П. М. Лавров, П. Ю. Мошин, Суперполевое квантование в $Sp(2)$-ковариантном формализме, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 3, 403–414

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf545

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 129, № 3
декабрь, 2001

 П. М. Лавров*, П. Ю. Мошин*

СУПЕРПОЛЕВОЕ КВАНТОВАНИЕ В $Sp(2)$-КОВАРИАНТНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Обобщены правила суперполевого $Sp(2)$-ковариантного квантования произвольных калибровочных теорий на случай введения калибровки с помощью производящих уравнений для калибровочного функционала. Рассмотрены возможные реализации расширенных антискобок и показано, что лишь одна из реализаций совместима с преобразованиями расширенной БРСТ-симметрии в форме супертрансляций вдоль грассмановых координат суперпространства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Реализация принципа расширенной БРСТ-симметрии, объединяющей преобразования БРСТ- и анти-БРСТ-симметрий (см. соответственно [1] и [2]), естественным образом приводит к объединению переменных, параметризующих калибровку в функциональном интеграле, и переменных, входящих в квантовое действие, определяемое соответствующими производящими уравнениями. В основном это проявляется в расширении конфигурационного пространства квантового действия за счет добавления переменных вспомогательного (калибровочного) сектора (см., например, [3], [4]). В недавних работах [5], [6] концепция производящих уравнений обобщается на случай введения калибровки.

В рамках $Sp(2)$-ковариантного подхода [3] реализуется расширенная БРСТ-симметрия для калибровочных теорий общего вида. При этом переменные ϕ^A полного конфигурационного пространства [7] объединяются в неприводимые представления группы $Sp(2)$. Эти представления образуют полностью симметричные $Sp(2)$-тензоры и входят в квантовую теорию равноправно как в терминах квантового действия, так и в терминах введения калибровки.

Суперполевая форма [4] правил $Sp(2)$-ковариантного квантования [3] позволяет объединить все переменные подхода [3], а именно: поля и антиполя $(\phi^A, \phi^*_{Aa}, \bar{\phi}_A)$, входящие в квантовое действие, лагранжевы множители (π^{Aa}, λ^A), служащие для параметризации калибровки, и, наконец, источники J_A для полей ϕ^A – в суперполя $\Phi^A(\theta)$ и суперисточники $\bar{\Phi}_A(\theta)$, определенные на суперпространстве с двумя антикоммутирующими коор-

*Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия.
E-mail: lavrov@tspu.edu.ru

динатами θ^a. Квантовое действие теории [4] определяется как функционал суперполей и суперисточников, $S = S(\Phi, \bar{\Phi})$, что позволяет реализовать преобразования расширенной БРСТ-симметрии в форме супертрансляций вдоль грассмановых координат.

В рамках триплектического (полностью антиканонического) формализма в работе [5] предложена модификация $Sp(2)$-ковариантного подхода [3], основанная на другом расширении конфигурационного пространства квантовой теории. Именно, лагранжевы множители π^{Aa} рассматриваются как переменные, антиканонически сопряженные антиполям $\bar{\phi}_A$ при соответствующем переопределении (см. [5]) расширенных антискобок [3], возникающих в производящих уравнениях. Другая особенность триплектического формализма [5] состоит в том, что слагаемое фиксации калибровки X в функциональном интеграле (калибровочный бозон) определяется системой производящих уравнений, аналогичных уравнениям для квантового действия S.

В рамках модифицированного триплектического формализма [6] предлагается видоизменить системы производящих уравнений [5] для квантового действия S и калибровочного бозона X, а также переопределить вакуумный функционал, с тем чтобы обеспечить граничное условие для квантового действия, гарантирующее, что квантовое действие S сводится к классическому действию S_0 при обращении в ноль антиполей и квантовых поправок,

$$S|_{\phi^*=\bar{\phi}=\hbar=0} = S_0,$$

откуда следует, что классическое действие теории удовлетворяет производящим уравнениям для квантового действия

$$\frac{1}{2}(S,S)^a + V^a S = i\hbar\Delta^a S. \tag{1}$$

При этом система производящих уравнений для действия фиксации калибровки, калибровочного бозона X, имеет вид

$$\frac{1}{2}(X,X)^a - U^a X = i\hbar\Delta^a X. \tag{2}$$

Системы производящих уравнений (1), (2) выражаются в терминах расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ и дублетов фермионных операторов Δ^a, V^a, U^a. Расширенные антискобки $(\cdot,\cdot)^a$ и дублет операторов Δ^a совпадают с соответствующими объектами как исходного триплектического [5], так и суперполевого [4] метода, а их алгебраические свойства идентичны свойствам расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ и операторов Δ^a, вводимых в $Sp(2)$-ковариантном формализме [3].

