

R. GLOWINSKI

A. MARROCO

**Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre
un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une
classe de problèmes de Dirichlet non linéaires**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 9, n° R2 (1975), p. 41-76

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1975__9_2_41_0

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR L'APPROXIMATION,
PAR ELEMENTS FINIS D'ORDRE UN,
ET LA RESOLUTION,
PAR PENALISATION-DUALITE,
D'UNE CLASSE DE PROBLEMES
DE DIRICHLET NON LINEAIRES**

par R. GŁOWINSKI ⁽¹⁾ et A. MARROCO ⁽²⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *On étudie dans cet article l'approximation par éléments finis et la résolution, par pénalisation-dualité, du problème de Dirichlet non linéaire*

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

avec $1 < p < +\infty$.

On montre la possibilité de généraliser les méthodes utilisées à d'autres problèmes non linéaires; des résultats numériques sont présentés.

I. INTRODUCTION

On étudie ⁽¹⁾ l'approximation et la résolution numérique de certains problèmes aux limites non linéaires de type monotone; on montre également que la méthode itérative utilisée pour résoudre les problèmes approchés permet de traiter d'autres problèmes non linéaires de la physique et de la mécanique.

REMARQUE 1.1

Parmi les travaux consacrés à l'analyse numérique des problèmes non linéaires monotones on citera Ciarlet-Schultz-Varga [1], Brezis-Sibony [2], Sibony [3], Lebaud [4] et la bibliographie de ces travaux. On trouvera en particulier dans [1] un cadre et des résultats généraux pour l'approximation

(1) Université Paris VI, U.E.R. 48, Laboratoire Analyse Numérique, Paris.

(2) I.R.I.A., Domaine de Voluceau, Rocquencourt.

(1) Le présent travail constitue un développement de Glowinski-Marroco [5], [6].

des problèmes non linéaires monotones; il semble cependant que les résultats des N° 6 et 8 améliorent ceux que l'on obtiendraient en appliquant directement le théorème 2.1 de [1, n° 2].

2. LE PROBLEME CONTINU

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^N , de frontière Γ régulière et p avec $1 < p < +\infty$. On note V l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, Banach réflexif pour la norme

$$\|v\|_1 = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}.$$

Soit p' l'exposant conjugué de p , d'où $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$; on note V' le dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ de V et $\|\cdot\|_*$ la norme duale de $\|\cdot\|_1$.

Soit $f \in V'$, on considère le problème aux limites non linéaire

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On notera dans ce qui suit A l'opérateur de $V \rightarrow V'$ défini par

$$(2.2) \quad A(v) = -\nabla \cdot (|\nabla v|^{p-2} \nabla v);$$

on remarque que pour $p = 2$ on a $A = -\Delta$.

Soit $J : V \rightarrow R$ définie par

$$(2.3) \quad J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \langle f, v \rangle$$

où, dans (2.3), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote la forme bilinéaire de la dualité entre V' et V ; le gradient J' de J en v est alors défini par

$$(2.4) \quad J'(v) = A(v) - f$$

et il en résulte qu'il y a équivalence entre résoudre (2.1) dans V et résoudre le problème de minimisation

$$(2.5) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v) & \forall v \in V \\ u \in V. \end{cases}$$

On a J strictement convexe, différentiable, avec $\lim_{\|v\|_1 \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$,

il en résulte (cf. par exemple Lions [7, Ch. 1]) que (2.5) admet une solution et une seule caractérisée par

$$(2.6) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle & \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

ce qui est une formulation *variationnelle* de (2.1).

REMARQUE 2.1

L'opérateur A et une variante⁽²⁾ du problème (2.1) interviennent (avec $1 < p < 2$) dans certains modèles mathématiques décrivant les déformations mécaniques de la glace (cf. M. C. Pelissier [8] et la bibliographie de ce travail).

3. LE PROBLEME APPROCHE

3.1. Définition du problème approché

On suppose⁽³⁾ (pour simplifier l'exposé) que Ω est un polygone de R^2 ; soit \mathfrak{T}_h une triangulation finie de Ω vérifiant

$$(3.1) \quad T \subset \bar{\Omega} \quad \forall T \in \mathfrak{T}_h, \quad \bigcup_{T \in \mathfrak{T}_h} T = \bar{\Omega}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} T, T' \in \mathfrak{T}_h \Rightarrow T \cap T' = \emptyset \quad \text{ou} \quad T \text{ et } T' \\ \text{n'ont qu'un sommet commun ou n'ont qu'un côté commun.} \end{cases}$$

On prend h égal à la longueur du plus grand côté des $T \in \mathfrak{T}_h$ et on approche V par

$$(3.3) \quad V_h = \{ v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_{\Gamma} = 0, v_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathfrak{T}_h \}$$

avec $P_1 =$ espace des polynômes de degré ≤ 1 ; on a $V_h \subset V$ et on approche (2.1) (et (2.6)) par le problème en *dimension finie*

$$(3.4) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \langle f, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h. \end{cases}$$

REMARQUE 3.1

On s'est limité dans ce travail à une approximation par éléments finis d'ordre un, dans la mesure où, pour $p \neq 2$, on peut avoir $u \notin V \cap W^{2,p}(\Omega)$ même avec des données *très régulières* (on renvoie au n° 8.1 ci-après pour de tels exemples); dans ces conditions l'intérêt d'utiliser des éléments d'ordre supérieur à *un* semble limité.

(2) Faisant intervenir des conditions aux limites plus compliquées.

(3) On adapterait sans peine ce qui suit au cas où Ω est un polyèdre de R^3 .

3.2. Résolubilité du problème approché

V_h étant un sous-espace fermé de V on a la

Proposition 3.1.

Le problème approché (3.4) admet une solution et une seule.

4. CONVERGENCE DES SOLUTIONS APPROCHÉES

On va démontrer, dans ce numéro, un théorème de convergence pour les solutions approchées, les estimations de l'erreur d'approximation feront l'objet du n° 6 ci-après.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans V on en déduit le

Théorème 4.1.

Si les angles de \mathcal{T}_h sont bornés inférieurement, uniformément en h , par $\theta_0 > 0$, on a, u étant la solution de (2.1)

$$(4.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_1 = 0.$$

Démonstration

On fait $v_h = u_h$ dans (3.4) d'où

$$(4.2) \quad \|u_h\|_1^{p-1} \leq \|f\|_* \quad (= \|u\|_1^{p-1}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note $\pi_h \varphi$ l'interpolé « linéaire » de φ sur \mathcal{T}_h , soit

$$\begin{cases} \pi_h \varphi \in V_h \\ \pi_h \varphi(P) = \varphi(P) \quad \forall P \text{ sommet de } \mathcal{T}_h; \end{cases}$$

sous les hypothèses sur \mathcal{T}_h de l'énoncé, il est standard (cf. par exemple Ciarlet-Raviart [9]) que

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad h \rightarrow 0.$$

Remarquant que (3.4) équivaut à

$$\begin{cases} J(u_h) \leq J(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

on en déduit

$$(4.3) \quad J(u_h) \leq J(\pi_h \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Compte tenu de (4.2) on peut extraire de $(u_h)_h$ une sous-suite, encore notée $(u_h)_h$, telle que

$$(4.4) \quad u_h \rightarrow u^* \quad \text{dans } V \text{ faible};$$

par *semi-continuité inférieure faible* on en déduit à la limite dans (4.3)

$$J(u^*) \leq J(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

d'où par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V

$$J(u^*) \leq J(v) \quad \forall v \in V;$$

on a donc $u^* = u$ et toute la suite u_h converge vers u .

La convergence forte résulte de la convergence faible et de

$$(4.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} J(u_h) = J(u);$$

en effet (4.5) implique $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_1 = \|u\|_1$ et V étant *uniformément convexe* pour $\|\cdot\|_1$, la convergence faible et la convergence de la norme entraînent la convergence forte.

REMARQUE 4.1

On donnera au n° 7 une démonstration du théorème 4.1 utilisant les relations d'ellipticité et de continuité des nos 5.1 et 5.2.

5. PROPRIETES D'ELLIPTICITE ET DE CONTINUTE

5.1. Résultats d'ellipticité

Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$; on a le

Lemme 5.1.

Si $p \geq 2$ on a

$$(5.1) \quad (|z|^{p-2} z - |y|^{p-2} y, z - y)_{\mathbb{R}^2} \geq \alpha |z - y|^p$$

avec $\alpha > 0$, indépendant de y et z .

Démonstration

Si $y = z$, (5.1) est vérifiée pour tout α ; de même si y et/ou z est nul, (5.1) est vérifiée pour $0 < \alpha \leq 1$. Supposant $y \neq z$, $y \neq 0$ on va étudier la fonction φ_1 définie par

$$\varphi_1(y, z) = \frac{(|z|^{p-2} z - |y|^{p-2} y, z - y)_{\mathbb{R}^2}}{|z - y|^p}.$$

La fonction φ_1 étant homogène (d'ordre zéro), on peut toujours supposer $|y| = 1$ et même $y = (1, 0)$. Remarquant que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi_1(y, z) = 1$ et que $\varphi_1(y, z) > 0 \quad \forall y, z, y \neq z$, il suffit, pour démontrer (5.1), de vérifier que $\liminf_{z \rightarrow y} \varphi_1(y, z) > 0$.

On pose

$$z_1 = 1 + \rho \cos \theta \quad , \quad z_2 = \rho \sin \theta$$

d'où

$$\begin{aligned} |z - y| &= \rho \quad , \quad |z| = \sqrt{1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2}, \\ (|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y)_{\mathbb{R}^2} &= 1 + (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{\frac{p}{2}} \\ &\quad - (1 + \rho \cos \theta)(1 + (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{\frac{p}{2}-1}); \end{aligned}$$

un développement limité à l'ordre 2 montre que si $y = (1, 0)$ on a

$$(5.2) \quad \varphi_1(y, z) = \frac{1 + (p-2) \cos^2 \theta + \varepsilon(\rho, \theta)}{\rho^{p-2}}$$

avec $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\rho, \theta) = 0$ uniformément en θ . Il en résulte que si $y \neq 0$, $\lim_{z \rightarrow y} \varphi_1(y, z) = +\infty$ si $p > 2$ et 1 si $p = 2$; ceci achève de démontrer (5.1).

