SUR L'INFINI.[1]

PAR

DAVID HILBERT

à GÖTTINGEN.

Traduit par André Weil à Paris.[2]

WEIERSTRASS, au moyen de sa critique maniée avec une pénétration magistrale, a donné une base solide à l'analyse mathématique. En élucidant entre autres les notions de minimum, de fonction, de dérivée, il a écarté les objections que soulevait encore le calcul infinitésimal, il a nettoyé celui-ci de toutes les idées confuses sur l'infiniment grand et l'infiniment petit, et a définitivement surmonté les difficultés qui provenaient des notions mêmes d'infiniment grand et d'infiniment petit. Si aujourd'hui, grâce aux méthodes qui reposent sur la notion de nombre irrationnel, ou plus généralement sur celle de limite, il règne en analyse une harmonie et une certitude parfaites; et si, dans les questions les plus compliquées de la théorie des équations différentielles et intégrales, malgré les combinaisons les plus hardies et les plus diverses de toutes les formes de passage à la limite, tous les résultats se trouvent en accord, nous le devons essentiellement à l'activité scientifique de Weierstrass.

Et pourtant, après que Weierstrass eut donné sa base au calcul infinitésimal, la discussion sur les fondements de l'analyse ne s'est pas trouvée terminée.

La raison en est que la signification de *l'infini* pour les mathématiques n'était pas encore complètement éclaircie. L'infiniment grand et l'infiniment petit, sans doute, sont éliminés de l'analyse Weierstrassienne, en ce sens que tous les énoncés où ils figurent sont ramenés à des rapports entre grandeurs finies. Mais l'infini

[1] »Über das Unendliche«: conférence prononcée le 4 juin 1925 à l'occasion d'un congrès de mathématiciens organisé à Münster i. W. par la Société Mathématique de Westphalie en l'honneur de la mémoire de Weierstrass.

[2] L'original de cette traduction a paru en allemand dans les *Math. Ann.*, t. 95, pp. 161--190.

intervient toujours dans les suites infinies de nombres réels, et aussi dans la notion du système de tous les nombres réels, qui est conçu comme si c'était un tout donné, complet et indépendant.

Cette manière de voir s'exprime par certaines formes de déduction logique — comme par exemple si l'on se réfère à *tous* les nombres réels ayant une certaine propriété, ou à *l'existence* de nombres ayant une certaine propriété —, et les fondements Weierstrassiens de l'analyse réclament précisément l'emploi répété et illimité de ces formes de déduction.

C'est par là que l'infini a pu se réintroduire, sous une forme dissimulée, dans la théorie de Weierstrass, sans que la critique de Weierstrass le perçât à jour, et c'est donc ce *problème de l'infini* qui nous reste encore à éclaircir entièrement, au sens indiqué plus haut. De même que dans les passages à la limite du calcul infinitésimal, l'infini au sens de l'infiniment grand et de l'infiniment petit s'est trouvé réduit à une simple façon de parler, de même nous avons la tâche de reconnaître dans l'infini au sens d'une collection infinie, tel qu'il intervient encore dans les démonstrations, quelque chose de purement apparent. Et de même que les opérations sur l'infiniment petit et l'infiniment grand ont été remplacées par des méthodes finies qui nous rendent les mêmes services et conduisent formellement aux mêmes élégantes relations, de même il faut remplacer en général les raisonnements au moyen de l'infini par des méthodes finies rendant les mêmes services, c'est-à-dire permettant de démontrer et de trouver de la même manière formules et théorèmes.

Tel est le dessein de ma théorie. Elle a pour but de rétablir définitivement la certitude de la méthode mathématique, ce que la période criticiste du calcul infinitésimal n'a pas encore fait; elle doit ainsi parachever ce que Weierstrass s'est efforcé d'accomplir en donnant sa base à l'analyse, et en vue de quoi il a fait le pas qui était nécessaire et essentiel.

Mais en ce qui concerne l'éclaircissement de la notion d'infini, il faut se placer à un point de vue plus général encore. La littérature mathématique, si l'on y regarde de près, est toute envahie par des absurdités et des phrases vides de sens, causées surtout par l'idée d'infini. Par exemple, on demande parfois, en insistant là-dessus comme sur une condition restrictive, que dans une mathématique rigoureuse une démonstration ne puisse comporter qu'un nombre *fini* de déductions successives: comme s'il était jamais arrivé à personne d'en réaliser une infinité.

On voit aussi reparaître sous un nouveau vêtement d'anciennes objections avec lesquelles on croyait en avoir fini depuis longtemps. C'est ainsi qu'on développe aujourd'hui des idées de ce genre: même si l'introduction d'une notion peut se faire sans danger, c'est-à-dire sans conduire à des contradictions, et que ce fait puisse se démontrer, elle n'est pas encore suffisamment justifiée. N'est-ce pas là exactement l'objection qu'on faisait autrefois aux nombres complexes lorsqu'on disait: »Sans doute ils ne conduisent à aucune contradiction; mais leur introduction n'en est pas encore justifiée, car les grandeurs imaginaires n'existent tout de même pas»? Non, si cela doit avoir un sens de demander plus que la preuve de la non-contradiction pour justifier un pas en avant, ce ne peut être qu'en demandant si ce pas sera fécond en résultats. La fécondité est en effet nécessaire; c'est aussi, en la matière, le tribunal qui juge en dernier ressort, et devant lequel tout le monde s'incline.

Un autre auteur semble apercevoir des contradictions, tels des fantômes, là où personne n'a seulement posé une affirmation, je veux dire dans le monde sensible lui-même, dont le »fonctionnement non-contradictoire» lui apparaît comme une hypothèse distincte. Mais j'ai toujours cru que seules des propositions, ou des hypothèses en tant qu'elles conduisent par le raisonnement à des propositions, peuvent se contredire l'une l'autre, et l'idée que les faits et les événements eux-mêmes puissent se contredire entre eux me semble un parfait exemple de notion vide de sens.

Par ces remarques, j'ai seulement voulu montrer que l'élucidation définitive de *l'essence de l'infini* dépasse de beaucoup, par son intérêt, le domaine des professionnels et des spécialistes, et qu'elle est devenue nécessaire pour *l'honneur de l'esprit humain.*

L'infini, plus qu'aucune autre question jusqu'ici, a profondément ému l'âme de l'homme; l'infini, plus peut-être qu'aucune autre *idée*, a exercé une action stimulante et féconde sur son entendement; mais aussi l'infini, plus qu'aucune autre *notion*, a besoin *d'être élucidé.*

Si nous voulons nous appliquer à cette tâche d'élucider l'essence de l'infini, il faut d'abord nous représenter rapidement le contenu que cette notion a dans la réalité; voyons d'abord ce que la physique nous apprend là-dessus.

La première impression irraisonnée que nous donnent les phénomènes naturels et la matière est celle de continuité. Devant un morceau de métal ou un volume de liquide, l'idée s'impose à nous qu'ils sont divisibles à l'infini, qu'une portion si petite qu'elle soit aura toujours les mêmes propriétés. Mais partout où l'on a rendu suffisamment précises les méthodes de recherche dans la physique de la matière, on a trouvé des limites à la divisibilité, limites qui ne tiennent pas à l'insuffisance de notre étude, mais à la nature des choses: de sorte que l'on pourrait hardiment concevoir la tendance de la science moderne comme étant de s'affranchir de l'infiniment petit, et qu'au lieu du vieux principe »natura non facit saltus» on pourrait affirmer au contraire que »la nature fait des sauts».

On sait que toute matière est formée de petites particules élémentaires, les *atomes*, dont la combinaison et le groupement produisent la multiplicité de substances macroscopiquement constatable.

Mais la physique ne s'en est pas tenue à l'atomistique de la matière. Il s'y est ajouté, vers la fin du siècle dernier, une théorie bien plus étrange au premier abord, l'atomistique de l'électricité. Tandis que jusqu'alors l'électricité était considérée comme un fluide, et passait pour le type d'un agent à effet continu, on la trouva, elle aussi, formée d'*électrons* positifs et négatifs.

Outre la matière et l'électricité, il y a en physique une autre quantité possédant une existence propre, et régie elle aussi par une loi de conservation, c'est l'énergie. Or l'énergie elle-même, comme il est maintenant bien établi, ne peut être divisée à l'infini sans restrictions: Planck a découvert les *quanta d'énergie*.

Et le résultat est chaque fois qu'un milieu continu et homogène, indéfiniment divisible et réalisant ainsi l'infini de petitesse, ne se rencontre nulle part. La divisibilité à l'infini d'un milieu continu est une opération qui n'est possible que dans la pensée, c'est seulement une idée que contredisent les observations et les expériences de la physique et de la chimie.

La question de l'infini dans la nature se pose à nous une seconde fois dans la considération du monde comme un tout.

L'idée que le monde est infini a longtemps régné; jusqu'à Kant, et même plus tard, l'on ne doutait seulement pas de l'infinitude de l'espace.

