J. Math. Soc. Japan
Vol. 14, No. 4, 1962

Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy pour les matrices

Par Akira KUWAGAKI

(Reçu le 11 oct., 1961)
(Revisé le 3 juil., 1962)

§ 1. Introduction

Soit χ une algèbre à une opération binaire notée $\cdot$ et soit Φ une algèbre à une opération binaire notée $\circ$. Nous considérerons l'équation fonctionnelle en une fonction inconnue f qui applique χ dans Φ:

$$f(x \cdot y)=f(x) \circ f(y).$$

Déjà, de nombreuses études sur cette équation fonctionnelle ont été faites dans le cas où χ et Φ sont des algèbres particulières ([1], [2]). L'équation la plus simple et la plus essentielle est celle de Cauchy en une fonction réelle continue f d'avec variable réelle:

(FSS) $$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Une généralisation de (FSS) est le cas où χ et Φ sont des espaces vectoriels

(VSS) $$f_i(x_1+y_1, \cdots, x_m+y_m)=f_i(x_1, \cdots, x_m)+f_i(y_1, \cdots, y_m) \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

Cette équation (VSS) est facilement résolue par le même moyen que celle de Cauchy. On trouve sa solution dans le livre de J. Aczél [2] (pp. 153 et 154) ([3]).

Le but de notre présent mémoire est de chercher toutes les solutions dans le cas naturellement généralisé où χ et Φ sont des algèbres de matrices carrées. Il y a quatre types des équations comme suivants (M désigne le groupe additif de matrices carrées et GL désigne le groupe multiplicatif de matrices régulières.)

(MSS) $$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{M}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$, mais cette équation est essentiellement identique à l'équation (VSS);

(MSP) $$f(x+y)=f(x)f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{M}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$;

(MPS) $$f(xy)=f(x)+f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$;

(MPP) $$f(xy)=f(x)f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$.

Le but principal est de résoudre la dernière équation (MPP) dans un voisinage de l'unité, parce qu'elle est considérée comme la plus importante. Elle est représentée, par les éléments x_{ij}, y_{ij} et f_{pq} des matrices x, y et f respectivement, sous la forme

$$f_{pq}(xy)=\sum_{r=1}^{n} f_{pr}(x) f_{rq}(y)$$

$$\left(xy=\text{matrice }\left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik} y_{kj}\right);\ p, q=1,2, \cdots, n\right).$$

C'est un système de n^2 équations fonctionnelles par rapport à n^2 fonctions inconnues à m^2 variables.

L'équation fonctionnelle (MPP) est une généralisation d'un invariant et d'un covariant pour la transformation géométrique ([**4**]), et regardée comme un problème d'homomorphisme dans l'algèbre et elle est aussi en relation avec la théorie des fonctions aux plusieurs variables ([**5**]). De plus, nous montrerons aux §§ 3, 4, 5 et 7 que les quatre équations fonctionnelles notées au-dessus sont équivalentes aux problèmes de Cauchy pour les systèmes des équations aux dérivées partielles qui leur correspondent respectivement.

Dans les cas $n=1$ (m arbitraire), les solutions de polynôme en x sont obtenues par I. Schur et Hurwitz, et les solutions continues aux variables complexes par H. Nakano [**6**] et T. Satô [**7**]. Dans le cas $m=1$ et $n=2$, les solutions mesurables sont déterminées par O. E. Gheorgiu [**8**], récemment, les solutions univalentes (uniformes) pour $m=2$ et $n=1$ par S. Gołab [**9**]. O. Perron [**4**] et P. Reisch [**10**] ont étudié le cas général, sous la condition de l'analyticité pour la fonction complexe $f(x)$, mais les solutions ne sont obtenues que pour $n=1$ (m arbitraire), pour $m=1$ (n arbitraire) ou pour $m=2$ (n arbitraire).

§ 2. Lemmes de la régularité

La fonction f de l'équation fonctionnelle (MPP) (aussi les trois autres équations) peut être supposée un homomorphisme du groupe analytique $\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$ dans le groupe analytique $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$, donc, nous aurons le lemme 1 dû à B. de Sz. Nagy [**12**] (voir A. Weil [**11**]), et le lemme 2 (C. Chevalley [**13**]).

LEMME 1. *Un homomorphisme mesurable entre deux groupes locaux de Lie est continu.*

LEMME 2. *Un homomorphisme continu entre deux groupes analytiques est analytique.*

Combinant ces deux lemmes, nous pouvons dire qu'un homomorphisme mesurable entre deux groupes analytiques est aussi analytique.