Как отмечено в [6], операторы V^a, U^a, возникающие в производящих уравнениях (1), (2) модифицированного триплектического формализма, оказываются тесно связанными с операторами, введенными ранее в рамках суперполевого подхода [4] и имеющими геометрический смысл генераторов супертрансляций вдоль грассмановых координат суперпространства.

Вакуумный функционал Z в рамках модифицированного триплектического формализма [6] имеет вид

$$Z = \int d\phi\, d\phi^*\, d\pi\, d\bar{\phi}\, d\lambda\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(S + X + \phi^*_{Aa}\pi^{Aa}\right)\right\}. \tag{3}$$

Подынтегральное выражение в (3) инвариантно относительно преобразований

$$\delta\Gamma = \mu_a(V^a + U^a)\Gamma + (\Gamma, X - S)^a\mu_a, \tag{4}$$

где μ_a – дублет постоянных антикоммутирующих параметров, а Γ обозначает набор переменных $(\phi^A, \phi^*_{Aa}, \pi^{Aa}, \bar{\phi}_A)$, причем $S = S(\Gamma)$, $X = X(\Gamma, \lambda)$. Преобразования (4) играют роль преобразований расширенной БРСТ-симметрии и позволяют установить независимость вакуумного функционала от выбора решений производящих уравнений (2) для калибровочного бозона X, что в соответствии с теоремой эквивалентности [8], [9] означает калибровочную независимость S-матрицы.

В настоящей работе рассматриваются возможности суперполевой реализации расширенной БРСТ-симметрии для калибровочных теорий общего вида при введении калибровки с помощью производящих уравнений для калибровочного функционала.

Отметим, что суперполевой формализм, основанный на расширенной БРСТ-симметрии, допускает различные возможности построения объектов с алгебраическими свойствами расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ и дублета операторов Δ^a. Так, в недавней работе [10] была предложена суперполевая форма правил $osp(1,2)$-ковариантного квантования [11] и, в частности, найдена суперполевая реализация исходных расширенных антискобок и операторов Δ^a, введенных в рамках $Sp(2)$-ковариантного подхода [3].

В данной работе предлагается обобщение правил суперполевого $Sp(2)$-ковариантного квантования [4], построенное по аналогии с модифицированным триплектическим формализмом [6] и учитывающее возможный произвол в конкретной реализации основных объектов метода. Так, мы постулируем производящие уравнения для суперполевого квантового действия $S(\Phi, \bar{\Phi})$ и калибровочного функционала $X(\Phi, \bar{\Phi})$ в виде, аналогичном (1), (2), т.е. выраженном в терминах расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ и операторов Δ^a, U^a, V^a. В то время как явный вид операторов U^a и V^a задается их интерпретацией как генераторов супертрансляций, остается произвол в построении расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ и операторов Δ^a с данными алгебраическими свойствами [4].

В этой связи нами рассмотрены допустимые суперполевые реализации этих объектов и показано, что они фактически сводятся к двум возможностям, причем компонентный вид этих реализаций в одном случае совпадает с расширенными антискобками и операторами Δ^a исходного $Sp(2)$-ковариантного формализма [3], а в другом случае – с их аналогами в рамках триплектического подхода [5], [6]. Определяя вакуумный функционал как непосредственное (в смысле (3)) обобщение вакуумного функционала [4], мы показываем, что только одна из двух возможностей реализации объектов $(\cdot,\cdot)^a$ и Δ^a, а именно применяемая в рамках триплектического подхода [5], [6], совместима с требованием расширенной БРСТ-симметрии. БРСТ-симметрия рассматривается в данном случае как обобщение преобразований (4) в виде преобразований суперполей $\Phi^A(\theta)$ и суперисточников $\bar{\Phi}_A(\theta)$, связанных с супертрансляциями и антиканоническими преобразованиями, генерируемыми расширенными антискобками $(\cdot,\cdot)^a$.

Мы показываем, что возникающие правила квантования, с одной стороны, представляют собой суперполевую форму модифицированного триплектического подхода [6], а с другой стороны, содержат суперполевой $Sp(2)$-ковариантный формализм [4] как частный случай выбора решений для калибровочного функционала X.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 обобщаются правила квантования [4], вводятся основные объекты U^a, V^a, Δ^a, $(\cdot,\cdot)^a$ с алгебраическими свойствами [4] и дается их явная реализация. В разделе 3 определяется выбор Δ^a и $(\cdot,\cdot)^a$, совместимый с постулированной формой расширенной БРСТ-симметрии. В разделе 4 обсуждается связь развиваемого суперполевого подхода с методами [4], [6].