Ici encore, c'est la science moderne, et particulièrement l'astronomie, qui soulève de nouveau la question, et cherche à la résoudre, non par les moyens inadéquats de la spéculation métaphysique, mais par des considérations qui s'appuyent sur l'expérience, et reposent sur l'application des lois naturelles. Et de graves objections sont apparues contre la thèse de l'infinitude. L'hypothèse de l'infinitude de l'espace est une conséquence nécessaire de la géométrie *euclidienne*. Or, la géométrie euclidienne est sans doute un édifice, un système logique, sans contradiction interne; mais il ne s'ensuit pas qu'elle soit applicable dans la réalité. Seules l'observation et l'expérience peuvent nous apprendre s'il en est ainsi. Dans les tentatives faites pour démontrer par la spéculation l'infinitude de l'espace, il s'est aussi glissé des erreurs manifestes. Du fait qu'au delà d'une portion d'espace il y en a toujours encore, il suit seulement que l'espace est illimité, mais nullement qu'il soit infini. Illimité et fini sont en effet des qualités parfaitement compatibles. La recherche mathématique fournit, dans ce qu'on appelle la géométrie *elliptique*, le modèle le plus simple d'un monde fini. Et l'abandon de la géométrie euclidienne n'est plus aujourd'hui une simple spéculation de mathématicien ou de philosophe, mais nous y sommes conduits par des recherches tout différentes, qui n'avaient primitivement rien à voir avec la question du monde fini. Einstein a montré qu 'il est nécessaire de s'écarter de la géométrie euclidienne. Grâce à sa théorie de la gravitation, il peut s'attaquer aussi aux problèmes cosmologiques, et démontre la possibilité d'un monde fini; et tous les résultats trouvés par les astronomes sont entièrement compatibles avec l'hypothèse d'un univers elliptique.

Que le réel soit fini, nous l'avons maintenant établi dans deux directions: dans le sens de l'infiniment grand, et dans le sens de l'infiniment petit. Mais il se pourrait très bien que l'infini eût droit à une place *dans notre pensée,* et y jouât le rôle d'une notion indispensable. Voyons donc ce qu'il en est dans le domaine des mathématiques, et interrogeons d'abord l'enfant le plus pur et le plus ingénu de l'esprit humain, l'arithmétique. Choisissons une formule quelconque dans la vaste multiplicité des formules élémentaires, par exemple:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1)(2 n + 1).$$

Nous pouvons y remplacer n par un entier quelconque, par exemple $n = 2$ ou $n = 5$: cette formule contient donc une *infinité* d'énoncés, et c'est là évidemment son caractère essentiel, en vertu duquel elle fournit la solution d'un certain problème arithmétique, et exige pour sa démonstration une idée particulière, tandis que les égalités numériques qui s'en déduisent:

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

se vérifient simplement en effectuant les calculs, et ne présentent donc pas par elles-mêmes un intérêt essentiel.

Nous apprenons à interpréter et à comprendre la notion d'infini d'une manière très différente et tout à fait distincte si nous considérons la méthode, si extraordinairement importante et féconde, des *éléments idéaux.* Déjà dans la géométrie élémentaire du plan la méthode des éléments idéaux trouve son application. Là, les points et les droites du plan sont seuls, primitivement, des objets réels, ayant une existence propre. Ils vérifient entre autres l'axiome de l'association: par deux points passe toujours une droite et une seule; on en déduit que deux droites se coupent au plus en un point. Mais il n'est pas vrai que deux droites se coupent toujours en un point: elles peuvent en effet être parallèles. C'est, comme on sait, en introduisant des éléments idéaux, les points et la droite à l'infini, que l'on arrive à rendre universellement valable le théorème d'après lequel deux droites se coupent toujours en un point et un seul.

Les éléments idéaux »à l'infini» servent ainsi à rendre le système des lois de l'association aussi simple et aussi clair qu'il est possible. En raison de la symétrie entre le point et la droite, on en tire, comme on sait, le principe de dualité, si fécond en géométrie.

Les quantités *complexes* habituelles en algèbre sont un autre exemple de l'emploi des éléments idéaux: ils servent ici à simplifier le théorème sur l'existence et le nombre des racines d'une équation.

De même qu'en géométrie on utilise une infinité de droites, celles qui sont parallèles entre elles, pour définir un point idéal, de même en arithmétique supérieure on groupe ensemble une infinité de nombres formant un système doué de certaines propriétés pour constituer un *idéal* arithmétique; et c'est précisément là que se trouve l'application la plus géniale du principe des éléments idéaux. En opérant ainsi à l'intérieur d'un corps algébrique, nous y trouvons à nouveau les lois simples de la divisibilité qui nous sont familières, celles-là mêmes qui sont valables pour les entiers 1, 2, 3, 4, . . . Nous entrons déjà ici dans le domaine de l'arithmétique supérieure.

Arrivons maintenant à l'analyse, le domaine le plus harmonieux et le plus délicatement subdivisé de la science mathématique. Vous savez quel rôle prépondérant y joue l'infini, et que l'analyse mathématique n'est, dans un certain sens, qu'une symphonie de l'infini.

Les progrès considérables réalisés en calcul infinitésimal ont été obtenus pour la plus grande part en opérant sur des systèmes mathématiques d'une infinité d'éléments. Mais l'on était tenté d'identifier »infini» avec »très grand», et il en résulta bientôt des incohérences, ce qu'on appela les paradoxes du calcul infinitésimal, dont une partie était déjà connue aux sophistes de l'antiquité. On fit un progrès fondamental lorsqu'on reconnut qu'un grand nombre de principes valables pour le fini, par exemple »la partie est plus petite que le tout», l'existence du maximum et du minimum, la possibilité de changer l'ordre des termes d'une somme ou des facteurs d'un produit sans modifier le résultat, ne peuvent s'étendre à l'infini immédiatement et sans restriction. Comme je l'ai rappelé au début de cette conférence, c'est particulièrement grâce à la pénétration de Weierstrass que ces questions ont été complètement élucidées: et l'analyse est aujourd'hui devenue, dans son domaine, un guide infaillible, et en même temps un instrument pratique pour le maniement de l'infini.

Mais l'analyse seule ne nous permet pas encore de pénétrer le plus profondément dans l'essence de l'infini. La possibilité ne nous en sera donnée que par une discipline plus rapprochée des méthodes de la philosophie générale, et qui devait jeter un jour nouveau sur tout l'ensemble des questions se rapportant à l'infini. Cette discipline est la théorie des ensembles, dont Georg Cantor fut le fondateur; et nous n'avons à nous occuper en ce moment que de ce qui constitue la portion vraiment nouvelle et originale, le véritable noyau de la doctrine cantorienne, je veux dire la théorie des *nombres transfinis;* celle-ci m'apparaît en effet comme le produit le plus étonnant de la pensée mathématique, comme une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine du pur intelligible. Quel est donc le fond de cette théorie?

Si l'on veut caractériser brièvement la nouvelle conception de l'infini introduite par Cantor, l'on peut dire ceci: en analyse, nous n'avons eu affaire qu'à l'infiniment petit et à l'infiniment grand en tant que notions limites, en devenir, en formation: nous avons eu affaire, comme on dit, à l'*infini potentiel.* Mais l'infini proprement dit est autre chose. Il se présente par exemple lorsque nous considérons la collection même des nombres $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme un tout donné, ou que nous regardons les points d'un segment comme une collection d'objets qui nous est donnée. Cette sorte d'infini est ce que l'on appelle l'*infini actuel.*

Déjà deux mathématiciens qui ont de grands mérites dans l'étude des fondements des mathématiques, Frege et Dedekind, utilisèrent indépendamment l'un de l'autre l'infini actuel: leur but était de donner à l'arithmétique une base indépendante de toute intuition et de toute expérience, et reposant sur la pure logique, et de n'utiliser que celle-ci dans leurs déductions. Dedekind alla même jusqu'à ne pas consentir à tirer de l'intuition la notion de nombre fini, et à la déduire par la logique pure, essentiellement grâce à l'emploi de la notion d'ensemble infini. Mais Cantor développa la notion d'infini actuel d'une manière systématique. Fixons nos yeux sur les deux exemples d'infini mentionnés plus haut:

1. 1, 2, 3, 4, ...;

2. les points du segment 0—1, ou, ce qui revient au même, la collection des nombres réels compris entre 0 et 1; nous sommes tout de suite conduits à les étudier du seul point de vue de la quantité d'éléments qu'ils renferment, et nous nous apercevons alors de faits surprenants, qui sont aujourd'hui familiers à chaque mathématicien. Soit en effet l'ensemble de tous les nombres rationnels, c'est-à-dire de toutes les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{3}{7}, \cdots$; on trouve que, du seul point de vue de la quantité d'éléments, cet ensemble n'est pas plus grand que l'ensemble des nombres entiers: nous disons que les nombres rationnels peuvent être énumérés de la manière habituelle, ou encore qu'ils sont dénombrables. Et il en est de même de l'ensemble des nombres qu'on peut obtenir par des extractions de racines, bien plus, de l'ensemble de tous les nombres algébriques. Notre deuxième exemple donne des résultats analogues: fait inattendu, l'ensemble des points d'un carré ou d'un cube n'est pas plus grand, du seul point de vue de la quantité d'éléments, que l'ensemble des points du segment 0—1; bien plus, il en est de même pour l'ensemble des fonctions continues. A qui apprend tout cela pour la première fois, il peut venir la pensée que, du seul point de vue de la quantité d'éléments, il n'y a en tout et pour tout qu'un infini unique. Il n'en est pas ainsi: les ensembles des exemples 1. et 2. n'ont pas, comme on dit, »la même puissance»; l'ensemble 2. ne peut être énuméré, il est plus grand que l'ensemble 1. Et ici nous arrivons au tournant caractéristique dans les idées de Cantor. Les points du segment ne peuvent pas être énumérés de la manière habituelle, en comptant $1, 2, 3, \ldots$! Mais si nous admettons l'infini actuel, nous ne sommes en aucune façon limités au procédé habituel d'énumération, ni obligés de nous arrêter là. Ayant compté $1, 2, 3, \ldots$, nous pouvons considérer les objets ainsi énumérés comme formant un ensemble infini qui nous est donné dans cet ordre bien déterminé; si, avec Cantor, nous notons par ω, d'après son type, cet ensemble ordonné, l'énumération se continue tout naturellement par $\omega+1, \omega+2, \ldots$. jusqu'à $\omega+\omega$ ou $\omega\cdot 2$, puis encore $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, $\omega\cdot 2+3, \ldots . \omega\cdot 2+\omega=\omega\cdot 3$, et de même $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, $\omega\cdot 4, \ldots, \omega\cdot\omega=\omega^2$, $\omega^2+1, \ldots$, de sorte que nous obtenons finalement le tableau suviant:

