Sur l'existence du cône tangent à un courant positif fermé

Mongi Blel, Jean-Pierre Demailly et Mokhtar Mouzali

Résumé

Soit T un courant positif fermé sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$. Nous montrons que T admet un cône tangent (limite de la famille de ses homothétiques), dès que les masses projectives $\nu_T(r)$ convergent assez vite vers $\nu_T(0)$ pour que $(\nu_T(r)-\nu_T(0))/r$ soit localement sommable en $r=0$. Cette condition suffisante est optimale : nous construisons des courants de bidegré $(1,1)$ n'ayant pas de cône tangent, tels que l'intégrale de $(\nu_T(r)-\nu_T(0))/r$ soit aussi peu divergente qu'on le souhaite. Lorsque T est le courant d'intégration sur un ensemble analytique, on vérifie que $\nu_T(r)-\nu_T(0)=0(r^\varepsilon)$, ce qui redonne le théorème de Thie-King sur l'existence du cône tangent.

1. Notations et principaux résultats

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbf{C}^n$. Nous renvoyons le lecteur à P. Lelong [Le] ou à [L—G] pour les définitions et résultats fondamentaux concernant les courants positifs fermés. Si h_a désigne l'homothétie complexe de rapport $a\in\mathbf{C}^*$, on s'intéresse au problème de l'existence d'une limite faible pour la famille de courants (h_a^*T) lorsque $|a|$ tend vers 0. Une telle limite, si elle existe, est appelée *cône tangent* au courant T. La question de savoir si le cône tangent existe toujours a été soulevée par plusieurs auteurs, en particulier R. Harvey [Ha] en 1975.

Mentionnons les principaux résultats connus à ce jour. Lorsque T est le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique $A\subset B(R)$, on sait que le cône tangent existe et coïncide avec le courant d'intégration sur le cône tangent géométrique à A, muni de multiplicités convenables sur chacune de ses composantes irréductibles : ce résultat a été démontré par P. Thie [Th] en 1967 et R. King [Kg] en 1971. Très récemment, C. O. Kiselman [Km] a montré que la réponse générale est négative, en construisant une fonction plurisousharmonique u telle que le courant $i\partial\bar\partial u$ n'a pas de cône tangent. Simultanément, et suite à une suggestion du deuxième auteur, le premier auteur de ce travail obtenait une condition suffisante d'existence du cône tangent : voir [Bl1] pour une méthode simple relative au cas des courants de bidegré (1, 1), et [Bl2] pour le cas général. Le présent travail reprend en partie le preprint [Bl2] et la Thèse de 3ème Cycle du troisième auteur : outre la condition suffisante déjà mentionnée, nous obtenons une deuxième condition suffisante plus naturelle et montrons que les techniques de [Bl1], [Bl2] pour les homothéties de rapport réel s'appliquent aussi au cas des homothéties de rapport complexe. Nous utiliserons les notations classiques :

$$\alpha = i\partial\bar\partial \log|z|, \quad \beta = \frac{i}{2}\partial\bar\partial|z|^2,$$

$$(*) \qquad T = 2^{-q} i^{q^2} \sum_{|I|=|J|=q} T_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar z_J, \quad q = n-p.$$

La *mesure trace* de T est par définition la mesure positive

$$(**) \qquad \sigma_T = T \wedge \frac{\beta^p}{p!} = \sum_{|I|=q} T_{I,I} \cdot \tau$$

où $\tau = 2^{-n} i\, dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge \ldots \wedge i\, dz_n \wedge d\bar z_n$. On pose enfin $\sigma_T(r) = \sigma_T(B(r))$, où $B(r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathbf{C}^n$, et on considère la *masse projective*

$$(***) \qquad \nu_T(r) = \frac{\sigma_T(r)}{\pi^p r^{2p}/p!},$$

quotient de $\sigma_T(r)$ par le volume de la boule de rayon r dans $\mathbf{C}^p$. On sait d'après Lelong [Le] que $\nu_T(r)$ est fonction croissante de r. La limite $\nu_T(0) = \lim_{r\to 0+} \nu_T(r)$ est appelée *nombre de Lelong* de T au point 0. Notre principal résultat est le :

Théorème 1. *Le cône tangent à T au point 0 existe pourvu que la masse projective de T vérifie l'une ou l'autre des deux conditions :*

$$\text{(a)} \quad \int_0^{r_0} \frac{\sqrt{\nu_T(r) - \nu_T(r/2)}}{r}\, dr < +\infty, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{r_0} \frac{\nu_T(r) - \nu_T(0)}{r}\, dr < +\infty$$

pour r_0 assez petit.

La condition (a) est celle obtenue dans [Bl1] et [Bl2], tandis que (b) est celle obtenue dans [Mz]. Les conditions (a) et (b) mesurent toutes deux la manière dont $\nu_T(r)$ converge vers sa limite quand r tend vers 0. Il est facile de voir néanmoins qu'aucune des deux conditions n'implique l'autre. La construction de Kiselman [Km] permet de voir que la condition (b) est en un certain sens optimale :

Théorème 2. *Supposons $n \geqq 2$ et soit η: $]0, 1] \to]0, 1]$ une fonction continue croissante telle que $\lim_{r\to 0} \eta(r) = 0$. Alors il existe une fonction plurisousharmonique* *u sur* $\mathbf{C}^n$ *telle que le courant* $T=i\partial\bar{\partial}u$ *n'a pas de cône tangent, bien que*

$$\int_0^1 \eta(r)\,\frac{\nu_T(r)-\nu_T(0)}{r}\,dr<+\infty.$$

Nous obtenons en fait un résultat plus précis, analogue à celui de [Km], montrant que l'ensemble limite de (h_a^*T) peut être une partie fermée connexe quelconque dans l'ensemble des courants coniques de nombre de Lelong égal à $\nu_T(0)$. Par ailleurs, le théorème 1 redonne le résultat de Thie—King affirmant l'existence du cône tangent à un courant d'intégration sur un ensemble analytique ; dans ce cas, la convergence des intégrales (a) et (b) est assurée par l'estimation suivante :

Théorème 3. *Pour tout ensemble analytique A de dimension pure p fermé dans* Ω, *le courant* $[A]$ *vérifie une estimation*

$$\nu_{[A]}(r)-\nu_{[A]}(0)\leqq Cr^{\varepsilon}$$

pour r assez petit, avec des constantes C, $\varepsilon>0$ *convenables.*

Des calculs plus poussés utilisant les techniques de Barlet [Ba] permettraient sans doute de montrer que $\nu_{[A]}(r)-\nu_{[A]}(0)$ admet un développement asymptotique en fonction des puissances de r et de $\log r$, mais nous n'avons pas cherché à obtenir ce résultat ici.

2. Formule de Lelong—Jensen et conséquences

Soit T un courant de bidimension (p,p) défini sur un ouvert $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ et $T_{I,J}$ ses coefficients comme dans $(*)$. Rappelons que T est dit (faiblement) positif si $T\wedge iu_1\wedge\bar{u}_1\wedge\ldots\wedge iu_p\wedge\bar{u}_p$ est une mesure positive pour tout système de $(1,0)$-formes u_j de classe C^∞. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soit* $\lambda_I=\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_q}$, *où* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *sont des réels* $\geqq 0$ *quelconques. Pour tout courant positif T de bidimension* (p,p), *les mesures coefficients* $T_{I,J}$ *vérifient l'inégalité :*

$$\lambda_I\lambda_J|T_{I,J}|\leqq 2^p\sum\nolimits_M \lambda_M^2 T_{M,M},$$

où M décrit l'ensemble des multi-indices tels que $M\supset I\cap J$ *et* $M\subset I\cup J$, *avec* $|M|=q=n-p$.