§ 3. Solution de l'équation (MSS)

La solution mesurable f de l'équation (MSS) étant nécessairement un homomorphisme d'un voisinage $V(o_m)$[1] de $M(m, \boldsymbol{R})$ dans un voisinage $V(o_n)$ de $M(n, \boldsymbol{R})$, nous aurons la solution lemme 3 par la différentiation de l'équation fonctionnelle, car f est analytique d'après lemmes 1 et 2 ([2]).

LEMME 3. *La solution mesurable de l'équation fonctionnelle* (MSS) *est donnée sous la forme*

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{m} K_{ij}x_{ij}=\langle K, x\rangle$$

où K_{ij} est une (n, n)-matrice constante et arbitraire, pour chaque i et j.

REMARQUE. L'équation (MSS) est équivalente au système des équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}=K_{ij}^{pq}=\left(\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}\right)_{x=o_m} \qquad \begin{pmatrix} i, j=1, 2, \cdots, m \\ p, q=1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale

$$f(o_m)=o_n\,.$$

§ 4. Solution de l'équation (MSP)

La fonction f de l'équation (MSP) pouvant être supposée un homomorphisme de $V(o_m)$ de $M(m, \boldsymbol{R})$ dans $V(e_n)$[2] de $GL(n, \boldsymbol{R})$, nous aurons les solutions en vertu de la symétrie en x et y en prenant le logarithme des deux membres de l'équation (MSP)

$$f(x+y)=f(x)f(y)=f(y)f(x)\,.$$

THÉORÈME 1. *La solution mesurable de l'équation fonctionnelle* (MSP) *dans un voisinage* $V(o_m)$ *est donnée sous la forme*

$$f(x)=\exp\sum_{i,j=1}^{m} K_{ij}x_{ij}=\exp\langle K, x\rangle$$

où K_{ij} est une (n, n)-matrice constante et satisfait à la condition

(C 1) $$K_{ij}K_{kl}=K_{kl}K_{ij} \qquad (i, j, k, l=1, 2, \cdots, m)\,.$$

Ce théorème est évident, parce qu'elle se change en une nouvelle équation du type (MSS),

---

1) o_m désigne (m, m)-matrice de zéro.

2) e_n désigne (n, n)-matrice d'unité.

$$\log f(x+y) = \log f(x) + \log f(y).$$

REMARQUE. L'équation fonctionnelle (MSP) est équivalente au système des équations aux dérivées partielles

$$\text{(D 1)} \qquad \frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}} = \sum_{r=1}^{n} K_{ij}^{pr} f_{rq}(x) \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots, m \\ p, q = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale

$$f(o_m) = e_n$$

où K_{ij}^{pq} est défini par la relation

$$K_{ij}^{pq} = \left(\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}\right)_{x=o_m} \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots, m \\ p, q = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

La condition (C 1) est celle de l'intégrabilité pour l'équation (D 1).

§ 5. Solution de l'équation (MPS)

La fonction f de l'équation (MPS) pouvant être supposée un homomorphisme analytique de $V(e_m)$ de $GL(m, \boldsymbol{R})$ dans $V(o_n)$ de $M(n, \boldsymbol{R})$, nous pourrons avoir la solution par l'intégration des équations aux dérivées partielles (D 2) dans la remarque ci-dessous.

THÉORÈME 2. *La solution mesurable de l'équation fonctionnelle* (MPS) *dans un voisinage* $V(e_m)$ *est donnée sous la forme*

$$f(x) = K \log |x|$$

où K *est une* (n, n)*-matrice constante et* $|x|$ *désigne le déterminant de* x.

REMARQUE. Après un calcul facile, on voit que l'équation fonctionnelle (MPS) est équivalente au système des équations aux dérivées partielles

$$\text{(D 2)} \qquad \frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{|x|} \sum_{k=1}^{m} K_{ik}^{pq} \frac{\partial |x|}{\partial x_{kj}} \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots, m \\ p, q = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale

$$f(e_m) = o_n$$

où K_{ij}^{pq} est défini par la relation

$$K_{ij}^{pq} = \left(\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}\right)_{x=e_m} \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots, m \\ p, q = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

La condition de l'intégrabilité pour l'équation (D 2) est

$$\text{(C 2)} \qquad K_{ij} = K\delta_{ij} \qquad (\delta_{ii} = 1,\ \delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j)$$

où K_{ij} est une matrice (K_{ij}^{pq}) et K une (n, n)-matrice constante (K^{pq}).

