozione si basa sull'osservazione che *a ogni spazio vettoriale* $V_{4n}^{\mathbb{R}}$ *con struttura q.g. può associarsi un ben determinato spazio proiettivo quaternionale* $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})$.

Sia infatti $\{\mathcal{Q}\}$ la famiglia di strutture quaternionali coerenti assegnate su $V_{4n}^{\mathbb{R}}$. Fissata $\mathcal{Q}\in\{\mathcal{Q}\}$ rimane individuato uno spazio proiettivo quaternionale $(n-1)$-dimensionale, $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})$, ottenuto come di consueto pensando $V_{4n}^{\mathbb{R}}$ come spazio vettoriale quaternionale con la struttura $\mathcal{Q}$ ed identificando vettori non nulli proporzionali: cioè gli elementi di $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})$ sono le faccette caratteristiche quaternionali. Ma tali faccette, per quanto osservato al n. 2, sono invarianti della struttura $\{\mathcal{Q}\}$ e dunque potremo scrivere anche $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})=\mathbb{P}_{\{\mathcal{Q}\}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})$ e lo spazio $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})$ da definirsi non è altro che lo spazio proiettivo quaternionale associato a $V_{4n}^{\mathbb{R}}$ in una qualunque struttura $\mathcal{Q}\in\{\mathcal{Q}\}$.

Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore non nullo di $V_{4n}^{\mathbb{R}}$ indicheremo con $[\boldsymbol{v}]$ l'elemento che ne risulta individuato in $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(V_{4n}^{\mathbb{R}})$.

Passando al caso dei fibrati, se $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}\xrightarrow{p}X$ è un fibrato q.g. la fibra $\tilde{E}_x$ su $x\in X$ è uno spazio vettoriale con struttura q.g. al quale rimane associato, come sopra si è osservato, uno spazio proiettivo quaternionale $(n-1)$-dimensionale $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(\tilde{E}_x)$. Diremo *fibrato proiettivo associato ad* $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$ il fibrato $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}\tilde{E}_n\xrightarrow{\pi_p}X$ con fibra su $x\in X$ lo spazio proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(E_x)$. Più precisamente, $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}\tilde{E}_n$ si ottiene come quoziente dallo spazio $\overset{(0)}{E}{}_n^{\mathbb{Q}}$ dei vettori non nulli di $E_n^{\mathbb{Q}}$ rispetto alla relazione che dichiara equivalenti due vettori non nulli, appartenenti alla stessa fibra e proporzionali per un fattore quaternionale (in una qualunque delle strutture ammissibili per la detta fibra).

Si osservi che *il fibrato* $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}\tilde{E}_n\xrightarrow{\pi_p}X$, *con fibra lo spazio proiettivo* $(n-1)$-*dimensionale* $\mathbb{P}_{n-1}^{\mathbb{Q}}$, *è localmente banale*. Di ciò è facile convincersi tenendo presente che su ogni aperto coordinato U_α di $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}$ il fibrato $E_n^{\mathbb{Q}}|_{U_\alpha}$ è un fibrato quaternionale sicchè sarà possibile considerare un isomorfismo di fibrati $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}\tilde{E}_n|_{U_\alpha}\cong\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(\tilde{E}_n|_{U_\alpha})$ e il secondo fibrato è localmente banale.

Indicheremo nel seguito il fibrato $\tilde{E}_n^{\mathbb{Q}}\xrightarrow{p}X$ brevemente con $\tilde{E}\xrightarrow{p}X$ e il relativo fibrato proiettivo associato con $P\tilde{E}\xrightarrow{\pi_p}X$.

---

[1] Vedi ad es. D. HUSEMOLLER [8], p. 231.