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, \ldots . \\
\omega, \omega+1, \ \omega+2, \ldots \\
\omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ \omega\cdot 2+2, \ldots \\
\omega\cdot 3, \ \omega\cdot 3+1, \ \omega\cdot 3+2, \ldots
\end{array}
$$

$\omega^2,\ \omega^2+1, \ldots$
$\omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega\cdot 2,\ \omega^2+\omega\cdot 3, \ldots$
$\omega^2\cdot 2, \ldots$
$\omega^2\cdot 2+\omega, \ldots$
$\omega^3, \ldots$
$\omega^4, \ldots$
$\omega^\omega, \ldots$

Ce sont là les premiers nombres transfinis de Cantor, les nombres de la seconde classe, comme Cantor les appelle. Nous les obtenons donc simplement en prolongeant notre énumération au delà de l'infini dénombrable ordinaire, c'est-à-dire par un prolongement tout naturel, et complètement déterminé, de la numération ordinaire, restreinte au fini. Jusqu'à présent nous ne comptions que le 1^{er}, le $2^{ième}$, le $3^{ième}$,... objet d'un ensemble, nous compterons désormais aussi le $\omega^{ième}$, le $(\omega+1)^{ième}$,..., le $\omega^{\omega\ ième}$.

Dans ces conditions, une question se pose évidemment tout de suite, c'est de savoir si, au moyen de ces nombres transfinis, nous sommes maintenant en état d'énumérer les objets d'ensembles concrets, non dénombrables au sens ordinaire du mot.

C'est en poursuivant ces considérations que Cantor a édifié avec le plus grand succès la théorie des nombres transfinis et a créé pour eux tout un calcul nouveau. Ainsi, grâce au gigantesque travail collectif de Frege, Dedekind, Cantor, l'infini fut-il finalement élevé sur le trône, et connut-il son plus grand triomphe. L'infini, d'un vol audacieux, était parvenu à un succès vertigineux.

La réaction ne se fit pas attendre; elle prit même une forme très dramatique. L'événement fut tout à fait analogue à ce qui s'était passé au cours du développement du calcul infinitésimal. En se réjouissant des résultats nouveaux et abondants, l'on avait évidemment procédé avec trop peu de critique à l'égard de l'admissibilité de certaines méthodes de démonstration; en effet, des définitions et des raisonnements obtenus par simple application de méthodes peu à peu devenues usuelles conduisirent à des contradictions d'abord isolées mais qui, peu à peu, se firent toujours plus sérieuses et plus embarrassantes: c'est ce qu'on appela les paradoxes de la théorie des ensembles. En particulier, ce fut une contradiction découverte par Zermelo et Russell qui, lorsqu'elle fut connue dans le monde mathématique, produisit littéralement l'effet d'une catastrophe. En présence de ces paradoxes, Dedekind et Frege renoncèrent effectivement à leur point de vue, et cédèrent le champ de bataille: Dedekind hésita longtemps avant d'autoriser la réimpression de son mémoire qui avait fait époque: »Was sind und was sollen die Zahlen» [»que sont et que représentent les nombres»]; et Frege dut reconnaître comme erronée la tendance de son livre »Grundgesetze der Arithmetik» [»Principes de l'arithmétique»], ce qu'il avoue dans un endroit de ce livre qu'il y rajouta plus tard. Et la théorie de Cantor subit de toutes parts les plus violentes attaques. La réaction était si forte que les notions les plus courantes et les plus fécondes, les méthodes les plus simples et les plus importantes des mathématiques se trouvèrent menacées, que leur application fut sur le point d'être interdite. Sans doute, il ne manquait pas de défenseurs des vieilles idées; mais leurs mesures de défense étaient complètement impuissantes; de plus, ils ne présentaient pas un front unique là où c'était nécessaire. Contre les paradoxes, on préconisait trop de remèdes, on proposait pour les éclaircir des méthodes trop bariolées.

Il faut avouer que la situation où nous nous trouvons actuellement, en face de ces paradoxes, n'est pas supportable à la longue. Qu'on y réfléchisse: dans les mathématiques, ce modèle de certitude et de vérité, les méthodes de définition et de raisonnement, telles que chacun les apprend, les enseigne et les applique, conduisent à des absurdités. Et où donc pourra-t-on trouver de la certitude et de la vérité, si la pensée mathématique nous les refuse?

Mais il existe une manière parfaitement satisfaisante d'échapper aux paradoxes, sans trahir les intérêts de notre science. Les points de vue qui doivent nous permettre de découvrir ce moyen, et les désirs qui nous guideront dans cette recherche, sont les suivants:

1. Nous nous proposons, partout où il y a seulement le moindre espoir d'en tirer quelque chose, de rechercher soigneusement les méthodes fécondes de définition et de raisonnement, de les soigner, de les étayer, et de les rendre utilisables. Du paradis que Cantor a créé pour nous, personne ne doit pouvoir nous chasser.

2. Il est nécessaire de donner partout à la déduction ce même caractère de certitude qu'elle présente dans l'arithmétique ordinaire, où personne n'a de doute et où les contradictions et les paradoxes ne peuvent appparaître que grâce à notre inattention.

Nous ne pouvons évidemment atteindre ce but que si nous arrivons à élucider complètement *l'essence de l'infini.*

Or, nous avons vu tout à l'heure que dans la réalité l'infini ne se trouve nulle part, quelles que soient les observations, les expériences, la science auxquelles nous fassions appel. La pensée qui s'exerce sur les objets se comporterait-elle donc d'une manière si peu semblable à ce qui se passe pour ces objets;

serait-elle donc si différente dans sa démarche, si éloignée de toute réalité? N'est il pas clair, au contraire, que lorsque nous croyions reconnaître la réalité de l'infini dans n'importe quel sens, nous nous laissions simplement tromper par l'énormité de dimensions, en grandeur ou en petitesse, que nous rencontrons si souvent, en effet, dans la réalité? Et la logique interne de la déduction, nous a-t-elle jamais trompés ou laissés dans l'embarras lorsque nous l'appliquions à des objets ou à des événements réels? Non: la logique interne de la déduction nous est indispensable. Elle ne nous a trompés que lorsque nous avons arbitrairement construit des notions abstraites, et particulièrement de ces notions où rentre une infinité d'éléments; et nous avons alors fait de la logique interne de la déduction une application illégitime, nous n'avons pas tenu compte des conditions préalables qui étaient évidemment nécessaires pour une telle application. Et en reconnaissant l'existence de pareilles conditions, et la nécessité d'en tenir compte, nous nous trouvons en accord avec les philosophes, en particulier avec Kant. Kant enseignait déjà — et c'est là une partie intégrante de sa doctrine — que la mathématique porte sur un contenu donné indépendamment de toute logique, et ne peut donc en aucune manière être fondée sur la logique pure: ce qui fait que les efforts de Frege et Dedekind ne pouvaient qu'échouer. Pour qu'on puisse, en effet, appliquer les formes logiques de raisonnement, et effectuer des opérations logiques, une condition préalable est qu'il y ait déjà quelque chose de donné dans la représentation, à savoir de certains objets concrets, extra-logiques, présents à l'intuition et immédiatement perçus antérieurement à toute pensée. Si le raisonnement logique doit donner la certitude, il faut que ces objets se laissent embrasser parfaitement et dans toutes leurs parties, et que leurs propriétés, leurs différences mutuelles, leur ordonnance à la suite ou à côté l'un de l'autre, soient immédiatement donnés à l'intuition, en même temps que les objets eux-mêmes, comme quelque chose d'irréductible et qui n'a d'ailleurs pas besoin de réduction. Voilà le postulat philosophique fondamental, la condition nécessaire, à mon avis, pour les mathématiques aussi bien que pour toute pensée, toute connaissance, tout procédé scientifiques. Et dans les mathématiques, en particulier, les objets de notre étude sont les signes concrets eux-mêmes, dont la figure, conformément à notre condition, est immédiatement perceptible et reconnaissable.