В работе используются “конденсированные” обозначения [12] и соглашения, принятые в [4], [6]. В частности, грассмановы координаты θ^a образуют $Sp(2)$-дублет. Поднятие и опускание $Sp(2)$-индексов производится по правилу $\theta^a = \varepsilon^{ab}\theta_b$, $\theta_a = \varepsilon_{ab}\theta^b$ с помощью постоянного антисимметричного тензора ε^{ab}, $\varepsilon^{12} = 1$. Для любой функции $f(\theta)$ справедливо компонентное представление

$$f(\theta) = f_0 + \theta^a f_a + \theta^2 f_3, \qquad \theta^2 \equiv \frac{1}{2}\theta_a\theta^a,$$

и интегральное представление

$$f(\theta) = \int d^2\theta' \, \delta(\theta' - \theta) f(\theta'), \qquad \delta(\theta' - \theta) = (\theta' - \theta)^2,$$

где интегрирование по θ^a осуществляется по правилу

$$\int d^2\theta = 0, \qquad \int d^2\theta \, \theta^a = 0, \qquad \int d^2\theta \, \theta^a\theta^b = \varepsilon^{ab}.$$

При этом для любой функции $f(\theta)$ имеет место равенство

$$\int d^2\theta \, \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta^a} = 0,$$

откуда следует правило интегрирования по частям

$$\int d^2\theta \, \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta^a} g(\theta) = -\int d^2\theta \, (-1)^{\varepsilon(f)} f(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta^a},$$

где производные по θ^a понимаются как левые.

2. ОБОБЩЕННЫЙ $Sp(2)$-КОВАРИАНТНЫЙ СУПЕРПОЛЕВОЙ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим обобщение $Sp(2)$-ковариантного суперполевого формализма [4], построенное как аналог модифицированного триплектического подхода [6]. С этой целью введем суперпространство (x^μ, θ^a), где x^μ – координаты пространства-времени, а θ^a – дублет антикоммутирующих координат. Рассмотрим набор суперполей $\Phi^A(\theta)$, $\varepsilon(\Phi^A) = \varepsilon_A$, с граничным условием

$$\Phi^A(\theta)\big|_{\theta=0} = \phi^A$$

и набор суперисточников $\bar{\Phi}_A(\theta)$ той же грассмановой четности, $\varepsilon(\bar{\Phi}_A) = \varepsilon_A$.

Определим вакуумный функционал Z в виде следующего функционального интеграла:

$$Z = \int d\Phi\, d\bar{\Phi}\, \rho(\bar{\Phi}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\big(S(\Phi,\bar{\Phi}) + X(\Phi,\bar{\Phi}) + \bar{\Phi}\Phi\big)\right\}, \tag{5}$$

где $S = S(\Phi,\bar{\Phi})$ – квантовое действие, удовлетворяющее производящим уравнениям

$$\bar{\Delta}^a e^{\frac{i}{\hbar}S} = 0, \tag{6}$$

а $X = X(\Phi,\bar{\Phi})$ – бозонный калибровочный функционал, удовлетворяющий уравнениям

$$\tilde{\Delta}^a e^{\frac{i}{\hbar}X} = 0. \tag{7}$$

В (5), кроме того, используется обозначение для функционала $\rho(\bar{\Phi})$, определяющего вес интегрирования по суперисточникам $\bar{\Phi}_A(\theta)$ и имеющего вид функциональной δ-функции:

$$\rho(\bar{\Phi}) = \delta\bigg(\int d^2\theta\, \bar{\Phi}(\theta)\bigg), \tag{8}$$

а также вводится функционал

$$\bar{\Phi}\Phi \equiv \int d^2\theta\, \bar{\Phi}_A(\theta)\, \Phi^A(\theta). \tag{9}$$

В (6), (7) использованы обозначения $\bar{\Delta}^a$, $\tilde{\Delta}^a$ для дублетов фермионных операторов:

$$\bar{\Delta}^a = \Delta^a + \frac{i}{\hbar}V^a, \qquad \tilde{\Delta}^a = \Delta^a - \frac{i}{\hbar}U^a, \tag{10}$$