§ 19. – Le considerazioni fatte sopra, unitamente a quanto stabilito al n. 10, permettono di effettuare uno « splitting principle » per i fibrati q.g. in maniera del tutto analoga a quel che si fa per i fibrati quaternionali. Mostriamo intanto che

(19.1) *il fibrato q.g. indotto dalla applicazione $\pi_p\colon P\tilde{E} \to X$, cioè $\pi_p^*\tilde{E} \xrightarrow{\bar{p}} P\tilde{E}$, si spezza nella somma di Whitney di un fibrato q.g. $'\tilde{E}$ di dimensione reale $4(n-1)$ e di un fibrato q.g. $L\tilde{E}$ di dimensione reale 4, $\pi_p^*\tilde{E} = {}'\tilde{E} \oplus L\tilde{E}$. Il fibrato $\pi_L\colon L\tilde{E} \to P\tilde{E}$ sarà detto fibrato lineare associato ad $\tilde{E}$.*

Cominciamo con l'osservare che un punto di $P\tilde{E}$ è una coppia $(x, [\boldsymbol{v}_x])$ ove $x \in X$ e $[\boldsymbol{v}_x]$ è l'elemento di $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(\tilde{E}_x)$ individuato dal vettore non nullo $\boldsymbol{v}_x \in \tilde{E}_x$. La fibra di $\pi_p^*\tilde{E}$ su $(x, [\boldsymbol{v}_x])$ è proprio $\tilde{E}_x$: in tale fibra rimane allora individuata la totalità dei vettori $'\boldsymbol{v}_x \in \{\boldsymbol{v}_x \lambda\}_{\lambda \in \mathbb{Q}}$ la quale costituisce un sottospazio reale di $\tilde{E}_x$, di dimensione reale 4, che è una faccetta caratteristica quaternionale. Al variare del punto $(x, [\boldsymbol{v}_x])$ in $P\tilde{E}$ le suddette faccette caratteristiche varieranno descrivendo in $\pi_p^*\tilde{E}$ un sottofibrato caratteristico, $\pi_L\colon L\tilde{E} \to P\tilde{E}$ che diremo appunto *fibrato lineare associato ad $\tilde{E}$*, in analogia al corrispondente nella teoria dei fibrati quaternionali (1). La *locale banalità di $L\tilde{E}$* segue dalla locale banalità del fibrato lineare canonico associato ad un fibrato quaternionale ragionando similmente a quanto fatto per la locale banalità di $P\tilde{E}$.

Infine, assegnata una metrica hermitiana in $\pi_p^*\tilde{E}$, risulta individuato il sottofibrato caratteristico $'\tilde{E}$ ortogonale di $L\tilde{E}$ e $\pi_p^*\tilde{E} = {}'\tilde{E} \oplus L\tilde{E}$ (cfr. prop. (10.4) e (10.5)).

Considerato il fibrato $\pi_p^*\tilde{E} \to P\tilde{E}$ e identificata la fibra di $P\tilde{E}$ su x con lo spazio proiettivo quaternionale $\mathbb{P}_{n-1}^{\mathbb{Q}}$ il fibrato indotto dalla inclusione $i_x\colon \mathbb{P}_{n-1}^{\mathbb{Q}} \equiv (P\tilde{E})_x \hookrightarrow P\tilde{E}$ è il fibrato di Hopf $\eta_1(\mathbb{Q})$ su $\mathbb{P}_{n-1}^{\mathbb{Q}}$: ne risulta in particolare, essendo $i_x^*(W_4(\pi_p^*\tilde{E})) = W_4(i_x^*(\pi_p^*\tilde{E}))$ per la naturalità di W_4,

$$W_4(\eta_1(\mathbb{Q})) = i_x^*(W_4(\pi_p^*\tilde{E})) \tag{19.2}$$

Inoltre la coomologia di $\mathbb{P}_{n-1}^{\mathbb{Q}}$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ è uno $\mathbb{Z}_2$-modulo libero di base $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ con $x = W_4(\eta_1(\mathbb{Q}))$ (2). Dunque per il fibrato $P\tilde{E} \to X$ la coomologia della fibra è generata liberamente da classi di coomologia provenienti dallo spazio totale e siamo nelle ipotesi in cui ha validità il teorema di Leray-Hirsch (3). Esso assicura che si ha l'isomorfismo di $\mathbb{Z}_2$-moduli

$$H^*(P\tilde{E}) = H^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^*(\mathbb{P}_{n-1}^{\mathbb{Q}})$$

dal quale si deduce in particolare che

(19.3) *L'applicazione $\pi_p^*\colon H^*(X; \mathbb{Z}_2) \to H^*(P\tilde{E}; \mathbb{Z}_2)$ è un monomorfismo di anelli.*

---

(1) Cfr. D. HUSEMOLLER [8], p. 231.

