Bull. Soc. math. France
134 (2), 2006, p. 173–200

SUR CERTAINES SINGULARITÉS NON ISOLÉES D'HYPERSURFACES I

PAR DANIEL BARLET

RÉSUMÉ. — L'objectif de cet article est de mettre en place, dans le cadre de fonctions à lieu singulier de dimension 1, avec des hypothèses assez restrictives mais donnant accès à beaucoup d'exemples non triviaux, l'analogue de la théorie de E. Brieskorn pour une fonction à singularité isolée. Les principaux résultats sont le théorème de finitude pour le (a,b)-module associé à l'origine, qui est obtenu via le théorème de constructibilité de M. Kashiwara, et les résultats de non torsion pour une courbe plane (non nécessairement réduite) et pour la suspension d'un tel cas sans torsion avec une singularité isolée.

ABSTRACT (*On some non isolated hypersurface singularities I*). — The aim of this first part is to introduce, for a rather large class of hypersurface singularities with 1-dimensional locus, the analog of the Brieskorn lattice at zero (the singular point of the singular locus). The main results are the finitness theorem for the corresponding (a,b)-module obtained via Kashiwara's constructibility theorem, and non torsion results for a plane curve singularity (not nessarily reduced) and for the suspension of such non torsion cases with an isolated singularity.

Texte reçu le 26 février 2004, révisé le 9 mai 2005 et accepté le 26 octobre 2005.

DANIEL BARLET, Université Henri Poincaré, Nancy I et Institut Universitaire de France, Institut É. Cartan UHP/CNRS/INRIA, UMR 7502, Faculté des Sciences et Techniques, BP 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France). • *E-mail :* `barlet@iecn.u-nancy.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 32S05, 32S25, 32S40.

Mots clefs. — Singularité d'hypersurface, lieu singulier de dimension 1, module de Brieskorn, (a,b)-module, opérateurs microlocaux formels.

1. Introduction

L'objectif de cet article est de mettre en place, dans le cadre de fonctions à lieu singulier de dimension 1, avec des hypothèses assez restrictives mais donnant accès à beaucoup d'exemples non triviaux, l'analogue de la théorie de E. Brieskorn pour une fonction à singularité isolée (voir [11]).

Ce premier volet est centré sur la construction de l'analogue du module de Brieskorn associé à l'origine (qui est le point singulier du lieu singulier de $f = 0$) et les principaux résultats obtenus sont

1) le théorème de finitude 3.1.1 ;
2) le théorème de non torsion pour les courbes planes non nécessairement réduites 4.2.2 ;
3) la stabilité de l'absence de torsion par suspension avec une fonction à singularité isolée (proposition 4.3.3.)

Le théorème de finitude nous permet d'attacher à une fonction vérifiant notre hypothèse (HI) un (a, b)-module à l'origine. Malheureusement, le calcul du rang de ce (a, b)-module, qui donne la dimension du n-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f à l'origine, fait intervenir la torsion éventuellement présente. Quand cette torsion est nulle, on obtient une jolie formule généralisant celle de J. Milnor pour le cas d'une singularité isolée.

Nous donnons alors des conditions simples pour assurer l'annulation de cette torsion. D'où l'intérêt des résultats 2) et 3) de non torsion.

Le second volet (voir [7]) s'attaquera à une version filtrée du phénomène d'interaction de strates consécutives étudié dans [2]. Ceci nécessitera au préalable la généralisation au cas de la valeur propre 1 les résultats de *loc. cit.*

Cette généralisation est décrite dans [5], mais nécessite l'étude d'une situation à trois strates ; on consultera l'introduction de [6] pour des commentaires plus détaillés sur les interactions de strates.

2. Pré-(a, b)-Modules

2.1. Généralités

DÉFINITION 2.1.1. — Soit E un espace vectoriel complexe muni d'endomorphismes a et b. On pose

$$B(E) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} b^m \quad \text{et} \quad A(E) = \{x \in E\,;\ \mathbb{C}[b]\cdot x \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} a^m\}.$$

On dira que E est un *pré-(a, b)-module* lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $a \cdot b - b \cdot a = b^2$;
ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b - \lambda$ est bijectif dans E ;
iii) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N \cdot A(E) = 0$;

iv) $B(E) \subset A(E)$;
v) $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} b^m(E) \subset A(E)$;
vi) le noyau et le conoyau de b sont de dimensions finies sur $\mathbb{C}$.

On dira que E est *sans torsion* (en fait sans b-torsion) si on a de plus $\operatorname{Ker} b = 0$ ce qui équivaut à $B(E) = 0$. Dans ce cas, la condition $B(E) \subset A(E)$ devient triviale. Mais il résultera du lemme 2.1.2 que dans ce cas on a également $A(E) = 0$.

Remarques

1) Un (a, b)-module, c'est-à-dire un $\mathbb{C}[[b]]$-module libre de type fini muni d'un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire a vérifiant la relation i) de commutation, est un pré-(a, b)-module. En effet l'injectivité de b donne la nullité de $B(E)$; donc la condition iv) est triviale. La b-complétion, qui implique la b-séparation, donne la condition v) et la condition ii). La condition vi) est également évidente. Il reste à montrer la condition iii).

Montrons directement que l'on a $A(E) = 0$ dans ce cas.

Soit $x \in A(E)$ vérifiant $a \cdot x = 0$. Alors on doit avoir $a^n \cdot bx = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Mais si on a $a \cdot x = 0$ et $a^n \cdot bx = 0$, on en déduit que $a^{n-1} \cdot (ba + b^2) \cdot x = 0$ d'où $a^{n-1} \cdot b^2 x = 0$ puis $a^{n-p} \cdot b^p x = 0$ pour $p = 1, \ldots, n$. On a donc $b^n \cdot x = 0$ d'où $x = 0$ puisque b est injective. Comme par définition a est nilpotente sur $A(E)$, on en conclut que $A(E) = 0$ pour un (a, b)-module. La condition iii) est donc trivialement vérifiée dans ce cas.

2) Grâce à la condition ii), un pré-(a, b)-module est un module sur le localisé $\mathbb{C}[b]_0$ de l'anneau $\mathbb{C}[b]$ par rapport à l'idéal maximal engendré par b.

3) On remarquera que, par définition, $A(E)$ est stable par b et que $x \in A(E)$ si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \cdot b^p \cdot x = 0$. On en déduit que $A(E)$ est stable par a car si on a $a^N \cdot b^p \cdot x = a^N \cdot b^{p+1} \cdot x = 0$ alors

$$a^N \cdot b^p \cdot ax = a^N \cdot (a \cdot b^p - p \cdot b^{p+1}) \cdot x = 0.$$

Lemme 2.1.2. — *Si E est un pré-(a, b)-module, alors $A(E)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. De plus on a l'égalité $B(E) = A(E)$.*

Démonstration. — Comme $A(E)$ est stable par a et b, l'égalité $a^N \cdot A(E) = 0$ donne $b^{2N} \cdot A(E) = 0$. En effet la relation de commutation i) implique la formule

$$N!\, b^{2N} = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \binom{j}{N} \cdot b^j a^N b^{N-j}.$$

Elle est établie dans [4, p. 24].

L'égalité $B(E) = A(E)$ s'en déduit en constatant que dans le quotient $A(E)/B(E)$ l'endomorphisme b est à la fois injectif, puisque $bx \in B(E)$ implique $x \in B(E)$, et nilpotent, puisque $b^{2N} \cdot A(E) = 0$.

Montrons que l'espace vectoriel $B(E) = A(E)$ est de dimension finie. On a pour chaque $\nu \in \mathbb{N}$ la suite exacte de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels

$$0 \to \operatorname{Ker} b \longrightarrow \operatorname{Ker} b^{\nu+1} \xrightarrow{b} \operatorname{Ker} b^{\nu};$$

qui donne par récurrence, grâce à la finitude de $\operatorname{Ker} b$, la finitude de la dimension de $\operatorname{Ker} b^{\nu}$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$. Mais on a $A(E) \subset \operatorname{Ker} b^{2N}$. □

Remarques

1) La preuve des assertions $b^{2N}A(E) = 0$ et $B(E) = A(E)$ dans le lemme 2.1.2 n'utilise pas la condition de finitude vi) pour E.

2) Le lemme précédent donne également la b-séparation sans utiliser la condition vi) pour E, c'est-à-dire la nullité de $\bigcap_{m\geq 0} b^m(E)$. En effet, si x appartient à $\bigcap_{m\geq 0} b^m(E)$, on peut trouver $y \in E$ vérifiant $b^{2N} \cdot y = x$. Mais comme x est dans $B(E)$, on a également $y \in B(E) = A(E)$ et donc $b^{2N} \cdot y = x = 0$. Les propriétés i) à v) seules, suffisent donc à assurer la b-séparation de E et donc son injection dans son complété b-adique, sans avoir à quotienter par $A(E) = B(E)$, c'est à dire par la b-torsion. Ceci s'applique, en particulier, à la situation de la proposition 2.3.1, ce qui couvre tous les cas issus de singularités d'une fonction holomorphe (arbitraire) que nous considèrerons.

3) La a-torsion de E, qui est le sous-espace vectoriel $\tilde{A}(E) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} a^m$, peut être strictement plus gros que $A(E)$ et ne pas être stable par b même dans le cas d'un (a, b)-module. Prendre par exemple le (a, b)-module $\mathbb{C}[[b]]$-libre de rang 1 et de générateur noté e dont l'application a est définie par $a \cdot e = 0$ (on a alors $ab^n \cdot e = n \cdot b^{n+1} \cdot e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

4) À titre d'exercice, le lecteur pourra montrer que pour un pré-(a, b)-module régulier (voir 2.2.1) l'espace vectoriel $\tilde{A}(E)$ est toujours de dimension finie (il suffit en fait de traiter le cas d'un (a, b)-module à pôle simple).

5) Nous montrerons au lemme 2.3.2 que pour les pré-(a, b)-modules associés aux systèmes de Gauss-Manin d'un germe de fonction holomorphe, on a toujours $\tilde{A}(E) = A(E)$ grâce au théorème de positivité de B. Malgrange [15].

Proposition 2.1.3. — *Soit E un pré-(a, b)-module. Le complété b-adique $\mathcal{L}(E)$ du quotient $E/A(E)$ est un (a, b)-module (voir plus haut ou bien* [3], [4], [9]). *L'application (a, b)-linéaire naturelle*

$$E \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

a pour noyau $B(E) = A(E)$; elle est continue et d'image dense pour la topologie b-adique.

Démonstration. — D'après ce qui précède, b est injective sur $E/A(E)$ qui est séparé pour la filtration b-adique d'après la condition v). Pour conclure il suffit de voir que le conoyau de b agissant sur $E/A(E)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Ceci est clair puisque c'est un quotient de $E/b \cdot E$. □

Définition 2.1.4. — Nous appellerons *rang* du pré-(a,b)-module E, noté $\mathrm{rg}(E)$, le rang (comme $\mathbb{C}[[b]]$-module libre) du (a,b)-module $\mathcal{L}(E)$ qui lui est associé.