On en déduit immédiatement la propriété d'ellipticité de la

Proposition 5.1.

On a $\forall u, v \in V$ et si $p \geq 2$

$$(5.3) \quad \langle A(v) - A(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|_1^p$$

avec $\alpha > 0$, indépendant de u et v .

Lemme 5.2.

Si $1 < p \leq 2$ on a $\forall y, z \in \mathbb{R}^2$

$$(5.4) \quad \begin{cases} (|z| + |y|)^{2-p} (|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y)_{\mathbb{R}^2} \geq \alpha |z - y|^2 \\ \text{avec } \alpha > 0 \text{ indépendant de } y \text{ et } z. \end{cases}$$

Démonstration

On pose

$$\varphi_2(y, z) = \frac{(|z| + |y|)^{2-p} (|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y)_{\mathbb{R}^2}}{|z - y|^2}$$

il suffit là encore de vérifier que $\liminf_{z \rightarrow y} \varphi_2(y, z) > 0$ pour $y = (1, 0)$. Avec les notations du lemme précédent on montre

$$(5.5) \quad \varphi_2(y, z) = 2^{2-p}(1 - (2-p)\cos^2 \theta + \varepsilon(\rho, \theta))$$

avec $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\rho, \theta) = 0$ uniformément en θ ; ceci démontre le lemme puisque $1 < p \leq 2$.

On en déduit la

Proposition 5.2

On a $\forall u, v \in V$ et si $1 < p \leq 2$

$$(5.6) \quad (\|v\|_1 + \|u\|_1)^{2-p} \langle A(v) - A(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|_1^2$$

avec $\alpha > 0$, indépendant de u et v .

Démonstration

Compte tenu du lemme 5.2 on a p.p.

$$(5.7) \quad (|\nabla v| + |\nabla u|)^{2-p} (|\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla(v - u) \geq \alpha |\nabla(v - u)|^2 \quad \forall u, v \in V.$$

Procédant comme dans Tartar [10, 2ème partie] à propos d'un problème voisin on élève les deux membres de (5.7) à la puissance $\frac{p}{2}$, d'où après intégration

$$(5.8) \quad \alpha^{\frac{p}{2}} \int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^p dx \leq \int_{\Omega} (|\nabla v| + |\nabla u|)^{(2-p)\frac{p}{2}} ((|\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla(v - u))^{\frac{p}{2}} dx;$$

on a

$$(|\nabla v| + |\nabla u|)^{(2-p)\frac{p}{2}} \in L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)$$

et

$$((|\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla(v - u))^{\frac{p}{2}} \in L^{\frac{2}{p}}(\Omega),$$

on déduit donc de (5.8) et de l'inégalité de Hölder

$$\alpha^{\frac{p}{2}} \|v - u\|_1^p \leq \langle A(v) - A(u), v - u \rangle^{\frac{p}{2}} \| |\nabla v| + |\nabla u| \|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{2}(2-p)},$$

soit encore

$$\begin{aligned} \alpha \|v - u\|_1^2 &\leq \langle A(v) - A(u), v - u \rangle \| |\nabla v| + |\nabla u| \|_{L^p(\Omega)}^{2-p} \\ &\leq \langle A(v) - A(u), v - u \rangle (\|v\|_1 + \|u\|_1)^{2-p}, \end{aligned}$$

c.q.f.d. ■

5.2. Résultats de continuité

Lemme 5.3

Si $p \geq 2$ on a $\forall y, z \in \mathbb{R}^2$

$$(5.9) \quad \begin{cases} ||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta |z - y| (|z| + |y|)^{p-2} \\ \text{avec } \beta > 0, \text{ indépendant de } y \text{ et } z. \end{cases}$$

Démonstration

On pose

$$\varphi_3(y, z) = \frac{||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y|}{|z - y| (|z| + |y|)^{p-2}},$$

il suffit pour démontrer (5.9) de vérifier que

$$\limsup_{z \rightarrow y} \varphi_3(y, z) < +\infty, \quad \text{avec } y = (1, 0).$$

En procédant comme dans les lemmes précédents on démontre

$$(5.10) \quad \varphi_3(y, z) = \frac{1}{2^{p-2}} (1 + (p-2) \cos^2 \theta + \varepsilon(\rho, \theta))$$

avec $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\rho, \theta) = 0$ uniformément en θ , d'où le résultat.

Proposition 5.3

Si $p \geq 2$ on a $\forall u, v \in V$

$$(5.11) \quad \|A(v) - A(u)\|_* \leq \beta \|v - u\|_1 (\|u\|_1 + \|v\|_1)^{p-2}$$

avec $\beta > 0$, indépendant de u, v .

Démonstration

On a

$$\|A(v) - A(u)\|_* = \sup_{\substack{w \in V \\ w \neq 0}} \frac{|\langle A(v) - A(u), w \rangle|}{\|w\|_1}$$

avec

$$\langle A(v) - A(u), w \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla w \, dx,$$

d'où, d'après successivement la proposition 5.3, l'inégalité de Hölder et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\langle A(v) - A(u), w \rangle| &\leq \int_{\Omega} \left| |\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right| |\nabla w| \, dx \leq \\ &\leq \beta \int_{\Omega} |\nabla(v - u)| (|\nabla v| + |\nabla u|)^{p-2} |\nabla w| \, dx \leq \\ &\leq \beta \|v - u\|_1 \| |\nabla v| + |\nabla u| \|_{L^p(\Omega)}^{p-2} \|w\|_1 \leq \\ &\leq \beta \|v - u\|_1 (\|v\|_1 + \|u\|_1)^{p-2} \|w\|_1 \end{aligned}$$

c.q.f.d. ■

Lemme 5.4

Si $1 < p \leq 2$ on a, $\forall y, z \in R^2$

$$(5.12) \quad \begin{cases} \left| |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y \right| \leq \beta |z - y|^{p-1}, \\ \text{avec } \beta > 0, \text{ indépendant de } y \text{ et } z. \end{cases}$$

Démonstration

On pourrait utiliser les lemmes précédents en posant

$$z' = |z|^{p-2}z \quad \text{d'où} \quad z = |z'|^{p'-2}z'$$

avec p' exposant conjugué de p . On a préféré raisonner directement; on pose

$$\varphi_4(y, z) = \frac{\left| |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y \right|}{|z - y|^{p-1}}$$

il suffit de montrer que $\limsup_{z \rightarrow y} \varphi_4(y, z) < +\infty$ pour $y = (1, 0)$; on a, avec les notations des lemmes précédents,

$$\varphi_4(y, z) = \rho^{2-p} (1 - (2-p) \cos^2 \theta + \varepsilon(\rho, \theta))$$

avec $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\rho, \theta) = 0$ uniformément en θ , d'où le résultat.

Proposition 5.4

Si $1 < p \leq 2$ on a $\forall u, v \in V$

$$(5.13) \quad \|A(v) - A(u)\|_* \leq \beta \|v - u\|_1^{p-1}$$

avec $\beta > 0$, indépendant de u, v .

Démonstration

Variante immédiate de celle de la proposition 5.3.

Tous les résultats précédents valent avec les mêmes α et β si $\Omega \subset R^N$, $N > 2$.

6. ESTIMATIONS DE L'ERREUR SI $u \in V \cap W^{2,p}(\Omega)$

On notera $\|v\|_2$ la norme de V dans $V \cap W^{2,p}(\Omega)$; u et u_h étant respectivement solutions de (2.6) et (3.4) on a le

Lemme 6.1

$$\|u_h\|_1 \leq \|u\|_1.$$

Démonstration

On a

$$\langle A(u_h), u_h \rangle = \langle f, u_h \rangle = \langle A(u), u_h \rangle,$$

d'où

$$\|u_h\|_1^{p-1} \leq \|A(u)\|_*$$

or

$$\|A(u)\|_* = \|u\|_1^{p-1}$$

d'où le résultat.

Relativement à l'erreur d'approximation on a le

Théorème 6.1

Sous les hypothèses sur \mathcal{E}_h du théorème 4.1, on a

$$(6.1) \quad \|u_h - u\|_1 \leq C \|u\|_2^{\frac{1}{p-1}} \|u\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} h^{\frac{1}{p-1}} \quad \forall u \in V \cap W^{2,p}(\Omega), \quad p \geq 2$$

$$(6.2) \quad \|u_h - u\|_1 \leq C \|u\|_2^{\frac{1}{3-p}} \|u\|_1^{\frac{2-p}{3-p}} h^{\frac{1}{3-p}} \quad \forall u \in V \cap W^{2,p}(\Omega), \quad 1 < p \leq 2$$

avec C indépendant de h et u .

Démonstration

On a

$$(6.3) \quad \langle A(u), u_h - u \rangle = \langle f, u_h - u \rangle$$

$$(6.4) \quad \langle A(u_h), v_h - u_h \rangle = \langle f, v_h - u_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Par addition on déduit de (6.3), (6.4)

$$\langle A(u_h) - A(u), u_h - u \rangle = \langle A(u_h), v_h - u \rangle - \langle f, v_h - u \rangle,$$

soit encore

$$\langle A(u_h) - A(u), u_h - u \rangle = \langle A(u_h) - A(u), v_h - u \rangle + \langle A(u) - f, v_h - u \rangle$$

mais $A(u) = f$, d'où

$$(6.5) \quad \langle A(u_h) - A(u), u_h - u \rangle = \langle A(u_h) - A(u), v_h - u \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

L'ouvert Ω étant bidimensionnel borné à frontière Γ lipschitzienne, on a

$$W^{2,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \quad \forall p > 1$$

avec injection continue.

Si $u \in V \cap W^{2,p}(\Omega)$ on peut donc prendre pour v_h l'interpolé linéaire $\pi_h u$ de u sur \mathcal{T}_h i.e.

$$(6.6) \quad \begin{cases} \pi_h u \in V_h \\ \pi_h u(P) = u(P) \quad \forall P \text{ sommet de } \mathcal{T}_h; \end{cases}$$

d'après [9] ou Strang-Fix [11], on a sous les hypothèses sur \mathcal{T}_h faites ci-dessus

$$(6.7) \quad \|\pi_h u - u\|_1 \leq C_0 h \|u\|_2$$

avec C_0 indépendant de h et u (mais non de θ_0).