Démonstration. Soient I,J tels que $|I|=|J|=q$. Posons $K=\complement I$, $L=\complement J$, avec $|K|=|L|=p$. Alors

$$T_{I,J}\cdot\tau=\pm T\wedge 2^{-p}i^{p^2}dz_K\wedge d\bar{z}_L=\sum\nolimits_{\lambda\in(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^p}\varepsilon_\lambda T\wedge\gamma_\lambda,$$

avec $\varepsilon_\lambda = \pm 1$ ou $\varepsilon_\lambda = \pm i$ et

$$\gamma_\lambda = \bigwedge_{s=1}^{p} \frac{i}{8}(dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{l_s}) \wedge (\overline{dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{l_s}}).$$

En effet, on peut écrire :

$$dz_K \wedge d\bar{z}_L = \pm (dz_{k_1} \wedge d\bar{z}_{l_1}) \wedge \ldots \wedge (dz_{k_p} \wedge d\bar{z}_{l_p}).$$

Le résultat découle alors de l'identité de polarisation :

$$\begin{aligned} 4dz_k \wedge d\bar{z}_l &= (dz_k + dz_l) \wedge (\overline{dz_k + dz_l}) - (dz_k - dz_l) \wedge (\overline{dz_k - dz_l}) \\ &\quad + i(dz_k + idz_l) \wedge (\overline{dz_k + idz_l}) - i(dz_k - idz_l) \wedge (\overline{dz_k - idz_l}). \end{aligned}$$

Chaque terme $T \wedge \gamma_\lambda$ est une mesure positive, donc

$$\begin{aligned} |T_{I,J}| \cdot \tau &\leqq \sum\nolimits_\lambda T \wedge \gamma_\lambda = T \wedge \bigwedge_{s=1}^{p} \left\{ \sum\nolimits_{\lambda_s \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}} \frac{i}{8} (dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{l_s}) \wedge (\overline{dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{l_s}}) \right\} \\ &\leqq T \wedge \bigwedge_{s=1}^{p} \left(\frac{i}{2} dz_{k_s} \wedge d\bar{z}_{k_s} + \frac{i}{2} dz_{l_s} \wedge d\bar{z}_{l_s} \right) \\ &\leqq T \wedge 2^{|K \cap L|} \sum\nolimits_{N \subset K \cup L} 2^{-p} i^{p^2} dz_N \wedge d\bar{z}_N \leqq 2^p \sum\nolimits_{I \cap J \subset M} T_{M,M} \cdot \tau, \end{aligned}$$

avec $M = \complement N \supset \complement K \cap \complement L = I \cap J$ et $T \wedge 2^{-p} i^{p^2} dz_N \wedge d\bar{z}_N = T_{\complement N, \complement N} \cdot \tau = T_{M,M} \cdot \tau$. Ainsi, pour tout courant T positif, on a

$$|T_{I,J}| \leqq 2^p \sum\nolimits_{|M|=q,\, M \supset I \cap J} T_{M,M}.$$

Appliquons cette inégalité au courant $S = \Lambda^* T$, où Λ est l'isomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ défini par :

$$\Lambda \colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n, \quad z_j \mapsto \lambda_j z_j,$$

avec $\lambda_j > 0$. Dans ce cas, $S_{I,J} = \lambda_I \lambda_J T_{I,J}(\Lambda z)$. Comme $\Lambda^* T$ est positif, l'inégalité précédente se traduit par

$$\lambda_I \lambda_J |T_{I,J}| \leqq 2^p \sum\nolimits_{M \supset I \cap J} \lambda_M^2 T_{M,M}.$$

Ceci reste vrai à la limite pour $\lambda_k \geqq 0$, et le lemme s'obtient en prenant $\lambda_k = 0$ pour $k \notin I \cup J$. ∎

Soit maintenant T un courant positif fermé défini sur un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbf{C}^n$ et $B(R)$ la plus grande boule de centre 0 contenue dans Ω. Pour $0 < r_1 < r_2 < R$, la formule classique de Lelong—Jensen [Le] s'écrit

$$\nu_T(r_2) - \nu_T(r_1) = \frac{1}{\pi^p} \int_{B(r_2) \setminus B(r_1)} T \wedge \alpha^p. \tag{2.2}$$

La fonction $r \mapsto \nu_T(r)$, définie sur $]0, R[$, est donc positive croissante ; sa limite en 0, notée $\nu_T(0)$, est appelée *nombre de Lelong de T en* 0. Pour $r \leqq r_0 < R$, on obtient la majoration

$$\sigma_T(r) = \int_{B(r)} T \wedge \beta^p \leqq C r^{2p}, \quad C = \frac{\pi^p}{p!} \nu_T(r_0).$$

En remplaçant T par le courant homothétique $h_a^* T$, dont le domaine de définition $a^{-1}\Omega$ contient la boule $B(R/|a|)$, on trouve

$$\sigma_{h_a^* T}(r) = |a|^{-2p} \sigma_T(|a|r), \quad \nu_{h_a^* T}(r) = \nu_T(|a|r) \quad \text{si} \quad |a| < R/r,$$

et les formules précédentes impliquent :

$$\frac{1}{\pi^p} \int_{B(r_2) \setminus B(r_1)} h_a^* T \wedge \alpha^p = \nu_T(|a| r_2) - \nu_T(|a| r_1) \quad \text{si} \quad |a| < R/r_2, \tag{2.3}$$

$$\int_{B(r)} h_a^* T \wedge \beta^p \leqq C r^{2p} \quad \text{si} \quad |a| \leqq r_0/r. \tag{2.4}$$

Il résulte de (2.4) que la famille de courants $(h_a^* T)$ est uniformément bornée en masse sur tout compact de $\mathbf{C}^n$ pour $|a|$ assez petit. Les résultats de compacité usuels pour la topologie faible des courants impliquent alors :

Conséquence 2.5. *De toute suite $(h_{a_k}^* T)$ avec $|a_k|$ tendant vers 0, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Le courant T admet un cône tangent si et seulement si toutes ces sous-suites ont même limite.*

Lemme 2.6. *Soit Θ un courant positif fermé de bidimension (p, p) sur $\mathbf{C}^n$. Il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :*

(a) *Θ est invariant par les homothéties h_a de rapport $a \in \mathbf{C}^*$;*

(b) *Θ est invariant par les homothéties h_r de rapport $r > 0$;*

(c) *$\Theta \wedge \alpha^p = 0$ sur $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$;*

(d) *Θ est l'extension à $\mathbf{C}^n$ de l'image réciproque d'un courant positif fermé θ sur $\mathbf{P}^{n-1}$ par la projection $\pi\colon \mathbf{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^{n-1}$.*

Un tel courant sera appelé un courant conique.