(2) Cfr. ad es. D. HUSEMOLLER [8], p. 231, per la coomologia di $P_{n-1}^{\mathbf{C}}$; il caso di $P_{n-1}^{\mathbb{Q}}$ è simile.

(3) Cfr. D. HUSEMOLLER [8], p. 229 o anche A. DOLD [3], pp. 176-178.

§ 20. – Applicando successivamente, a partire da un fibrato $\tilde{E} \to X$, il processo di spezzamento di un fibrato q.g. in un fibrato lineare e in un fibrato $'\tilde{E} \to X$, come illustrato nella (19.1), e tenuto conto della (19.3), si perviene a dimostrare l'annunciato

(20.1) *«Splitting principle» per fibrati q.g.: se $\tilde{E} \to X$ è un fibrato q.g. esiste uno spazio X' e una applicazione continua $f\colon X' \to X$ tale che*

1) $f^*\tilde{E} = \overset{n}{\underset{1}{\oplus}}{}_j \tilde{E}^{(j)}$, *dove gli $\tilde{E}^{(j)}$ sono n fibrati lineari q.g.*

2) $f^*\colon H^*(X; \mathbb{Z}_2) \to H^*(X'; \mathbb{Z}_2)$ *è un monomorfismo di anelli.*

Il fibrato $f^*\tilde{E}$ così individuato si dirà uno «splitting» di $\tilde{E}$.

Nel prossimo paragrafo vedremo una applicazione di tale principio.

X. – Classi di Stiefel-Whitney dei fibrati quaternionali generalizzati.

§ 21. – Sia $\tilde{E} \to X$ un qualunque fibrato q.g. e $\overset{n}{\underset{1}{\oplus}}{}_j \tilde{E}^{(j)} = f^*\tilde{E}$ uno splitting di $\tilde{E}$ come in (20.1).

Fra i fibrati di Bonan dei fibrati in questione risulta, per quanto stabilito con le (10.5), (8.9),

(21.1) $$B_{E^{(j)}} = B_{\oplus E^{(j)}} = f^*B_E$$

Ricordando poi la (12.11) e la (12.12), per la ε di tali fibrati si ha

(21.2) $$\varepsilon(B_{\oplus E^{(j)}}) = f^*\big(\varepsilon(B_E)\big) = f^*\big(\varepsilon(\tilde{E})\big)$$

D'altra parte

$$f^*\big(W_2(\tilde{E})\big) = W_2(\oplus \tilde{E}^{(j)}) = \textstyle\sum_j W_2(\tilde{E}^{(j)})$$

e inoltre, richiamate la (16.1) e la (21.1),

$$W_2(\tilde{E}^{(j)}) = \varepsilon(\tilde{E}^{(j)}) = \varepsilon(B_{E^{(j)}}) = \varepsilon(B_{\oplus E^{(j)}})$$

Dunque

(21.3) $$f^*\big(W_2(\tilde{E})\big) = n\varepsilon(B_{\oplus E^{(j)}})$$

ovvero anche, guardando la (21.2),

$$f^*\big(W_2(\tilde{E})\big) = nf^*\big(\varepsilon(\tilde{E})\big)$$

Poichè f^* è un monomorfismo quest'ultima relazione è equivalente alla

$$W_2(\tilde{E}) = n\varepsilon(\tilde{E}) \tag{21.4}$$

da cui si ricava anche

$$W_2(\tilde{E}) = n\varepsilon(B_E) = nW_2(B_E)$$

Per quanto richiamato al n. 16 a proposito dell'omomorfismo di Bockstein β_2 e in particolare per la (16.2), se ne ricava poi

$$W_3(\tilde{E}) = \beta_2\big(W_2(\tilde{E})\big) = n\beta_2\big(W_2(B_E)\big) = nW_3(B_E)$$