Si $p \geq 2$ on déduit des propositions 5.1, 5.3, du lemme 6.1, de (6.5) et de (6.7)

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - u\|_1^p &\leq \|A(u_h) - A(u)\|_* \|\pi_h u - u\|_1 \\ &\leq \beta C_0 (\|u\|_1 + \|u_h\|_1)^{p-2} \|u_h - u\|_1 \|u\|_2 h \\ &\leq 2^{p-2} \beta C_0 \|u\|_1^{p-2} \|u_h - u\|_1 \|u\|_2 h \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_h - u\|_1 \leq \left(2^{p-2} \frac{\beta}{\alpha} C_0 \right)^{\frac{1}{p-1}} \|u\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} \|u\|_2^{\frac{1}{p-1}} h^{\frac{1}{p-1}},$$

d'où le résultat (6.1) en posant

$$C = \left(2^{p-2} \frac{\beta}{\alpha} C_0 \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Si $1 < p \leq 2$, on déduit des propositions 5.2, 5.4, du lemme 6.1, de (6.5) et de (6.7)

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - u\|_1^2 &\leq 2^{2-p} \|u\|_1^{2-p} \|A(u_h) - A(u)\|_* \|\pi_h u - u\|_1 \\ &\leq 2^{2-p} \beta C_0 \|u\|_1^{2-p} \|u_h - u\|_1^{p-1} \|u\|_2 h, \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_h - u\|_1 \leq \left(2^{2-p} \frac{\beta}{\alpha} C_0 \right)^{\frac{1}{3-p}} \|u\|_1^{\frac{2-p}{3-p}} \|u\|_2^{\frac{1}{3-p}} h^{\frac{1}{3-p}},$$

d'où (6.2) en posant

$$C = \left(2^{2-p} \frac{\beta}{\alpha} C_0 \right)^{\frac{1}{3-p}}. \quad \blacksquare$$

7. UNE DEUXIEME DEMONSTRATION DU THEOREME 4.1

On va compléter la remarque 4.1; on a montré au n° 6 que

$$\langle A(u_h) - A(u), u_h - u \rangle = \langle A(u_h) - A(u), v_h - u \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Si $p \geq 2$ on a

$$(7.1) \quad \alpha \|u_h - u\|_1^{p-1} \leq 2^{p-2} \beta \|u\|_1^{p-2} \|v_h - u\|_1 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\|\pi_h \varphi - \varphi\|_1 \leq C_0 h \|\varphi\|_2$ et en posant $v_h = \pi_h \varphi$ dans (7.1) on en déduit

$$(7.2) \quad \alpha \|u_h - u\|_1^{p-1} \leq 2^{p-2} \beta \|u\|_1^{p-2} (C_0 h \|\varphi\|_2 + \|\varphi - u\|_1) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

compte tenu de $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = V$, (7.2) implique la convergence forte. On raisonnerait de même pour $1 < p \leq 2$.

8. ESTIMATIONS DE L'ERREUR SI $u \in V \cap W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq s \leq 2$

8.1. Motivation de cette étude

On peut avoir $u \notin W^{2,p}(\Omega)$, même avec des données très régulières comme le montre l'exemple ci-après; on prend $\Omega =]-1, +1[$, $\langle f, v \rangle = C \int_{\Omega} v \, dx$, d'où le problème

$$(8.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = C \int_{-1}^{+1} v \, dx \quad \forall v \in V \\ u \in V. \end{array} \right.$$

La solution de (8.1), également solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left(\left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx} \right) = C \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{array} \right.$$

est donnée par

$$(8.2) \quad u(x) = \frac{p-1}{p} C^{\frac{1}{p-1}} (1 - |x|^{\frac{p}{p-1}});$$

on a $u \in V \cap W^{2,p}(\Omega)$ si $1 < p < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, cette propriété de régularité ne vaut plus si $p \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, auquel cas on vérifiera en utilisant la définition

d'Aronszajn des espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour s quelconque (cf. Necas [12], ch. 2) que

$$u \in V \cap W^{s,p}(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad s < 1 + \frac{2p-1}{p-1}$$

$$\left(\text{on a} \quad 1 + \frac{2p-1}{p-1} \leq 2 \quad \text{si} \quad p \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

8.2. Estimations de l'erreur d'approximation

Pour obtenir des estimations de l'erreur d'approximation lorsque $u \in V \cap W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq s \leq 2$, on va procéder par *interpolation non linéaire* en utilisant le théorème 2 de Tartar [13]; on va d'abord démontrer le

Lemme 8.1

Soit $u, w \in V$, quelconques, u_h, w_h les solutions approchées correspondant respectivement à $f = A(u)$ et $f = A(w)$; on a alors

$$(8.3) \quad \|w_h - u_h\|_1 \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} \|w - u\|_1^{\frac{1}{p-1}} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{\frac{p-2}{p-1}} \quad \text{si} \quad p \geq 2$$

$$(8.4) \quad \|w_h - u_h\|_1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \|w - u\|_1^{p-1} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{2-p} \quad \text{si} \quad 1 < p \leq 2.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \langle A(u_h), w_h - u_h \rangle &= \langle A(u), w_h - u_h \rangle \\ \langle A(w_h), u_h - w_h \rangle &= \langle A(w), u_h - w_h \rangle \end{aligned}$$

d'où par addition

$$(8.5) \quad \langle A(w_h) - A(u_h), w_h - u_h \rangle = \langle A(w) - A(u), w_h - u_h \rangle.$$

Si $p \geq 2$ on déduit de (8.5)

$$\alpha \|w_h - u_h\|_1^{p-1} \leq \beta (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{p-2} \|w - u\|_1$$

soit

$$\|w_h - u_h\|_1 \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{\frac{p-2}{p-1}} \|w - u\|_1^{\frac{1}{p-1}}.$$

Si $1 < p \leq 2$ on déduit de (8.5)

$$\alpha \|w_h - u_h\|_1 \leq \beta (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{2-p} \|w - u\|_1^{p-1}$$

d'où (8.4).

Notant $\|v\|_s$ la norme de V dans $V \cap W^{s,p}(\Omega)$, on a les estimations du

Théorème 8.1

Sous les hypothèses sur \mathcal{C}_h du théorème 4.1, on a pour $1 \leq s \leq 2$

$$(8.6) \quad \|u_h - u\|_1 \leq C \|u\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} \|u\|_s^{\frac{1}{p-1}} h^{\frac{s-1}{p-1}} \quad \forall u \in V \cap W^{s,p}(\Omega), \quad p \geq 2$$

$$(8.7) \quad \|u_h - u\|_1 \leq C \|u\|_1^{\alpha'} \|u\|_s^{\beta'} h^{\gamma'} \quad \forall u \in V \cap W^{s,p}(\Omega), \quad 1 < p \leq 2$$

avec C indépendant de h et u ; dans (8.7) on a

$$\alpha' = \frac{(2-p)[(2-s) + (s-1)(p-1)]}{(2-s) + (s-1)(p-1)(3-p)},$$

$$\beta' = \frac{p-1}{(2-s) + (s-1)(p-1)(3-p)}, \quad \gamma' = (s-1)\beta'.$$

Démonstration

Soit $u \in V$, u_h la solution du problème approché correspondant à $f = A(u)$; on définit l'application $T : V \rightarrow V$ par

$$(8.8) \quad T(u) = u_h - u.$$

Si $p \geq 2$, (6.1) équivaut à

$$(8.9) \quad \|T(u)\|_1 \leq C \|u\|_2^{\frac{1}{p-1}} \|u\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} h^{\frac{1}{p-1}} \quad \forall u \in V \cap W^{2,p}(\Omega);$$

on a par ailleurs

$$\|w - u\|_1 = \|w - u\|_1^{\frac{1}{p-1}} \|w - u\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} \leq \|w - u\|_1^{\frac{1}{p-1}} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{\frac{p-2}{p-1}}$$

d'où

$$(8.10) \quad \|w - u\|_1 \leq \|w - u\|_1^{\frac{1}{p-1}} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{\frac{p-2}{p-1}}$$

Compte tenu de (8.10), on déduit de (8.3)

$$(8.11) \quad \|T(w) - T(u)\| \leq \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right) \|w - u\|_1^{\frac{1}{p-1}} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{\frac{p-2}{p-1}}.$$

Par application du théorème 2 de [13], on déduit de (8.9) et (8.11), par interpolation non linéaire entre V et $V \cap W^{2,p}(\Omega)$ que

$$\|T(u)\|_1 \leq C \|u\|_1^{p-1} \|u\|_s^{\frac{1}{p-1}} h^{\frac{s-1}{p-1}} \quad \forall u \in V \cap W^{s,p}(\Omega)$$

avec C indépendant de h et u (et distinct du C de (8.9)); on a donc démontré (8.6).

Si $1 < p \leq 2$, (6.2) équivaut à

$$(8.12) \quad \|T(u)\|_1 \leq C \|u\|_2^{\frac{1}{3-p}} \|u\|_1^{\frac{2-p}{3-p}} h^{\frac{1}{3-p}} \quad \forall u \in V \cap W^{2,p}(\Omega);$$

par ailleurs

$$\|w - u\|_1 = \|w - u\|_1^{p-1} \|w - u\|_1^{2-p} \leq \|w - u\|_1^{p-1} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{2-p}$$

d'où

$$(8.13) \quad \|w - u\|_1 \leq \|w - u\|_1^{p-1} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{2-p}.$$

Compte tenu de (8.13) on déduit de (8.4)

$$(8.14) \quad \|T(w) - T(u)\|_1 \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \|w - u\|_1^{p-1} (\|w\|_1 + \|u\|_1)^{2-p}.$$

Par interpolation non linéaire entre V et $V \cap W^{2,p}(\Omega)$ on déduit de (8.12) et (8.14)

$$\|T(u)\|_1 \leq C \|u\|_1^{\alpha'} \|u\|_s^{\beta'} h^{\gamma'} \quad \forall u \in V \cap W^{s,p}(\Omega)$$

avec C indépendant de h et u et α' , β' , γ' comme dans l'énoncé du théorème.