On remarquera que si $\delta := \dim \operatorname{Ker} b$, on a

$$\mathrm{rg}(E) = \dim E/b \cdot E - \delta$$

puisque $B(E)$ est de dimension finie.

2.2. Régularité et produit tensoriel

Définition 2.2.1. — Nous dirons qu'un pré-(a,b)-module E est *local* (resp. *à pôle simple*, *régulier*) quand il vérifie :

- *local* : il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^\ell \cdot E \subset b.E$;
- *à pôle simple* : on a $\ell = 1$ dans la condition précédente, c'est-à-dire $a \cdot E \subset b \cdot E$;
- *régulier* : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \cdot E \subset \sum_{j \in [0,k-1]} b^{k-j} \cdot a^j \cdot E$.

Remarques

- On a, bien sûr, « pôle simple » $\Rightarrow$ « régulier » $\Rightarrow$ « local ».
- Il est équivalent de demander que E soit local (resp. régulier), ou bien que $E/B(E)$ soit local (resp. régulier), ou encore que $\mathcal{L}(E)$ le soit.

Définition 2.2.2. — Soient E et F deux pré-(a,b)-modules ; alors le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{C}[b]_0} F$ muni de l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$a := (a_E \otimes 1_F + 1_E \otimes a_F)$$

sera appelé *produit tensoriel* de E et F et noté simplement $E \otimes_{a,b} F$ ou plus simplement $E \otimes F$ quand il n'y a pas d'ambiguité.

Proposition 2.2.3. — *Soient E et F deux pré-(a,b)-modules locaux ; alors $E \otimes_{a,b} F$ est également un pré-(a,b)-module local. Si de plus E et F sont réguliers* (*resp. à pôles simples*), *alors $E \otimes_{a,b} F$ est régulier* (*resp. à pôle simple*).

Démonstration. — La condition i) se vérifie facilement et la condition ii) est immédiate. Pour montrer la condition iv), commençons par prouver que l'on a

$$B(E \otimes F) = B(E) \otimes F + E \otimes B(F).$$

L'inclusion $B(E) \otimes F + E \otimes B(F) \subset B(E \otimes F)$ est claire. Montrons l'inclusion opposée. Soit $z \in B(E \otimes F)$. Posons $z = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$ où I est fini et notons par E_1 et F_1 les sous-$\mathbb{C}[b]_0$-modules engendrés par les $(x_i)_{i \in I}$ et les $(y_i)_{i \in I}$ respectivement. Comme, par définition, E_1 et F_1 sont des $\mathbb{C}[b]_0$-modules de type fini, ils sont somme directe de leur torsion et d'un module libre de type fini. On en conclut aisément que l'on a

$$B(E_1 \otimes F_1) \simeq \big(B(E_1) \otimes F_1\big) + \big(E_1 \otimes B(F_1)\big),$$

ce qui nous donne $z \in B(E) \otimes F + E \otimes B(F)$. On en conclut que

$$B(E \otimes F) \subset A(E \otimes F)$$

en remarquant que si $N \in \mathbb{N}$ est assez grand pour que l'on ait $a^N \cdot B(E) = 0 = b^N \cdot B(E)$ ainsi que $a^N \cdot B(F) = 0 = b^N \cdot B(F)$ et si $M \in \mathbb{N}$ est assez grand pour que l'on ait $a^M \cdot E \subset b \cdot E$ ainsi que $a^M \cdot F \subset b \cdot F$, on a

$$a^{M \cdot N + N} \cdot \big(B(E) \otimes F + E \otimes B(F)\big) = 0$$

puisque

$$\begin{aligned} a^{M \cdot N + N} \cdot \big(B(E) \otimes F\big) &\subset \sum_{p \in [0,N]} a^p \cdot B(E) \otimes a^{M \cdot N} \cdot F \\ &\subset B(E) \otimes b^N \cdot F = b^N \cdot B(E) \otimes F. \end{aligned}$$

Comme $B(E \otimes F)$ est stable par b, l'inclusion $B(E \otimes F) \subset A(E \otimes F)$ est vérifiée.

Maintenant, grâce à ce qui précède, pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, $B(E \otimes F)$ est un quotient de

$$\big(B(E) \otimes (F/b^N \cdot F)\big) \oplus \big(E/b^N \cdot E) \otimes B(F)\big),$$

ce qui prouve la finitude de $\operatorname{Ker} b \subset B(E \otimes F)$.

La finitude sur $\mathbb{C}$ de $\operatorname{Coker} b$ dans $E \otimes_{a,b} F$ est élémentaire.

Montrons maintenant que $E \otimes_{a,b} F$ vérifie la condition iii) de la définition 2.1.1. D'après ce qui précède, on a un isomorphisme (a,b)-linéaire

$$E \otimes_{a,b} F / B(E \otimes_{a,b} F) \simeq E/B(E) \otimes_{a,b} F/B(F).$$

Considérons maintenant $z \in A(E \otimes F)$ et supposons que $a \cdot z \in B(E \otimes F)$. Comme $b \cdot z$ appartient à $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} a^m$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a^m \cdot b \cdot z = 0$. On obtient alors $a^{m-i}\, b^{i+1} \cdot z \in B(E \otimes F)$, pour tout $i \in [0,m]$, d'où $b^{m+1} \cdot z \in B(E \otimes F)$ et donc $z \in B(E \otimes F)$.

Ceci montre que sur le quotient $A(E \otimes_{a,b} F)/B(E \otimes_{a,b} F)$ l'endomorphisme nilpotent a est injectif. Donc $A(E \otimes_{a,b} F) = B(E \otimes_{a,b} F)$ et

$$a^{M \cdot N + N} \cdot A(E \otimes F) = 0.$$

Il nous reste seulement à prouver la condition v) de la définition 2.1.1. Mais $E/B(E)$ et $F/B(F)$ sont b-séparés ainsi que

$$E \otimes F / B(E \otimes F) \simeq E/B(E) \otimes F/B(F) \subset \mathcal{L}(E) \otimes \mathcal{L}(F).$$

On en déduit la condition v) pour $E \otimes_{a,b} F$.

Le cas de pré-(a,b)-modules à pôle simple est évident.

Pour traiter le cas de pré-(a,b)-modules réguliers, nous pouvons supposer que ce sont des (a,b)-modules, d'après la remarque qui suit la définition 2.2.1. Soit K le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}[[b]]$. La condition de régularité pour un (a,b)-module G équivaut à la finitude dans

$$G \otimes_{\mathbb{C}[[b]]} K$$

du sous- $\mathbb{C}[[b]]$-module $\sum_{m\geq 0}(b^{-1}\cdot a)^m \cdot G$ (voir [3, p. 18]). Mais on a

$$(b^{-1}\cdot a)^m\big(E\otimes F\big)\subset \sum_{j\in[0,m]}\big((b^{-1}\cdot a)^j E\otimes (b^{-1}\cdot a)^{m-j}F\big)$$

pour chaque $m\in\mathbb{N}$. On en déduit la régularité de $E\otimes_{a,b}F$. $\square$

2.3. Cas des pré-(a,b)-modules associés à des singularités de fonctions holomorphes. — Nous allons montrer que la cohomologie du complexe de De Rham $((\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^\bullet, \mathrm{d})$ restreint à $f^{-1}(0)$, associée à une fonction holomorphe non constante, vérifie toujours les propriétés i) à v) de la définition d'un pré-(a,b)-module.

Proposition 2.3.1. — *Soit $f:(\mathbb{C}^{n+1},0)\to(\mathbb{C},0)$ un germe non nul de fonction holomorphe. Considérons pour $p\in[1,n+1]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel*

$$\mathcal{H}_0^p := \big((\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^p\cap \operatorname{Ker}\mathrm{d}\big)/\mathrm{d}\big((\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^{p-1}\big)_0$$

muni des $\mathbb{C}$-endomorphismes a et b définis respectivement par la multiplication par f et $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}^{-1}$. Alors $\mathcal{H}_0^p$ vérifie les conditions i) *à* v) *de la définition* 2.1.1.

Démonstration. — Soit $\mathrm{d}u\in(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^p$; on a $a[\mathrm{d}u]=[f\cdot\mathrm{d}u]$ et $b[\mathrm{d}u]=[\mathrm{d}f\wedge u]$. Donc

$$b(a+b)[\mathrm{d}u]=b\big(\big[\mathrm{d}(f\cdot u)\big]\big)=[\mathrm{d}f\wedge f\cdot u]=a\big([\mathrm{d}f\wedge u]\big)=a\big(b\big([\mathrm{d}u]\big)\big),$$

ce qui prouve notre première assertion.

Comme on a

$$\mathrm{d}\big(\lambda\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot u\big)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\cdot f}\big(\mathrm{d}f\wedge u-\lambda\mathrm{d}u\big)$$

l'annulation de $b[\mathrm{d}u]-\lambda\cdot[\mathrm{d}u]$ se traduit par l'existence de $v\in(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^{p-1}$ vérifiant

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}\cdot f}\mathrm{d}\big(\lambda\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot u\big)=\mathrm{d}v,$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot(\lambda\cdot u-v)\big)=0.$$

Le lemme de De Rham holomorphe assure alors l'existence de $\xi\in\Omega_0^{p-2}$ tel que l'on ait

$$\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot(\lambda\cdot u-v).$$

On en déduit que

$$\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot\xi\big)=\lambda\cdot u-v+\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot\mathrm{d}f\wedge\xi,$$

ce qui donne la nullité de $\lambda\cdot[\mathrm{d}u]$ et donc de $[\mathrm{d}u]$ puisque $\lambda\neq 0$.

Pour voir la surjectivité de $b-\lambda$, il suffit de résoudre l'équation

$$\mathrm{d}f\wedge\xi-\lambda\cdot\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}u$$

où $\mathrm{d}u \in (\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^p$ est donné. Comme la p-forme holomorphe $-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot \mathrm{d}u$ est d-fermée, le lemme de De Rham holomorphe assure alors l'existence de $\eta \in \Omega_0^{p-1}$ vérifiant

$$\mathrm{d}\eta = -\frac{1}{\lambda}\cdot \mathrm{e}^{\frac{-1}{\lambda}\cdot f}\cdot \mathrm{d}u.$$

On vérifie alors immédiatement que $\xi := \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}\cdot f}\cdot \eta$ est solution de notre équation(1).

La condition iii) est conséquence du résultat classique [12] de A. Grothendieck(2).

La condition iv) est conséquence du fait que la b-torsion de $\mathcal{H}_0^p$ est contenue dans la a-torsion. Ceci résulte du fait que, quitte à localiser en a (c'est-à-dire à considérer des formes méromorphes à pôles dans $f = 0$), on a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f^\bullet = \mathrm{Im}\,\mathrm{d}f^\bullet$. Alors $\mathrm{d}f\wedge\xi = \mathrm{d}\eta$ avec $\mathrm{d}f\wedge\eta = 0$ donne $\eta = \mathrm{d}f\wedge\zeta$; donc $\mathrm{d}f\wedge(\xi+\mathrm{d}\zeta) = 0$ et donc $\xi + \mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}f\wedge\gamma$. Alors $\mathrm{d}\xi = -\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\gamma$.