Démonstration. Il est évident que (d) implique (a) et que (a) implique (b). Sous l'hypothèse (b), la fonction ν_Θ est constante, et la formule (2.2) montre que la propriété (c) est vérifiée. Reste à voir que (c) entraîne (d). Plaçons-nous par exemple sur l'ouvert de $\mathbf{C}^n$ défini par $z_n \neq 0$ et utilisons les coordonnées projectives

$$w_1 = \frac{z_1}{z_n}, \ldots, w_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n}, \quad w_n = z_n.$$

Dans ces coordonnées, α s'écrit $\frac{i}{2} \partial\bar\partial \log(1 + |w_1|^2 + \ldots + |w_{n-1}|^2)$ et un calcul classique montre que

$$\alpha \geqq (1 + |w'|^2)^{-2} \beta' \quad \text{où} \quad \beta' = \frac{i}{2} \partial\bar\partial(|w_1|^2 + \ldots + |w_{n-1}|^2).$$

Soient $\Theta_{I,J}$ les coefficients de Θ dans les coordonnées (w_j). L'hypothèse $\Theta\wedge\alpha^p=0$ et la formule

$$\Theta\wedge\frac{\beta'^p}{p!}=\sum\nolimits_{I\ni n}\Theta_{I,I}\cdot\tau$$

entraînent $\Theta_{I,I}=0$ pour $I\ni n$. Le lemme 2.1 appliqué avec $\lambda_n\geqq 0$ quelconque et $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=1$ donne $\Theta_{I,J}=0$ si I et J contiennent n et

$$\lambda_n|\Theta_{I,J}|\leqq 2^p\sum\nolimits_{M\not\ni n}\Theta_{M,M}$$

si un seul des deux indices I ou J contient n. On a donc $\Theta_{I,J}=0$ dans ce cas aussi. L'hypothèse $d\Theta=0$ implique maintenant $\partial\Theta_{I,J}/\partial w_n=\partial\Theta_{I,J}/\partial\overline{w}_n=0$ pour tous I, J, c'est-à-dire que Θ dépend uniquement des variables $w_1, \ldots, w_{n-1}$. Comme la projection $\pi\colon \mathbf{C}^n\setminus\{0\}\to\mathbf{P}^{n-1}$ s'écrit $(w_1, \ldots, w_n)\mapsto(w_1, \ldots, w_{n-1})$ dans les coordonnées (w_j), on voit que $\Theta_{\restriction\mathbf{C}^n\setminus\{0\}}$ est bien l'image réciproque par π d'un courant positif fermé θ défini sur $\mathbf{P}^{n-1}$. ∎

Proposition 2.7. *Toute valeur d'adhérence Θ de la famille (h_a^*T) est un courant conique.*

Démonstration. Comme $\nu_T(r)$ a une limite en 0, la formule (2.3) implique en effet $\Theta\wedge\alpha^p=0$ sur $\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$. ∎

Corollaire 2.8. *Si (a_k), (b_k) sont deux suites de nombres complexes non nuls tendant vers 0 telles que les quotients $|a_k|/|b_k|$ et $|b_k|/|a_k|$ restent bornés, alors $h_{a_k}^*T-h_{b_k}^*T$ converge faiblement vers 0 sur $\mathbf{C}^n$.*

Démonstration. Grâce à des extractions de sous-suites, on se ramène à la situation où $(h_{a_k}^*T)$, $(h_{b_k}^*T)$ admettent des limites faibles Θ_1, Θ_2, et où de plus $c_k=b_k/a_k$ converge vers une limite $c\in\mathbf{C}^*$. Pour toute forme test φ, on a alors

$$\langle h_{a_k}^*T, \varphi\rangle=\langle h_{1/c_k}^*h_{b_k}^*T, \varphi\rangle=\langle h_{b_k}^*T, h_{c_k}^*\varphi\rangle\to\langle\Theta_2, h_c^*\varphi\rangle$$

car $h_{c_k}^*\varphi$ tend vers $h_c^*\varphi$ en topologie C^∞. La limite est égale à $\langle\Theta_2, \varphi\rangle$ d'après la proposition 2.7, par conséquent $\Theta_1=\Theta_2$. ∎

Il résulte du corollaire 2.8 que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la famille (h_a^*T) ne change pas si on se restreint aux homothéties de rapport réel positif.

3. Conditions suffisantes d'existence du cône tangent

La majoration (2.4) montre que la famille (h_a^*T) est de masse uniformément petite au voisinage de l'origine. On en déduit que (h_a^*T) converge faiblement sur $\mathbf{C}^n$ si et seulement si $(h_a)^*T$ converge faiblement au voisinage de tout point $z^0\in\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$.

Après une homothétie et un changement unitaire de coordonnées, nous pouvons supposer que $z^0=(0, \ldots, 0, z_n^0)$ et $1/2<z_n^0<1$. Nous utiliserons de nouveau les coordonnées projectives et poserons

$$w_1 = \frac{z_1}{z_n}, \ldots, w_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n}, \quad w_n = z_n,$$
$$T = 2^{-q} i^{q^2} \sum_{|I|=|J|=q} T_{I,J}\, dw_I \wedge d\bar{w}_J.$$

Dans ces coordonnées, l'homothétie h_a s'écrit

$$h_a\colon w = (w', w_n) \mapsto (w', aw_n), \quad w' = (w_1, \ldots, w_{n-1}), \tag{3.1}$$

de sorte que les coefficients de $h_a^* T$ sont donnés par

$$T_{I,J}^a(w) = \begin{cases} T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si} \quad n\notin I,\ n\notin J, \\ aT_{I,J}(w', aw_n) & \text{si} \quad n\in I,\ n\notin J, \\ \bar{a}T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si} \quad n\notin I,\ n\in J, \\ |a|^2 T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si} \quad n\in I,\ n\in J. \end{cases} \tag{3.2}$$

Lemme 3.3. *Soit U le voisinage du point z^0 défini par les inégalités $|z_n|>1/2$ et $|z|<1$. On considère la fonction*

$$\gamma(r) = \nu_T(r) - \nu_T(r/2), \quad r\in]0, R[.$$

Soit $r_0<R$. Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 \geqq 0$ telles que pour $|a|\leqq r_0$ les mesures $T_{I,J}^a$ admettent les majorations de masse

$$\int_U |T_{I,J}^a| \leqq \begin{cases} C_1 & \textit{pour tous } I, J, \\ C_2\gamma(|a|) & \textit{si} \quad n\in I \textit{ et } n\in J, \\ C_3\sqrt{\gamma(|a|)} & \textit{si} \quad n\in I \textit{ ou } n\in J. \end{cases}$$

Démonstration. Comme $\bar{U}$ est compact dans la carte définie par les coordonnées (w_j) et comme la $(1, 1)$-forme β est définie positive, on a une minoration $\beta\geqq C_4 i\partial\bar\partial|w|^2$ sur $\bar{U}$. L'inégalité (2.4) avec $r=1$ entraîne que $\int_U \sum T_{I,I}^a$ est bornée par une constante C_5 indépendante de a pour $|a|\leqq r_0$. Par ailleurs, nous avons vu que

$$\alpha \geqq C_6\beta' \quad \text{sur} \quad U, \quad \text{avec} \quad \beta' = \frac{i}{2}\partial\bar\partial(|w_1|^2+\ldots+|w_{n-1}|^2).$$

L'inégalité (2.3) avec $r_1=1/2$ et $r_2=1$ entraîne donc

$$\int_U \sum_{I\ni n} T_{I,I}^a \leqq C_7\big(\nu_T(|a|)-\nu_T(|a|/2)\big) = C_7\gamma(|a|) \quad \text{si} \quad |a| < R.$$

La majoration pour $T_{I,J}^a$ quelconque résulte alors du lemme 2.1. Montrons-le par exemple dans le dernier cas, en supposant $n\in I$, $n\notin J$. Si nous choisissons $\lambda_1=\ldots=$

$\lambda_{n-1}=1$, il vient

$$\lambda_n \int_U |T^a_{I,J}| \leqq 2^p \int_U \left(\sum_{M \not\ni n} T^a_{M,M} + \lambda_n^2 \sum_{M \ni n} T^a_{M,M}\right) \leqq 2^p (C_5 + C_7 \lambda_n^2 \gamma(|a|)).$$