Qu'on se représente un instant le caractère et la méthode de l'arithmétique ordinaire. Elle s'édifie bien certainement au moyen de simples constructions de nombres, qu'on obtient par des considérations intuitives, à contenu concret. Mais la science mathématique n'est nullement épuisée par les égalités numériques, et n'est pas non plus entièrement réductible à de telles égalités. On peut affirmer cependant que c'est un instrument destiné à fournir toujours, lorsqu'on l'applique à des entiers, des égalités numériques exactes. C'est alors une nécessité que d'analyser la structure de cet instrument jusqu'à reconnaître qu'il remplit bien son rôle. Et comme moyens auxiliaires, nous n'avons que cette même méthode d'opérer concrètement en ayant égard à la condition du fini, comme nous le faisons en arithmétique. Il se trouve, en effet, que cette nécessité scientifique peut être satisfaite: en d'autres termes, on peut arriver, par des méthodes purement intuitives et finies — exactement comme on procède en arithmétique — à des constatations qui établissent l'infaillibilité de l'instrument mathématique. Examinons maintenant l'arithmétique avec plus de précision.

En arithmétique, nous avons les signes numériques *(Zahlzeichen*[1]*)*:

$$1, \; 11, \; 111, \; 11111;$$

où chaque signe a pour l'intuition ce caractère distinctif qu'il est formé d'une suite de 1. Ces signes numériques, qui sont les objets mêmes de notre étude, n'ont en eux-mêmes aucun sens. Mais en outre, nous employons dès l'arithmétique élémentaire d'autres signes qui ont un sens, et qui servent à représenter des objets déterminés, par exemple le signe 2, abréviation du signe numérique 11, ou le signe 3, abréviation du signe 111; nous utilisons encore les signes $+$, $=$, $>$, etc., qui nous servent pour représenter des énoncés. Par exemple $2 + 3 = 3 + 2$, sert à représenter ce fait que $2 + 3$ et $3 + 2$, si l'on se reporte au sens des abréviations employées, ne sont qu'un même signe numérique, à savoir 11111. De même, $3 > 2$ sert à représenter le fait que le signe 3, c'est-à-dire 111, va plus loin que le signe 2 ou 11, ou encore que celui-ci est une partie du premier.

Nous nous servons aussi, dans le même but, de lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ comme signes numériques. $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ représente alors ce fait que le signe numérique $\mathfrak{b}$ va plus loin que le signe $\mathfrak{a}$. De même, du point de vue actuel, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ représente seulement ce fait que le signe numérique $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est le même que $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. Et la connaissance de ce fait peut être acquise par un raisonnement concret; nous pouvons même aller très loin par cette méthode concrète et intuitive.

Je vais maintenant vous donner un premier exemple où cette méthode intuitive se trouve dépassée. Le plus grand nombre premier connu, qui a 39 chiffres, est

$$\mathfrak{p} = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727.$$

[1] Nous donnons entre parenthèses l'original des principaux termes techniques employés par M. Hilbert (N. d. T.).

Par le procédé euclidien bien connu, nous pouvons, sans sortir aucunement de notre condition du fini, démontrer qu'il y a certainement un nouveau nombre premier entre $\mathfrak{p}+1$ et $\mathfrak{p}!+1$. Cet énoncé lui-même satisfait parfaitement à notre condition du fini. Car quand nous disons »il y a», ce n'est qu'une abréviation pour l'énoncé suivant: ou bien $\mathfrak{p}+1$, ou $\mathfrak{p}+2$, ou $\mathfrak{p}+3, \ldots\ldots$ ou $\mathfrak{p}!+1$ est certainement un nombre premier. Mais allons plus loin: il revient évidemment au même de dire qu'il y a un nombre premier qui est:

$$1. \quad > \mathfrak{p}$$

et en même temps

$$2. \quad \leq \mathfrak{p}!+1;$$

et nous sommes ainsi conduits à énoncer un théorème qui ne représente qu'une partie du résultat d'Euclide: il y a un nombre premier $> \mathfrak{p}$. Bien que, dans son contenu, ce ne soit là qu'une affirmation beaucoup plus restreinte que la première, une simple portion de l'énoncé d'Euclide, et que le passage de l'une à l'autre paraisse bien inoffensif, c'est cependant en réalité un saut dans le transfini si cet énoncé partiel, détaché du reste, est formulé comme une affirmation indépendante.

Comment cela peut-il se faire? Nous avons un énoncé d'existence, avec le mot »il y a»! Nous en avions bien pourtant un semblable dans le théorème d'Euclide. Sans doute, mais le mot »il y a» n'était alors, comme je le disais, qu'une manière plus courte de dire: ou bien $\mathfrak{p}+1$, ou $\mathfrak{p}+2$, ou $\mathfrak{p}+3 \ldots\ldots$ ou $\mathfrak{p}!+1$ est un nombre premier — tout à fait comme si, au lieu de dire:» ce morceau-ci de craie est rouge, ou bien celui-là est rouge, ou ...... ou le morceau là-bas est rouge» je disais plus brièvement: »il y a un de ces morceaux de craie qui est rouge». Affirmer ainsi que dans une collection finie »il y a» un objet possédant une certaine propriété, cela rentre tout à fait bien dans notre condition du fini. Au contraire une alternative comme celle-ci: »ou bien $\mathfrak{p}+1$, ou $\mathfrak{p}+2$, ou $\mathfrak{p}+3$, ou ...... (à l'infini) est un nombre premier» équivaut à un produit logique infini, et un tel passage à l'infini est aussi peu légitime sans une discussion spéciale et, s'il y a lieu, sans des précautions déterminées, que ne l'est en analyse le passage d'un produit fini à un produit infini; il est d'ailleurs, pour l'instant, dépourvu de sens.

D'une manière générale, un énoncé d'existence de la forme suivante: »il y a un nombre possédant telle ou telle propriété» n'a un sens, du point de vue du fini qu'en tant qu' *énoncé partiel*, c'est-à-dire en tant que portion d'un énoncé plus précis, mais dont le contenu exact est sans importance pour la plupart des applications.

Nous nous heurtons donc ici au transfini en coupant en deux un énoncé d'existence non interprétable comme une alternative. Nous obtenons de même des énoncés de caractère transfini en formant la contradictoire d'une proposition générale, c'est-à-dire contenant des signes numériques indéterminés. Par exemple l'énoncé d'après lequel, si $\mathfrak{a}$ est un signe numérique quelconque, on a toujours

$$\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a},$$

ne comporte pas de contradictoire du point de vue du fini. Cela nous paraîtra clair si nous réfléchissons que cette proposition ne peut être interprétée comme formée d'une infinité d'égalités numériques reliées l'une à l'autre par la conjonction »et», mais seulement comme un jugement hypothétique, qui affirme quelque chose pour le cas où un signe numérique serait donné.

Il résulte de là, en particulier, qu'au sens de la condition du fini, nous ne pouvons poser l'alternative suivant laquelle une égalité comme la précédente, contenant un signe numérique indéterminé, ou bien est vérifiée par tout signe numérique, ou bien est contredite par un exemple. Car une telle alternative repose essentiellement, en tant qu'application du principe du tiers exclu, sur l'hypothèse que l'affirmation de la valabilité universelle de cette proposition puisse être niée.

Nous faisons donc dans tous les cas une même constatation: si nous restons, comme nous le devons pourtant, dans le domaine des énoncés finis, nous trouvons qu'il y règne des relations logiques très difficilement saisissables, et cette difficulté devient intolérable lorsque les notions d'universalité et d'existence, exprimées par les mots »tous» et »il y a», sont combinées et figurent dans des phrases emboîtées les unes dans les autres. En tout cas, les lois logiques que les hommes, depuis qu'ils pensent, ont toujours employées, et qu'Aristote a enseignées, ne sont plus valables. On pourrait alors chercher à établir les lois logiques valables dans le domaine des énoncés finis; mais nous n'en serions pas plus avancés, car nous ne voulons justement pas renoncer à l'emploi des lois simples de la logique aristotélicienne, et le plus grand orateur du monde ne persuadera jamais aux hommes de ne pas poser la contradictoire d'une proposition quelconque, former des énoncés partiels, appliquer le tiers exclu. Comment allons-nous donc faire?

Souvenons-nous que *nous sommes des mathématiciens*, que comme tels, nous nous sommes déjà souvent trouvés dans une fausse situation de ce genre, et comment la méthode géniale des éléments idéaux nous en a tirés. Je vous ai donné, au début de cette conférence, quelques exemples lumineux d'application de cette méthode. De même que $i = \sqrt{-1}$ fut introduit pour maintenir dans leur forme la plus simple les lois de l'algèbre, par exemple celles qui se rapportent au nombre et à l'existence des racines d'une équation; de même qu'on introduisit les facteurs idéaux pour conserver dans le domaine des entiers algébriques, les lois simples de la divisibilité, comme nous faisons par exemple en introduisant un facteur commun idéal des nombres 2 et $1 + \sqrt{-5}$ qui n'en ont pas en réalité; de même il nous faut ici procéder d'une manière tout à fait semblable et *adjoindre aux énoncés finis des énoncés idéaux*, pour conserver les lois à forme simple de la logique aristotélicienne ordinaire. Et c'est une singulière coïncidence que les méthodes de raisonnement si passionnément attaquées par Kronecker forment ainsi le pendant exact de ce que le même Kronecker a admiré avec tant d'enthousiasme dans l'œuvre arithmétique de Kummer et célébré comme le plus beau résultat obtenu en mathématiques.