La condition v) est une conséquence immédiate du théorème de positivité de B. Malgrange [15]. □

Lemme 2.3.2. — *Plaçons-nous dans la situation de la proposition* 2.3.1 *et supposons la fonction f réduite. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 2$, $E := \mathcal{H}_0^p$ vérifie $\tilde{A}(E) = A(E)$.*

Démonstration. — Il s'agit simplement de voir que $\tilde{A}(E)$ est stable par b. Ceci résulte immédiatement du théorème de positivité de B. Malgrange(3) qui affirme que pour une forme holomorphe $\omega \in (\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^p$ et pour $\gamma_s \subset f^{-1}(s)$ une famille horizontale multiforme de $(p-1)$-cycles compacts, la fonction holomorphe multiforme

$$s \longmapsto \int_{\gamma_s} \frac{\omega}{\mathrm{d}f}$$

tend vers 0 quand s tend vers 0 le long de tout rayon issu de l'origine (ici on utilise $p-1 \geq 1$).

Alors ω induit une classe de a-torsion dans E si et seulement si pour tout choix de la famille γ_s on trouve une intégrale nulle. Comme l'opération b correspond à prendre une primitive (qui doit donc être « nulle en 0 »), l'assertion $\tilde{A}(E) = A(E)$ s'en déduit. □

Corollaire 2.3.3. — *Si f est à singularité isolée à l'origine, $\mathcal{H}^{n+1}$ est un pré-(a,b)-module sans torsion dans lequel a est injective.*

---

(1) Pour $p = 1$, on choisit $u(0) = 0$. Comme $(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^0 = 0$, on aura ensuite $v = 0$ et $u = C\cdot\lambda^{-1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}\cdot f}$. Alors $u(0) = 0$ donne $C = 0$ et donc $u \equiv 0$.

(2) On peut obtenir directement ce point via le cas à croisements normaux en utilisant le théorème de désingularisation d'Hironaka [13].

(3) L'assertion « f réduite » correspond à la preuve précisée dans l'Appendice de [1] (note au bas de la page 106).

Ceci donne une nouvelle preuve du résultat de Sebastiani [16].

Démonstration. — Vérifions déjà la condition vi) de la définition 2.1.1. La dimension finie de $\mathrm{Coker}\, b$ est immédiate vu que ce noyau s'identifie au quotient $\Omega_0^{n+1}/\mathrm{d}f\wedge\Omega_0^n$. Montrons que $\mathrm{Ker}\, b = 0$. Soit $\omega = \mathrm{d}\xi$ où $\xi\in\Omega_0^n$ vérifie $\mathrm{d}f\wedge\xi = \mathrm{d}f\wedge d\eta$ (rappelons que l'on a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f^n = \mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}$ puisque f est à singularité isolée). Alors $\xi = \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}f\wedge\zeta$ et on a donc $[\omega] = 0$ dans $\mathcal{H}^{n+1}$.

Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent pour conclure, puisque l'on a vu que $0 = B(E) = A(E)$. □

3. Le théorème de finitude

3.1. L'hypothèse (HI). — Soit

$$\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

un germe non constant de fonction holomorphe et soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor de $\tilde{f}$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(HI,a) Le lieu singulier $S := \{x \in X\,;\ \mathrm{d}f_x = 0\}$ est une courbe contenue dans $Y := f^{-1}(0)$ dont chaque composante irréductible contient l'origine et est non singulière en dehors de 0.

(HI,b) En chaque point x de $S\setminus\{0\}$ il existe un germe en x de champ de vecteur holomorphe V_x, non nul en x, tel que $V_x\cdot f \equiv 0$.

L'hypothèse (HI,b) est assez restrictive puisqu'elle implique que, le long de $S\setminus\{0\}$, la singularité $\{f = 0\}$ est une déformation localement triviale de la singularité hyperplane transverse (qui est une singularité isolée de $\mathbb{C}^n$).

Cependant il est facile de voir que cette hypothèse est toujours vérifiée pour $n = 1$ (courbes planes réduites ou non) et qu'il y a beaucoup d'exemples en dimensions supérieures (voir le paragraphe 4.2.)

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le

THÉORÈME 3.1.1. — *Sous l'hypothèse* (HI)*, l'espace vectoriel*

$$\mathcal{H}^{n+1} := \Omega_0^{n+1}/\mathrm{d}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)_0^n$$

muni des endomorphismes a et b donnés respectivement par multiplication par f et par $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}^{-1}$ *est un pré-(a,b)-module régulier.*

Compte tenu des résultats du paragraphe 2, il s'agit maintenant de prouver les conditions de finitudes vi) de la définition 2.1.1. Ceci utilisera, entre autres, le théorème de constructibilité de M. Kashiwara [14].

3.2. L'idéal $\widehat{J(f)}$. — Dans la situation précisée ci-dessus, introduisons l'idéal $\widehat{J(f)}$ de $\mathcal{O}_X$ formé des germes de fonctions holomorphes dont la restriction à $X \setminus \{0\}$ est dans $J(f)$ l'idéal jacobien de f. Si $i : X \setminus \{0\} \hookrightarrow X$ est l'inclusion, on a, dès que $n \geq 1$, d'après Hartogs

$$\widehat{J(f)} \simeq i_* i^* \big(J(f)\big).$$

Définition 3.2.1. — Le faisceau $\widehat{J(f)}/J(f)$ est cohérent et concentré en 0. En effet, le choix d'un élément de volume sur X donne un isomorphisme de faisceaux

$$\widehat{J}(f)/J(f) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{H}^0_{\{0\}}\big(\Omega^{n+1}_X / \mathrm{d}f_\wedge \Omega^n_X\big).$$

La dimension finie de son germe en 0 sera notée $\mu(f)$.

Remarque. — Si f a singularité isolée en 0, on a $\widehat{J(f)} = \mathcal{O}_X$ et donc

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/J(f),$$

ce qui est bien conforme à la définition du nombre de Milnor dans ce cas.

3.3. Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$. — Soit $\mathrm{Ann}(f)$ le sous-faisceau du faisceau T_X des champs de vecteurs holomorphes sur X, formé des germes de champs de vecteurs qui annulent f. Ce sous-faisceau est cohérent car un choix de coordonnées sur X montre qu'il est isomorphe via

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \widehat{\mathrm{d}^i x}$$

au noyau $(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n$ du morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$\mathrm{d}f^n \wedge : \Omega^n_X \longrightarrow \Omega^{n+1}_X, \quad \alpha \longmapsto \mathrm{d}f_\wedge \alpha.$$

La condition (HI) implique que, si $V_1, \ldots, V_\ell$ sont des germes de champs de vecteurs en 0 qui engendrent $\mathrm{Ann}(f)$ au voisinage de 0, le lieu des zéros communs à $V_1, \ldots, V_\ell$ est réduit à 0 ; réciproquement ceci implique (HI,b).

Définition 3.3.1. — On définit alors $\mathcal{J}$ comme l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré au voisinage de 0 par $\widehat{J(f)}$ et $\mathrm{Ann}(f)$. On pose alors

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}.$$

Lemme 3.3.2. — *On considère à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ des germes $(g_\lambda)_{\lambda \in [1,L]}$ de fontions holomorphes et $(V_\mu)_{\mu \in [1,M]}$ des germes de champs de vecteurs holomorphes. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ engendré au voisinage de 0 par les g_λ et les V_μ. Posons*

$$\widetilde{V_\mu} = V_\mu + \mathrm{div}(V_\mu)$$

pour $\mu \in [1, M]$ où $\mathrm{div}(V) := \sum_{i=0}^n \partial a_i/\partial x_i$ si $V = \sum_{i=0}^n a_i \partial/\partial x_i$ et soit

$$\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}^{n+1}}/\mathcal{J}.$$

Alors $DR^{n+1}(\mathcal{M})$, le $(n+1)$-ième faisceau de cohomologie du complexe de De Rham de $\mathcal{M}$, est isomorphe comme $\underline{\mathbb{C}}_X$-module au quotient

$$\mathcal{O}/\sum_{\lambda=1}^{L}\mathcal{O}\cdot g_\lambda+\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{V}_\mu(\mathcal{O}).$$

En particulier pour $\mathcal{M}$ holonome, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathcal{O}_0/\sum_{\lambda=1}^{L}\mathcal{O}_0\cdot g_\lambda+\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{V}_\mu(\mathcal{O}_0)$$

est de dimension finie, d'après [14].

Démonstration. — Comme référence sur les $\mathcal{D}$-modules, le lecteur pourra consulter [10].

Pour $h\in\mathcal{O}$ et V un champ vecteur holomorphe, on a $\widetilde{V}(h)=\widetilde{V}\cdot h-h\cdot V$. Comme on a $\widetilde{V}=\sum\partial/\partial x_i\cdot a_i$ si $V=\sum a_i\cdot\partial/\partial x_i$, on a, quand V annule f,

$$\widetilde{V}_\mu(h)\in\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}+\mathcal{J}.$$

Mais, par définition,

$$DR^{n+1}(\mathcal{M}):=\mathcal{M}/\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{M}\simeq\mathcal{D}/\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}+\mathcal{J}.$$

On en déduit que $\widetilde{V}_\mu(h)$ est nul dans $DR^{n+1}(\mathcal{M})$ pour tout $h\in\mathcal{O}$ et tout $\mu\in[1,M]$.

Par ailleurs, on a $\mathcal{D}/\sum_0^n\partial/\partial x_i\mathcal{D}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}$ et donc $DR^{n+1}(\mathcal{M})$ est isomorphe à

$$\mathcal{O}/\mathcal{O}\cap\Big(\mathcal{J}+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}\Big).$$

Mais on vient de voir que l'on a

$$\sum_{\lambda=1}^{L}\mathcal{O}g_\lambda+\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{V}_\mu(\mathcal{O})\subset\mathcal{O}\cap\Big(\mathcal{J}+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}\Big).$$

Il nous reste à montrer que

$$\mathcal{O}\cap\Big(\mathcal{J}+\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}\Big)\subset\sum_{\lambda=1}^{L}\mathcal{O}g_\lambda+\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{V}_\mu(\mathcal{O}).$$

Pour $\varphi\in\mathcal{O}\cap(\mathcal{J}+\sum\partial/\partial x_i\mathcal{D})$, posons

$$\varphi=\sum_{\lambda=1}^{L}P_\alpha g_\lambda+\sum_{\mu=1}^{M}Q_rV_\mu+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}R_i$$

où P_λ, Q_μ et $R_i \in \mathcal{D}$. Écrivons les $\partial/\partial x_i$ « à gauche ». On trouve alors, grâce à l'unicité de l'écriture à gauche,

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \cdot g_\lambda + \Big[\sum_{\mu=1}^{M} q_\mu V_\mu + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} r_i\Big]_0$$

où p_λ, q_μ et r_i sont dans $\mathcal{O}$ et où le symbole $[\pi]_0$ désigne le terme de degré 0 de l'opérateur différentiel π (avec les $\partial/\partial x_i$ à gauche).