где U^a, V^a – дифференциальные операторы первого порядка, обладающие свойствами нильпотентности и антикоммутативности:

$$U^{\{a}U^{b\}} = 0, \qquad V^{\{a}V^{b\}} = 0, \qquad V^aU^b + U^bV^a = 0, \tag{11}$$

а Δ^a – дублет дифференциальных операторов второго порядка, подчиненный соотношениям

$$\begin{gathered} \Delta^{\{a}\Delta^{b\}} = 0, \\ \Delta^{\{a}V^{b\}} + V^{\{a}\Delta^{b\}} = 0, \\ \Delta^{\{a}U^{b\}} + U^{\{a}\Delta^{b\}} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

В (11), (12) введена симметризация по $Sp(2)$-индексам: $A^{\{a}B^{b\}} = A^aB^b + A^bB^a$.

Отметим, что соотношения (11), (12) для произвольных линейно-независимых фермионных дублетов U^a, V^a, Δ^a определяют набор[1)] нильпотентных супералгебр Ли $\mathcal{G}$ размерности $6 \leqslant \dim\mathcal{G} \leqslant 8$.

[1)] Данный набор состоит из одной шестимерной, трех (изоморфных) семимерных и одной восьмимерной супералгебр Ли.

С учетом обозначений (10) производящие уравнения (6), (7) представимы в эквивалентной форме:

$$\frac{1}{2}(S,S)^a + V^a S = i\hbar\Delta^a S, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}(X,X)^a - U^a X = i\hbar\Delta^a X, \tag{14}$$

где $(\cdot,\cdot)^a$ обозначает расширенные антискобки, определяемые действием дублета операторов Δ^a на произведение любых двух функционалов F, G:

$$\Delta^a(F\cdot G) = (\Delta^a F)\cdot G + F\cdot(\Delta^a G)(-1)^{\varepsilon(F)} + (F,G)^a(-1)^{\varepsilon(F)}. \tag{15}$$

Расширенные антискобки обладают следующими свойствами:

$$\varepsilon((F,G)^a) = \varepsilon(F) + \varepsilon(G) + 1,$$
$$(F,G)^a = -(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)}(G,F)^a,$$
$$D^{\{a}(F,G)^{b\}} = (D^{\{a}F,G)^{b\}} - (F,D^{\{a}G)^{b\}}(-1)^{\varepsilon(F)}, \tag{16}$$
$$(F,GH)^a = (F,G)^a H + (F,H)^a G(-1)^{\varepsilon(G)\varepsilon(H)}, \tag{17}$$
$$((F,G)^{\{a},H)^{b\}}(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(H)+1)} + \text{цикл. перестановка } (F,G,H) \equiv 0, \tag{18}$$

где $D^a = (\Delta^a, U^a, V^a)$.

Отметим, что свойство (16) вытекает непосредственно из определения (15) и алгебраических свойств (12), в то время как (17) следует из требования, что операторы Δ^a в (15) являются дифференциальными операторами второго порядка. А обобщенное тождество Якоби (18) вытекает из (12), (15)–(17).

В силу соотношений (11), (12), (16) операторы $\bar{\Delta}^a$, $\tilde{\Delta}^a$, определенные в (10), обладают свойствами

$$\bar{\Delta}^{\{a}\bar{\Delta}^{b\}} = 0, \qquad \tilde{\Delta}^{\{a}\tilde{\Delta}^{b\}} = 0, \qquad \bar{\Delta}^{\{a}\tilde{\Delta}^{b\}} + \tilde{\Delta}^{\{a}\bar{\Delta}^{b\}} = 0,$$

а также

$$\bar{\Delta}^{\{a}(F,G)^{b\}} = (\bar{\Delta}^{\{a}F,G)^{b\}} - (F,\bar{\Delta}^{\{a}G)^{b\}}(-1)^{\varepsilon(F)},$$
$$\tilde{\Delta}^{\{a}(F,G)^{b\}} = (\tilde{\Delta}^{\{a}F,G)^{b\}} - (F,\bar{\Delta}^{\{a}G)^{b\}}(-1)^{\varepsilon(F)}.$$

Для явной реализации производящих уравнений (6), (7), или эквивалентно (13), (14), отождествим операторы U^a, V^a с генераторами преобразования суперполей и суперисточников, связанных с супертрансляциями $\theta^a \to \theta^a + \mu^a$ вдоль антикоммутирующих координат:

$$\delta\Phi^A(\theta) = \mu_a\frac{\partial\Phi^A(\theta)}{\partial\theta_a} = \mu_a U^a\Phi^A(\theta),$$
$$\delta\bar{\Phi}_A(\theta) = \mu_a\frac{\partial\bar{\Phi}_A(\theta)}{\partial\theta_a} = \mu_a V^a\bar{\Phi}_A(\theta).$$