Comment arriverons-nous donc à ces *énoncés idéaux?* Il se présente ici une circonstance remarquable, et qui nous est très avantageuse: nous n'avons besoin, pour parvenir à notre but, que de poursuivre tout naturellement la voie où la théorie des fondements des mathématiques s'est déjà engagée. Rappelons-nous, en effet, que déjà les mathématiques élémentaires dépassent le point de vue de l'arithmétique intuitive: la méthode du calcul algébrique littéral sort du cadre de l'arithmétique à contenu intuitif, telle que nous l'avons comprise jusqu'ici. Dans celle-ci, les formules ne servaient qu'à représenter des faits déterminés: les lettres représentaient des signes numériques, et une égalité exprimait l'identité de deux de ces signes. En algèbre, au contraire, nous considérons les expressions littérales en elles-mêmes, comme des êtres indépendants, et les théorèmes à contenu concret de l'arithmétique prennent grâce à elles un caractère purement formel. Les énoncés portant sur des signes numériques sont remplacés par des formules qui ne sont plus elles-mêmes que les objets concrets d'une étude intuitive; et la démonstration arithmétique à contenu concret est remplacée par la dérivation d'une formule à partir d'une autre formule suivant des règles déterminées.

Nous sommes donc, dès l'algèbre, en présence de nouveaux objets finis. Il n'y avait de tels, jusqu'ici, que les signes numériques 1, 11, ..., 11111, ... Ils étaient les seuls objets sur lesquels portait notre étude concrète. Mais dès l'algèbre les besoins de la pratique nous conduisent plus loin. Et quand même un énoncé est légitime, de notre point de vue du fini, avec son interprétation concrète, comme par exemple ce théorème, que l'on a toujours:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ représentent des signes numériques déterminés, même dans ce cas nous ne l'exprimons pas sous cette forme, mais préférons la formule:

$$a + b = b + a;$$

elle ne représente plus du tout directement un fait concret, mais c'est une construction formelle, dont le rapport avec les énoncés finis de tout à l'heure

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$5 + 7 = 7 + 5$$

consiste en ce que nous remplaçons, dans la formule, a et b par les signes numériques $2, 3, 5, 7$, et obtenons ainsi ces énoncés finis particuliers au moyen d'une démonstration, d'ailleurs bien simple. Voici donc la conception à laquelle nous sommes amenés: a, b, $=$, $+$, aussi bien que l'ensemble de la formule

$$a + b = b + a$$

n'ont en eux-mêmes aucun sens, pas plus que les signes numériques; mais on peut en déduire des formules auxquelles nous attribuons un sens, en tant qu'elles représentent des énoncés finis. En généralisant cette conception, les mathématiques nous apparaissent comme un assortiment de formules de deux catégories, les unes représentant des énoncés finis, à signification concrète, et les autres n'ayant aucun sens, et formant le *domaine idéal de notre théorie.*

Or, quel était notre but? Nous avons trouvé, dans les mathématiques, d'un côté des énoncés finis, ne renfermant que des signes numériques, comme par exemple

$$3 > 2,\ 2 + 3 = 3 + 2,\ 2 = 3,\ 1 \neq 1,$$

qui, de notre point de vue du fini, sont immédiatement intuitifs et intelligibles; ceux-là comportent des propositions contradictoires, ils sont vrais ou faux, on peut en agir avec eux à sa guise, et leur appliquer sans scrupule les règles de la logique aristotélicienne; le principe de non-contradiction est valable pour eux, c'est-à-dire qu'un de ces énoncés et son contradictoire ne peuvent être vrais tous deux; le principe du tiers exclu est valable, c'est-à-dire que l'un de ces deux est vrai. Dire qu'un tel énoncé est faux équivaut à dire que son contradictoire est vrai. Mais à côté de ces énoncés élémentaires, ne présentant aucune difficulté, nous avons rencontré des énoncés finis d'un caractère plus énigmatique, par exemple ceux qu'on ne pouvait diviser en deux énoncés partiels. Enfin, nous avons introduit maintenant des énoncés idéaux, qui doivent permettre de rétablir pour l'ensemble les lois de la logique ordinaire. Mais les énoncés idéaux, c'est-à-dire les formules, n'ont aucun sens en tant qu'ils n'expriment pas des affirmations finies; nous ne pouvons donc leur appliquer, comme aux énoncés finis, les opérations logiques avec leur sens plein et leur contenu concret. Il est alors nécessaire de donner un caractère formel aux opérations logiques et aux démonstrations mathématiques elles-mêmes; pour cela, il faut traduire en formules les rapports logiques: nous devons donc adjoindre aux signes mathématiques des signes logiques, par exemple

& ,	$\vee$,	$\rightarrow$,	—
et	ou	entraîne	non

et employer, à côté des variables mathématiques a, b, c . . . ., des variables logiques, c'est-à-dire des propositions variables A, B, C, ...

Comment y parvenir? Par bonheur, nous rencontrons ici la même harmonie préétablie qu'on remarque si souvent dans le développement de la science, cette harmonie qui vint à l'aide d'Einstein lorsqu'il trouva, tout prêt pour sa théorie de la gravitation, le calcul différentiel absolu déjà complètement élaboré: nous trouvons ici une théorie déjà avancée, qui servira de travail préparatoire au nôtre, la *logistique* ou algèbre de la logique. Il est vrai qu'elle a été créée à partir d'un point de vue tout différent du nôtre, et que les signes de la logistique n'ont été originellement introduits que pour représenter des notions déterminées; mais nous serons conséquents avec nous-mêmes en vidant de tout leur sens les signes logiques aussi bien que les signes mathématiques, et en convenant que les formules de la logistique n'ont aucun sens en elles-mêmes, mais sont seulement des énoncés idéaux. Dans la logistique nous avons un langage symbolique capable de représenter par des formules les théorèmes mathématiques et de traduire la déduction logique en opérations formelles. De même que nous sommes passés d'une arithmétique à contenu concret à une algèbre formelle, nous considérons maintenant les signes et les symboles d'opération de la logistique en les détachant du sens qu'ils contenaient. Nous obtenons donc finalement, à la place de la science mathématique à contenu concret, s'exprimant par le langage ordinaire, un simple corps de formules, où figurent des signes mathématiques et logiques, et qui s'alignent les unes à la suite des autres suivant des règles déterminées.

Aux axiomes mathématiques correspondent certaines de ces formules, et à la déduction concrète correspondent les règles suivant lesquelles les formules se suivent les unes les autres: la déduction concrète est ainsi remplacée par un maniement formel suivant certaines règles; et de la sorte, en ce qui concerne d'une part les axiomes eux-mêmes, posés à l'origine tout simplement comme des vérités fondamentales, mais considérés depuis longtemps par l'axiomatique moderne comme n'étant que des relations entre des concepts, et en ce qui concerne aussi la logistique, qui à l'origine ne devait être qu'une autre sorte de langage, nous avons complètement effectué le passage de la manière intuitive de procéder à la manière purement formelle.

Expliquons donc en quelques mots comment on donnera un caractère formel à la *démonstration mathématique.* Comme je le disais, certaines formules, qui servent d'éléments fondamentaux à l'édifice formel des mathématiques, sont appelées axiomes. Une démonstration mathématique est une figure, qui doit donc être présente à l'intuition; elle est formée de déductions successives, conformes au schéma suivant:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}},$$

dans lequel chacune des prémisses, c'est-à-dire des formules $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, ou bien est un axiome ou dérive d'un axiome par substitution, ou bien est identique à la conclusion d'une déduction antérieure ou dérive d'une telle conclusion par substitution. Une formule est dite démontrable lorsque c'est la conclusion d'une démonstration.

Notre programme nous guide à priori dans le choix des axiomes pour notre théorie de la démonstration. Malgré beaucoup d'arbitraire dans ce choix, on trouve, comme en géométrie, certains groupes séparés qui se distinguent qualitativement: nous donnons quelques exemples de chacun d'entre eux:

I. Axiomes d'ordre *(der Folge):*

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

(adjonction d'une hypothèse);

$$(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$

(élimination d'un énoncé).

II. Axiomes de la négation:

$$\{A \rightarrow (B \,\&\, \bar{B})\} \rightarrow \bar{A}$$

(principe de non-contradiction);

$$\overline{\overline{A}} \rightarrow A$$

(principe de la double négation).

Les axiomes des groupes I et II ne sont autres que les axiomes du calcul des propositions.

III. Axiomes transfinis:

$$(a)\, A\,(a) \rightarrow A\,(b)$$

(déduction du général au particulier, ou axiome d'Aristote);

$$\overline{(a)\, A\,(a)} \rightarrow (E\,a)\, \overline{A}\,(a)$$

(si un prédicat n'est pas universellement valable, il y a un exemple qui le contredit);

$$\overline{(E\,a)\, A\,(a)} \rightarrow (a)\, \overline{A}\,(a)$$

(s'il n'y a pas d'exemple qui satisfasse à une proposition, elle est fausse quel que soit a)

L'on rencontre d'ailleurs ici une circonstance très remarquable, c'est que les axiomes transfinis se déduisent tous d'un axiome unique; et celui-ci est tel qu'il contient aussi l'essentiel de l'axiome le plus attaqué de la littérature mathématique, de l'axiome de libre choix, comme on l'appelle. C'est le suivant:

$$A\,(a) \rightarrow A\,(\varepsilon\, A)$$

où ε est la fonction de choix transfinie de la logistique.

A ces axiomes, il s'en ajoute d'autres plus spécialement mathématiques:

IV. Axiomes de l'égalité:

$$a = a;$$

$$a = b \rightarrow \{\, A\,(a) \rightarrow A\,(b)\,\};$$

et enfin:

V. Axiomes numériques *(Axiome der Zahl):*

$$a + 1 \neq 0;$$

et l'axiome de l'induction complète.