Mais on a $q_\mu V_\mu = \widetilde{V}_\mu q_\mu - \widetilde{V}_\mu(q_\mu)$ avec $\widetilde{V}_\mu \in \sum_{i=0}^{n} \partial/\partial x_i \mathcal{D}$. On en conclut que

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \cdot g_\lambda - \sum_{\mu=1}^{M} \widetilde{V}_\mu(q_\mu).$$

□

LEMME 3.3.3. — *On se place dans la situation du lemme précédent. On suppose que*

i) *l'ensemble* $S := \{x \in \mathbb{C}^{n+1}\,;\ g_\lambda(x) = 0,\ \forall \lambda \in [1, L]\}$ *est un germe de courbe en* 0 *;*

ii) *pour tout point* $y \in S \setminus \{0\}$*, il existe* $m_y \in [1, M]$ *tel que* V_{m_y} *ne s'annule pas en* y*.*

Alors $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{J}$ *est holonome.*

Démonstration. — Il est clair que $\operatorname{Supp} \mathcal{M} \subset S$. Au point générique y de S, la variété caractéristique $\operatorname{ch}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est contenue dans un fibré en hyperplan sur S (défini par l'annulation du symbole principal de V_{m_y}). On a donc

$$\dim \operatorname{ch}(\mathcal{M}) \leq n + 1$$

au-dessus de $S \setminus \{0\}$ donc partout. □

3.4. Finitude de Ker $\boldsymbol{b}$. — Définissons maintenant les faisceaux

$$\mathcal{E}' = \Omega_X^{n+1}/\mathrm{d}(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n \simeq \mathcal{H}^{n+1}, \quad \mathcal{E}'' := \Omega_X^{n+1}/\mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\Omega_X^{n-1}$$

et les espaces vectoriels

$$E' := H^0_{\{0\}}(\mathcal{H}^{n+1}), \quad E'' := H^0_{\{0\}}(\mathcal{E}'').$$

Soit $\widetilde{j} : \mathcal{E}'' \to \mathcal{H}^{n+1}$ le quotient évident et notons $j : E'' \to E'$ l'application qui s'en déduit.

LEMME 3.4.1. — *La flèche*

$$\tilde{b} : \mathcal{H}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{E}'', \quad \tilde{b}[\mathrm{d}\xi] = [\mathrm{d}f \wedge \xi]$$

est bien définie ; c'est une injection $\underline{\mathbb{C}}$*-linéaire de conoyau*

$$\Omega^{n+1}/\mathrm{d}f \wedge \Omega^n \simeq \mathcal{O}/J(f).$$

Démonstration. — Commençons par montrer que cette flèche est bien définie. Considérons donc un $\xi \in \Omega^n$ tel que $\mathrm{d}\xi = 0$. Alors le lemme de De Rham holomorphe permet d'écrire $\xi = \mathrm{d}\eta$ avec $\eta \in \Omega^{n-1}$. On aura donc dans $\mathcal{E}''$

$$[\mathrm{d}f \wedge \xi] = [\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\eta] = 0.$$

Montrons l'injectivité. Si on a $[\mathrm{d}f \wedge \xi] = 0$, cela signifie qu'il existe $\zeta \in \Omega^{n-1}$ vérifiant $\mathrm{d}f \wedge \xi = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\zeta$. On aura donc $\xi - \mathrm{d}\zeta \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}f^n$ d'où $[\mathrm{d}\xi] = [\mathrm{d}(\xi - \mathrm{d}\zeta)] = 0$ dans $\mathcal{H}^{n+1}$.

L'assertion sur le conoyau de $\tilde{b}$ est évidente. □

LEMME 3.4.2. — *Sous l'hypothèse* (HI) *on a au voisinage de tout point p de $X \setminus \{0\}$:*

1) $\mathrm{d}(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n = \Omega_X^{n+1}$,
2) $\Omega_X^n = \mathrm{d}\Omega_X^{n-1} + \operatorname{Ker} \mathrm{d}f^n$ *et donc*
3) $\mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\Omega_X^{n-1} = \mathrm{d}f_\wedge \Omega_X^n$.

Démonstration. — Il suffit évidemment de traiter le cas où $p \in S \setminus \{0\}$. Soit $V = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \partial/\partial x_i$ un champ de vecteur holomorphe au voisinage de p vérifiant $V \cdot f \equiv 0$ et $V(p) \neq 0$.

Posons $\alpha = \sum_{i=0}^n a_i \mathrm{d}x^i$ où $\mathrm{d}x^i = (-1)^i \cdot \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$. Alors on a $\alpha \in \Omega_X^n$, $\alpha(p) \neq 0$ et $\mathrm{d}f_\wedge \alpha \equiv 0$.

Pour prouver 1), on veut montrer que pour tout $g \in \mathcal{O}_p$, il existe $h \in \mathcal{O}_p$ vérifiant $\mathrm{d}(h\alpha) = g \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} + \Big(\sum_{j=0}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j}\Big) \cdot h = g.$$

Mais puisque $V(p) \neq 0$ on peut, dans un système de coordonnées locales convenablement centrées en p, se ramener à résoudre, pour tout $g \in \mathcal{O}_0$, une équation du type $\partial h/\partial x_0 + \xi \cdot h = g$ où $h \in \mathcal{O}_0$ est inconnu et où $\xi \in \mathcal{O}_0$ est donné. Ceci est élémentaire.

Montrons 2). Soit $w \in \Omega_p^n$. Alors d'après 1), on peut trouver $h \in \mathcal{O}_0$ telle que $\mathrm{d}w = \mathrm{d}(h\alpha)$. D'après De Rham, on aura donc $u \in \Omega_0^n$ telle que $w - h\alpha = \mathrm{d}u$. On en déduit alors 2) puis 3). □

Les faisceaux $\mathcal{H}^{n+1}$ et $\tilde{b} \cdot \mathcal{H}^{n+1}$ sont donc à support l'origine. On pourra donc confondre le faisceau $\mathcal{H}^{n+1}$ et l'espace vectoriel de ses sections à support l'origine E'. On prendra garde que le faisceau $\mathcal{E}''$ n'est pas en général à support l'origine sous l'hypothèse (HI).

On a une suite exacte courte grâce au lemme 3.4.1

$$0 \to \mathcal{H}^{n+1} \xrightarrow{\tilde{b}} \mathcal{E}'' \longrightarrow \Omega^{n+1}/\mathrm{d}f \wedge \Omega^n \to 0$$

qui donne une suite exacte courte de cohomologie à support l'origine, grâce au lemme 3.4.2,

$$0 \to E' \xrightarrow{\tilde{b}} E'' \longrightarrow H^0_{\{0\}}(\Omega^{n+1}/\mathrm{d}f \wedge \Omega^n) \to 0.$$

Mais l'endomorphisme $b : E' \to E'$ est la composée de $\tilde{b}$ et de j. La première assertion de finitude du théorème 3.1.1 est donnée par la proposition suivante, compte tenu du lemme 3.4.1 et de ce qui précède.

Proposition 3.4.3. — *Sous l'hypothèse* (HI)*, le noyau*

$$H^0_{\{0\}}\Big(X, \frac{\mathrm{d}(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n}{\mathrm{d}f \wedge d\Omega^{n-1}}\Big)$$

de l'application $j : E'' \to E'$ est de dimension finie.

La dimension de $\operatorname{Ker} j$ *et donc a fortiori celle de* $\operatorname{Ker} b$ *est majorée par la dimension de* $H^1_{\{0\}}(S, \mathcal{H}^n/b\mathcal{H}^n)$[(4)].

Démonstration. — Commençons par montrer que l'on a une suite exacte de faisceaux à supports dans S :

$$0 \to \frac{(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n \cap \operatorname{Ker}\mathrm{d}}{(\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^n \cap \operatorname{Ker}\mathrm{d}} \longrightarrow \frac{(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n}{(\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^n} \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \frac{\mathrm{d}(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n}{\mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\Omega^{n-1}_X} \to 0.$$

L'exactitude résulte simplement du fait que si w appartenant à $(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n$ vérifie $\mathrm{d}w = \mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\mu$, alors on a $\mathrm{d}(w + \mathrm{d}f_\wedge\mu) = 0$; donc $[w] = [w + \mathrm{d}f_\wedge\mu]$ dans $(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n/(\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^n$ est bien l'image de $w + \mathrm{d}f_\wedge\mu \in (\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^n \cap \operatorname{Ker}\mathrm{d}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant et de son corollaire.

Lemme 3.4.4. — *Sous l'hypothèse* (HI)*, on a pour tout $p \in [1, n]$,*

$$\mathcal{A}(p) = \begin{cases} (\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^{p-1} = (\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^{p-1}, \\ \underline{H}^i_S\big((\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^{p-1}\big) = 0 \quad \text{pour } \ i \le n - (p-1). \end{cases}$$

Preuve du lemme 3.4.4. — La propriété $\mathcal{A}(1)$ est vraie car

$$(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^0 = (\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^0 = 0.$$

Supposons $\mathcal{A}(p)$ vraie avec $p \in [1, n-1]$ et montrons-la pour $p+1$. La suite exacte de faisceaux sur X

$$(*) \qquad 0 \to (\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^{p-1} \longrightarrow \Omega^{p-1}_X \xrightarrow{\ \wedge\mathrm{d}f\ } (\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^p \to 0$$

donne pour $i + 1 \le n$, puisque $\underline{H}^k_S(\Omega_X) = 0$ pour $k < n$ $(= \operatorname{codim}_X S)$,

$$\underline{H}^i_S((\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^p) \subset \underline{H}^{i+1}_S((\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^{p-1})$$

en utilisant $\mathcal{A}(p)$ qui donne $(\operatorname{Ker}\mathrm{d}f)^{p-1} = (\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^{p-1}$. Pour $i \le n-p$, on a $i + 1 \le n - (p-1) \le n$ et donc $\underline{H}^{i+1}_S((\operatorname{Im}\mathrm{d}f)^{p-1}) = 0$ grâce à $\mathcal{A}(p)$.

(4) Les faisceaux $\mathcal{H}^p$ ont été introduits à la proposition 2.3.1.