L'inégalité cherchée s'obtient en prenant $\lambda_n = \gamma(|a|)^{-1/2}$. ∎

Nous cherchons maintenant des conditions assurant que $h_a^* T$ admet une limite faible sur U quand $|a|$ tend vers 0. Le lemme 3.3 montre que le coefficient $T^a_{I,J}$ tend vers 0 en masse dès que I ou J contient n. Il suffit donc d'étudier la convergence faible des mesures $T^a_{I,J}$ lorsque $n \notin I$ et $n \notin J$. Soit φ une fonction C^∞ à support compact dans U. Pour $I, J \not\ni n$, on considère la fonction

$$f_{I,J}(a) = \int_U T^a_{I,J}(w)\, \varphi(w)\, d\tau(w) = \int_U T_{I,J}(w', aw_n)\, \varphi(w)\, d\tau(w).$$

La fonction $f_{I,J}$ est de classe C^∞ sur le disque pointé $0<|a|<R$ et bornée au voisinage de 0. Le problème consiste à voir si $f_{I,J}(a)$ admet une limite quand $|a|$ tend vers 0. Pour cela, l'idée est de rechercher une estimation des dérivées $\partial f_{I,J}/\partial a$, $\partial f_{I,J}/\partial \bar a$ ou $\partial^2 f_{I,J}/\partial a\, \partial \bar a$ au voisinage de 0. Par dérivation sous le signe somme

$$\frac{\partial f_{I,J}}{\partial a} = \int_U w_n \frac{\partial T_{I,J}}{\partial w_n}(w', aw_n)\, \varphi(w)\, d\tau(w).$$

Le coefficient de $dw_{I \cup \{n\}} \wedge d\bar w_J$ dans dT est donné par

$$(-1)^q \frac{\partial T_{I,J}}{\partial w_n} + \sum_{1 \leqq k \leqq q} (-1)^{k-1} \frac{\partial T_{I(k),J}}{\partial w_{i_k}} \quad \text{avec} \quad I(k) = (I \setminus \{i_k\}) \cup \{n\}.$$

Ce coefficient est nul car $dT=0$ et on a $T_{I(k),J}(w', aw_n) = a^{-1} T^a_{I(k),J}(w)$, d'où

$$\frac{\partial T_{I,J}}{\partial w_n}(w', aw_n) = \frac{1}{a} \sum_{1 \leqq k \leqq q} (-1)^{q+k} \frac{\partial T^a_{I(k),J}}{\partial w_{i_k}}(w).$$

Substituons maintenant cette relation dans l'intégrale donnant $\partial f_{I,J}/\partial a$ et intégrons par parties. Il vient

$$\frac{\partial f_{I,J}}{\partial a} = \frac{1}{a} \sum_{1 \leqq k \leqq q} (-1)^{q+k-1} \int_U w_n T^a_{I(k),J} \frac{\partial \varphi}{\partial w_{i_k}}\, d\tau(w).$$

On a naturellement la formule conjugée

$$\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar a} = \frac{1}{\bar a} \sum_{1 \leqq l \leqq q} (-1)^{q+l-1} \int_U \bar w_n T^a_{I,J(l)} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar w_{j_l}}\, d\tau(w).$$

En redérivant cette deuxième égalité par la première formule, on obtient

$$\frac{\partial^2 f_{I,J}}{\partial a \partial \bar a} = \frac{1}{|a|^2} \sum_{1 \leqq k, l \leqq q} (-1)^{k+l} \int_U |w_n|^2 T^a_{I(k),J(l)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_{i_k} \partial \bar w_{j_l}}\, d\tau(w).$$

La fonction φ et ses dérivées sont bornées sur U. Comme $n\in I(k)$ et $n\in J(l)$, le lemme 3.3 fournit les majorations suivantes :

Conséquence 3.4. *Il existe des constantes* $C_1, C_2 \geqq 0$ *telles que*

$$\left|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial a}\right| + \left|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{a}}\right| \leqq C_1 \frac{\sqrt{\gamma(|a|)}}{|a|}, \quad \left|\frac{\partial^2 f_{I,J}}{\partial a \partial \bar{a}}\right| \leqq C_2 \frac{\gamma(|a|)}{|a|^2} \quad pour \quad 0 < |a| \leqq r_0.$$

Pour exploiter ce résultat, nous énonçons maintenant deux lemmes élémentaires permettant d'affirmer l'existence de la limite $\lim_{|a|\to 0} f(a)$ à partir d'estimations sur les dérivées de f.

Lemme 3.5. *Soit f une fonction de classe C^1 définie sur le disque pointé* $0<|a|\leqq r_0$. *On suppose qu'il existe une fonction mesurable* u: $]0, r_0] \to \mathbf{R}_+$ *telle que*

$$|df(a)| \leqq u(|a|), \quad avec \quad \int_0^{r_0} u(r)\, dr < +\infty.$$

Alors $f(a)$ admet une limite quand $|a|$ tend vers 0.

Démonstration. D'après le critère de Cauchy, il suffit de montrer que $|f(a_1)-f(a_2)|$ tend vers 0 lorsque $a_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $a_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ tendent vers 0. On suppose $r_1 \leqq r_2$, et on considère les points $b_1 = re^{i\theta_1}$, $b_2 = re^{i\theta_2}$ avec $r\in]0, r_2[$. Le théorème des accroissements finis et l'inégalité triangulaire entraînent

$$|f(a_j)-f(b_j)| \leqq \int_{[r, r_j]} u(t)\, dt \leqq \int_0^{r_2} u(t)\, dt, \quad j = 1, 2,$$

$$|f(b_2)-f(b_1)| \leqq \int_{[\theta_1, \theta_2]} u(r)\, r\, d\theta \leqq \pi r u(r),$$

$$|f(a_1)-f(a_2)| \leqq 2\int_0^{r_2} u(t)\, dt + \pi r_2 u(r).$$

Prenons la valeur moyenne des termes de la dernière ligne pour $r\in]0, r_2[$. Il vient $|f(a_1)-f(a_2)| \leqq (2+\pi) \int_0^{r_2} u(t)\, dt$, ce qui tend vers 0 lorsque r_2 tend vers 0. ∎

Lemme 3.6. *Soit f une fonction de classe C^2 définie sur le disque pointé* $0<|a|\leqq r_0$. *On suppose que f est bornée et qu'il existe une fonction mesurable* u: $]0, r_0] \to \mathbf{R}_+$ *telle que*

$$|\Delta f(a)| \leqq u(|a|), \quad avec \quad \int_0^{r_0} r\, |\log r|\, u(r)\, dr < +\infty.$$

Alors $f(a)$ admet une limite quand $|a|$ tend vers 0.

Démonstration. Quitte à modifier f en la multipliant par une fonction plateau égale à 1 au voisinage de 0, il n'est pas restrictif de supposer que f est définie sur $\mathbf{C}^*$ et à support dans le disque ouvert $|a| < r_0$, avec $|r_0| < 1/2$. Comme $\int_0^{r_0} u(r)\, r\, dr$ converge d'après l'hypothèse, la fonction $g(a) = \Delta f(a)$, $a\in \mathbf{C}^*$, est intégrable sur $\mathbf{C}$.

Par ailleurs f est bornée, donc f définit une distribution sur $\mathbf{C}$. On note $\Delta f \in \mathscr{D}'(\mathbf{C})$ le Laplacien de f au sens des distributions.