REMARQUE 8.1

On peut mettre α' , β' , γ' sous les formes (plus parlantes) suivantes :

$$\alpha' = \frac{2-p}{3-p} \frac{1 + \frac{(2-s)}{(s-1)(p-1)}}{1 + \frac{(2-s)}{(s-1)(p-1)(3-p)}}$$

$$\beta' = \frac{1}{(3-p)(s-1)} \frac{1}{1 + \frac{(2-s)}{(s-1)(p-1)(3-p)}}$$

$$\gamma' = \frac{1}{3-p} \frac{1}{1 + \frac{(2-s)}{(s-1)(p-1)(3-p)}}.$$

9. UNE METHODE ITERATIVE DE RESOLUTION DU PROBLEME APPROCHE

9.1. Généralités

Il y a équivalence entre le problème approché (3.4) et le problème de minimisation

$$(9.1) \quad \begin{cases} J(u_h) \leq J(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

avec

$$(9.2) \quad J(v_h) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v_h|^p dx - \langle f, v_h \rangle.$$

Les différentes méthodes de surrelaxation non linéaires décrites dans Glowinski-Marroco [14] sont pratiquement inopérantes ⁽⁴⁾, appliquées à la résolution de (9.1), si $p < 1.5$ et $p > 10$; de même la méthode d'opérateur auxiliaire décrite dans [2] ne fonctionne en toute généralité appliquée à (9.1), que pour p égal à 2. La méthode de Newton-Raphson ne peut être appliquée pour $p < 2$ puisque dans ce cas l'application $v_h \rightarrow J(v_h)$ n'est pas de classe C^2 ; si $p > 2$ la matrice hessienne de $v_h \rightarrow J(v_h)$ n'est en général que semi-définie positive, donc, là également, la méthode de Newton-Raphson ne peut être appliquée. Quant aux méthodes de pas fractionnaires ou de direction alternées (A.D.I.) l'absence de directions de dérivation privilégiées, ou de décomposition particulière de l'opérateur A , font que ces méthodes semblent non applicables, directement tout au moins.

Pour pallier ces difficultés on va augmenter le nombre de variables, tout en simplifiant la structure non linéaire de (9.1), (9.2), en posant

$$(9.3) \quad z_h = \nabla v_h;$$

on découple ensuite z_h et v_h par *pénalisation et dualisation simultanées* de $z_h - \nabla v_h = 0$ (suivant un principe dû à Hestenes [15]). En effet la pénalisation utilisée seule conduit à un problème dont la solution est *distincte* de celle du problème initial, et en est d'autant plus voisine que le paramètre de pénalisation est petit; cette approche présente un inconvénient majeur qui est que le problème pénalisé est d'autant plus mal conditionné — toutes choses égales par ailleurs — que le paramètre de pénalisation est petit. Par ailleurs la dualité utilisée seule conduit à un Lagrangien, soit \mathcal{L} dans ce qui suit (cf. n° 9.2), coercif en z_h et linéaire, donc non coercif, en v_h ; ceci a pour effet de rendre impossible la résolution de (9.1) par une méthode de type Uzawa (cf. Arrow-Hurwicz-Uzawa [16]) appliquée à \mathcal{L} .

(4) Même lorsqu'elles sont théoriquement convergentes.

9.2. Un problème d'optimisation équivalent. Résultats de point-selle

Remarquant que ∇v_h est constant sur tout $T \in \mathcal{T}_h$, on note χ_T la fonction caractéristique de T et on définit

$$(9.4) \quad L_h = \left\{ z_h \mid z_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} z_T \chi_T, z_T \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

puis

$$(9.5) \quad j : V \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{par}$$

$$j(v, z) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p \, dx - \langle f, v \rangle.$$

Le problème (9.1) équivaut à

$$(9.6) \quad \begin{cases} j(u_h, y_h) \leq j(v_h, z_h) & \forall (v_h, z_h) \in V_h \times L_h, \quad \nabla v_h - z_h = 0 \\ (u_h, y_h) \in V_h \times L_h, \quad \nabla u_h - y_h = 0 \end{cases}$$

et à (9.6) on peut associer le langrangien \mathfrak{L} défini par

$$\mathfrak{L}(v, z; \mu) = j(v, z) - \int_{\Omega} \mu \cdot (z - \nabla v) \, dx$$

qui est bien du type mentionné au n° 9.1.

Par pénalisation et dualisation de $\nabla v - z = 0$ on est conduit à introduire (pénalisation)

$$j_{\varepsilon} = j + \frac{1}{2\varepsilon} \|z - \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \varepsilon > 0$$

puis (dualisation) le langrangien $\mathfrak{L}_{\varepsilon}$ défini par

$$\mathfrak{L}_{\varepsilon}(v, z; \mu) = j_{\varepsilon}(v, z) - \int_{\Omega} \mu \cdot (z - \nabla v) \, dx.$$

On démontre alors (soit directement, soit en utilisant Rockafellar [17, n° 28]) la

Proposition 9.1

$\mathfrak{L}_{\varepsilon}$ admet sur $V_h \times L_h \times L_h$ un point-selle de la forme $(u_h, \nabla u_h, \lambda_h)$; u_h solution de (9.1) et $\lambda_h = |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h$.

9.3. Description de la méthode itérative

Compte tenu de la proposition 9.1 on va appliquer l'algorithme d'Uzawa à \mathcal{L} , sur $V_h \times L_h \times L_h$, d'où

$$(9.7) \quad \lambda_h^0 \in L_h, \text{ donné}$$

λ_h^n connu on détermine $u_h^n, y_h^n, \lambda_h^{n+1}$ par

$$(9.8) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(u_h^n, y_h^n; \lambda_h^n) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(v_h, z_h; \lambda_h^n) \quad \forall v_h, z_h \in L_h; u_h^n \in V_h, y_h^n \in L_h$$

$$(9.9) \quad \lambda_h^{n+1} = \lambda_h^n - \rho_n(y_h^n - \nabla u_h^n) \quad , \quad \rho_n > 0.$$

9.4. Convergence de la méthode itérative

On considère la fonctionnelle $z \rightarrow \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p dx$ de $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow R$; cette fonctionnelle est *différentiable* et son gradient B est défini par

$$(9.10) \quad B(z) = |z|^{p-2} z,$$

on remarquera que $B(z) \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$, p' exposant conjugué de p .

On note

$$(B(z) - B(y), z - y) = \int_{\Omega} (B(z) - B(y)) \cdot (z - y) dx$$

$$|z|_p = \|z\|_{L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (z_1^2 + z_2^2)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifiera les propriétés suivantes

$$(9.11) \quad (B(z) - B(y), z - y) \geq \alpha |z - y|_p^p \quad \text{si} \quad p \geq 2$$

$$(9.12) \quad (B(z) - B(y), z - y) \geq \alpha \frac{|z - y|_p^2}{(|z|_p + |y|_p)^{2-p}} \quad \text{si} \quad 1 < p \leq 2,$$

α ayant les mêmes valeurs que dans les propositions 5.1 ($p \geq 2$) et 5.2 ($1 < p \leq 2$).

Pour démontrer la convergence de l'algorithme (9.7)-(9.9) on aura besoin des

Proposition 9.2

Le couple (u_h, y_h) solution de (9.6) est caractérisé par

$$(9.13) \quad \begin{cases} (B(y_h), z_h) + \frac{1}{\varepsilon} (y_h - \nabla u_h, z_h - \nabla v_h) = \langle f, v_h \rangle + (\lambda_h, z_h - \nabla v_h) \\ \forall v_h \in V_h, \quad \forall z_h \in L_h \\ y_h - \nabla u_h = 0 \\ (u_h, y_h; \lambda_h) \in V_h \times L_h \times L_h. \end{cases}$$

Démonstration

Immédiate compte tenu de la proposition 9.1.

Proposition 9.3

Le couple (u_h^n, y_h^n) solution de (9.8) est caractérisé par

$$(9.14) \quad \begin{cases} (B(y_h^n), z_h) + \frac{1}{\varepsilon} (y_h^n - \nabla u_h^n, z_h - \nabla v_h) = \langle f, v_h \rangle + (\lambda_h^n, z_h - \nabla v_h) \\ \forall v_h \in V_h, \quad \forall z_h \in L_h, \\ u_h^n \in V_h, \quad y_h^n \in L_h. \end{cases}$$

Démonstration

Immédiate.

Compte tenu de ces résultats on a le

Théorème 9.1

Si $0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < \frac{2}{\varepsilon}$, on a, lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $\forall \lambda_h^0 \in L_h$

$$\begin{aligned} u_h^n &\rightarrow u_h \\ y_h^n &\rightarrow \nabla u_h \\ \lambda_h^n &\rightarrow |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \end{aligned}$$

u_h étant la solution du problème (9.1).

Démonstration

On note $\bar{y}_h^n = y_h^n - y_h$, $\bar{u}_h^n = u_h^n - u_h$, $\bar{\lambda}_h^n = \lambda_h^n - \lambda_h$.

Par soustraction entre (9.13) et (9.14) on déduit

$$(9.15) \quad (B(y_h^n) - B(y_h), \bar{y}_h^n) + \frac{1}{\varepsilon} |\bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n|_2^2 = (\bar{\lambda}_h^n, \bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n);$$

par ailleurs $y_h - \nabla u_h = 0$ implique

$$(9.16) \quad \lambda_h = \lambda_h - \rho_n(y_h - \nabla u_h) \quad \forall n$$

d'où par soustraction de (9.16) à (9.9)

$$(9.17) \quad \bar{\lambda}_h^{n+1} = \bar{\lambda}_h^n - \rho_n(\bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n).$$

De (9.17) on déduit

$$(9.18) \quad |\bar{\lambda}_h^n|_2^2 - |\bar{\lambda}_h^{n+1}|_2^2 = 2\rho_n(\bar{\lambda}_h^n, \bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n) - \rho_n^2 |\bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n|_2^2$$

et (9.15), (9.18) impliquent

$$(9.19) \quad |\bar{\lambda}_h^n|_2^2 - |\bar{\lambda}_h^{n+1}|_2^2 = 2\rho_n(B(y_h^n) - B(y_h), \bar{y}_h^n) + \rho_n\left(\frac{2}{\varepsilon} - \rho_n\right) |y_h^n - \nabla u_h^n|_2^2.$$

De (9.19) on déduit que si

$$(9.20) \quad 0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < \frac{2}{\varepsilon}$$

la suite $|\bar{\lambda}_h^n|_2$ est décroissante; étant bornée inférieurement par zéro cette suite est convergente d'où

$$(9.21) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (|\bar{\lambda}_h^n|_2^2 - |\bar{\lambda}_h^{n+1}|_2^2) = 0.$$

Compte tenu de (9.19), (9.20) et (9.21) impliquent

$$(9.22) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (B(y_h^n) - B(y_h), y_h^n - y_h) = 0$$

$$(9.23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n|_2 = 0.$$

Si $p \geq 2$ on a, d'après (9.11)

$$(B(y_h^n) - B(y_h), y_h^n - y_h) \geq \alpha |y_h^n - y_h|_p^p, \quad \alpha > 0,$$

(9.22) implique donc $y_h^n \rightarrow y_h$ et, compte tenu de ce résultat, (9.23) implique que $u_h^n \rightarrow u_h$.