Montrons maintenant que $(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^p = (\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^p$. Comme on a déjà obtenu que $\underline{H}^1_S((\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^p) = 0$, car $p \leq n-1$, on a

$$(\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^p = j_* j^* (\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^p$$

où $j : X - S \hookrightarrow X$ est l'inclusion. Mais on a $j^*((\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^p) = j^*((\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^p)$ puisque $\mathrm{d}f \neq 0$ sur $X - S$. De plus pour $n \geq 2$, S est de codimension ≥ 2 dans X et on a $j_* j^* (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^p = (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^p$ par Hartogs[(5)]. On en déduit que $\mathcal{A}(p+1)$ est vraie. $\square$

COROLLAIRE 3.4.5. — *Sous l'hypothèse* (HI) *on a*

$$H^0_{\{0\}}\Big(S, \frac{\operatorname{Ker} \mathrm{d}f^n}{\operatorname{Im} \mathrm{d}f^n}\Big) = 0.$$

Preuve du corollaire 3.4.5. — Considérons à nouveau la suite exacte (*). Comme on a

$$H^i_{\{0\}}(X, \Omega^{p-1}_X) = 0, \quad \forall p \geq 1,\ \forall i \leq n,$$

on a, pour tout $p \leq n-1$ et tout i tel que $i + p \leq n+1$,

$$H^i_{\{0\}}(X, \operatorname{Im} \mathrm{d}f^p) = 0. \tag{**}$$

En effet, c'est clair pour $p = 0$; si c'est vrai pour $p \leq n-1$, alors la suite exacte (*) et $\mathcal{A}(p+1)$ donnent l'inclusion

$$H^i_{\{0\}}\big(X, (\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^{p+1}\big) \subset H^{i+1}_{\{0\}}\big(X, (\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^p\big)$$

pour $i + 1 + p \leq n+1$. On en conclut, en prenant $p = n-1$ et $i = 2$ dans (**) que $H^2_{\{0\}}(X, (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^{n-1}) = 0$ grâce à $\mathcal{A}(n)$. La suite exacte (*) avec $p = n$ donne alors

$$H^1_{\{0\}}\big(X, (\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^n\big) = 0.$$

La suite exacte

$$0 \to \operatorname{Im} \mathrm{d}f^n \longrightarrow (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n \longrightarrow \frac{(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n}{(\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^n} \to 0$$

donne enfin $H^0_{\{0\}}\big(X, \frac{(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n}{(\operatorname{Im} \mathrm{d}f)^n}\big) = 0$ puisque $H^0_{\{0\}}(X, (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n) = 0$. $\square$

Fin de la preuve de la proposition 3.4.3. — Remarquons maintenant que l'hypothèse (HI) implique que le faisceau $\mathcal{H}^n$ est localement constant sur S^*. En effet, près de $y \in S^*$, l'existence d'un champ de vecteur holomorphe non nul en y et annulant f permet de choisir un système de coordonnées où f ne dépend pas de la variable x_0. Notons $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ la projection dans un tel système de coordonnées. Comme f est à singularité isolée dans $\mathbb{C}^n$, on en déduit que

$$(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^n \cap \operatorname{Ker} \mathrm{d} \simeq \pi^{-1}(\Omega^n_{\mathbb{C}^n}) \quad \text{modulo } \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\Omega^{n-2} \simeq \mathrm{d}(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^{n-1}$$

(5) Pour $n = 1$ l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vraie car vide.

d'où notre assertion. Alors le faisceau

$$\mathcal{H}^n/b\mathcal{H}^n := \frac{(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}}{(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}f)^n \cap \mathrm{Ker} d}$$

est un système local sur S^*, de rang μ_{tr} près de y, où $\mu_{tr} = \dim_{\mathbb{C}}\big(\Omega^n_{\mathbb{C}^n}/\mathrm{d}f_\wedge\Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^n}\big)$ est le rang sur $\mathbb{C}[[b]]$ du faisceau localement constant sur S^* de (a,b)-modules associé au faisceau localement constant de pré-(a,b)-modules (sans torsion) $\mathcal{H}^n$.

Comme S est une réunion finie de disques topologiques ayant même centre (et sinon disjoints) on en déduit que $H^1_{\{0\}}(S,\mathcal{H}^n/b\mathcal{H}^n)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

La suite exacte de cohomologie à support l'origine de la suite exacte

$$0 \to \frac{(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n \cap \mathrm{Ker}\, d}{(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}f)^n \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}} \longrightarrow \frac{(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n}{(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}f)^n} \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \frac{\mathrm{d}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n}{\mathrm{d}f_\wedge\mathrm{d}\Omega^{n-1}_X} \to 0$$

donne alors le « tronçon » exact

$$0 \simeq H^0_{\{0\}}\Big(S, \frac{(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n}{(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}f)^n}\Big) \longrightarrow H^0_{\{0\}}\Big(S, \frac{\mathrm{d}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f)^n}{\mathrm{d}f_\wedge\mathrm{d}\Omega^{n-1}_X}\Big) \longrightarrow H^1_{\{0\}}\big(S,\mathcal{H}^n/b\mathcal{H}^n\big)$$

qui permet de conclure à la finitude de l'espace vectoriel $H^0_{\{0\}}\big(S, \frac{\mathrm{d}(\mathrm{Ker}\mathrm{d}f)^n}{\mathrm{d}f_\wedge\mathrm{d}\Omega^{n-1}_X}\big)$ et donc à la finitude de $\mathrm{Ker}\, j$. □

Fin de la démonstration du théorème 3.1.1. — Il nous reste à montrer que le conoyau de $b : E' \to E'$ est de dimension finie. Ceci va résulter de la finitude du quotient $E''/\tilde{b}E'$, qui a déjà été obtenue, et de la finitude donnée par les lemmes 3.3.2, 3.3.3 et le lemme 3.4.6 ci-dessous. La suite exacte suivante permet alors de conclure

$$E''/\tilde{b}E' \xrightarrow{\ j\ } E'/bE' \longrightarrow E'/jE'' + bE' \to 0$$

puisque que l'on a déja obtenu la finitude de $\mathrm{Ker}\, j$.

Lemme 3.4.6. — *Sous l'hypothèse* (HI) *on a un isomorphisme d'espace vectoriel*

$$DR^{n+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} E'/jE'' + bE' \simeq E'/jE''.$$

Démonstration. — Rappelons que le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ est défini comme le quotient $\mathcal{D}/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par $\widehat{J(f)}$ et $\mathrm{Ann} f \subset T_X$. D'après les lemmes 3.3.2 et 3.3.3, il est holonome et on a l'isomorphisme

$$DR^{n+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{O}/\sum_{j=1}^{M}\mathcal{O}g_j + \sum_{j=1}^{\ell}\widetilde{V}_j(\mathcal{O})$$

où $g_1, \ldots, g_M$ engendrent $\widehat{J(f)}$ sur $\mathcal{O}$, où $V_1, \ldots, V_\ell$ engendrent $\mathrm{Ann}(f)$ sur $\mathcal{O}_X$ et où on associe au champ de vecteur V l'opérateur différentiel $\widetilde{V}$ d'ordre 1 défini par

$$\widetilde{V}(h) = V \cdot h + \mathrm{div}(V) \cdot h.$$

Montrons que ceci est bien linéairement isomorphe à

$$E'/j(E'') + bE' \simeq E'/jE''$$

comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. D'abord $w \in \Omega^{n+1}_{X,0}$ donne une classe dans

$$E'' = H^0_{\{0\}}(\Omega^{n+1}/\mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\Omega^{n-1}_X)$$

si et seulement si localement dans $X \setminus \{0\}$, w est dans $\mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\Omega^n_X$. D'après l'égalité $\mathrm{d}f_\wedge \mathrm{d}\Omega^{n-1}_X = \mathrm{d}f_\wedge \Omega^n_X$ sur X^* prouvée au lemme 3.4.2, w induit une classe de E'' si et seulement si $w \in \widehat{J(f)} \cdot \Omega^{n+1}_X$.

Si $v_1, \ldots, v_\ell \in (\mathrm{Kerd}f)^n$ correspondent à $V_1, \ldots, V_\ell$, on a

$$\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{d}(\mathcal{O}v_j) = \Big(\sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{V}_j(\mathcal{O})\Big) \cdot \mathrm{d}x.$$

On en déduit, puisque la relation $j \circ \tilde{b} = b$ montre que $bE' \subset jE''$, les isomorphismes

$$\begin{aligned} E'/jE'' + bE' &\simeq \Omega^{n+1}_X / \widehat{J(f)} \cdot \Omega^{n+1}_X + \Big(\sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{V}_j(\mathcal{O})\Big) \cdot \mathrm{d}x \\ &\simeq \mathcal{O}/\widehat{J(f)} + \sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{V}_j(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Ceci prouve notre assertion. □

3.5. Généralisation de la formule de J. Milnor. — Une conséquence simple de ce qui précède est la généralisation suivante de la formule de J. Milnor, donnant, sous nos hypotèses, la dimension du n-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f à l'origine.

Corollaire 3.5.1. — *Sous l'hypothèse* (HI), *l'espace vectoriel*

$$E' := \mathcal{H}^{n+1}_0 \simeq H^0_{\{0\}}(Y, \mathcal{H}^{n+1})$$

est un pré-(a,b)-module de rang r vérifiant

$$\begin{aligned} \dim E'/b \cdot E' &= \mu(f) + \nu(f) - \gamma + \delta, \\ \dim H^n(F_0, \mathbb{C}) &= r = \mu(f) + \nu(f) - \gamma, \end{aligned}$$

où F_0 désigne la fibre de Milnor de f à l'origine et où γ et δ sont les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}\, j$ *et de* $\mathrm{Ker}\, b$.

Démonstration. — Rappelons que le rang d'un pré-(a,b)-module est, par définition, le rang du (a,b)-module associé. C'est donc le rang du fibré de Gauss-Manin de f à l'origine et ce rang est égal à la dimension de $H^n(F_0,\mathbb{C})$. La suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} j \to E'' \xrightarrow{j} E' \to E'/jE'' \to 0$$

donne, grâce au théorème de finitude 3.1.1, la suite exacte d'espaces vectoriels de dimensions finies

$$0 \to \operatorname{Ker} j/(\operatorname{Ker} j \cap \tilde{b}\cdot E') \longrightarrow E''/\tilde{b}E' \longrightarrow E'/b\cdot E' \longrightarrow E'/jE'' \to 0.$$

On a $\operatorname{Ker} b \simeq \operatorname{Ker} j \cap \tilde{b}\cdot E'$ via $\tilde{b}$ puisque $\tilde{b}$ est injective et que $b = j\circ\tilde{b}$ dans E'. On obtient alors, puisque $\dim E''/\tilde{b}\cdot E' = \mu(f)$ et $\dim E'/jE'' = \nu(f)$, la relation

$$\dim(E'/b\cdot E') + \gamma - \delta = \mu(f) + \nu(f).$$

La suite exacte $0 \to B(E') \to E' \to E'/B(E') \to 0$ donne alors la relation

$$\dim E'/b\cdot E' = \dim\big(E'/B(E') + b\cdot E'\big) + \dim\big(B(E')/b\cdot B(E')\big).$$

Comme on a $r = \dim\big(E'/B(E') + b\cdot E'\big)$ et $\dim B(E')/b\cdot B(E') = \dim \operatorname{Ker} b$, on conclut facilement. □

Remarque importante. — Les entiers γ et δ sont bien gênants ; aussi est-il intéressant de disposer de situations où l'on sait qu'ils sont nuls.