La distribution $\Delta f - g$ a son support contenu dans $\{0\}$ et elle est au plus d'ordre 2 car f et g sont d'ordre 0, par suite

$$\Delta f - g = \sum_{|\alpha| \leqq 2} C_\alpha \delta_0^{(\alpha)},$$

où $\delta_0^{(\alpha)}$ désigne la dérivée $\partial^{|\alpha|}/\partial a^{\alpha_1} \partial \bar{a}^{\alpha_2}$ de la masse de Dirac en 0. Effectuons une convolution avec la solution élémentaire $E = \frac{1}{2\pi} \log |a|$. Il vient

$$f - E * g = C_{0,0} \frac{1}{2\pi} \log |a| - \frac{C_{1,0}}{4\pi a} - \frac{C_{0,1}}{4\pi \bar{a}} - \frac{C_{2,0}}{4\pi a^2} + \frac{C_{0,2}}{4\pi \bar{a}^2} + \frac{C_{1,1}}{4} \delta_0.$$

Si nous montrons que $E * g$ est une fonction continue sur $\mathbf{C}$, alors comme f est bornée et ne porte pas de masse en 0, il en résultera que tous les coefficients C_α sont nuls; par suite $f = E * g$ et en particulier f sera continue en 0.

Soit $\varrho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{C})$ une famille de fonctions tronquantes au voisinage de 0:

$$\varrho_\varepsilon(a) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |a| > \varepsilon \\ 0 & \text{pour} \quad |a| < \varepsilon/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \leqq \varrho_\varepsilon \leqq 1.$$

Puisque la fonction $\varrho_\varepsilon g$ est continue à support compact dans $\mathbf{C}$, la convolée $E * (\varrho_\varepsilon g)$ est continue sur $\mathbf{C}$. Il suffit donc de montrer que $E * (\varrho_\varepsilon g)$ converge uniformément vers $E * g$ sur le disque $|a| < 1/2$, quand ε tend vers 0. Comme $|g(z)| \leqq u(|z|)$ et comme la fonction $1 - \varrho_\varepsilon(z)$ est à support dans le disque $|z| \leqq \varepsilon$, nous avons pour $\varepsilon < 1/2$:

$$\left| E * ((1 - \varrho_\varepsilon) g)(a) \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{|z| \leqq \varepsilon} -\log |a - z| \, u(|z|) \, d\lambda(z)$$

car le logarithme est toujours négatif. L'égalité de moyenne pour la fonction harmonique $z \mapsto \log |a - z|$ avec $|z| = r < |a|$ et pour $a \mapsto \log |a - z|$ avec $|a| < r$ donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - re^{i\theta}| \, d\theta = \max \{\log |a|, \log r\}.$$

Il en résulte

$$\left| E * ((1 - \varrho_\varepsilon) g)(a) \right| \leqq \int_0^\varepsilon \min \{-\log |a|, -\log r\} u(r) r \, dr \leqq \int_0^\varepsilon r \, |\log r| \, u(r) \, dr,$$

donc $E * ((1 - \varrho_\varepsilon) g)$ converge bien uniformément vers 0 sur le disque $|a| < 1/2$. ▮

Démonstration du théorème 1. Nous avons vu que $(h_a^* T)$ admet une limite faible si et seulement si la fonction

$$f_{I,J}(a) = \int_U T_{I,J}^a(w) \, \varphi(w) \, d\tau(w)$$

admet une limite quand $|a|$ tend vers zéro, pour tous $I, J \not\ni n$ et toute fonction test $\varphi\in\mathcal{D}(U)$. D'après les estimations 3.4 et les lemmes 3.5, 3.6, il suffit que la fonction $\gamma(r)=\nu_T(r)-\nu_T(r/2)$ vérifie l'une des deux conditions :

$$\text{(a)} \quad \int_0^{r_0} \frac{\sqrt{\gamma(r)}}{r}\,dr<+\infty, \quad \text{(b)} \quad \int_0^{r_0} \frac{|\log r|\,\gamma(r)}{r}\,dr<+\infty.$$

La condition (a) est précisément celle donnée dans le § 1. On a par ailleurs

$$\int_0^{r_0} \frac{\nu_T(r)-\nu_T(0)}{r}\,dr=\int_0^{r_0} \frac{\sum\gamma(r2^{-k})}{r}\,dr=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{r_0 2^{-k}} \frac{\gamma(r)}{r}\,dr$$

$$=\int_0^{r_0}\left[\frac{\log(2r_0/r)}{\log 2}\right]\frac{\gamma(r)}{r}\,dr,$$

où [ ] désigne la partie entière. Ceci montre l'équivalence de la condition (b) avec celle du § 1. ∎

Remarque 3.7. On peut voir facilement qu'aucune des deux conditions (a) et (b) n'implique l'autre. Prenons en effet $T=i\partial\bar\partial u$ avec $u=\chi(\log|z|)$ où $\chi\colon]-\infty, t_0[\to\mathbf{R}$ est une fonction convexe croissante. On sait alors que $r^{-1}\nu_T(r)$ est la dérivée à gauche de la valeur moyenne de u sur la sphère de rayon r, d'où

$$\nu_T(r)=\chi'(\log r-0).$$

Le choix $\chi(t)=(\log|t|)^{-1}$ sur $]-\infty,-1[$ donne $\nu_T(0)=0$ et

$$\nu_T(r)=|\log r|^{-1}(\log|\log r|)^{-2}, \quad \gamma(r)\cong\log 2\,|\log r|^{-2}(\log|\log r|)^{-2}$$

donc (a) diverge et (b) converge. De même, il existe une fonction χ affine par morceaux telle que

$$\nu_T(r)=\frac{1}{k^2} \quad \text{sur} \quad]e^{-k^2}, e^{-(k-1)^2}[, \quad k\geqq 1,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\nu_T(r)-\nu_T(r/2)}}{r}\,dr=\sum_{k=1}^{+\infty}\log 2\sqrt{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}}<+\infty,$$

$$\int_0^1 \frac{\nu_T(r)-\nu_T(0)}{r}\,dr=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\log\frac{e^{-(k-1)^2}}{e^{-k^2}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2k-1}{k^2}=+\infty.$$

4. Optimalité de la condition suffisante (b)

Soit K_p l'ensemble des courants positifs fermés coniques de bidimension (p,p) et de nombre de Lelong égal à 1; c'est une partie convexe métrisable et faiblement compacte dans l'espace des courants. Si T est un courant positif fermé sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, l'ensemble limite de la famille (h_a^*T) est donné par

$$\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{\{h_a^*T;\ 0<|a|<2^{-k}\}}.$$

Comme chaque facteur de l'intersection est une partie compacte connexe de l'espace des courants, l'ensemble limite est une partie *compacte connexe,* contenue dans $\nu_T(0)\cdot K_p$. Inversement, pour $p=1$, C. O. Kiselman [Km] a montré que toute partie fermée connexe $M\subset K_1$ peut être réalisée comme ensemble limite des homothétiques d'un courant T de bidegré $(1, 1)$. Notre objectif est de démontrer le théorème suivant, qui contient le théorème 2 et précise le résultat de Kiselman.

Théorème 4.1. *Soit M une partie fermée connexe de K_1. Pour toute fonction continue croissante η: $]0, 1]\to]0, 1]$ telle que $\lim_{t\to 0}\eta(t)=0$, il existe une fonction plurisousharmonique u sur $\mathbf{C}^n$ telle que le courant $T=i\partial\bar\partial u$ vérifie*

$$\int_0^1 \eta(r)\frac{\nu_T(r)-\nu_T(0)}{r}\,dr<+\infty$$

et telle que l'ensemble limite de la famille (h_a^*T) soit égal à M.