La convergence de λ_h^n résulte alors de celle des suites u_h^n , y_h^n et de (9.14).

Si $1 < p \leq 2$, on a, d'après (9.12)

$$(9.24) \quad (B(y_h^n) - B(y_h), y_h^n - y_h) \geq \frac{|y_h^n - y_h|_p^2}{(|y_h^n|_p + |y_h|_p)^{2-p}}, \quad \alpha > 0.$$

Compte tenu de (9.22), (9.24) la suite y_h^n est bornée et ces deux relations impliquent alors que $y_h^n \rightarrow y_h$; la convergence de u_h^n vers u_h résulte alors de la convergence de y_h^n et de (9.23).

REMARQUE 9.1

Dans certains cas l'algorithme (9.7)-(9.9) appliqué directement au problème continu est convergent.

REMARQUE 9.2

Pour $p = 2$, la méthode ci-dessus, appliquée à la résolution du problème (2.1), a peu d'intérêt; ceci étant pour $\rho_n = \frac{1}{\varepsilon}$ il y a convergence de u_h^n en deux itérations, que (9.7)-(9.9) soit appliqué au problème approché ou au problème continu; cela va résulter de la

Proposition 9.4

Pour $p = 2$ et $\rho_n = \frac{1}{\varepsilon}$ il y a convergence en deux itérations de la suite u_h^n définie par l'algorithme (9.7)-(9.9).

Démonstration

La démonstration ci-après vaut encore si (9.7)-(9.9) est appliquée au problème continu.

Puisque $p = 2$ on a $B(z) = z$ et (9.9), (9.13), (9.14) impliquent pour $n \geq 0$

$$(9.25) \quad \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \bar{u}_h^n - \bar{y}_h^n, \nabla v_h) = - (\bar{\lambda}_h^n, \nabla v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$(9.26) \quad \bar{y}_h^n + \frac{1}{\varepsilon} (\bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n) = \bar{\lambda}_h^n$$

$$(9.27) \quad \bar{\lambda}_h^{n+1} = \bar{\lambda}_h^n - \frac{1}{\varepsilon} (\bar{y}_h^n - \nabla \bar{u}_h^n).$$

De (9.25), (9.27) on déduit

$$(9.28) \quad (\lambda_h^{n+1}, \nabla v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, n \geq 0.$$

De (9.25), (9.28) on déduit

$$(9.29) \quad (\nabla \bar{u}_h^n - \bar{y}_h^n, \nabla v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \forall n \geq 1,$$

et (9.26), (9.28), (9.29) impliquent

$$(9.30) \quad (\bar{y}_h^n, \nabla v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \forall n \geq 1;$$

compte tenu de (9.39), (9.30), on a alors

$$(9.31) \quad \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h^n \cdot \nabla v_h \, dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall n \geq 1,$$

d'où en prenant $v_h = \bar{u}_h^n$ dans (9.31), $\bar{u}_h^n = 0$ pour $n \geq 1$.

REMARQUE 9.3

A μ fixé, \mathcal{L}_ε est strictement convexe en (v, z) et quadratique en v ; il en résulte que le problème (9.8) peut être résolu par une variante de type relaxation en z_h , surrelaxation en v_h , de la méthode de surrelaxation usuelle du problème de Dirichlet linéaire; les résultats de Cea-Glowinski [18] s'appliquent à cette variante, très facile à mettre en œuvre puisqu'à v_h, μ_h donnés la minimisation en z_h de \mathcal{L}_ε se décompose en Card (\mathcal{C}_h) problèmes à deux variables aisément résolubles; ceci est une des justifications de l'algorithme (9.7)-(9.9) et on reviendra sur cet aspect au n° 12 relatif aux expériences numériques.

10. REMARQUE SUR LA DUALITE

On va expliciter un problème dual du problème de minimisation (2.5) équivalent à (2.1). On utilise l'approche par le min-max (cf. Ekeland Temam [19]); compte tenu de l'équivalence entre (2.5) et

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \left[\frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p \, dx - \langle f, v \rangle \right], \\ (z, v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times V, \quad \nabla v - z = 0 \end{array} \right.$$

on introduit le lagrangien \mathcal{L} défini par

$$(10.2) \quad \mathcal{L}(v, z; \mu) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p \, dx + \int_{\Omega} \mu \cdot (\nabla v - z) \, dx - \langle f, v \rangle.$$

Le problème dual est alors défini par

$$(10.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{\mu} \text{Min}_{(v,z)} \mathcal{L}(v, z; \mu) \\ \mu \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega), \quad (v, z) \in V \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega). \end{array} \right.$$

La forme explicite de (10.3) est donnée par

$$(10.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{\mu \in H} \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |\mu|^{p'} \, dx \\ H = \{ \mu \mid \mu \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega), \quad \nabla \cdot \mu + f = 0 \}. \end{array} \right.$$

Soit u la solution de (2.1), on démontrerait aisément la

Proposition 10.1

Le problème dual (10.4) admet une solution et une seule, soit λ , et on a

$$(10.5) \quad \lambda = |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

Pour résoudre (10.4) on peut utiliser une méthode d'approximation, de type éléments finis, par des fonctions vérifiant (de façon exacte ou approchée) la condition $\nabla \cdot \mu + f = 0$; en particulier il conviendrait de voir dans quelle mesure les résultats de Crouzeix-Raviart [20] relatifs à $\nabla \cdot \mu = 0$ peuvent être adaptés à la présente situation. Il convient de remarquer qu'avec de telles approximations on approchera l'opérateur non linéaire $|\mu|^{p-2}\mu$, gradient de la fonctionnelle $\frac{1}{p'} \int_{\Omega} |\mu|^{p'} dx$, par un opérateur en dimension fini, *non diagonal* par rapport aux degrés de liberté définissant l'approximation.

On peut également traiter la contrainte $\nabla \cdot \mu + f = 0$ par dualisation et/ou pénalisation; on fera l'étude sur le cas continu (certaines intégrations, totalement formelles dans le cas continu, seraient justifiées pour le problème approché).

On associe à (10.4) le lagrangien $\mathfrak{L}^* : L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times V \rightarrow R$ défini par

$$(10.6) \quad \mathfrak{L}^*(\mu, v) = \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |\mu|^{p'} dx + \langle v, \nabla \cdot \mu + f \rangle;$$

on démontre facilement que \mathfrak{L}^* admet comme point-selle unique, sur $L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times V$, le couple $(|\nabla u|^{p-2} \nabla u, u)$, u solution de (2.1).

Un algorithme de dualité associé à \mathfrak{L}^* est alors

$$(10.7) \quad u^0 \in V, \text{ donné}$$

u^n donné on détermine λ^n et u^{n+1} par

$$(10.8) \quad \mathfrak{L}^*(\lambda^n, u^n) \leq \mathfrak{L}^*(\mu, u^n) \quad \forall \mu \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega), \lambda^n \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$$

$$(10.9) \quad u^{n+1} = u^n + \rho_n (-\Delta)^{-1} (\nabla \cdot \lambda^n + f) \quad , \quad \rho_n > 0.$$

Compte tenu de (10.8) on a $\lambda^n = |\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n$, d'où $\nabla \cdot \lambda^n = -A(u^n)$ et

$$(10.10) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_n (-\Delta)^{-1} (A(u^n) - f).$$

L'algorithme (10.7)-(10.10) n'est rien d'autre que la méthode du gradient avec *opérateur auxiliaire*, appliquée à la résolution de (2.5). Cet algorithme étudié et utilisé, entre autres, dans [2], n'est réellement opérationnel, appliqué à (2.5), que pour p égal à 2 comme on l'a déjà signalé.

On peut espérer améliorer la situation en procédant comme au n° 9 par pénalisation et dualisation simultanées.

Soit $\mathfrak{L}_\varepsilon^* : L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times V \rightarrow \mathbf{R}$ défini par

$$(10.11) \quad \mathfrak{L}_\varepsilon^*(\mu, v) = \mathfrak{L}^*(\mu, v) + \frac{1}{2\varepsilon} \langle (-\Delta)^{-1}(\nabla \cdot \mu + f), \nabla \cdot \mu + f \rangle;$$

on montrerait que $(|\nabla u|^{p-2} \nabla u, u)$ est point-selle de $\mathfrak{L}_\varepsilon^*$ sur $L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times V$, d'où l'algorithme

$$(10.12) \quad u^0 \in V, \text{ donné}$$

u^n donné on détermine λ^n et u^{n+1} par

$$(10.13) \quad \mathfrak{L}_\varepsilon^*(\lambda^n, u^n) \leq \mathfrak{L}_\varepsilon^*(\mu, u^n) \quad \forall \mu \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega), \lambda^n \in L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$$

$$(10.14) \quad u^{n+1} = u^n + \rho_n (-\Delta)^{-1}(\nabla \cdot \lambda^n + f) \quad , \quad \rho_n > 0.$$

On démontrerait, en procédant comme au n° 9.4, que si

$$0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < \frac{2}{\varepsilon}$$

on a

$$(10.15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda^n|^{p'-2} \lambda^n = \nabla u$$

$$(10.16) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n = u.$$

L'utilisation de (10.12)-(10.14) sera justifiée si le calcul de λ^n à partir de u^n , i.e. la résolution de (10.13), est un problème simple. Posons $G = (-\Delta)^{-1}$, λ^n est alors solution du problème *non linéaire*

$$(10.17) \quad |\lambda^n|^{p'-2} \lambda^n - \frac{1}{\varepsilon} \nabla G(\nabla \cdot \lambda^n) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla G f + \nabla u^n.$$

L'opérateur linéaire $\mu \rightarrow -\nabla G(\nabla \cdot \mu)$ de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ a une interprétation très simple; on a en effet

$$(10.18) \quad L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) = L_1 \oplus L_2$$

avec

$$(10.19) \quad L_1 = \nabla(H_0^1(\Omega))$$

$$(10.20) \quad L_2 = L_1^\perp = \{ \mu \mid \mu \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad , \quad \nabla \cdot \mu = 0 \},$$

L'opérateur $\mu \rightarrow -\nabla G(\nabla \cdot \mu)$ n'est rien d'autre que le projecteur de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L_1$. Cet opérateur a l'inconvénient d'être *non local* comme le montre l'exemple ci-après; si $\Omega =]0, 1[$ on a alors

$$(10.21) \quad -\nabla G(\nabla \cdot \mu) = \mu - \int_0^1 \mu(x) dx \quad \forall \mu \in L^2(0, 1).$$

Ce caractère *non local* de l'opérateur du premier membre de (10.17), ajouté à la non linéarité, a pour effet de rendre compliquée la détermination de λ^n , donc la mise en œuvre de l'algorithme (10.12)-(10.14).