Pour avoir l'injectivité de l'application $E'' \xrightarrow{j} E'$, c'est-à-dire la nullité de γ, une condition nécessaire et suffisante est donnée par l'inclusion

$$\text{(P)} \qquad \mathrm{d}(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f^n) \cap \widehat{J}(f).\Omega^{n+1} \subset \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\Omega_X^{n-1}$$

alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'injectivité de $E' \xrightarrow{b} E'$, c'est-à-dire pour la nullité de δ, est donnée par l'inclusion

$$\text{(P}'\text{)} \qquad \mathrm{d}(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f^n) \cap (\mathrm{d}f \wedge \Omega_X^n) \subset \mathrm{d}f \wedge d\Omega_X^{n-1}.$$

Bien sûr, on a toujours $\delta \leq \gamma$ et la condition (P) implique la condition (P′).

Corollaire 3.5.2. — *Sous les hypothèses* (HI) *et la condition* (P) *on a*

$$\operatorname{rg}(E') = \dim E'/bE' = \mu(f) + \nu(f),$$

où $\mu(f) = \dim \widehat{J(f)}/J(f)$ *et où* $\nu(f) = \dim DR^{n+1}(\mathcal{M})$. *Dans ces conditions la cohomologie de degré n de la fibre de Milnor de f à l'origine est de dimension* $\mu(f)+\nu(f)$.

Nous montrerons au paragraphe 4 que cette condition est souvent vérifiée.

En fait je ne connais pas d'exemple de cas où f vérifie l'hypothèse (HI) et où la condition (P) n'est pas réalisée.

3.6. Exemple. — Voici un exemple simple (avec $n = 1$)[6] :

$$f(X,Y) = X^3(X^3 + Y^3).$$

Il est facile de voir que $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f^1/\mathcal{O} \cdot \mathrm{d}f$ est engendré par la 1-forme associé au champ de vecteur

$$V = XY^2 \frac{\partial}{\partial X} - (2X^3 + Y^3) \frac{\partial}{\partial Y}$$

annulant f et de divergence $\operatorname{div} V = -2Y^2$. On a

$$J(f) = X^2 \cdot (2X^3 + Y^3, XY^2), \quad \widehat{J(f)} = (X^2), \quad \dim_{\mathbb{C}} \widehat{J(f)}/J(f) = \mu(f) = 9.$$

Pour calculer $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{X,Y\}/(X^2) + \widetilde{V}(\mathbb{C}\{X,Y\}))$ on regarde l'identité

$$\widetilde{V}(X^pY^q) = (p - q - 2)X^pY^{q+2} - 2qX^{p+3}Y^{q-1}.$$

On peut donc réduire X^aY^b à $X^{a+3}Y^{b-3}$ pourvu que $a \neq b$ et $b \geq 2$.

Si $a = b \geq 2$, on est dans (X^2). Il reste donc $1, X, Y$ et X^pY pour $p < 2$. Donc $1, X, Y, XY$ donne une base et $\nu(f) = 4$. Alors $\mathcal{L}(E')$, le complété b-adique de E' (voir le paragraphe 2), est un (a,b)-module de rang 13. Une base de $E'/_{bE'}$ est donnée par

$$1, X, Y, XY, X^2, X^3, X^4, X^5, X^2Y, X^3Y, X^4Y, X^5Y, X^2Y^2$$

et on a $a[1] = \frac{1}{3}b[1] \ldots a[X^pY^q] = \frac{1}{6}(p + q + 2)b[X^pY^q]$.

4. Quelques cas sans torsion

4.1. Le calcul de $\mu(f)$ est en général assez simple (comparable au calcul du nombre de Milnor dans le cas d'une singularité isolée). Le calcul de $\nu(f)$, bien que l'on ait donné un isomorphisme de $DR^{n+1}(\mathcal{M})$ sur un espace vectoriel plus « concret » au lemme 3.3.2, est en pratique beaucoup plus délicat car l'espace vectoriel considéré n'a pas une structure de module sur $\mathcal{O}_0$.

Sans la condition (P) pour f, on obtient seulement une majoration de la dimension du quotient $E'/b{\cdot}E'$, ce qui rend les calculs encore plus pénibles. D'où l'intérêt de savoir, pour une sous-famille aussi large que possible de la famille des fonctions vérifiant l'hypothèse (HI), que la condition (P) est satisfaite. Ceci est d'autant plus utile que la vérification de cette condition est délicate, comme on peut s'en convaincre sur les exemples.

Nous proposons donc de donner dans ce paragraphe deux résultats qui permettent de voir que la condition (P) est très souvent vérifiée sous l'hypothèse (HI).

[6] Notons que (HI) est toujours vérifiée pour $n = 1$. C'est également le cas pour la condition (P) comme on le montrera au paragraphe 4.

Le premier résultat (théorème 4.2.2) montre que la propriété (P) est toujours vérifiée pour $n = 1$, c'est-à-dire pour les germes de fonctions holomorphes (réduites ou non) à l'origine de $\mathbb{C}^2$.

Le second (proposition 4.3.2) assure que la suspension d'une fonction à singularité isolée avec une fonction qui vérifie (HI) et (P) vérifie également (HI) et (P).

4.2. Courbes planes

LEMME 4.2.1 (récurrence tordue). — *Soient $p_1, \dots, p_k$ des entiers ≥ 2 et soient $\phi_1, \dots, \phi_k$ des fonctions strictement croissantes*

$$\phi_j : [0, p_j - 1] \cap \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$$

vérifiant $\phi_j(p_j - 1) = 1$ pour tout $j \in [1, k]$. Considérons des propositions $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ indexées par les entiers $\sigma_j \in [0, p_j - 1] \cap \mathbb{N}$. On suppose que

1) *$A(0, \dots, 0)$ est vraie ;*
2) *l'implication $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \Rightarrow A(\sigma_1, \dots, \sigma_j + 1, \dots, \sigma_k)$ est vraie si les deux conditions suivantes sont satisfaites*
   a) *$\sigma_j \leq p_j - 2$,*
   b) *$\phi_j(\sigma_j) = \min_{\ell \in [1,k]} \{\phi_\ell(\sigma_\ell)\}$.*

Alors la proposition $A(p_1 - 1, \dots, p_k - 1)$ est vraie.

La preuve (élémentaire) est laissée en exercice au lecteur. (On prendra garde que nous n'affirmons pas que $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est vraie pour toutes les valeurs de $\sigma_1, \dots, \sigma_k$.)

THÉORÈME 4.2.2. — *Soit f un germe non nul de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$, vérifiant $f(0) = 0$. Alors f vérifie* (HI) *et* (P).

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 4.2.3. — *Soit f un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$, vérifiant $f(0) = 0$ et que l'on suppose non identiquement nul. Écrivons*

$$f = u_1^{p_1} \cdots u_k^{p_k} \cdot \psi$$

où $u_1, \dots, u_k$ sont des germes irréductibles en 0 deux à deux distincts, où ψ est un germe nul en 0 supposé réduit (*donc à singularité isolée en* 0) *et où les entiers $p_1, \dots, p_k$ sont au moins égaux à 2. On suppose de plus qu'aucun des u_j ne divise ψ. Alors on a*

1) $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f^1 = \mathcal{O} \cdot \alpha$ *où* $\alpha := \sum_{l=1}^{k} p_\ell \cdot u_1 \cdots \hat{u}_\ell \cdots u_k \cdot \psi \cdot \mathrm{d}u_\ell + u_1 \cdots u_k \cdot \mathrm{d}\psi$ *;*
2) *pour tout $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ vérifiant $\mathrm{d}(h \cdot \alpha) \in (u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}) \cdot \Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$ on a $h \in (u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$.*

Nous allons maintenant traiter le cas où $\psi(0) \neq 0$ dans la proposition précédente. On peut alors supposer que $\psi \equiv 1$.

PROPOSITION 4.2.4. — *Dans la même situation que la proposition précédente, supposons maintenant que* $\psi \equiv 1$. *Alors on a*

1) $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f^1 = \mathcal{O} \cdot \alpha$ *où* $\alpha := \sum_{\ell=1}^k p_\ell \cdot u_1 \cdots \hat{u}_\ell \cdots u_k \cdot \mathrm{d}u_\ell$ *;*
2) *pour tout* $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ *vérifiant* $\mathrm{d}(h \cdot \alpha) \in (u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}) \cdot \Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$, *on peut écrire* $h = h_0 + h_1 \cdot u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}$ *avec* $h_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ *et* $h_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ *vérifiant* $\mathrm{d}(h_0 \cdot \alpha) \equiv 0$.

Preuve de 4.2.3

Assertion 1). La suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \to (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^1 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \Omega^2_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \Omega^2_{\mathbb{C}^2}/\mathrm{d}f \wedge \Omega^1_{\mathbb{C}^2} \to 0$$

montre que le faisceau $(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^1$ est localement libre de rang 1 d'après le théorème de Hilbert pour $\mathbb{C}^2$. Comme on a $\mathrm{d}f = u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1} \cdot \alpha$ on a

$$\mathcal{O} \cdot \alpha \hookrightarrow (\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^1.$$

Il s'agit de voir que cette inclusion est une égalité. Mais comme on sait que $(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^1$ est libre de rang 1 près de l'origine, il suffit de prouver cette égalité en dehors de l'origine d'après Hartogs. Quand $\mathrm{d}f$ ne s'annule pas, c'est clair car $\mathrm{d}f$ et α diffèrent d'un facteur inversible et on a $(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^1 = \mathcal{O}.\mathrm{d}f$ près d'un tel point.

Il nous suffit donc de montrer cette égalité près du point générique de $u_j = 0$ pour chaque $j \in [1, k]$. Au voisinage d'un tel point, $\mathrm{d}f$ ne diffère de $u_j^{p_j-1} \cdot \alpha$ que par un facteur inversible ; on a donc $(\operatorname{Ker} \mathrm{d}f)^1 = \operatorname{Ker}(\wedge\alpha)$. Mais près d'un tel point α ne s'annule pas car $p_j u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k \cdot \psi \cdot \mathrm{d}u_j$ est non nulle alors que la somme

$$\sum_{i \neq j} p_\ell \cdot u_1 \cdots \hat{u}_\ell \cdots u_k \cdot \psi \cdot \mathrm{d}u_\ell$$

est nulle en ce point (puisqu'il y a u_j en facteur). On a donc $\operatorname{Ker}(\wedge\alpha) = \mathcal{O} \cdot \alpha$ près d'un tel point, ce qui achève la preuve de l'assertion 1).

Pour prouver l'assertion 2) nous allons utiliser la « récurrence tordue » donnée au lemme précédent avec l'assertion suivante sur $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$:

$$A(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) := \big(\{\mathrm{d}(h \cdot \alpha) \in u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} \cdot \Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}\} \Rightarrow \{h \in u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}\}\big).$$

Bien sûr, $\sigma_j \in [0, p_j - 1]$ pour tout $j \in [1, k]$ et $A(0, \ldots, 0)$ est vraie. Nous utilisons les fonctions $\phi_j(x) = (x + 1)/p_j$ pour $j \in [1, k]$.