Lemme 4.2. *Pour toute partie fermée connexe $M\subset K_1$, il existe une suite de fonctions $v_k\in C^\infty(\mathbf{P}^{n-1})$ telle que $\|v_{k+1}-v_k\|_\infty$ tende vers zéro et telle que*

$$i\partial\bar\partial(\log|z|+v_k\circ\pi)$$

soit une suite de courants positifs dont l'ensemble limite est égal à M.

Démonstration. Soit δ une distance définissant la topologie de K_1. Comme deux points quelconques d'un espace métrique compact connexe peuvent être reliés par une chaîne de points arbitrairement proches, il existe une suite de courants (Θ_k) dense dans M telle que $\delta(\Theta_k, \Theta_{k+1})$ tend vers zéro. On sait que le potentiel canonique

$$f_k(z)=\frac{(2\pi)^{-n}}{n-1}\int_{\mathbf{C}^n}\left(\frac{1}{(1+|\zeta|^2)^{n-1}}-\frac{1}{|z-\zeta|^{2n-2}}\right)\Theta_k(\zeta)\wedge(i\partial\bar\partial|\zeta|^2)^{n-1}$$

vérifie $i\partial\bar\partial f_k=\Theta_k$. Un calcul simple utilisant l'invariance de Θ_k par homothéties montre que $f_k(az)-f_k(z)$ est une constante. Cette constante est égale à $\log|a|$ parce que le nombre de Lelong de f_k en 0 est 1. Par suite $f_k(z)-\log|z|$ est invariante par homothéties, c'est-à.dire que $f_k(z)-\log|z|=w_k(\pi(z))$ où w_k est une fonction sur l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}$. Par construction $\Theta_{k+1}-\Theta_k$ converge faiblement vers 0, donc il en est de même pour $f_{k+1}-f_k$ et $w_{k+1}-w_k$. Soit $\varrho_\varepsilon(g)=$ $=\varepsilon^{-n^2}\varrho(|g-1|^2/\varepsilon^2)$ une famille de noyaux régularisants sur le groupe unitaire $U(n)$. Il suffit de prendre pour v_k une convolution sphérique $v_k=\varrho_{\varepsilon_k}*w_k$ définie par

$$v_k(z)=\int_{g\in U(n)}\varrho_{\varepsilon_k}(g)\,w_k(g(z))\,dg.$$

La différence $\|\varrho_{\varepsilon_{k+1}}-\varrho_{\varepsilon_k}\|_\infty$ tend vers 0 dès que $\varepsilon_{k+1}^{-n^2}-\varepsilon_k^{-n^2}$ tend vers 0, ce qui a lieu par exemple si $\varepsilon_k^{-n^2}=\psi(k)$ où ψ est une fonction croissante concave telle que

$\lim_{t\to+\infty} \psi(t)=+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \psi'(t)=0$. Dans ce cas, $\|(\varrho_{\varepsilon_{k+1}}-\varrho_{\varepsilon_k})*w_k\|_\infty$ tend vers 0 car la norme L^1 des fonctions w_k sur $\mathbf{P}^{n-1}$ est uniformément bornée. Par ailleurs la convergence faible de $w_{k+1}-w_k$ vers 0 entraîne que $\|\varrho_\varepsilon*(w_{k+1}-w_k)\|_\infty$ tend vers 0 pour tout ε, donc $\|\varrho_{\varepsilon_{k+1}}*(w_{k+1}-w_k)\|_\infty$ tend vers 0 si $\varepsilon_k=\psi(k)^{-1/n^2}$ tend vers 0 suffisamment lentement. Alors

$$\|v_{k+1}-v_k\|_\infty \leqq \|\varrho_{\varepsilon_{k+1}}*(w_{k+1}-w_k)\|_\infty+\|(\varrho_{\varepsilon_{k+1}}-\varrho_{\varepsilon_k})*w_k\|_\infty$$

tend vers 0, et de plus la suite

$$i\partial\bar{\partial}(\log|z|+v_k\circ\pi) = i\partial\bar{\partial}(\varrho_{\varepsilon_k}*f_k) = \varrho_{\varepsilon_k}*\Theta_k = \int_{g\in U(n)} \varrho_{\varepsilon_k}(g)g^*\Theta_k\,dg$$

a mêmes valeurs d'adhérence que la suite (Θ_k). ∎

Démonstration du théorème 4.1. Soit v_k la suite de fonctions données par le lemme 4.2. Nous avons alors $\|v_k\|_\infty=o(k)$ et nous pouvons supposer que $\|v_{k+1}-v_k\|_\infty<1$ pour tout k. On pose

$$u_k(z) = (1+\delta_k)\log|z|+v_k(\pi(z))-3k, \quad u(z) = \sup_{k\in\mathbf{N}} u_k(z),$$

où $\delta_k>0$ est une suite telle que $\delta_{k+1}<\delta_k/5$. Pour $|z|<1$, nous avons

$$u_{k+1}-u_k(z) = -(\delta_k-\delta_{k+1})\log|z|+(v_{k+1}-v_k)(\pi(z))-3$$
$$\begin{cases} <-\delta_k\log|z|-2 \\ >-(4\delta_k/5)\log|z|-4. \end{cases}$$

On a donc $u_k(z)>u_{k+1}(z)$ si $|z|>e^{-2/\delta_k}$ et $u_{k+1}>u_k(z)$ si $|z|<e^{-5/\delta_k}$, c'est-à-dire que les deux fonctions se « croisent » dans la couronne

$$\mathscr{C}_k\colon e^{-5/\delta_k} \leqq |z| \leqq e^{-2/\delta_k}.$$

De plus, ces couronnes sont deux à deux disjointes d'après le choix initial $\delta_{k+1}<\delta_k/5$. Il en résulte que u coïncide avec u_k dans la couronne $\mathscr{C}'_k$ séparant $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k-1}$, à savoir

$$\mathscr{C}'_k\colon e^{-2/\delta_k} < |z| < e^{-5/\delta_{k-1}}.$$

On a par ailleurs

$$\nu_{i\partial\bar{\partial}u_k}(r) = r\frac{d}{dr}(\text{valeur moyenne de } u_k \text{ sur } S(r)) = 1+\delta_k$$

pour tout r, donc $T=i\partial\bar{\partial}u$ vérifie

$$\nu_T(r) = 1+\delta_k \quad \text{sur } \mathscr{C}'_k, \quad 1+\delta_{k+1} \leqq \nu_T(r) \leqq 1+\delta_k \quad \text{sur } \mathscr{C}_k.$$

En découpant l'intégration sur $[0, 1]$ selon la subdivision e^{-5/δ_k} et en posant $\delta_{-1}=$

$+\infty$, on trouve

$$\int_0^1 \eta(r)\frac{v_T(r)-v_T(0)}{r}\,dr \leqq \sum_{k=0}^{+\infty}\eta(e^{-5/\delta_{k-1}})\,\delta_k \log\frac{e^{-5/\delta_{k-1}}}{e^{-5/\delta_k}} \leqq \sum_{k=0}^{+\infty} 5\eta(e^{-5/\delta_{k-1}}).$$

Il est clair que la série converge dès que la suite δ_k tend vers 0 assez vite.