Генераторы U^a, V^a являются дифференциальными операторами первого порядка, имеющими вид θ-локальных функционалов

$$U^a = \int d^2\theta \, \frac{\partial \Phi^A(\theta)}{\partial \theta_a} \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)}, \qquad V^a = \int d^2\theta \, \frac{\partial \bar{\Phi}_A(\theta)}{\partial \theta_a} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}, \tag{19}$$

где

$$\frac{\delta_l \Phi^A(\theta)}{\delta \Phi^B(\theta')} = \delta(\theta' - \theta)\delta^A_B = \frac{\delta \Phi^A(\theta)}{\delta \Phi^B(\theta')}, \qquad \frac{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}{\delta \bar{\Phi}_B(\theta')} = \delta(\theta' - \theta)\delta^B_A.$$

Из явного вида (19) следуют требуемые алгебраические свойства (11).

Задание операторов U^a, V^a не позволяет однозначно определить явный вид $Sp(2)$-дублета операторов Δ^a и расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$, возникающих в производящих уравнениях (13), (14).

Рассмотрим множество фермионных дифференциальных операторов второго порядка (на пространстве суперполей и суперисточников) таких, что зависимость от компонент переменных $\Phi^A(\theta)$ и $\bar{\Phi}_A(\theta)$ входит только через производные

$$\frac{\delta}{\delta \Phi^A(\theta)}, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}. \tag{20}$$

В выделенном множестве содержится всего четыре линейно-независимых $Sp(2)$-дублета, имеющих вид θ-локальных операторных функционалов. Возможные подынтегральные выражения строятся из функциональных производных (20) и различных комбинаций θ^a и $\partial/\partial\theta^a$. Отметим, что анализ таких комбинаций упрощается благодаря интегрированию по частям и использованию антикоммутационного соотношения $\{\theta^a, \partial/\partial\theta^b\} = \delta^a_b$. В рассматриваемом множестве операторов содержится только два линейно-независимых $Sp(2)$-дублета, имеющих вид θ-локальных функционалов и обладающих алгебраическими свойствами (12) операторов Δ^a. В силу дополнительного свойства взаимной антикоммутативности, эти операторы образуют двумерное линейное пространство операторов, обладающих свойствами Δ^a. Базисные элементы Δ^a_1, Δ^a_2 этого пространства могут быть выбраны в виде

$$\Delta^a_1 = -\int d^2\theta \, \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_a} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}, \tag{21}$$

$$\Delta^a_2 = \int d^2\theta \, \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\theta^a \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)} \right), \tag{22}$$

где

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \frac{\partial}{\partial \theta^b} \frac{\partial}{\partial \theta^a}.$$

Операторы (21) и (22) генерируют соответствующие расширенные антискобки

$$(F,G)^a_1 = \int d^2\theta \left\{ \frac{\delta F}{\delta\Phi^A(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta_a} \frac{\delta G}{\delta\bar{\Phi}_A(\theta)} (-1)^{\varepsilon_A+1} - (F\leftrightarrow G)(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)} \right\} \quad (23)$$

и

$$(F,G)^a_2 = \int d^2\theta \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \frac{\delta F}{\delta\Phi^A(\theta)} \right) \theta^a \frac{\delta G}{\delta\bar{\Phi}_A(\theta)} (-1)^{\varepsilon_A} - \right.$$
$$\left. - (F\leftrightarrow G)(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)} \right\}. \quad (24)$$

Выбор операторов Δ^a и антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ в виде (21), (23) совпадает с представлением, использованным в [4], а их выбор в виде (22), (24) был сделан в работе [10].

Отметим, что представлениям (21), (22) соответствуют две разные, но изоморфные супералгебры Ли, определяемые всем набором соотношений (11), (12) для операторов U^a, V^a, Δ^a. Действительно, в каждом из случаев (21), (22) выбора дублета операторов Δ^a возникает супералгебра с базисными элементами U^a, V^a, Δ^a, B, где B – бозонный базисный элемент

$$B = \int d^2\theta \, \frac{\delta_l}{\delta\Phi(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \frac{\delta}{\delta\bar{\Phi}(\theta)} (-1)^{\varepsilon_A}.$$