Nous sommes ainsi en état de poursuivre notre théorie de la démonstration, et de construire le système des formules démontrables, c'est-à-dire la science mathématique.

Mais dans la joie de ce succès, et en particulier de la chance que nous avons eue en trouvant cet outil indispensable, la logistique, tout préparé pour nous, nous ne devons pas oublier la condition préalable qu'il est essentiel de remplir avant d'aller plus loin. Il y a en effet une condition, une seule, mais absolument nécessaire, de laquelle dépend l'application de la méthode des éléments idéaux: c'est la *preuve de la non-contradiction:* l'extension d'un domaine par adjonction d'idéaux n'est légitime, en effet, que s'il n'en résulte aucune contradiction dans l'ancien domaine restreint, si par conséquent les relations que l'on trouve pour les anciens éléments par l'élimination des éléments idéaux sont des relations qui étaient déjà vérifiées dans l'ancien domaine.

Ce problème de la non-contradiction peut être traité complètement dans les conditions où nous sommes. Il suffit pour le résoudre, comme on le voit tout de suite, de reconnaître que $1 \neq 1$ ne peut être une conclusion déduite des axiomes suivant les règles établies, ou en d'autres termes que $1 \neq 1$ n'est pas une formule démontrable. Et c'est là une question qui, en principe, peut aussi bien être soumise à une étude intuitive que peut l'être, dans l'arithmétique concrète, le problème de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$: dans celui-ci, il s'agit de démontrer qu'il est impossible de trouver deux signes numériques $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ satisfaisant à la relation $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{b}^2$, ou, en définitive, qu'on ne peut trouver deux signes numériques ayant une certaine propriété. De même tout se réduit pour nous à démontrer qu'on ne peut trouver une démonstration ayant une certaine propriété. Or une démonstration, rendue formelle comme nous l'avons expliqué, est aussi bien qu'un signe numérique un objet concret et intuitivement perceptible. On peut la décrire du commencement jusqu'à la fin. Et cette propriété de la formule finale qui nous occupe, à savoir qu'elle doit être $1 \neq 1$, est un caractère concret, directement vérifiable, de la démonstration. Il se trouve, en effet, qu'on peut faire la preuve de son impossibilité, et notre introduction d'énoncés idéaux est ainsi justifiée.

En même temps, nous avons l'agréable surprise de résoudre par là un problème qui est brûlant depuis longtemps, le problème de *la compatibilité des axiomes de l'arithmétique.* Car chaque fois qu'on veut appliquer la méthode axiomatique, on se trouve devant ce problème de la compatibilité. Et nous ne voulons pas, dans le choix, la compréhension, et le maniement des axiomes et des règles, nous contenter d'une foi aveugle. Dans la géométrie et dans les théories physiques, la preuve de la compatibilité se fait en ramenant la question à la compatibilité des axiomes arithmétiques. Cette méthode n'est évidemment pas applicable à l'arithmétique elle-même. Notre théorie de la démonstration, en nous permettant, au moyen de la méthode des éléments idéaux, d'accomplir ce dernier et important progrès, nous fournit la clef de voûte qui était nécessaire à l'édifice doctrinal de l'axiomatique. Et ce que nous avons vécu deux fois, quand il s'est agi d'abord des paradoxes du calcul infinitésimal, puis des paradoxes de la théorie des ensembles, cela ne peut arriver une troisième fois et ne se passera jamais plus.

Mais la théorie de la démonstration que je viens de vous esquisser n'est pas seulement en état d'assurer les fondements de la science mathématique, je crois qu'elle nous ouvre aussi une voie pour traiter des questions de principe d'ordre général dans le domaine de la pensée mathématique, questions qui étaient inaccessibles jusqu'à présent.

La mathématique devient en quelque sorte un tribunal suprême, jugeant en dernier ressort des questions de principe, en se plaçant toujours sur un terrain concret où il est garanti que tous peuvent être conciliés, et où chaque affirmation est contrôlable.

Les affirmations de ce qu'on appelle maintenant l'intuitionnisme, si modestes qu'elles soient, doivent à mon avis obtenir d'abord, elles aussi, un certificat d'autorisation de ce tribunal.

Comme exemple de questions de principe que nous pouvons maintenant traiter, je choisirai la thèse que tout problème mathématique comporte une solution. Nous en sommes tous persuadés. C'est même là un des principaux attraits de la recherche mathématique, que nous entendons continuellement en nous un appel: voilà le problème, cherche la solution; tu peux la trouver par le seul effort de la pensée, car en mathématique il n'y a rien qui doive rester éternellement ignoré. Or, ma théorie ne peut, il est vrai, donner un moyen général pour résoudre tout problème mathématique: il n'en existe d'ailleurs pas; mais démontrer que l'hypothèse de la résolubilité de tout problème mathématique ne renferme pas de contradiction, c'est une opération qui est entièrement du domaine de notre théorie.

Enfin, je vais vous montrer mon dernier atout: pour chaque nouvelle théorie, la pierre de touche est en définitive son succès dans des questions posées depuis longtemps, et en vue desquelles on ne l'a pas du tout spécialement créée. »Vous les reconnaîtrez à leurs fruits« est une parole qui est vraie aussi pour les théories. Or, dès que Cantor eut découvert les premiers de ses nombres transfinis, il se posa, comme nous l'avons dit, la question de savoir si l'on peut énumérer au moyen de ces nombres des ensembles, non dénombrables, effectivement connus d'autre part. Et parmi ces ensembles, le premier qui se présentait, c'était l'ensemble des points d'un segment. La question de savoir si les points d'un segment, ou encore les nombres réels, peuvent s'énumérer au moyen des nombres du tableau qui venait d'être formé, c'est là justement le célèbre problème du continu, posé par Cantor mais non pas résolu. Quelques mathématiciens ont cru pouvoir écarter ce problème en le niant. Les considérations que je vais vous indiquer montrent combien cette position est erronée. Le problème du continu se distingue par son caractère particulier et sa beauté propre, et l'emporte même sur d'autres problèmes célèbres en ce qu'il réunit des qualités de deux sortes: d'une part, sa solution exige des méthodes nouvelles, car les anciennes n'ont pas de prise sur lui, et de l'autre, sa solution est en elle-même du plus haut intérêt à cause de l'importance du résultat à établir.

La solution de ce problème s'obtient par la théorie que j'ai développée, et la démonstration de la résolubilité de tout problème mathématique en constitue même justement la première partie, et la plus importante. La réponse est affirmative: les points d'un segment peuvent s'énumérer par les nombres de la seconde classe, c'est-à-dire, en langage vulgaire, par simple prolongation de l'énumération au delà de l'infini dénombrable.

Au lieu de l'ensemble des nombres réels, nous considérons, ce qui revient évidemment au même, l'ensemble des fonctions arithmétiques, c'est-à-dire des fonctions à valeurs entières d'un argument entier. Si nous voulons ordonner l'ensemble de ces fonctions au sens du problème du continu, il nous faut examiner le mode de génération de chaque fonction particulière. Or, une fonction d'un argument peut être définie de telle sorte que sa valeur pour certaines ou pour toutes les valeurs de l'argument dépend de la solution de n'importe quels problèmes mathématiques bien déterminés, par exemple de problèmes diophantiques, ou de l'existence de nombres premiers possédant certaines propriétés, ou de l'irrationnalité d'un nombre donné, par exemple $2^{\sqrt{2}}$. Pour échapper à cette difficulté, nous utilisons précisément le résultat cité tout à l'heure de la résolubilité de tout problème mathématique bien déterminé. Ce résultat constitue un lemme général, appartenant à la *métamathématique,* comme j'appellerai cette théorie concrète de la démonstration formelle. J'énonce exactement ainsi ce qui nous en intéresse pour l'instant:

Lemme I. Si, grâce à l'adjonction de fonctions définies au moyen du symbole transfini ε (groupe d'axiomes III), l'on obtient la démonstration formelle (conforme au schéma donné plus haut) d'un résultat incompatible avec le théorème du continu, il est possible d'y remplacer entièrement ces fonctions par d'autres fonctions définies sans le symbole ε, et seulement au moyen de lois de récurrence ordinaire ou transfinie, le transfini n'y intervenant d'ailleurs que par la présence du signe d'universalité: ( ).

Pour ma théorie, quelques conventions sont encore nécessaires.

Nous employons, pour représenter les *énoncés variables* (formules indéterminées) des majuscules latines, et pour les *énoncés individuels* (formules particulières) des majuscules grecques, et entre autres:

$Z(a)$: »a est un entier ordinaire».

$N(a)$: »a est un nombre de la seconde classe».

Nous employons, pour les *variables mathématiques*, des minuscules latines, et pour les *êtres mathématiques individuels* (fonctions particulières) des minuscules grecques.

En ce qui concerne l'opération de la *substitution* (Einsetzung) nous ferons les conventions générales suivantes.

A une variable représentant un énoncé indéterminé ne peuvent être substitués que d'autres énoncés (ou formules) déterminés ou non.