Nous allons voir maintenant que l'ensemble limite de la famille $(h_a^* T)$ coïncide avec l'ensemble limite de la suite $i\partial\bar\partial u_k$, qui est égal à M d'après le lemme 4.2. Soit z^1 un point fixé sur la sphère unité de $\mathbf{C}^n$. Etant donné $a\in\mathbf{C}$ tel que $0<|a|<1$, soit $k=k(a)$ un entier tel que $u(az^1)=u_k(az^1)$. Nous avons alors $az^1\in\mathscr{C}_k\cup\mathscr{C}'_k\cup\mathscr{C}_{k-1}$, c'est-à-dire

$$e^{-5/\delta_k} \leqq |a| \leqq e^{-2/\delta_{k-1}},$$

en particulier $k=k(a)$ tend vers $+\infty$ quand $|a|$ tend vers 0. La suite $1/k\delta_{k-1}$, qui est minorée par $5^{k-1}/k\delta_0$, tend donc vers $+\infty$. Pour z dans la couronne

$$\Gamma_k\colon\ e^{-1/k\delta_{k-1}} < |z| < e^{1/k\delta_{k-1}}$$

on voit facilement que $az\in\mathscr{C}'_{k+1}\cup\mathscr{C}_k\cup\mathscr{C}'_k\cup\mathscr{C}_{k-1}\cup\mathscr{C}'_{k-1}$, donc $u(az)=u_l(az)$ avec $l=k,\ k+1$ ou $k-1$. Or

$$u_l(az)-u_k(az) = (\delta_l-\delta_k)\log|az|+(v_l-v_k)(\pi(z))-3(l-k);$$

pour $z\in\Gamma_k$, l'écart de cette fonction avec sa valeur en z^1 est majoré par

$$|\delta_l-\delta_k|\frac{1}{k\delta_{k-1}}+2\|v_l-v_k\|_\infty \leqq \frac{1}{k}+2\max\{\|v_{k+1}-v_k\|_\infty,\ \|v_{k-1}-v_k\|_\infty\}.$$

L'écart de la fonction $u(az)-u_k(az)=\max\{u(az)-u_k(az)\}$ avec sa valeur (nulle) en z^1 est majoré par la même quantité tendant vers 0, donc $\|u\circ h_a-u_k\circ h_a\|_{L^\infty(\Gamma_k)}$ tend vers 0. Par application de l'opérateur $i\partial\bar\partial$, on voit que

$$h_a^*(i\partial\bar\partial u)-h_a^*(i\partial\bar\partial u_{k(a)}) = h_a^* T-i\partial\bar\partial u_{k(a)}$$

tend vers zéro faiblement sur tout compact de $\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$. ∎

5. Cône d'un ensemble analytique

Nous commencerons par rappeler quelques notions très classiques relatives à la construction géométrique du cône tangent d'un ensemble analytique. Soit $(A, 0)$ un germe d'ensemble analytique de dimension pure p dans $\mathbf{C}^n$. On suppose que A est défini par des équations $f_1(z)=\ldots=f_N(z)=0$ dans un voisinage ouvert Ω de 0. L'ensemble analytique E dans l'ouvert

$$U = \{(t, z)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n;\ tz\in\Omega\}$$

défini par les équations $f_j(tz)=0$ est la réunion de $\{0\}\times\mathbf{C}^n$ et des homothétiques $\{t\}\times t^{-1}A$ de A pour $t\in\mathbf{C}^*$. Soit E^* la réunion des composantes irréductibles de E qui ne sont pas contenues dans $\{0\}\times\mathbf{C}^n$. Chacune de ces composantes E_j est de dimension $p+1$, donc E^* est un ensemble analytique de dimension pure $p+1$. De plus $E_j\setminus(\{0\}\times\mathbf{C}^n)$ est dense dans E_j, donc $E^*=\bigcup E_j$ est l'adhérence de

$$E\setminus(\{0\}\times\mathbf{C}^n)=\bigcup_{t\in\mathbf{C}^*}\{t\}\times t^{-1}A.$$

Le *cône tangent ensembliste* $C(A)$ est l'ensemble analytique de dimension pure p défini par

$$\{0\}\times C(A)=E^*\cap(\{0\}\times\mathbf{C}^n). \tag{5.1}$$

D'après ce qui précède, c'est exactement l'ensemble des limites des suites $t_k^{-1}z_k$ lorsque $z_k\in A$ et $t_k\in\mathbf{C}^*$ tendent vers 0.

Si $[A]$ désigne le courant d'intégration sur A, alors $h_r^*[A]=[r^{-1}A]$ sur $r^{-1}\Omega$. Pour $B(R)\subset\Omega$ et $r<R$ nous avons :

$$\nu_{[A]}(r)=\nu_{[r^{-1}A]}(1)=\frac{1}{\pi^p}\int_{r^{-1}A\cap B(1)}\beta^p=\frac{1}{\pi^p}\int_{r^{-1}A\cap S(1)}\beta^{p-1}\wedge\frac{i}{2}\bar\partial|z|^2. \tag{5.2}$$

La dernière égalité résulte du théorème de Stokes, qui s'applique dès lors que r n'est pas valeur critique de la fonction $|z|$ sur A_{reg} ; d'après le théorème de Sard l'ensemble de ces valeurs critiques forme un ensemble au plus dénombrable D. Considérons l'ensemble analytique réel $M=E^*\cap(\mathbf{R}\times S(1))$ et, pour tous réels $r_1<r_2<R$, l'ensemble

$$M(r_1,r_2)=E^*\cap(]r_1,r_2[\times S(1))=M\cap(]r_1,r_2[\times\mathbf{C}^n).$$

Nous avons $\dim_{\mathbf{R}} r^{-1}A\cap S(1)=2p-1$ et

$$M=\{0\}\times(C(A)\cap S(1))\cup\bigcup_{r\in\mathbf{R}^*}\{r\}\times(r^{-1}A\cap S(1)),$$

de sorte que M est de dimension réelle pure $2p$. Pour $r_1,r_2\notin D$, le bord $\partial M(r_1,r_2)$ s'identifie à $\bigcup_{j=1,2}\{r_j\}\times(r_j^{-1}A\cap S(1))$ et il est lisse aux points réguliers de $r_j^{-1}A$; la formule (5.2) et le théorème de Stokes donnent

$$\nu_{[A]}(r_2)-\nu_{[A]}(r_1)=\frac{1}{\pi^p}\int_{M(r_1,r_2)}\beta^p. \tag{5.3}$$

Cette formule reste vraie par continuité pour toutes valeurs $r_2>r_1\geqq 0$. L'inégalité classique de Wirtinger montre que la $2p$-forme $(\beta^p/p!)_{\restriction M}$ est majorée en valeur absolue par le volume riemannien $2p$-dimensionnel de M. Nous obtenons en particulier :

$$\nu_{[A]}(r)-\nu_{[A]}(0)\leqq\frac{p!}{\pi^p}\mathrm{Vol}_{2p}(M(0,r)). \tag{5.4}$$