При этом супералгебра, соответствующая случаю (21), определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &\{U^a,U^b\} = \{V^a,V^b\} = \{\Delta^a,\Delta^b\} = \{U^a,V^b\} = 0,\\ &[U^a,B] = [V^a,B] = [\Delta^a,B] = [B,B] = 0,\\ &\{U^a,\Delta^b\} = -\{V^a,\Delta^b\} = \varepsilon^{ab}B, \end{aligned} \quad (25)$$

а в случае (22) соотношения для супералгебры имеют вид

$$\begin{aligned} &\{U^a,U^b\} = \{V^a,V^b\} = \{\Delta^a,\Delta^b\} = \{U^a,V^b\} = \{U^a,\Delta^b\} = 0,\\ &[U^a,B] = [V^a,B] = [\Delta^a,B] = [B,B] = 0,\\ &\{V^a,\Delta^b\} = -\varepsilon^{ab}B. \end{aligned} \quad (26)$$

Для установления изоморфизма супералгебры, заданной соотношениями для базисных элементов (25), супералгебре, определяемой с помощью (26), достаточно перейти к базису U'^a, V'^a, Δ'^a, B', где $U'^a = U^a + V^a$, $V'^a = V^a$, $\Delta'^a = \Delta^a$, $B' = B$.

3. РАСШИРЕННАЯ БРСТ-СИММЕТРИЯ

Определим преобразования расширенной БРСТ-симметрии как следующие преобразования глобальной сурперсимметрии:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^A(\theta) &= \mu_a U^a \Phi^A(\theta) + (\Phi^A(\theta), X - S)^a \mu_a,\\ \delta\bar{\Phi}_A(\theta) &= \mu_a V^a \bar{\Phi}_A(\theta) + (\bar{\Phi}_A(\theta), X - S)^a \mu_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразования (27) являются непосредственным обобщением преобразований (4), введенных в рамках модифицированного триплектического подхода [6].

Отметим, что до введения преобразований (27) явная реализация расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$ в виде (23) не дает очевидного преимущества перед другим выбором (24). Покажем, однако, что лишь одна из двух возможностей, а именно (23), действительно удовлетворяет сформулированному требованию расширенной БРСТ-симметрии (27).

Рассмотрим вариацию подынтегрального выражения в (5) относительно преобразований (27). Для рассмотрения вариации экспоненты в (5) отметим, что вариация произвольного функционала F при преобразованиях

$$\delta_{(1)}\Phi^A(\theta) = \mu_a U^a \Phi^A(\theta), \qquad \delta_{(1)}\bar{\Phi}_A(\theta) = \mu_a V^a \bar{\Phi}_A(\theta),$$

связанных с супертрансляциями, имеет вид

$$\delta_{(1)}F = \mu_a (U^a + V^a) F.$$

В частности, для функционала $\bar{\Phi}\Phi$ (9) имеет место равенство

$$\delta_{(1)}(\bar{\Phi}\Phi) = 0.$$

С другой стороны, в обоих случаях (23), (24) явной реализации расширенных антискобок антиканонические преобразования

$$\delta_{(2)}\Phi^A(\theta) = (\Phi^A(\theta), Y)^a \mu_a, \qquad \delta_{(2)}\bar{\Phi}_A(\theta) = (\bar{\Phi}_A(\theta), Y)^a \mu_a, \qquad \varepsilon(Y) = 0$$

генерируют соответствующие преобразования произвольного функционала F:

$$\delta_{(2)}F = (F, Y)^a \mu_a.$$

В результате получим следующую вариацию показателя экспоненты из (5) относительно преобразований (27) с $\delta = \delta_{(1)} + \delta_{(2)}$:

$$\delta(S + X + \bar{\Phi}\Phi) = \mu_a\big((S,S)^a - (X,X)^a + (U^a + V^a)(S + X)\big) + \mu_a(\bar{\Phi}\Phi, S - X)^a. \quad (28)$$

Для рассмотрения вариации меры интегрирования в (5) заметим, что в обоих случаях (23), (24) реализации антискобок весовой функционал $\rho(\bar{\Phi})$ инвариантен относительно преобразований (27), $\delta\rho(\bar{\Phi}) = 0$, а соответствующий якобиан J принимает значение

$$J = e^{2\mu_a \Delta^a S - 2\mu_a \Delta^a X}. \quad (29)$$

Обозначим через I подынтегральное выражение в (5). Тогда в силу (13), (14), (28), (29) вариация δI относительно преобразований (27) имеет вид

$$\delta I = i\hbar^{-1}\mu_a I\big((U^a - V^a)(S - X) + (\bar{\Phi}\Phi, S - X)^a\big), \quad (30)$$

откуда следует условие инвариантности подынтегрального выражения:

$$(U^a - V^a)(S - X) + (\bar{\Phi}\Phi, S - X)^a = 0. \tag{31}$$

Выполнение условия (31), очевидно, зависит от конкретной реализации расширенных антискобок. В случае антискобок (23) данное условие удовлетворяется в силу тождества

$$(\bar{\Phi}\Phi, F)^a = (V^a - U^a)F,$$

которое согласно (30) означает инвариантность подынтегрального выражения в (5) относительно преобразований (27).