REMARQUE 10.1

Il serait intéressant d'étudier l'application des méthodes d'éléments finis hybrides, développées, entre autres, par J. M. Thomas [21], aux différents problèmes duals considérés dans ce n° 10.

11. APPLICATION A D'AUTRES PROBLEMES NON LINEAIRES

On peut appliquer la méthode de pénalité-dualité du n° 9, avec quelques modifications mineures, aux problèmes suivants (en continu ou sur le problème approché).

Torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique

$$(11.1) \quad \text{Min}_{v \in K} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - C \int_{\Omega} v dx \right]$$

avec

$$(11.2) \quad K = \{ v \mid v \in H_0^1(\Omega) \text{ , } |\nabla v| \leq 1 \text{ p.p. } \}.$$

Ecoulement d'un fluide visco-plastique dans une conduite cylindrique

$$(11.3) \quad \text{Min} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + g \int_{\Omega} |\nabla v| dx - \int_{\Omega} f v dx \right], \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Surfaces minima

$$(11.4) \quad \text{Min} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx \text{ , } v = g \text{ sur } \Gamma.$$

D'une façon générale la méthode ci-dessus est très bien adaptée aux problèmes elliptiques d'ordre 2, non linéaires, lorsque la non-linéarité porte sur ∇v ; c'est le cas des problèmes précédents et du problème de l'alternateur en magnéto-statique traité dans [14] par surrelaxation non linéaire, de l'écoulement subsonique d'un fluide parfait *compressible* autour d'un profil de \mathbf{R}^2 , etc... L'application de l'algorithme de pénalité-dualité à ces différents problèmes fera l'objet d'un travail ultérieur de Fortin-Glowinski-Marrocco [22].

REMARQUE 11.1

Les considérations de dualité du n° 10 s'appliquent bien entendu aux problèmes ci-dessus.

REMARQUE 11.2

D'un point de vue plus informatique il convient de souligner que tous les problèmes mentionnés ci-dessus peuvent être résolus par le même programme d'ordinateur (pour un même type d'approximation évidemment).

12. APPLICATIONS NUMERIQUES

12.1. Remarques sur la mise en œuvre numérique de l'algorithme (9.7)-(9.9)

Soit $\mu_h \in L_h$; le couple (\hat{u}_h, \hat{y}_h) solution de

$$(12.1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon(\hat{u}_h, \hat{y}_h; \mu_h) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(v_h, z_h; \mu_h) & \forall v_h \in V_h, z_h \in L_h, \\ \hat{u}_h \in V_h, \hat{y}_h \in L_h, \end{cases}$$

est caractérisé par

$$(12.2) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\Omega} \hat{y}_h \cdot \nabla v_h \, dx = \varepsilon \langle f, v_h \rangle \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - \varepsilon \int_{\Omega} \mu_h \cdot \nabla v_h \, dx & \forall v_h \in V_h, \\ \hat{u}_h \in V_h, \\ \int_{\Omega} |\hat{y}_h|^{p-2} \hat{y}_h \cdot z_h \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (\hat{y}_h - \nabla \hat{u}_h) \cdot z_h \, dx \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} \mu_h \cdot z_h \, dx & \forall z_h \in L_h, \\ y_h \in L_h; \end{cases}$$

(12.2) n'est rien d'autre qu'un système non linéaire en \hat{u}_h, \hat{y}_h écrit sous forme variationnelle.

A μ_h et \hat{y}_h donnés la première équation variationnelle (12.2) est un problème de Dirichlet, linéaire et homogène, approché. A μ_h et u_h donnés la seconde équation (12.2) équivaut à un système de 2 Card (\mathcal{C}_h) équations non linéaires,

mais $\hat{y}_h, z_h, \nabla \hat{u}_h, \mu_h$ étant constants sur chaque triangle, ce système se décompose en Card (\mathcal{T}_h) systèmes, *indépendants les uns des autres*, de 2 équations non linéaires à 2 inconnues, admettant chacun une solution unique dans \mathbf{R}^2 ; de façon plus précise on détermine \hat{y}_h en résolvant pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ le système

$$(12.3) \quad \begin{cases} |q_T|^{p-2} q_{1T} + \frac{1}{\varepsilon} q_{1T} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \hat{u}_h}{\partial x_1} \right)_T + \mu_{1T} \\ |q_T|^{p-2} q_{2T} + \frac{1}{\varepsilon} q_{2T} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \hat{u}_h}{\partial x_2} \right)_T + \mu_{2T} \end{cases}$$

avec $q_T = (q_{1T}, q_{2T})$, $\mu_T = (\mu_{1T}, \mu_{2T}) - (z_h)_T$ désignant de façon générale la restriction de la fonction z_h à T . En combinant les 2 équations (12.3) on en déduit que $|q_T|$ est solution de l'équation

$$(12.4) \quad |q_T|^{p-1} + \frac{1}{\varepsilon} |q_T| - \left| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \hat{u}_h)_T + \mu_T \right| = 0,$$

et $|q_T|$ calculé on en déduit facilement q_{1T}, q_{2T} à partir de (12.3).

La fonction $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par le premier membre de (12.4) est convexe et croissante si $p \geq 2$, concave et croissante si $1 < p < 2$. La méthode utilisée pour résoudre (12.4) est la méthode de Newton à une variable, soit :

$$(12.5) \quad \xi^0 \in \mathbf{R}_+, \text{ donné}$$

$$(12.6) \quad \xi^{m+1} = \xi^m - \frac{g(\xi^m)}{g'(\xi^m)},$$

ξ^0 étant choisi de telle façon que $g(\xi_0)g''(\xi_0) \geq 0$; ce type d'initialisation a une grande importance, surtout pour les « grandes valeurs » de p et au voisinage de $p = 1$.

En ce qui concerne la résolution proprement dite du système (12.2) on peut utiliser des méthodes de type *relaxation* (cf. [18]); étant donné la structure de (12.2) on peut envisager les deux méthodes ci-dessous :

Première méthode

Partant du couple initial $(\hat{u}_h^0, \hat{y}_h^0)$ on passe de $(\hat{u}_h^m, \hat{y}_h^m)$ à \hat{u}_h^{m+1} puis \hat{y}_h^{m+1} en deux étapes :

1ère étape

Tout élément v_h de V_h étant complètement défini par les valeurs prises sur les nœuds de \mathcal{T}_h , on calcule \hat{u}_h^{m+1} par un *seul* balayage de type *surrelaxation ponctuelle linéaire* des nœuds de \mathcal{T}_h .

2ème étape

La fonction \hat{u}_h^{m+1} étant déterminée on calcule ensuite \hat{y}_h^{m+1} par résolution des Card (\mathcal{T}_h) systèmes non linéaires du type (12.3).

Par une généralisation facile des méthodes de [18] on démontrerait la convergence de l'algorithme ci-dessus si le paramètre ω de surrelaxation vérifie $1 \leq \omega < 2$; dans les applications qui suivent on a pris pour ω la valeur optimale, dans la résolution par surrelaxation ponctuelle linéaire, du problème de Dirichlet approché correspondant à la première équation (12.2).

Test d'arrêt des itérations

Dans la résolution de (12.4) par la méthode de Newton (12.5), (12.6) on utilise le test d'arrêt suivant si $\xi^{m+1} \neq 0$

$$(12.7) \quad \frac{|\xi^{m+1} - \xi^m|}{|\xi^{m-1}|} \leq \eta_1;$$

dans la résolution du système (12.2) par la méthode décrite ci-dessus on a retenu un test d'arrêt ne portant que sur la suite $(\hat{u}_h^m)_m$, soit

$$(12.8) \quad \frac{\sum_i |\hat{u}_h^{m+1}(M_i) - \hat{u}_h^m(M_i)|}{\sum_i |\hat{u}_h^{m+1}(M_i)|} \leq \eta_2$$

où $(M_i)_i$ est l'ensemble, supposé ordonné, des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h intérieurs à Ω .

Deuxième méthode

On utilise la méthode *par blocs* suivante

$$(12.9) \quad (\hat{u}_h^0, \hat{y}_h^0) \text{ donné,}$$

$(\hat{u}_h^m, \hat{y}_h^m)$ connus on calcule \hat{u}_h^{m+1} en résolvant le système linéaire

$$(12.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h^{m+1} \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\Omega} \hat{y}_h^m \cdot \nabla v_h \, dx \\ = \varepsilon \langle f, v_h \rangle - \varepsilon \int_{\Omega} \mu_h \cdot \nabla v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h \\ \hat{u}_h^{m+1} \in V_h, \end{array} \right.$$

puis \hat{y}_h^{m+1} en résolvant, comme indiqué précédemment, le système non linéaire

$$(12.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} |\hat{y}_h^{m+1}|^{p-2} \hat{y}_h^{m+1} \cdot z_h \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (\hat{y}_h^{m+1} - \nabla \hat{u}_h^{m+1}) \cdot z_h \, dx \\ \hat{y}_h^{m+1} \in L_h. \end{array} \right. = \int_{\Omega} \mu_h \cdot z_h \, dx \quad \forall z_h \in L_h,$$

La convergence de (12.9)-(12.11) peut se démontrer à partir des résultats de [18].