Le théorème 3 du § 1 résulte maintenant aussitôt de l'inégalité (5.4) et du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5.5. *Soit M un ensemble analytique réel de dimension $\leqq p$ dans un ouvert $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ et soit g une fonction $\mathbf{R}$-analytique sur Ω. On pose*

$$M(0, r) = \{x\in M;\ 0 < g(x) < r\}.$$

Alors pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe des constantes C, $\varepsilon>0$ telles que

$$\mathrm{Vol}_p(M(0, r)\cap K) \leqq Cr^{\varepsilon}.$$

Démonstration. Le résultat est visiblement local. On peut supposer que M est un germe d'ensemble analytique irréductible au voisinage de 0, dont l'idéal est engendré par un nombre fini de séries entières $h_k(x)$ convergentes sur le cube $|x_j|<R$, et que g est une série entière convergente sur ce cube. On suppose de plus $\dim_{\mathbf{R}} M=p$ et $g\not\equiv 0$ sur M, sinon il n'y a rien à démontrer. Soit $M_{\mathbf{C}}=\{z\in\mathbf{C}^n;\ h_k(z)=0\}$ le complexifié de M dans le polydisque $|z_j|<R$ (voir par exemple R. Narasimhan [Na]). Pour R assez petit $M_{\mathbf{C}}$ est irréductible (de dimension complexe p). Après un changement éventuel des coordonnées réelles (x_j), toutes les projections $\pi_J\colon z\mapsto(z_{j_1}, \dots, z_{j_p})$, $J=(j_1, \dots, j_p)$, réalisent $M_{\mathbf{C}}$ comme revêtement ramifié au dessus du polydisque de rayon R de $\mathbf{C}^n$. Pour tout $J=(j_1, \dots, j_p)$, soit $g_J(z_J)$ la fonction holomorphe égale au produit des valeurs $g(z)$ aux différents points $z\in M_{\mathbf{C}}\cap\pi_J^{-1}(z_J)$. Quitte à diminuer R, nous pouvons supposer g bornée, donc

$$\pi_J(M(0, r)) \subset \{(x_J)\in\mathbf{R}^p;\ |x_{j_k}| < R \text{ et } |g_J(x_J)| < Cr\}.$$

Comme le volume euclidien de $M(0, r)$ est majoré par la somme des aires de ses projections, on est ramené à démontrer le résultat suivant : si $u\not\equiv 0$ est une série entière convergente au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^p$, alors pour R assez petit l'ouvert

$$\{x\in\mathbf{R}^p;\ |x_j| < R \text{ et } |u(x)| < r\}$$

est de volume majoré par Cr^{ε}. Pour cela, il suffit de vérifier que $|u|^{-\varepsilon}$ est sommable au voisinage de 0 lorsque ε est assez petit. Si u est un polynôme de Weierstrass en x_p à coefficients analytiques en $x'=(x_1, \dots, x_{p-1})$, nous avons

$$u(x) = \prod_{k=1}^{m}(x_p-\alpha_k(x')),\quad |u(x)|^{-\varepsilon} \leqq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |x_p-\alpha_k(x')|^{-m\varepsilon}$$

grâce à l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. Le théorème de Fubini montre alors que $|u|^{-\varepsilon}$ est sommable pour $\varepsilon<1/m$. ∎

Il résulte maintenant des théorèmes 1 et 3 que le courant $[A]$ admet un cône tangent $C([A])$. Comme tout compact disjoint de l'ensemble $C(A)$ est également disjoint de $r^{-1}A$ pour r assez petit, il est clair que le support de $C([A])$ est contenu dans le cône tangent ensembliste $C(A)$. D'après les théorèmes classiques de support (*cf.* H. Federer [Fe] et R. Harvey [Ha]), le courant $C([A])$ est un cycle analytique de dimension p :

$$C([A])=\sum \lambda_j[Z_j], \quad \lambda_j \geqq 0,$$

où les Z_j désignent les composantes irréductibles de $C(A)$. De plus, les multiplicités λ_j sont des entiers >0.

Pour le voir, plaçons-nous au voisinage d'un point z^0 de Z_j qui est régulier sur $C(A)$ et non contenu dans le cône tangent de A_{sing} (lequel est de dimension au plus $p-1$). Dans des coordonnées convenables $z=(z', z'')$ de $\mathbf{C}^n$, il existe un voisinage $V=V'\times V''$ de centre z^0 autour de Z_j tel que $C(A_{\text{sing}})\cap\bar{V}=\emptyset$ et tel que $C(A)\cap\bar{V}=Z_j\cap\bar{V}$ soit le graphe $z''=u(z')$ d'une fonction holomorphe $u\colon \bar{V}'\to V''$. Pour $r<r_0$ assez petit, l'intersection $r^{-1}A_{\text{sing}}$ ne rencontre pas $\bar{V}$, donc $r^{-1}A\cap V$ est lisse; comme $Z_j\cap(\bar{V}'\times\partial V'')=\emptyset$, on a de plus $r^{-1}A\cap(\bar{V}'\times\partial V'')=\emptyset$. Alors la projection $r^{-1}A\cap V\to V''$ est propre et par conséquent c'est un revêtement ramifié fini de V''. Soit $S\subset A$ le sous-ensemble analytique des points où la projection $z\mapsto z''$ n'est pas étale. Quitte à déplacer légèrement z^0, on peut supposer que z^0 n'est pas sur le cône tangent $C(S)$ et choisir V assez petit pour que $r^{-1}S\cap V=\emptyset$ si $r<r_0$. Alors $r^{-1}A\cap V\to V''$ est un revêtement étale fini de V'', nécessairement trivial si V'' est un polydisque. Dans ce cas, $r^{-1}A\cap V$ se compose d'une réunion de graphes de fonctions holomorphes $u_{k,r}\colon V'\to V''$, $1\leqq k\leqq m_j$. Ces fonctions convergent uniformément vers u quand r tend vers 0, et leur nombre m_j reste constant par un argument évident de connexité. Il en résulte que la famille de courants $r^{-1}[A]_{\restriction V}=\sum_k [z''=u_{k,r}(z')]$ converge vers $m_j[z''=u(z')]=m_j[Z_j]_{\restriction V}$ et que $\lambda_j=m_j$. Nous avons donc redémontré le théorème classique suivant :

Théorème 5.6 (Thie [Th], King [Kg]). *Si A est un ensemble analytique de dimension p passant par 0, le courant $[A]$ admet un cône tangent*

$$C([A])=\sum m_j[Z_j]$$

où les Z_j sont les composantes irréductibles du cône tangent ensembliste $C(A)$ et où les multiplicités m_j sont des entiers positifs. L'entier m_j est égal au nombre de feuilles de $r^{-1}A$ dans un voisinage d'un point générique de Z_j, pour r assez petit.

Bibliographie

Ba. Barlet, D., Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres, *Invent. Math.* **68** (1982), 129—174.

Bl 1. Blel, M., Cône tangent à un courant positif fermé de type (1, 1), *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989), 543—546.

Bl 2. BLEL, M., *Cône tangent à un courant positif fermé*, preprint de la Faculté des Sciences de Monastir, 1988.

Fe. FEDERER, H., *Geometric measure theory* (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 158), Springer-Verlag, Berlin, 1969.

Ha. HARVEY, R., Holomorphic chains and their boundaries, in: *Proc. Symp. Pure Math.* 30—1, pp. 309—382, Am. Math. Soc., Providence, 1977.

Kg. KING, J. R., The currents defined by analytic varieties, *Acta Math.* **127** (1971), 185—220.

Km. KISELMAN, C. O., *Tangents of plurisubharmonic functions*, preprint Uppsala University (Sweden), December 1988.

Le. LELONG, P., *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New York, 1968.

L—G. LELONG, P. et GRUMAN, L., *Entire functions of several complex variables* (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 282), Springer-Verlag, Berlin, 1982.

Mz. MOUZALI, M., *Conditions suffisantes pour l'existence du cône tangent à un courant positif fermé*, Thèse de 3e Cycle, Université de Grenoble I, mai 1989.

Na. NARASIMHAN, R., *Introduction to the theory of analytic spaces*, Lecture Notes in Mathematics 25, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

Th. THIE, P., The Lelong number of a point of a complex analytic set, *Math. Ann.*, **172** (1967), 269—312.

Reçu, le 30 mai 1989

Mongi Blel
Faculté des Sciences et Techniques Monastir
5019 Monastir
Tunisie

Jean Pierre Demailly et Mokhtar Mouzali
Université de Grenoble I
Institut Fourier
B. P. 74
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex
France