С другой стороны, в случае расширенных антискобок (24)

$$(\bar{\Phi}\Phi, F)^a \not\equiv (V^a - U^a)F,$$

откуда следует, что уравнение (31) не выполняется тождественно, и, следовательно, подынтегральное выражение неинвариантно относительно преобразований (27) без наложения дополнительных ограничений на оба функционала S, X.

По аналогии с доказательством, данным в рамках модифицированного триплектического подхода [6], нетрудно установить, что реализация расширенных антискобок в виде (23) гарантирует калибровочную независимость S-матрицы.

Данное утверждение вытекает из независимости вакуумного функционала от выбора частных решений для калибровочного функционала X. Для доказательства последнего следует учесть производящие уравнения (6), (7), а также тот факт, что явный вид антискобок (23) обеспечивает инвариантность подынтегрального выражения в (5) относительно преобразований расширенной БРСТ-симметрии (27).

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе предложено обобщение суперполевого $Sp(2)$-ковариантного квантования [4] произвольных калибровочных теорий на случай введения калибровки. Обобщение основано на концепции производящих уравнений (6), (7) для калибровочного функционала, реализованной ранее в рамках полностью антиканонического подхода [5], [6]. Указано, что возможности явной реализации формализма в терминах фермионных операторов Δ^a и расширенных антискобок $(\cdot,\cdot)^a$, обладающих заданными алгебраическими свойствами [4], сводятся к двум различным случаям (см. [4], [10]). Установлено, что лишь одна из двух возможностей, а именно [4], совместима с требованием расширенной БРСТ-симметрии (27), реализованной в терминах супертрансляций вдоль грассмановых координат суперпространства. Отмечено, что требуемая форма преобразований симметрии обеспечивает калибровочную инвариантность S-матрицы.

С одной стороны, правила квантования, основанные на реализации [4] операторов Δ^a и расширенных антискобок, содержат суперполевой $Sp(2)$-ковариантный формализм [4] как частный случай фиксации калибровки, т.к. всякий функционал

$$X(\Phi) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}U^aU^bF(\Phi),$$

параметризованный произвольным бозоном $F = F(\Phi)$, является решением производящих уравнений (14). Именно такая форма калибровочного функционала была использована в работе [4].

С другой стороны, развиваемый метод в рамках обсуждаемой в статье [4] реализации расширенных антискобок может рассматриваться как суперполевая форма модифицированного триплектического квантования, предложенного в работе [6]. Действительно, рассмотрим компонентное представление суперполей $\Phi^A(\theta)$ и суперисточников $\bar{\Phi}_A(\theta)$:

$$\Phi^A(\theta) = \phi^A + \pi^{Aa}\theta_a + \frac{1}{2}\lambda^A\theta_a\theta^a,$$
$$\bar{\Phi}_A(\theta) = \bar{\phi}_A - \theta^a\phi^*_{Aa} - \frac{1}{2}\theta_a\theta^a J_A.$$

Набор переменных ϕ^A, π^{Aa}, λ^A, ϕ^*_{Aa}, $\bar{\phi}_A$, J_A совпадает с наборами переменных, которые использовались при построении $Sp(2)$-ковариантной [3], триплектической [5] и модифицированной триплектической [6] схем квантования.

Обозначим $F(\Phi, \bar{\Phi}) \equiv \widetilde{F}(\phi, \pi, \lambda, \bar{\phi}, \phi^*, J)$. Тогда компонентное представление расширенных антискобок (23)

$$(F, G)^a = \frac{\delta\widetilde{F}}{\delta\phi^A}\frac{\delta\widetilde{G}}{\delta\phi^*_{Aa}} + \varepsilon^{ab}\frac{\delta\widetilde{F}}{\delta\pi^{Ab}}\frac{\delta\widetilde{G}}{\delta\bar{\phi}_A} - (\widetilde{F} \leftrightarrow \widetilde{G})(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)}$$

и операторов Δ^a (21)

$$\Delta^a = (-1)^{\varepsilon_A}\frac{\delta_l}{\delta\phi^A}\frac{\delta}{\delta\phi^*_{Aa}} + (-1)^{\varepsilon_A+1}\varepsilon^{ab}\frac{\delta_l}{\delta\pi^{Ab}}\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}_A}$$

совпадает с соответствующими объектами, использованными в работах [5], [6].