D'après la condition (C 2), les équations (D 2) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}=\frac{1}{|x|}K^{pq}\frac{\partial |x|}{\partial x_{ij}}=K^{pq}\frac{\partial \log |x|}{\partial x_{ij}}$$

d'où

$$df_{pq}=K^{pq}d\log |x|\,.$$

En vertu de la condition initiale on obtient par intégration

$$f_{pq}=K^{pq}\log |x|\,,$$

ce qui donne la solution du théorème 2.

§ 6. Algèbre de Lie

À chaque élément d'un groupe de Lie est associé un élément de son algèbre de Lie par l'application exponentielle dans un voisinage de l'unité, c'est-à-dire, en posant dans l'équation (MPP)

$$X=\log x\,,\quad Y=\log y\quad \text{et}\quad F=\log f\,,$$

d'après l'homomorphisme H obtenu par f

$$\mathrm{H}:\qquad \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})\to\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})\qquad (\mathrm{V}(e_m)\to\mathrm{V}(e_n))$$

nous aurons, entre leurs algèbres de Lie [13], l'homomorphisme différentiel dH de H

$$\mathrm{dH}:\qquad \underset{(\mathrm{M}(m,\boldsymbol{R}))}{\mathfrak{gl}(m,\boldsymbol{R})}\to\underset{(\mathrm{M}(n,\boldsymbol{R}))}{\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})}\qquad (\mathrm{V}(o_m)\to\mathrm{V}(o_n))\,.$$

Par conséquent, l'équation fonctionnelle (MPP) est transformée en le système des équations fonctionnelles (F)[3] (un homomorphisme entre deux algèbres de Lie)

$$(\mathrm{F})\qquad \begin{cases} F(X+Y)=F(X)+F(Y)\\ F([X,Y])=[F(X),F(Y)]\end{cases}$$

où $[U,V]$ est égal à $UV-VU$.

§ 7. Solution de l'équation (MPP)

Ayant la solution de la première des équations (F) par lemme 3, nous aurons le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *La solution mesurable de l'équation fonctionnelle* (MPP) *dans un voisinage* $\mathrm{V}(e_m)$ *est donnée sous la forme*

3) En autre moyen, nous obtenons immédiatement le système (F) par la relation

$$F(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\cdots)=F(X)+F(Y)+\frac{1}{2}[F(X),F(Y)]+\cdots.$$

$$f(x)=\exp \sum_{i,j=1}^{m} K_{ij}(\log x)_{ij}=\exp \langle K, \log x\rangle$$

où K_{ij} *est une* (n, n)*-matrice constante pour chaque* i *et* j, *et satisfait à la condition de* O. Perron [4].

(C 3) $$K_{ij}K_{kl}-K_{kl}K_{ij}=K_{il}\delta_{kj}-K_{kj}\delta_{il} \qquad (i, j, k, l=1, 2, \cdots, m).$$

DÉMONSTRATION. La solution de la première des équations (F) est donnée par

$$F(X)=\sum_{i,j=1}^{m} K_{ij}X_{ij}=\langle K, X\rangle$$

et la condition (C 3) pour K est obtenue par la seconde des équations (F).

Car, nous aurons pour X et Y quelconques

$$F([X, Y])=\sum_{i,j}^{m} K_{ij}(XY-YX)_{ij}=\sum_{i,j,k}^{m} K_{ij}X_{ik}Y_{kj}-\sum_{i,j,l}^{m} K_{ij}Y_{il}X_{lj}$$
$$=\sum_{i,j,k,l}^{m}(K_{il}\delta_{kj}-K_{kj}\delta_{il})X_{ij}Y_{kl}$$

et

$$[F(X), F(Y)]=[\sum_{i,j}^{m} K_{ij}X_{ij}, \sum_{k,l}^{m} K_{kl}Y_{kl}]=\sum_{i,j,k,l}^{m}[K_{ij}, K_{kl}]X_{ij}Y_{kl}.$$

REMARQUE. L'équation fonctionnelle (MPP) est équivalente au système des équations aux dérivées partielles

(D 3) $$\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}=\frac{1}{|x|}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} K_{ik}^{pr}\frac{\partial |x|}{\partial x_{kj}} f_{rq}(x) \qquad \begin{pmatrix} i, j=1, 2, \cdots, m \\ p, q=1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale

$$f(e_m)=e_n$$

où K_{ij}^{pq} est défini par la relation

$$K_{ij}^{pq}=\left(\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}\right)_{x=e_m} \qquad \begin{pmatrix} i, j=1, 2, \cdots, m \\ p, q=1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

La condition (C 3) est celle de l'intégrabilité pour l'équation (D 3) (due à O. Perron [4]).