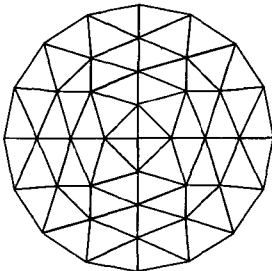
Le problème (9.8) étant un cas particulier du problème (12.1) (avec $\mu_h = \lambda_h^n$), on peut utiliser, pour déterminer (u_h^n, y_h^n) , les deux méthodes décrites ci-dessus (initialisées par (u_h^{n-1}, y_h^{n-1})); d'un point de vue pratique on a utilisé la première méthode, telle qu'elle a été décrite, et la variante de la deuxième méthode obtenue en se limitant à *une seule* itération par blocs du type (12.10), (12.11) (la convergence globale de la variante de l'algorithme (9.7)-(9.9) ainsi obtenue reste à étudier).

Comme test d'arrêt de l'algorithme (9.7)-(9.9) on a pris

$$(12.12) \quad \text{Res}(n) = \frac{\sum_i |u_h^{n+1}(M_i) - u_h^n(M_i)|}{\sum_i |u_h^{n+1}(M_i)|} \leq \eta_3.$$

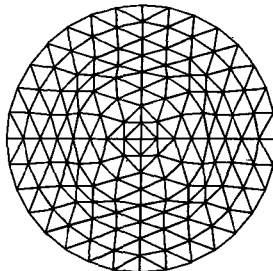
12.2. Triangulations de Ω

On a pris pour Ω le disque $\{x \mid x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < R\}$ sur lequel on a utilisé les triangulations des figures 1, 2, 3.



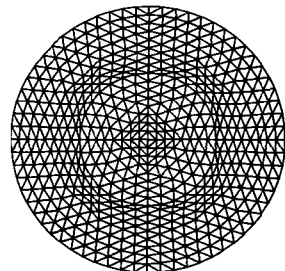
DISCRETISATION N°	1
NOMBRE DE TRIANGLES	64
NOMBRE DE NOEUDS	65
NOMBRE DE NOEUDS INTERIEURS	25

Figure 1



DISCRETISATION N°	2
NOMBRE DE TRIANGLES	226
NOMBRE DE NOEUDS	145
NOMBRE DE NOEUDS INTERIEURS	113

Figure 2



DISCRETISATION N°	3
NOMBRE DE TRIANGLES	1024
NOMBRE DE NOEUDS	545
NOMBRE DE NOEUDS INTERIEURS	421

Figure 3

12.3. Exemple 1. (I) Position du problème et résultats d'approximation

On a pris $f = C^{te} = C$; dans ce cas la solution de (2.1) est donnée, en fonction de $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, par

$$(12.13) \quad u(x) = \frac{p-1}{p} \left(\frac{CR}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right);$$

les calculs ont été effectués avec $R = 1$.

On a indiqué sur les figures 4, 5, 6 les variations de diverses erreurs relatives en fonction de p :

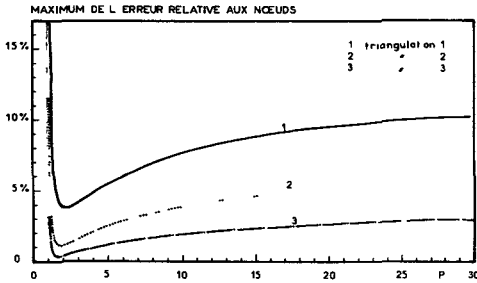


Figure 4

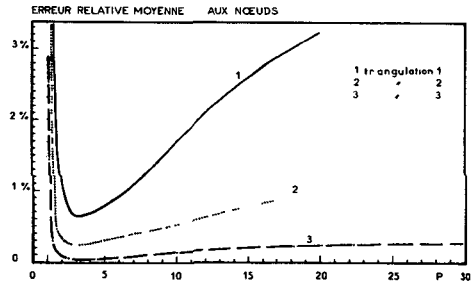


Figure 5

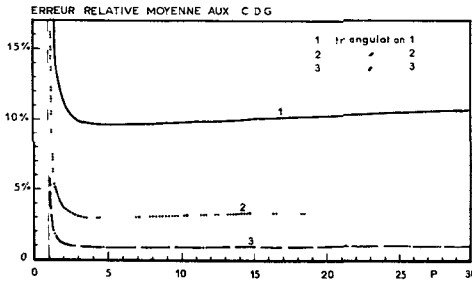


Figure 6

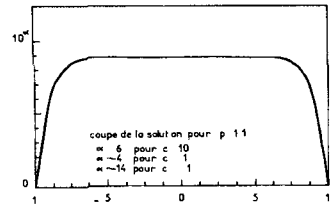


Figure 7

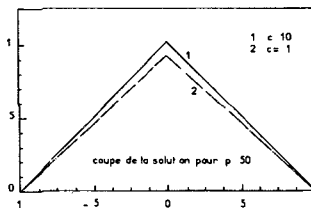


Figure 8

La figure 4 donne les variations de l'erreur relative maximale aux sommets de \mathcal{T}_h , la figure 5 les variations de l'erreur relative moyenne aux sommets de \mathcal{T}_h , i.e.

$$\frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} \left| \frac{u_h(M_i) - u(M_i)}{u(M_i)} \right|$$

avec N_h = nombre de nœuds de \mathcal{T}_h intérieurs à Ω ; la figure 6 donne les variations de l'erreur relative moyenne calculée au centre des triangles.

On peut faire les remarques suivantes :

REMARQUE 12.1

Les différentes erreurs relatives ci-dessus apparaissent comme étant indépendantes de C . ■

REMARQUE 12.2

Les erreurs aux centres des triangles sont beaucoup plus importantes que les erreurs aux sommets de ces mêmes triangles. Un éventuel phénomène de *super-convergence* aux sommets de \mathcal{T}_h serait donc à étudier. ■

A titre indicatif, on a représenté sur les figures 7 et 8 les solutions exactes correspondant, respectivement, à $p = 1.1$ et $p = 50$.

12.4. Exemple 1. (II) Analyse de la convergence des algorithmes

Les résultats numériques présentés dans cette section sont relatifs à la triangulation de la figure 2 (256 triangles, 113 nœuds intérieurs). On a représenté sur les figures 9 à 16 la dépendance en ε du comportement des algorithmes décrits au n° 12.1; les expériences numériques correspondantes ont été effectuées en *simple précision* (7 chiffres significatifs) sur ordinateur CII 10070. Détaillons les figures ci-dessous :

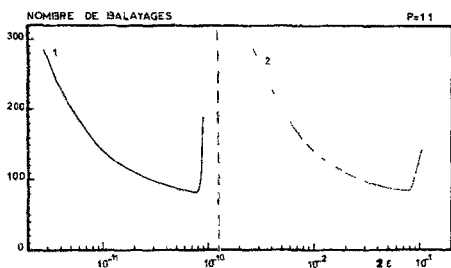


Figure 9

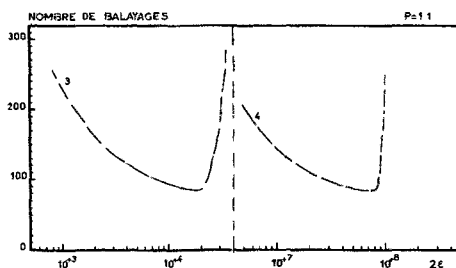


Figure 9 bis

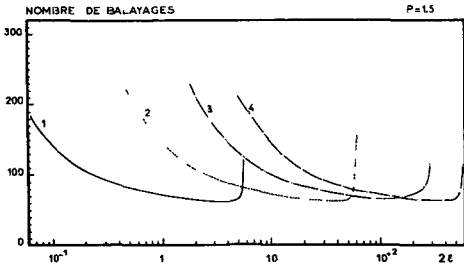


Figure 10

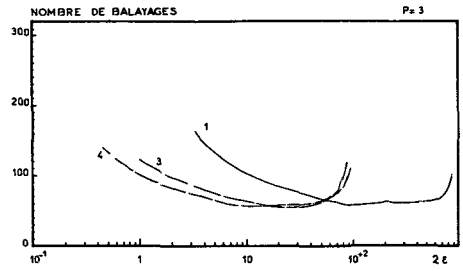


Figure 11

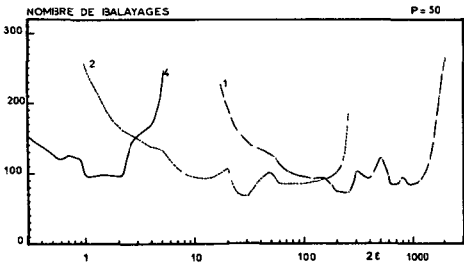


Figure 12

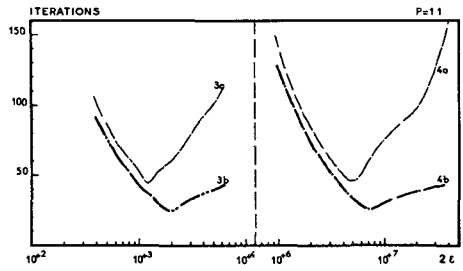


Figure 13

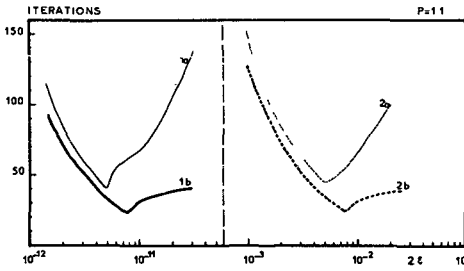


Figure 13 bis

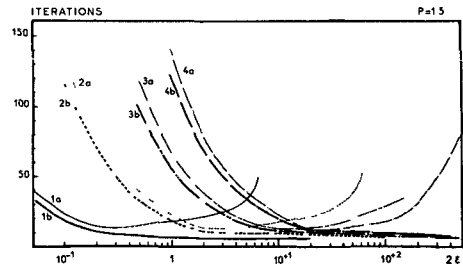


Figure 14

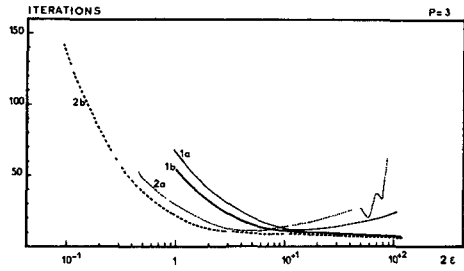


Figure 15

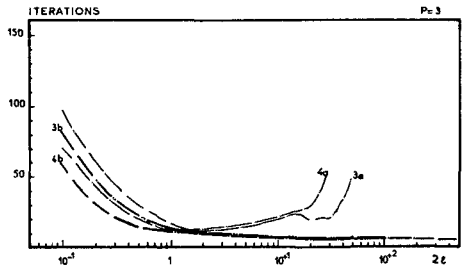


Figure 15 bis

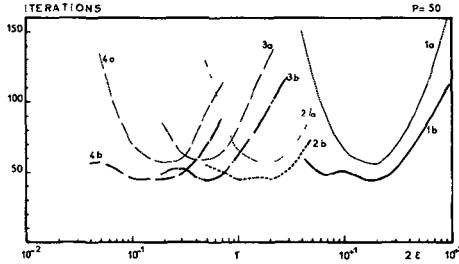


Figure 16

Les courbes 1, 2, 3, 4 correspondent respectivement à $C = 0.1, 1, 4, 10$. Les figures 9 à 12 sont relatives au *premier algorithme* décrit au n° 12.1 et indiquent le nombre total de *balayages* (i.e. le nombre total d'itérations de type relaxation utilisées dans la résolution des problèmes (9.8)) nécessaires