Мера интегрирования (5)

$$d\Phi\, d\bar{\Phi}\, \rho(\bar{\Phi}) = d\phi\, d\phi^*\, d\pi\, d\bar{\phi}\, d\lambda\, dJ\, \delta(J)$$

и компонентное представление операторов V^a (19)

$$V^a = \varepsilon^{ab}\phi^*_{Ab}\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}_A} - J_A\frac{\delta}{\delta\phi^*_{Aa}}$$

позволяют утверждать, что при $J_A = 0$ производящие уравнения (13) для действия $\overline{S} = S|_{J=0}$ совпадают по форме с выражениями, использованными в работе [6] при формулировке модифицированных правил триплектического квантования. Что касается уравнений (14) для определения калибровочного функционала X, заметим прежде всего, что операторы U^a, записанные в виде (19) и имеющие компонентное представление

$$U^a = (-1)^{\varepsilon_A}\varepsilon^{ab}\lambda^A\frac{\delta_l}{\delta\pi^{Ab}} - (-1)^{\varepsilon_A}\pi^{Aa}\frac{\delta_l}{\delta\phi^A},$$

при $\lambda^A = 0$ совпадают с операторами U^a,

$$U^a = -(-1)^{\varepsilon_A}\pi^{Aa}\frac{\delta_l}{\delta\phi^A}, \tag{32}$$

использованными в [6] при формулировке производящих уравнений для калибровочного бозона. Далее, учтем, что функционал $\bar{\Phi}\Phi$ в (9) имеет вид

$$\bar{\Phi}\Phi = \bar{\phi}_A\lambda^A + \phi^*_{Aa}\pi^{Aa} - J_A\phi^A.$$

Нетрудно показать, что производящие уравнения для функционала $\overline{X} = X + \bar{\phi}_A\lambda^A$ имеют вид уравнений (14) с операторами U^a (32), т.е. вид производящих уравнений метода модифицированного триплектического квантования, а тогда вакуумный функционал

$$Z = \int d\phi\, d\phi^*\, d\pi\, d\bar{\phi}\, d\lambda\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\big(\overline{S}(\phi,\pi,\phi^*,\bar{\phi}) + \overline{X}(\phi,\pi,\phi^*,\bar{\phi},\lambda) + \phi^*_{Aa}\pi^{Aa}\big)\right\}$$

представляет собой использованный в [6] функционал (3), ограниченный на случай, когда действие $\overline{S}$ не содержит зависимости от переменных λ^A.

Благодарности. Работа частично поддержана грантом Министерства общего и профессионального образования в области фундаментального естествознания, грант № E00-3.3-461, и грантом РФФИ № 99-02-16617. Работа П.М.Л. также частично поддержана грантами INTAS № 99-0590 и РФФИ–DFG № 99-02-04022.

Список литературы

[1] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Phys. Lett. B. 1974. V. 25. P. 344; Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127; *И. В. Тютин.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторном формализме. Препринт № 35. М.: ФИАН, 1975.
[2] *G. Curci, R. Ferrari.* Phys. Lett. B. 1976. V. 63. P. 91; *I. Ojima.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1979. V. 64. P. 625.
[3] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487; 1991. V. 32. P. 532; 1991. V. 32. P. 2513.
[4] *П. М. Лавров.* ТМФ. 1996. Т. 107. С. 229.
[5] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 1995. V. 350. P. 44; Nucl. Phys. B. 1996. V. 465. P. 521; *I. A. Batalin, R. Marnelius, A. M. Semikhatov.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 249.
[6] *Б. Гейер, Д. М. Гитман, П. М. Лавров.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 476.
[7] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567.
[8] *Р. Е. Каллош, И. В. Тютин.* ЯФ. 1973. Т. 17. С. 190.
[9] *I. V. Tyutin.* Once again on the equivalence theorem. hep-th/0001050.
[10] *B. Geyer, D. Mülsch.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 7304.
[11] *B. Geyer, P. M. Lavrov, D. Mülsch.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 674; 1999. V. 40. P. 6189.
[12] *Б. Девитт.* Динамическая теория групп и полей. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 19.III.2001 г.