Si è così stabilito, riepilogando, che

(21.5) *per ogni fibrato q.g. $\tilde{E} \to X$, di dimensione quaternionale n, sussistono le relazioni*

$$W_2(\tilde{E}) = n\varepsilon(\tilde{E}) \qquad \text{e} \qquad W_2(\tilde{E}) = nW_2(B_E)\,, \qquad W_3(\tilde{E}) = nW_3(B_E)$$

Si osservi che in conseguenza

(21.6) *le classi di Stiefel-Whitney $W_2(\tilde{E})$, $W_3(\tilde{E})$ di ogni fibrato q.g. $\tilde{E}$ di dimensione n pari sono nulle.*

In realtà le classi di Stiefel-Whitney W_i $(i > 1)$ di un fibrato q.g. non sono indipendenti come vedremo meglio al numero seguente.

§ 22. - Sia al solito $\overset{n}{\underset{1}{\oplus}}{}_j \tilde{E}^{(j)} \to X'$ uno splitting per il fibrato q.g. $\tilde{E} \to X$

(22.1) *La classe di Stiefel-Whitney totale di $\oplus \tilde{E}^{(j)}$ si esprime mediante la formula*

$$W(\oplus \tilde{E}^{(j)}) = \sum_{0}^{n}{}_i \sum_{h+k \leqslant n-i} \overset{(j)}{A}_{hk}\,\sigma_i(\oplus \tilde{E}^{(j)})\, W_2^h(B_{\oplus E^{(j)}})\, W_3^k(B_{\oplus E^{(j)}})$$

ove con $\sigma_i(\oplus \tilde{E}^{(j)})$ si è denotato l'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle $W_4(\tilde{E}^{(j)})$ e i coefficienti $\overset{(i)}{A}_{hk}$ valgono

$$\overset{(i)}{A}_{hk} = \binom{n-i}{h+k}\binom{h+k}{k} \qquad (\text{mod. } 2)$$

Infatti da quanto precede risulta che le classi $W_2(\tilde{E}^{(j)})$, $W_3(\tilde{E}^{(j)})$ dei vari $\tilde{E}^{(j)}$ sono uguali a $W_2(B_{\oplus E^{(j)}})$, $W_3(B_{\oplus E^{(j)}})$ rispettivamente; posto poi

$$t(B_{\oplus E^{(j)}}) = 1 + W_2(B_{\oplus E^{(j)}}) + W_3(B_{\oplus E^{(j)}})$$

si avrà

$$W(\oplus \tilde{E}^{(j)}) = \prod_{1}^{n}{}_j (1 + W_2(\tilde{E}^{(j)}) + W_3(\tilde{E}^{(j)}) + W_4(\tilde{E}^{(j)})) =$$

$$= \prod_{1}^{n}{}_j \left(t(B_{\oplus E^{(j)}}) + W_4(\tilde{E}^{(j)})\right) = \sum_{0}^{n}{}_i \sigma_i(\oplus \tilde{E}^{(j)})\, t^{n-i}(B_{\oplus E^{(j)}}) =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{h+k\leqslant n-i} \overset{(i)}{A}_{hk} \sigma_i(\oplus \tilde{E}^{(j)})\, W_2^h(B_{\oplus E^{(j)}})\, W_3^k(B_{\oplus E^{(j)}})$$

con

$$\overset{(i)}{A}_{hk} = \frac{(n-i)!}{(n-i-h-k)!\,h!\,k!} = \binom{n-i}{h+k}\binom{h+k}{k}$$

che è la formula richiesta.