à l'obtention de la convergence, au sens du test (12.12), lorsque $\rho_n = \rho = \frac{1}{\varepsilon}$ dans (9.9), $\eta_1 = 10^{-4}$ dans (12.7), $\eta_2 = 10^{-5}$ dans (12.8), $\eta_3 = 10^{-5}$ dans (12.12). Les figures 13 à 16 donnent des résultats de même nature, pour la variante de la *deuxième méthode* obtenue en se limitant à *une seule itération* par bloc du type (12.10), (12.11); les itérations considérées sont celles indexées par n et ρ_n , η_1, η_2 étant choisis comme ci-dessus on a pris $\eta_3 = 10^{-5}$ (courbes (a)) et $\eta_3 = 5 \times 10^{-5}$ (courbes (b)) dans (12.12).

REMARQUE 12.3

Au vu des figures 9 à 16 il apparaît que pour ε « grand » le nombre d'itérations augmente considérablement, ce phénomène étant d'autant plus sensible que p est voisin de 1 ou grand (disons $p \geq 7$). Ceci est lié aux *erreurs d'arrondis*, en effet par un calcul en *double précision* (11 chiffres significatifs) on obtient – toutes choses égales par ailleurs – les résultats représentés sur les figures 17 et 18; les courbes ci-dessous montrent que par rapport à la simple précision, le choix de ε n'est pas critique et la remontée du nombre d'itérations pour ε « grand » se produit pour des valeurs considérablement plus élevées.

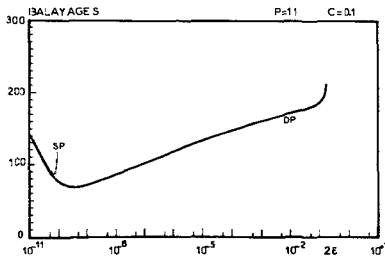


Figure 17

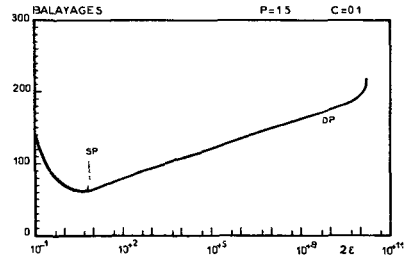


Figure 18

REMARQUE 12.4

Les figures 13 à 16 montrent l'importance du choix de η_3 pour l'obtention de la convergence au sens du test (12.12); les phénomènes de non convergence qui peuvent se produire lorsque η_3 est trop petit sont – là encore – conséquence des erreurs d'arrondis.

Pour différentes valeurs de p on a indiqué dans le tableau 12.1 des temps de calcul (en secondes) en *simple précision* (sur CII 10070) obtenus avec $\rho_n = \frac{1}{\varepsilon}$, ε ayant sa valeur optimale. Les colonnes T_1 et T_2 sont respectivement relatives à la première méthode et à la variante (à une itération par blocs) de la deuxième méthode décrite ci-dessus.

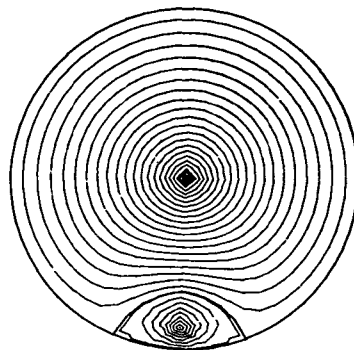
p	T_1	T_2
1,1	100	110
1,25	75	55
1,5	70	45
1,75	65	27
2	45	7
3	150	30
4	150	40
10	150	80
50	150	210

TABLEAU 12.1

12.5. Autres expériences numériques

Si $p > 2$, on a – Ω étant bidimensionnel – $V = W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ avec injection continue; il en résulte que $\forall x_0 \in \Omega$, la mesure de Dirac en x_0 , $\delta_{(x_0)}$, appartient à V' .

On a représenté sur la figure 19 les équipotentielles de la solution du problème approché (3.4), calculée sur la triangulation de la figure 3 pour $p = 3$ et $f = \delta_{(x_1)} - \delta_{(x_2)}$ avec $x_1 = (0, 0)$ et $x_2 = (0, -0.875)$.



MASSES DE DIRAC $P = 3$
 VALEUR MINIMUM DE LA FONCTION $-0,250E00$
 PAS ENTRE 2 EQUIPOTENTIELLES $0,308E-01$

Figure 19

REMARQUE 12.5

Si Ω est le disque de rayon R et si $f = C\delta_{(0)}$, la solution de (2.1) est alors donnée par

$$(12.14) \quad u(r) = \frac{p-1}{p-2} \left(\frac{C}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-1}} (R^{\frac{p-2}{p-1}} - r^{\frac{p-2}{p-1}}) \quad \text{si } p > 1, \quad p \neq 2$$

$$(12.15) \quad u(r) = -\frac{C}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{R} \quad \text{si } p = 2.$$

Il résulte de (12.14), (12.15) que $u \notin W_0^{1,p}(\Omega)$ si $p \leq 2$; ceci étant, l'utilisation des méthodes d'approximation et de résolution précédentes, conduit pour $p \leq 2$ à des résultats très convenables – sauf au voisinage de l'origine – puisque, par exemple, pour $p = 2$, sur la triangulation de la figure 3, l'erreur relative moyenne aux nœuds est 3.7×10^{-3} . ■

On trouvera dans Glowinski-Marroco [23] des compléments sur la partie numérique de cet article.

REMERCIEMENTS

Nous voudrions remercier L. Tartar pour les discussions très utiles que nous avons eues à propos de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CIARLET P. G., SCHULTZ M. H. and VARGA R. S., Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems, V. Monotone Operator Theory, *Numer. Math.*, 13, 1969, 51-77.
- [2] BREZIS H. et SIBONY M., Méthodes d'Approximation et d'Itération pour les Opérateurs Monotones, *Arch. of Rat. Mech. and Analysis*, 28, 1968, 59-82.
- [3] SIBONY H., Méthodes Itératives pour les Equations et Inéquations aux Dérivées Partielles Non Linéaires de Type Monotone, *Calcolo* 7, Fasc. 1-2, 1970, 65-183.
- [4] LEBEAUD G., Sur l'Approximation de l'Equation $Au = - \sum_{i=1}^n (|D_i u|^{p+2} D_i u) = T$, *Renconti di Matematica* (3-4), vol. 2, Série VI, 1969, 443-471.
- [5] GLOWINSKI R. et MARROCO A., Sur l'Approximation par Eléments Finis d'Ordre 1, et la Résolution par Pénalisation-Dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires, *C.R.A.S.*, Paris, T.278, 26 juin 1974, Série A, 1649-1652.
- [6] GLOWINSKI R. and MARROCO A., On the solution of a class of non linear Dirichlet problems by a penalty-duality method and finite element of order one, à paraître dans les *Proceedings du 6^e Congrès IFIP-TC7 sur l'optimisation*, Lecture Notes in Comp. Sciences, Springer.
- [7] LIONS J. L., *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod et Gauthier-Villars. Paris, 1968.

- [8] PELISSIER M. C., Thèse, Paris Orsay, à paraître.
- [9] CIARLET P. G. and RAVIART P. A., General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 46, 1972, 177-199.
- [10] TARTAR L., *Interpolation non linéaire et Applications*, Thèse Université Paris VI, 1971.
- [11] STRANG G. and FIX G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1973.
- [12] NECAS J., *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Masson, Paris, 1967.
- [13] TARTAR L., Interpolation non Linéaire et Régularité, *Journal of Functional Analysis*, vol. 9, n° 4, 1972, 469-489.
- [14] GLOWINSKI R. et MARROCO A., Analyse Numérique du champ magnétique d'un alternateur par éléments finis et surrelaxation ponctuelle non linéaire, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*, 3, 1974, 55-85.
- [15] HESTENES M., Multiplier and Gradient Methods, *J. of Optimization Theory and Applications*, vol. 4, n° 5, 1969, 303-320.
- [16] ARROW K. J., HURWICZ L. and UZAWA H., *Studies in Linear and non linear programming*, Stanford University Press, 1958.
- [17] ROCKAFELLAR T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [18] CEA J. et GLOWINSKI R., Sur des méthodes d'optimisation par relaxation, *Revue Française d'Automatique, Informatique et Rech. Opérationnelle*, déc. 1973, R-3, 5-32.
- [19] EKELAND I. et TEMAN R., *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [20] CROUZEIX M. and RAVIART P. A., Conforming and non conforming finite element methods for solving stationary Stokes equations, *Revue Française d'Automatique, Informatique et Rech. Opérationnelle*, déc. 1973, R-3, 33-76.
- [21] THOMAS J. M., à paraître.
- [22] FORTIN M., GLOWINSKI R. et MARROCO A., à paraître.
- [23] GLOWINSKI R. et MARROCO A., à paraître.