Supposons donc que $A(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ soit vraie et que les conditions a) et b) de la « récurrence tordue » soient satisfaites. Considérons $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ tel que

$$\mathrm{d}(h \cdot \alpha) \in (u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}) \cdot \Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}.$$

Alors grâce à $A(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, on peut écrire

$$h = u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} \cdot h'$$

et il s'agit essentiellement de montrer que l'hypothèse

$$(*) \qquad d(u_1^{\sigma_1}\cdots u_k^{\sigma_k}\cdot h'\cdot\alpha)\in(u_1^{\sigma_1}\cdots u_j^{\sigma_j+1}\cdots u_k^{\sigma_k})\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$$

et les conditions a) et b) permettent de conclure que l'on a $h'\in(u_j)$.

Quelques calculs pénibles montrent que l'hypothèse (*) donne que la forme

$$\begin{aligned}\omega = h'\cdot\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{k}&(p_j\cdot\sigma_i-p_i\cdot\sigma_j)\cdot u_1\cdots\hat{u}_i\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot\psi\cdot du_i\\ &-h'\cdot\sigma_j u_1\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot d\psi+p_j\cdot u_1\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot\psi\cdot dh'\\ +h'\cdot\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{k}&(p_j-p_i)\cdot u_1\cdots\hat{u}_j\cdots\hat{u}_i\cdots u_k\cdot\psi\cdot du_i\\ &+(p_j-1)\cdot h'\cdot u_1\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot d\psi\end{aligned}$$

vérifie $\omega\wedge du_j\in(u_j)\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$. En regroupant les termes on obtient

$$\begin{aligned}\omega = h'\sum_{i\neq j}&(p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1))\cdot u_1\cdots\hat{u}_i\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot\psi\cdot du_i\\ &(p_j-\sigma_j-1)\cdot h'\cdot u_1\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot d\psi\\ &\qquad+p_j\cdot u_1\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot\psi\cdot dh'.\end{aligned}$$

Comme on a supposé $p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1)\geq 0$ pour tout $i\in[1,k]$, c'est-à-dire que $\phi_j(\sigma_j)=(\sigma_j+1)/p_j$ est l'infimum des $(\sigma_i+1)/p_i$ pour $i\in[1,k]$, la fonction

$$\lambda=(h')^{p_j}\cdot\psi^{p_j-\sigma_j-1}\cdot\prod_{i\neq j}u_i^{p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1)}$$

est holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ et la condition

$$\omega\wedge du_j\in(u_j)\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$$

donne $d\lambda\wedge du_j\in(u_j)\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$. Donc la restriction de λ à la courbe lisse et connexe $\{u_j=0\}\setminus\{0\}$ est constante et on a

$$\lambda=\lambda_0+u_j\cdot L$$

avec $\lambda_0\in\mathbb{C}$ et $L\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$. Comme on a $\sigma_j+1<p_j$ et $\psi(0)=0$, la fonction λ est nulle en 0 et $\lambda_0=0$. Alors $\lambda\in(u_j)$ et, puisque cet idéal est premier et ne contient ni ψ ni u_i pour tout $i\neq j$ et $i\in[1,k]$, on a $h'\in(u_j)$, ce qui prouve $A(\sigma_1,\ldots,\sigma_j+1,\ldots,\sigma_k)$. □

On remarquera que la preuve de 4.2.3 utilise de façon essentielle le fait que $\psi(0)=0$. Le cas $\psi\equiv 1$ est donc plus délicat.

Preuve de 4.2.4. — Le point 1) se prouve de façon analogue au 1) de la proposition précédente. Pour le point 2), nous allons utiliser la même stratégie que précédement mais avec

$$\begin{aligned} A(\sigma_1,\dots,\sigma_k) \ := \Big(\{\mathrm{d}(h\cdot\alpha) \in u_1^{\sigma_1}\cdots u_k^{\sigma_k}\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}\} \\ \Rightarrow \{h = h_0 + h_1\cdot u_1^{p_1-1}\cdots u_k^{p_k-1} \\ \text{avec } h_0\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \text{ vérifiant } \mathrm{d}(h_0\cdot\alpha)\equiv 0\}\Big).\end{aligned}$$

Comme $A(0,\dots,0)$ est trivialement vérifiée, montrons que si $j\in[1,k]$ vérifie

$$\frac{\sigma_j+1}{p_j} = \min_{\ell\in[1,k]}\Big\{\frac{\sigma_\ell+1}{p_\ell}\Big\} < 1$$

alors l'implication

$$A(\sigma_1,\dots,\sigma_k) \Longrightarrow A(\sigma_1,\dots,\sigma_j+1,\dots,\sigma_k)$$

est vraie. Soit donc $h\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ tel que

$$\mathrm{d}(h\cdot\alpha)\in(u_1^{\sigma_1}\cdots u_j^{\sigma_j+1}\cdots u_k^{\sigma_k})\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$$

et supposons que $A(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ soit vraie. Alors on peut écrire

$$h = h_0 + h_1\cdot u_1^{\sigma_1}\cdots u_k^{\sigma_k}$$

avec $h_1\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ et $h_0\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ vérifiant $\mathrm{d}(h_0\cdot\alpha)\equiv 0$. L'hypothèse est alors que

$$\mathrm{d}(h_1\cdot\alpha)\in(u_1^{\sigma_1}\cdots u_j^{\sigma_j+1}\cdots u_k^{\sigma_k})\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}.$$

Les calculs de la proposition précédente restent valables (avec $\psi\equiv 1$) et conduisent à

$$\omega\wedge\mathrm{d}u_j\in u_j\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$$

avec

$$\begin{aligned}\omega = h_1\cdot\sum_{i\neq j}\big(p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1)\big)\cdot u_1\cdots\hat{u}_i\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot\mathrm{d}u_i \\ + p_j\cdot u_1\cdots\hat{u}_j\cdots u_k\cdot\mathrm{d}h_1.\end{aligned}$$

Si $\lambda = (h_1)^{p_j}\cdot\prod_{i\neq j}u_i^{p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1)}$, la fonction λ est holomorphe au voisinage de l'origine et on a

$$\mathrm{d}\lambda\wedge\mathrm{d}u_j\in u_j\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}.$$

On peut donc écrire $\lambda=\lambda_0+u_j\cdot L$ avec $\lambda_0\in\mathbb{C}$ et $L\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$.

• *Premier cas : il existe* $i_0\in[1,k]$ *tel que l'on ait* $p_j(\sigma_{i_0}+1)-p_{i_0}(\sigma_j+1)>0$ (on remarquera que le choix de j fait que tous les entiers $p_j(\sigma_{i_0}+1)-p_{i_0}(\sigma_j+1)$ sont positifs ou nuls). Alors comme $u_{i_0}(0)=0$, on a $\lambda_0=\lambda(0)=0$. On en déduit que l'on a $h_1\in(u_j)$, ce qui prouve le résultat cherché dans ce cas.

• *Deuxième cas : on a* $p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1)=0$ *pour tout* $i\in[1,k]$. On a alors simplement $\lambda=h_1^{p_j}$ et $\mathrm{d}\lambda\wedge\mathrm{d}u_j\in u_j\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$ donne

$$p_j\cdot h_1^{p_j-1}\cdot\mathrm{d}h_1\wedge\mathrm{d}u_j\in u_j\cdot\Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}.$$

Si on a $\lambda_0 = 0$, alors l'égalité $h_1^{p_j} = u_j \cdot L$ permet immédiatement de conclure. Si on a $\lambda_0 \neq 0$, alors h_1 est inversible près de l'origine et on a

$$\mathrm{d}h_1 \wedge \mathrm{d}u_j \in u_j \cdot \Omega^2_{\mathbb{C}^2,0}$$

d'où $h_1 = h_1(0) + u_j \cdot H$ avec $H \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$.

Posons alors $\delta := (\sigma_j + 1)/p_j$ ($= (\sigma_i + 1)/p_i$ pour tout $i \in [1,k]$!). On obtient

$$\begin{aligned} u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} \cdot \alpha &= \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell \cdot u_1^{\sigma_1+1} \cdots u_\ell^{\sigma_\ell} \cdots u_k^{\sigma_k+1} \cdot \mathrm{d}u_\ell \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{\ell=1}^{k} (\sigma_\ell + 1) \cdot u_1^{\sigma_1+1} \cdots u_\ell^{\sigma_\ell} \cdots u_k^{\sigma_k+1} \cdot \mathrm{d}u_\ell \\ &= \frac{1}{\delta} \mathrm{d}(u_1^{\sigma_1+1} \cdots u_k^{\sigma_k+1}). \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{d}(h_1(0) \cdot u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} \cdot \alpha) = 0$ et on peut poser

$$h_0' := h_1(0) \cdot u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} \quad \text{et} \quad h_1' = H$$

pour avoir $h = h_0 + h_0' + h_1' \cdot u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}$ avec $\mathrm{d}((h_0 + h_0') \cdot \alpha) \equiv 0$. □

REMARQUE. — Soit $\Delta = \mathrm{pgcd}(p_1, \dots, p_k)$. Alors si $\Delta = 1$, on ne rencontre pas de $h_0 = u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}$ vérifiant $\mathrm{d}(h_0 \cdot \alpha) = 0$. En effet, si on a $(\sigma_i + 1)/p_i = u/v < 1$ pour tout $i \in [1,k]$, avec $\mathrm{pgcd}(u,v) = 1$, on en déduit que $\sum_{i=1}^k a_i \cdot p_i = 1$ donne

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot p_i \cdot u = u = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (\sigma_i + 1) \cdot v,$$

ce qui est impossible puisque $u \notin \mathbb{Z} \cdot v$.

Par contre, si $\Delta > 1$, en posant $p_i = \Delta \cdot \sigma_i$ on obtient immédiatement que l'on a $\mathrm{d}(u_1^{\sigma_1-1} \cdots u_k^{\sigma_k-1} \cdot \alpha) = 0$.

4.3. Suspensions. — Considérons maintenant

- une fonction $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ admettant une singularité isolée à l'origine et
- une fonction $g : (\mathbb{C}^{p+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ vérifiant l'hypothèse (HI).

Alors la fonction $F : (\mathbb{C}^{n+p+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ définie par

$$F(x,y) = f(x) + g(y)$$

vérifie l'hypothèse (HI) : en effet le lieu singulier de F est bien de dimension 1 au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+p+2}$ puisqu'il est ensemblistement le produit des lieux singuliers de f et g ; et si le champ de vecteur holomorphe $\sum_{i=0}^p a_i \partial/\partial y_i$ annule g, il annule également F.

LEMME 4.3.1. — *Sous les hypothèses précisées ci-dessus on a*

$$(\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}F)^{n+p+1} = \Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1}} \bowtie \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}g^p + \mathrm{d}F \wedge \Omega^{n+p}_{\mathbb{C}^{n+p+2}}.$$

Demonstration. — Soient π_1 et π_2 les projections de $\mathbb{C}^{n+p+2} \equiv \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}^{p+1}$ respectivement. Le produit tensoriel externe $\mathcal{F} \bowtie \mathcal{G}$ de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules (respectivement de complexes de $\mathcal{O}$-modules) sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}^{p+1}$ désigne le produit tensoriel usuel

$$\pi_1^*(\mathcal{F}) \otimes \pi_2^*(\mathcal{G}) \quad \text{sur} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p+2}}$$

Considérons les complexes

$$K^\bullet(f) := (\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^{n+1}}, \wedge \mathrm{d}f) \quad \text{et} \quad K^\bullet(g) := (\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^{p+1}}, \wedge \mathrm{d}g)$$

où $\Omega^i_{\mathbb{C}^{n+1}}$ est en degré $i-(n+1)$ (resp. $\Omega^i_{\mathbb{C}^{p+1}}$ en degré $i-(p+1)$).