A une variable mathématique peut être substituée n'importe quelle figure; mais, lorsqu'une telle variable se trouve dans une formule, celle-ci doit toujours être précédée de l'énoncé particulier qui caractérise la nature de cette variable, et du signe d'implication. Par exemple, l'on écrira:

$$Z(a) \rightarrow (\ldots a \ldots),$$

$$N(a) \rightarrow (\ldots a \ldots).$$

Par suite de cette convention, il n'y a à s'occuper, parmi les figures pouvant être substituées à a par exemple dans $Z(a)$ ou $N(a)$, que des entiers ordinaires ou que des nombres de la seconde classe.

Les majuscules ou minuscules gothiques ne sont employées que pour représenter des expressions symboliques.

Enfin, nous entendons par une »figure» un objet donné à l'intuition et composé de signes élémentaires.

Pour faire comprendre le principe de ma démonstration, il faut avant tout préciser entièrement la notion de la variable mathématique la plus générale. Les variables mathématiques sont de deux sortes:

1. *Les variables fondamentales* (Grundvariablen)
2. *Les types de variables* (Variablentypen).

1. Tandis que dans toute l'arithmétique et l'analyse il suffit d'une seule variable fondamentale, le nombre entier ordinaire, nous devons maintenant attacher à chaque classe cantorienne de nombres transfinis une variable fondamentale susceptible d'être égalée à tous les ordinaux de cette classe. A chacune de ces

variables correspond alors un énoncé qui la caractérise comme telle; et cet énoncé est défini implicitement par des axiomes, par exemple:

$$Z(0),$$
$$Z(a) \rightarrow Z(a+1),$$
$$\{A(0) \,\&\, (a)(A(a) \rightarrow A(a+1))\} \rightarrow \{Z(a) \rightarrow A(a)\}$$

(formule de l'induction ordinaire);

$$N(0),$$
$$N(a) \rightarrow N(a+1)$$
$$(n)\{Z(n) \rightarrow N a(n)\} \rightarrow N \lim a(n),$$

et en plus la formule de l'induction transfinie pour les nombres de la seconde classe.

A chaque sorte de variable fondamentale correspond une sorte de récurrence, au moyen de laquelle on définit des fonctions ayant cette variable fondamentale pour argument. La récurrence relative aux entiers ordinaires est la »récurrence ordinaire», suivant laquelle on définit une fonction de l'argument entier n en donnant sa valeur pour $n = 0$ et la manière dont sa valeur pour $n+1$ se déduit de sa valeur pour n. La généralisation de la récurrence ordinaire est la récurrence transfinie dont le principe général consiste à déterminer la valeur de la fonction pour une certaine valeur de la variable au moyen de toutes les valeurs précédentes.

2. Des variables fondamentales nous dérivons de nouvelles espèces de variables en formant des combinaisons logiques entre les énoncés de définition des variables fondamentales, par exemple Z et N. Les variables ainsi définies s'appellent des *types de variables*, les énoncés qui les définissent sont des *énoncés de types* (Typenaussagen); pour chacun d'entre eux nous introduisons de nouveaux signes particuliers. Ainsi, la formule

$$(a)\{Z(a) \rightarrow Z(f(a))\}$$

fournit l'exemple le plus simple d'un type de variables; elle définit en effet la variable-fonction f, et nous la désignons, en tant qu'énoncé de type, par $\Phi(f)$, »f est une fonction». Un autre exemple est donné par la formule

$$(f)\{\Phi(f) \rightarrow Z g(f)\};$$

elle définit la fonction de fonction[1] g, nous la désignons par $\Psi(g)$, où g est la nouvelle variable-fonction de fonction.

[1] Non pas la fonction de fonction comme on l'entend dans l'enseignement élémentaire, mais la fonction dont l'argument est une fonction, ou en d'autres termes la fonctionnelle (N. d. T.).

Pour caractériser les types de variables supérieurs, il faut affecter d'un indice les énoncés de types eux-mêmes; un tel énoncé, affecté d'un indice, est défini par une récurrence, où l'égalité (=) est remplacée par l'équivalence logique ($\sim$).

Dans toute l'arithmétique et l'analyse n'interviennent comme variables supérieures que les fonctions, les fonctions de fonction, etc. obtenues par un nombre fini d'itérations. Un type de variables qui va plus loin que ces exemples simples est fourni par la variable g qui fait correspondre une valeur entière $g(f_n)$ à toute suite composée

d'une fonction f_1 d'entier: $\Phi(f_1)$,
d'une fonction de fonction f_2: $\Psi(f_2)$,
d'une fonction f_3 de fonction de fonction
etc.

L'énoncé de type $\Phi_\omega(g)$ correspondant est formé des équivalences suivantes:

$$\Phi_0(a) \sim Z(a),$$
$$\Phi_{n+1}(f) \sim (b)\{\Phi_n(b) \rightarrow Z(f(b))\},$$
$$\Phi_\omega(g) \sim \{(n)\ \Phi_n(f_n) \rightarrow Z(g(f))\};$$

c'est un exemple d'énoncé de type défini par récurrence.

Les types de variables peuvent être classifiés suivant leur *hauteur* (Höhe). Nous attribuons la hauteur 0 à toutes les constantes numériques, et la hauteur 1 à toutes les fonctions dont l'argument et la valeur ont le caractère d'une variable fondamentale, et par exemple satisfont à Z ou à N. Une fonction, dont l'argument et la valeur ont des hauteurs déterminées, a elle-même une hauteur supérieure de 1 à la plus grande de ces deux-là, ou à leur valeur commune si elles sont égales. Une suite de fonctions de hauteurs différentes a la limite de celles-ci pour hauteur propre.

Après ces préliminaires, reprenons notre problème, et rappelons-nous qu'il s'agit essentiellement, pour démontrer le théorème du continu, de faire correspondre d'une manière biunivoque les définitions de fonctions à valeur et argument entiers qui ne contiennent pas le symbole ε, aux nombres cantoriens de la seconde classe, ou même simplement de réaliser cette correspondance de manière que toute fonction corresponde au moins à un nombre de la seconde classe.

Les moyens élémentaires pour construire des fonctions sont évidemment la *substitution* (Einsetzung) (c'est-à-dire le remplacement d'un argument par une nouvelle variable ou par la valeur d'une fonction) et la *récurrence* (Rekursion) (dont le schéma est celui-ci: la valeur de la fonction pour $n + 1$ se dérive de sa valeur pour n d'après une certaine loi).

On pourrait croire qu'à ces deux procédés, substitution et récurrence, il faille ajouter d'autres méthodes élémentaires de définition; par exemple, on définira une fonction en donnant ses valeurs jusqu'à une certaine valeur de l'argument, à partir de laquelle elle est constante; ou bien encore on utilisera des définitions tirées des opérations élémentaires, comme le reste de la division ou le p. g. c. d. de deux nombres; ou encore on définira un nombre comme le plus petit d'une collection finie de nombres déterminés.

Mais on peut montrer que toutes les définitions de ce genre peuvent se réduire à une suite de substitutions et de récurrences particulières. La méthode pour rechercher les récurrences nécessaires est essentiellement équivalente aux procédés par lesquels se vérifie le caractère fini de la définition considérée.

Après ces explications, nous avons à jeter un coup d'œil sur les résultats de ces deux opérations, substitution et récurrence. Mais quant aux récurrences, en raison des possibilités multiples que présente le passage de n à $n+1$, on trouve qu'elles ne sont pas réductibles à une forme unique tant que l'on se restreint à n'opérer que sur les variables entières habituelles. L'exemple suivant suffira à faire reconnaître ces difficultés.

Considérons la fonction:

$$a+b;$$

on en déduit, par itération n-uple et en égalant les termes:

$$a+a+\cdots+a=a\cdot n.$$

On passe de même de

$$a\cdot b \text{ à } a\cdot a\cdots a=a^n,$$

puis de

$$a^b \text{ à } a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots$$

Nous obtenons ainsi successivement les fonctions

$$\begin{aligned} a+b &= \varphi_1(a,b), \\ a\cdot b &= \varphi_2(a,b), \\ a^b &= \varphi_3(a,b). \end{aligned}$$

$\varphi_4(a,b)$ est ensuite le $b^{\text{ième}}$ terme de la suite:

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots .$$

On passe de même à $\varphi_5(a,b)$, $\varphi_6(a,b)$, etc.

On pourrait sans doute définir $\varphi_n(a, b)$, pour n variable, par des substitutions et des récurrences; mais celles-ci ne seraient pas des récurrences ordinaires faites l'une après l'autre successivement: on serait conduit à une récurrence complexe, procédant simultanément suivant les valeurs croissantes de plusieurs variables; et elle ne se résout en récurrences ordinaires prises successivement que si l'on utilise la notion de variable-fonction: la fonction $\varphi_a(a, a)$ est un exemple de fonction de la variable numérique a qui ne peut se définir au moyen de substitutions et de récurrences ordinaires prises successivement si l'on se restreint aux variables numériques.[1] Les formules suivantes montrent comment on peut définir la fonction $\varphi_n(a, b)$ en utilisant les variables fonctionnelles:

$$\begin{aligned}
&\iota(f, a, 1) = a,\\
&\iota(f, a, n+1) = f(a, \iota(f, a, n));\\
&\varphi_1(a, b) = a + b,\\
&\varphi_{n+1}(a, b) = \iota(\varphi_n, a, b).
\end{aligned}$$

ι désigne ici une fonction déterminée de trois arguments, dont le premier est lui-même une fonction de deux variables numériques.