Mediante la (22.1) può dimostrarsi che

(22.2) *le classi di Stiefel-Whitney* $W_{4k+r}(\tilde{E})$ $(r = 1, 2, 3)$ *di un fibrato q.g.* $\tilde{E} \xrightarrow{p} X$ *possono esprimersi come polinomi nelle* $W_2(B_E)$, $W_3(B_E)$, $W_{4l}(\tilde{E})$ $(l \leqslant k)$ *e nel caso di dimensione n dispari, nelle* $W_2(\tilde{E})$, $W_3(\tilde{E})$, $W_{4l}(\tilde{E})$.

A tal scopo si osservi che dalle (22.1) risulta

$$W_{4l}(\oplus \mathrm{E}^{(j)}) = \sum_{4i+2h+3k=4l} \overset{(i)}{A}_{hk} \sigma_i(\oplus \tilde{E}^{(j)})\, W_2^h(B_{\oplus E^{(j)}})\, W_3^k(B_{\oplus E^{(j)}}) \tag{22.3}$$

che è del tipo

$$W_{4l}(\oplus \tilde{E}^{(j)}) = \sigma_l(\oplus \tilde{E}^{(j)}) + F_l(\sigma_i, W_2, W_3)$$

con F_l polinomio nelle W_2, W_3 e nelle σ_i con $i < l$.

Ciò permette di esplicitare il sistema di relazioni (22.3) rispetto alle σ_i iniziando tale esplicitazione a partire dalla (22.3) per $l = 1$, la quale dà

$$\sigma_1(\oplus \tilde{E}^{(j)}) = W_4(\oplus \tilde{E}^{(j)}) - \binom{n}{2} W_2^2(\oplus \tilde{E}^{(j)})$$

e procedendo poi per induzione.

Sostituite le espressioni delle σ_i così ottenute nella (22.1) se ne deduce che la proposizione è vera per $\tilde{E} = \oplus \tilde{E}^{(j)}$. La conclusione per un fibrato $\tilde{E}$ qualunque segue poi come immediata applicazione dello « splitting principle ».

Osserviamo infine che le classi di Stiefel-Whitney W_{4l} dei fibrati q.g. sono in generale indipendenti poichè così è per le medesime classi dei fibrati quaternionali, che sono particolari fibrati q.g.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BONAN, *Sur les G-structures du type quaternionien*, Cahiers de Topologie et Géometrie différentielle, **9**, fasc. 4 (1967).

[2] A. BOREL, *La cohomologie* mod 2 *de certains espaces homogènes*, Commentarii Mathematici Helvetici, **27** (1953).

[3] A. DOLD, *Metodi moderni di topologia algebrica*, Quaderni dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R., Roma, 1973.

[4] P. DU VAL, *Homographies quaternions and rotations*, Oxford University Press, 1964.

[5] A. GRAY, *A note on manifolds whose holonomy groups is a subgroup of* $Sp(n)\cdot Sp(1)$, Michigan Math. J., **16** (1969).

[6] A. GRAY, *Errata*, Michigan Math. J., **17** (1970).

[7] TH. HANGAN, *Tensor product tangent bundles*, Archiv. der Mathematick, **19**, fasc. 4 (1968), pp. 436-448.

[8] D. HUSEMOLLER, *Fibre bundles*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[9] E. MARTINELLI, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, Atti Accad. Naz. Lincei, **26** (1959), pp. 353-362.

[10] E. MARTINELLI, *Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi quaternionale generalizzata*, Atti Accad. Naz. Lincei, **39** (1965), pp. 400-407.

[11] J. T. SCHWARTZ, *Differential Geometry and Topology*, Gordon and Breach, New York, 1968.

[12] R. H. SZCZARBA - W. C. HSIANG, *On the tangent bundle of a Grassmann Manifold*, Amer. J. Math., **86** (1964), pp. 698-704.

[13] E. M. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[14] N. STEENROD, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[15] A. WEIL, *Sur les théorèmes de de Rham*, Commentarii Mathematici Helvetici, **26** (1952), pp. 313-339.

[16] J. A. WOLF, *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, Journal of Math. and Mech., **14** (1965), p. 166.