Il est évident que nous aurons aussi la relation

$$K_{ij}^{pq}=\left(\frac{\partial f_{pq}}{\partial x_{ij}}\right)_{x=e_m}=\left(\frac{\partial F_{pq}}{\partial X_{ij}}\right)_{X=o_m}.$$

EXEMPLE 1. *Le cas* $n=1$ *dans* (MPP).

Par la condition (C 3), nous aurons

$$K_{ij}=K\delta_{ij} \qquad (K \text{ est un nombre constant.})$$

ensuite, nous aurons la solution ([4])

$$f(x)=\exp\sum_{i,j=1}^{m}K\delta_{ij}(\log x)_{ij}=\exp(K\ \mathrm{trace}\ \log x)$$
$$=\exp(K\log|x|)=|x|^{K}.$$

EXEMPLE 2. *Le cas* $m=1$ *dans* (MPP).

La condition (C 3) y est toujours satisfaite, et nous aurons ([**4**])

$$f(x)=\exp(K\log x)=x^{K}\qquad (K\text{ est une }(n,n)\text{-matrice constante}).$$

§ 8. Matrice dans le champ complexe

Dans le cas où χ et Φ sont $GL(m,\boldsymbol{C})$ (ou $M(m,\boldsymbol{C})$) et $GL(n,\boldsymbol{C})$ (ou $M(n,\boldsymbol{C})$) respectivement, nos considérations peuvent être faites de la même manière et les solutions continues des quatre équations auront les mêmes formes si la fonction f est holomorphe. Cependent, sans la condition de l'holomorphie pour la fonction complexe f, la constante K_{ij}^{pq} admet le nombre complexe ([**14**]) et nous aurons, au lieu de $\langle K,x\rangle$ dans (MSS) et (MSP)

$$\langle K,x\rangle+\langle L,\bar{x}\rangle$$

où K^{pq} et L^{pq} sont des (m,m)-matrices constantes ; au lieu de $K\log|x|$ dans (MPS)

$$K\log|x|+L\log|\bar{x}|$$

où K et L sont des (n,n)-matrices constantes ; au lieu de $\langle K,\log x\rangle$ dans (MPP)

$$\langle K,\log x\rangle+\langle L,\overline{\log x}\rangle$$

où les matrices K et L satisfont à des conditions analogues à la condition (C 3).

Université Médicale de Kyoto

Bibliographie

[1] A. Kuwagaki, Sur l'équation fonctionnelle: $f(x+y)=R[f(x),f(y)]$, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, XXVI (1951), 139–144.

[2] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1961.

[3] A. Kuwagaki, Sur l'équation fonctionnelle rationnelle de la fonction inconnue de deux variables, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, XXVII (1952), 145–151.

[4] O. Perron, Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung, Math. Z., **48** (1942), 136–172.

[5] A. Kuwagaki, Pri kelkaj funkcialaj ekvacioj de matricoj, Funkcialaj Ekvacioj, **13** (1961), Numero 3, (en japonais)

[6] H. Nakano, Über eine stetige Matrixfunktionen, Proc. Imp. Acad., **8** (1932), 217–219.

[7] T. Satô, Sur L'équation fonctionnelle simple II, Équations fonctionnelles et Analyse appliquée, **36** (1942), 51–57. (en japonais)

[8] O. E. Gheorgiu, La solution mesurable pour un système d'équations fonctionnelles, Com. Acad. R. P. Romåne, **2** (1952), 199-203.
[9] S. Gołab, Sur l'équation $f(X)f(Y)=f(XY)$, Ann. Soc. Polon. Math., **6** (1959), 1-13.
[10] P. Reisch, Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\Phi(X)\Phi(Y)=\Phi(XY)$, Math. Z., **49** (1943-4), 411-426.
[11] A. Weil, L'intégration des groupes topologiques, Herman et C[ie] Editeurs, Paris, 1953, 66.
[12] B. de Sz. Nagy, Ueber messbare Darstellungen Liescher Gruppen, Math. Ann., **112** (1936), 286.
[13] C. Chevalley, Theory of Lie group, Princeton Univ. press, Princeton, 1946, 128.
[14] A. Kuwagaki, Solvoj de kelkaj funkcialaj ekvacioj de matricoj, Funkcialaj Ekvacioj, **14** (1961), 332-345. (en japonais)