Comme f est à singularité isolée en 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$, le complexe $K^\bullet(f)$ est exact en degrés strictement négatifs. Il en est de même pour $\pi_1^*(K^\bullet(f))$ car π_1 est plat. On a

$$K^\bullet(F) := \big(\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^{n+p+2}}, \wedge \mathrm{d}F\big) \simeq K^\bullet(f) \bowtie K^\bullet(g),$$

d'où l'on déduit que

$$H^{-1}(K^\bullet(F) \simeq H^0\big(K^\bullet(f)\big) \bowtie H^{-1}\big(K^\bullet(g)\big).$$

Ce qui donne les isomorphismes

$$\begin{aligned}\frac{(\operatorname{Ker} \mathrm{d}F)^{n+p+1}}{\mathrm{d}F \wedge \Omega^{n+p}_{\mathbb{C}^{n+p+2}}} &\simeq \frac{\Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1}}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1}}} \bowtie \frac{(\operatorname{Ker} \mathrm{d}g)^p}{\mathrm{d}g \wedge \Omega^{p-1}_{\mathbb{C}^{p+1}}} \\ &\simeq \frac{\Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1}} \bowtie (\operatorname{Ker} \mathrm{d}g)^p}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1}} \wedge \pi_2^*((\operatorname{Ker} \mathrm{d}g)^p) + \Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1}} \wedge \mathrm{d}g \wedge \pi_2^*(\Omega^{p-1}_{\mathbb{C}^{p+1}})}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de constater que l'on a l'inclusion

$$\mathrm{d}f \wedge \Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1}} \wedge \pi_2^*((\operatorname{Ker} \mathrm{d}g)^p) + \Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1}} \wedge \mathrm{d}g \wedge \pi_2^*(\Omega^{p-1}_{\mathbb{C}^{p+1}}) \subset \mathrm{d}F \wedge \Omega^{n+p}_{\mathbb{C}^{n+p+2}}. \qquad \square$$

Proposition 4.3.2. — *Sous les hypothèses considérées ci-dessus, si la fonction g vérifie l'hypothèse* (HI) *et la condition* (P), *il en est de même pour la fonction F.*

Démonstration. — Montrons que F vérifie la condition (P). Soit donc $\alpha \in (\operatorname{Ker} \mathrm{d}F)^{n+p+1}$ vérifiant $\mathrm{d}\alpha \in \widehat{J(F)} \cdot \Omega^{n+p+2}_{\mathbb{C}^{n+p+2}}$. Ceci équivaut, par définition de l'idéal $\widehat{J(F)}$, à demander que $\mathrm{d}\alpha$ soit une section du faisceau $\mathrm{d}F \wedge \Omega^{n+p+1}$ en dehors de l'origine. Mais grâce au lemme 4.3.1, on peut écrire

$$\alpha = \mathrm{d}x \wedge \beta + \mathrm{d}F \wedge \omega \quad \text{avec} \quad \beta \in \pi_2^*\big((\operatorname{Ker} \mathrm{d}g)^p\big).$$

Comme $\mathrm{d}(\mathrm{d}F \wedge \omega) \in \mathrm{d}F \wedge \Omega^{n+p+1}$, la condition imposée à α équivaut à demander que $\mathrm{d}x \wedge \beta$ soit dans $(J(f) + J(g)) \cdot \Omega^{n+p+2}$ en dehors de l'origine. Décomposons alors

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0} = J(f)_0 \oplus V$$

où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (égale au nombre de Milnor de f en 0). Décomposons le germe de β le long de $\{0\}\times\mathbb{C}^{p+1}$ sous la forme $\beta=\beta_0+\beta_1$ avec

$$\beta_0\in J(f)_0\bowtie(\operatorname{Ker}\mathrm{d}g)^p \quad\text{et}\quad \beta_1\in V\otimes_{\mathbb{C}}\pi_2^{-1}\big((\operatorname{Ker}\mathrm{d}g)^p\big),$$

où π_2^{-1} désigne l'image réciproque ensembliste du faisceau.

Comme la différentielle partielle en y laisse $J(f)$ stable, la condition sur $\mathrm{d}\alpha$ est équivalente à demander que $\mathrm{d}_{/y}\beta_1\in V\otimes J(g)\cdot\Omega^{p+1}_{\mathbb{C}^{p+1}}$ en dehors de l'origine dans $\mathbb{C}^{p+1}$ [(7)]. Mais puisque g vérifie la propriété (P), on peut écrire

$$\beta_1=\Lambda+\mathrm{d}g\wedge M$$

avec $\Lambda\in V\otimes\pi_2^{-1}[(\operatorname{Ker}\mathrm{d}g_0)^p\cap\operatorname{Ker}\mathrm{d}]$ et $M\in V\otimes\pi_2^{-1}[\Omega^{p-1}_{\mathbb{C}^{p+1},0}]$. On conclut alors car on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x\wedge\Lambda\in\Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1},0}\bowtie\big((\operatorname{Ker}\mathrm{d}g)^p\cap\operatorname{Ker}\mathrm{d}\big)_0\subset\big((\operatorname{Ker}\mathrm{d}F)^{n+p+1}\cap\operatorname{Ker}\mathrm{d}\big)_0,\\ &\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}g\wedge M\in(\mathrm{d}F\wedge\Omega^{n+p})_0.\end{aligned}$$

□

Remarque. — Combinée avec les propositions 4.2.3 et 4.2.4, la proposition précédente fournit beaucoup d'exemples de fonctions vérifiant l'hypothèse (HI) et satisfaisant également la condition (P). Plus précisément, elle donne, pour chaque nouvel exemple de fonction vérifiant (HI) et satisfaisant la condition (P) une nouvelle famille d'exemples. Cela justifie d'explorer la condition (P) sur les fonctions les plus simples vérifiant (HI) pour $n=2$.

Proposition 4.3.3. — *On suppose que la fonction f est à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et que la fonction g vérifie l'hypothèse* (HI) *et la condition* (P)*, au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{p+1}$. Considérons les* (*pré*)-(a,b)*-modules*

$$E'_f:=\frac{\Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1},0}}{\mathrm{d}f\wedge d\Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^{n+1},0}},\quad E'_g:=\frac{\Omega^{p+1}_{\mathbb{C}^{p+1},0}}{\mathrm{d}((\operatorname{Ker}\mathrm{d}g)^p_0)},\quad E'_F:=\frac{\Omega^{n+p+2}_{\mathbb{C}^{n+p+2},0}}{\mathrm{d}((\operatorname{Ker}\mathrm{d}F)^{n+p+1}_0)}$$

Alors l'application donnée par produit extérieur

$$\Lambda: E'_f\otimes_{a,b}E'_g\longrightarrow E'_F$$

induit un isomorphisme entre les (a,b)-modules associés.

Démonstration. — Grâce au lemme de Nakayama, il suffit de voir que l'application induite $E'_f/b\cdot E'_f\otimes E'_g/b\cdot E'_g\to E'_F/b\cdot E'_F$ est un isomorphisme. Ceci résulte facilement des isomorphismes

$$\mathcal{O}/J(f)\otimes\widehat{J(g)}/J(g)\simeq\frac{\widehat{J(g)}}{J(f)\cap\widehat{J(g)}+J(g)}\simeq\widehat{J(F)}/J(F),$$

(7) On remarquera que $J(f)\cdot\mathrm{d}x\bowtie\operatorname{Ker}\mathrm{d}g^p\subset\mathrm{d}F\wedge\Omega^{n+p+1}$ et donc que l'on a $\alpha=\mathrm{d}x\wedge\beta_1$ modulo $\mathrm{d}F\wedge\Omega^{n+p}$.

$\mathcal{O}/J(f)\otimes E'_g/jE''_g \simeq E'_F/jE''_F$ et du diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}/J(f)\otimes \widehat{J(g)}/J(g) \arrow[r] \arrow[d] & E'_f/b\cdot E'_f \otimes E'_g/b\cdot E'_g \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}/J(f)\otimes E'_g/jE''_g \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{J(F)}/J(F) \arrow[r] & E'_F/b\cdot E'_F \arrow[r] & E'_F/jE''_F \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ceci achève la démonstration. □

Pour une version un peu plus sophistiquée de ce résultat à la « Thom-Sebastiani », le lecteur pourra consulter [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barlet (D.) – *Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de* $|f|^{2\lambda}$, Ann. Inst. Fourier, t. **34** (1984), pp. 75–106.

[2] ———, *Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4e série, t. **24** (1991), pp. 401–506.

[3] ———, *Théorie des* (a,b)*-modules I*, in *Complex Analysis and Geometry*, Plenum Press, 1993, pp. 1–43.

[4] ———, *Théorie des* (a,b)*-modules II. Extensions, Complex Analysis and Geometry*, in *Pitman Research Notes in Math.*, vol. 366, Pitman, 1997, pp. 19–59.

[5] ———, *Interactions de strates consécutives pour les cycles évanescents III : le cas de la valeur propre 1*, Prépublication Inst. É. Cartan (Nancy), t. **38** (2004).

[6] ———, *Interaction de strates consécutives II*, Publ. RIMS Kyoto University, t. **41** (2005), pp. 139–173.

[7] ———, *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces II*, Prépublication Inst. É. Cartan (Nancy), t. **42** (2005).

[8] Barlet (D.) & Saito (M.) – *Brieskorn Modules and Gauss-Manin systems for non isolated hypersurfaces singularities*, Prépublication Inst. É. Cartan (Nancy), t. **54** (2004).

[9] Belgrade (R.) – *Dualité et spectres des* (a,b)*-modules*, J. Algebra, t. **245** (2001), pp. 193–224.

[10] Bjork (J.-E.) – *Analytic D-modules and applications*, in *Mathematics and its Applications*, vol. 247, Kluwer, 1993.

[11] Brieskorn (E.) – *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math., t. **2** (1970), pp. 103–161.

[12] Grothendieck (A.) – *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., t. **29** (1966), pp. 93–101.

[13] HIRONAKA (H.) – *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II*, Ann. Math., t. **79** (1964), pp. 109–203 and 205–326.

[14] KASHIWARA (M.) – *On the maximally overdetermined systems of differential equations*, Publ. RIMS Kyoto University, t. **10** (1975), pp. 563–579.

[15] MALGRANGE (B.) – *Intégrale asymptotique et monodromie*, , t. **7** (1974), pp. 405–430, on pourra consulter l'Appendice de [1] pour des détails sur le théorème de positivité pour un germe de fonction holomorphe (réduite) arbitraire.

[16] SÉBASTIANI (M.) – *Preuve d'une conjecture de Brieskorn*, Manuscripta Math., t. **2** (1970), pp. 301–30.