Un autre exemple de récurrence complexe est celui-ci:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(a) = \mathfrak{a}(a)\\
&\varphi_{n+1}(a) = \mathfrak{f}(a, n, \varphi_n(\varphi_n(n+a))),
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{a}$ désigne une expression connue contenant un argument a, et $\mathfrak{f}$ une expression connue à trois arguments. Le caractère particulier de cette récurrence consiste en ce que la valeur pour $n+1$ ne se déduit pas simplement de la valeur pour n, mais la détermination de φ_{n+1} dépend de toute la variation de φ_n.

On peut vaincre les difficultés qui se présentent dans ces exemples en se servant des types de variables; le schéma général de la récurrence est alors le suivant:

$$\begin{aligned}
&\varrho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, o) = \mathfrak{a},\\
&\varrho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n+1) = \mathfrak{g}(\varrho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n), n);
\end{aligned}$$

$\mathfrak{a}$ est ici une expression donnée appartenant à un type de variables quelconque; $\mathfrak{g}$ est également une expression donnée à deux arguments, dont le premier appartient au même type de variables que $\mathfrak{a}$, et le second est un nombre; de plus, la

[1] La démonstration de ce fait a été obtenue par W. Ackermann.

valeur de $\mathfrak{g}$ doit appartenir aussi au même type de variables que $\mathfrak{a}$. Enfin ϱ est l'expression qu'on veut définir par récurrence; il dépend de trois arguments, et, après qu'on y a fait les substitutions voulues pour $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ et n, il rentre dans le même type de variables que $\mathfrak{a}$; en outre, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}$, et par conséquent ϱ, peuvent dépendre de paramètres quelconques.

De ce schéma général on déduit par substitution des récurrences déterminées. On obtient en particulier les récurrences de nos deux exemples en considérant, dans le premier, f et a comme des paramètres, et, dans le second, le passage de $\varphi_n(a)$ à $\varphi_{n+1}(a)$ comme un passage, au moyen de la fonctionnelle $\mathfrak{g}$, de la fonction φ_n à la fonction φ_{n+1}, de sorte que a n'intervient plus comme paramètre. Les récurrences de nos exemples sont d'une espèce plus générale que la récurrence élémentaire en ce que dans un cas nous introduisons un paramètre d'ordre supérieur, qui n'est pas un entier ordinaire, et dans l'autre nous choisissons pour $\mathfrak{a}$ une fonction et pour $\mathfrak{g}$ une fonctionnelle.

Les types de variables forment le lien grâce auquel on arrive à réaliser une correspondance entre les fonctions d'une variable numérique et les nombres de la seconde classe. Nous obtenons en effet une correspondance entre les nombres de la seconde classe et certains types de variables en comparant les deux modes de génération des nombres de la seconde classe, à savoir l'addition d'une unité et la construction de la limite pour une suite dénombrable, avec la formation des types dans l'ordre des hauteurs croissantes. A l'addition d'une unité nous ferons correspondre la fonctionnalisation *(Funktionen-Nehmen)*, c'est-à-dire la formation d'une fonction ayant pour argument un type de variables donné; et au passage à la limite, la réunion d'une suite dénombrable de types de variables en un nouveau type; nous appellerons *types* (Z) les types que nous faisons ainsi correspondre aux nombres de seconde classe: dans la formation des types (Z) il suffit donc d'appliquer, outre les procédés de combinaison logique, des récurrences ordinaires non transfinies, celles-là mêmes qui sont chaque fois nécessaires pour énumérer les suites de types préalablement au passage à la limite. Si nous rangeons ces types (Z) dans l'ordre des hauteurs croissantes, nous obtenons une correspondance biunivoque dans laquelle chaque nombre de la seconde classe a pour correspondants les types variables d'une hauteur déterminée, et réciproquement.

Mais nous arrivons aussi, de cette manière, à une correspondance biunivoque entre les fonctions définies au moyen des types (Z) et les nombres de la seconde classe. Pour le reconnaître, il suffit des considérations suivantes. Si nous partons de types de variables n'allant que jusqu'à une certaine hauteur, et que nous construisions ensuite des fonctions uniquement par substitution et récurrence, nous n'obtenons qu'une infinité dénombrable de fonctions. On peut, en toute rigueur, donner un caractère formel à leur énumération, et cela en posant d'abord une fonction de récurrence ϱ qui comprenne comme cas particuliers toutes les récurrences employées, et qui renferme par conséquent un paramètre d'ordre plus élevé que les types de variables auxquels on s'est restreint jusque là. La définition de ϱ est une application du schéma général de récurrence dans laquelle ce type de variables supérieur intervient essentiellement. On ordonne alors suivant leur hauteur les spécialisations qu'on a à employer pour les types de variables figurant dans ϱ, et on obtient ainsi les différentes substitutions initiales. On effectue l'énumération de celles-ci. Après l'avoir effectuée, on obtient les fonctions qu'il s'agit de définir en ordonnant suivant le nombre des substitutions nécessaires.

Dans la démonstration que je viens d'esquisser, j'ai supposé connue dans ses traits essentiels la théorie des nombres de la seconde classe. J'ai introduit tout simplement ces nombres comme le résultat d'une énumération prolongée au-delà de l'infini dénombrable; ensuite, j'ai caractérisé au moyen d'axiomes l'énoncé déterminé N, »être un nombre de la seconde classe». Mais ces axiomes ne peuvent fournir que le cadre général d'une théorie. Pour trouver à celle-ci une base plus solide, il est nécessaire d'indiquer comment on peut donner un caractère formel à cette énumération prolongée. On y arrive en appliquant à une suite la méthode de prolongation de l'énumération; cette suite ne peut elle-même être définie que par une récurrence ordinaire, et pour cette récurrence il est de nouveau besoin de types.

Cette circonstance crée une difficulté apparente, mais l'on constate qu'en réalité on peut, précisément grâce à ces considérations, rendre beaucoup plus étroite la correspondance entre les nombres de la seconde classe et les fonctions d'entier. En effet, les types de variables qui sont nécessaires pour former les nombres de la seconde classe s'obtiennent en remplaçant formellement, une ou plusieurs fois, le signe Z par le signe N dans nos formules de définition de types. Nous appellerons *types* (N) les types de variables qui résultent de cette opération; il est clair que des types (Z) et (N) correspondants ont la même hauteur. Nous n'avons alors plus besoin de faire correspondre à un nombre donné de la seconde classe toutes les fonctions de même hauteur, mais nous pouvons faire correspondre les fonctions et les nombres de la seconde classe suivant la hauteur des types de variables nécessaires à leur définition. Plus exactement, cette correspondance s'exprime de la manière suivante.

Si l'on ne prend des types (Z) que jusqu'à une certaine hauteur, la hauteur des types (N) correspondants est également limitée. Des nombres de la seconde classe qu'on peut former avec ces types, l'on déduit, au moyen de leur suite ascendante, un nombre plus élevé, qui n'est définissable qu'à l'aide d'un type de variables plus élevé aussi. Si l'on a d'autre part des types (N) jusqu'à une certaine hauteur, les fonctions définissables au moyen des types (Z) correspondants sont aussi dénombrables; on peut en effet les énumérer suivant le nombre des substitutions qu'elles exigent, comme je l'ai expliqué plus haut. De cette énumération, qui détermine une fonction $\varphi(a, n)$ on déduit, comme on sait, par le procédé diagonal de Cantor, par exemple par la formation de $\varphi(a, a) + 1$, une fonction différente de toutes les fonctions énumérées, et qui ne peut donc être définie au moyen des types de variables auxquels on s'est restreint jusque là.

On a atteint alors la possibilité de faire correspondre d'une manière biunivoque, aux nombres de la seconde classe définissables au moyen des types de la hauteur considérée mais non au moyen d'une hauteur moindre, les fonctions en infinité dénombrable définies au moyen de cette même hauteur; et de cette façon chaque fonction correspond au moins à un nombre de la seconde classe.

La démonstration du théorème du continu n'est pourtant pas encore achevée: elle a besoin d'un complément essentiel. Jusqu'à présent, en effet, dans toute cette recherche qui nous a conduits à la correspondance cherchée, nous avons fait une double hypothèse restrictive: d'une part, notre schéma général de récurrence pour ϱ ne donne une expression que de la récurrence ordinaire, procédant suivant les valeurs croissantes d'un entier ordinaire, et de l'autre, nous avons restreint nos types de variables à ceux qui s'obtiennent en prolongeant l'énumération au delà de suites dénombrables. Il est certain que l'emploi de récurrences transfinies, et l'emploi correspondant de types de variables d'ordre supérieur, sont nécessaires dans certaines recherches mathématiques, par exemple pour construire des fonctions de variable réelle ayant certaines propriétés. Mais ici, dans notre problème où il s'agit de construire des fonctions d'entier, ces récurrences et ces types supérieurs ne sont pas nécessaires; on a en effet le lemme suivant:

Lemme II. Pour construire les fonctions d'une variable entière, on peut se passer de récurrences transfinies, et la récurrence ordinaire, c'est-à-dire procédant suivant les valeurs croissantes d'une variable entière, ne suffit pas seulement pour la construction proprement dite des fonctions, mais encore on n'a à employer, dans les substitutions, que des types de variables définis uniquement au moyen de récurrences ordinaires. Ou encore, pour nous exprimer plus correctement, et plus en accord avec notre condition du fini: si l'on a construit, à l'aide d'une récurrence supérieure ou d'un type de variables correspondant, une fonction dont l'argument est un entier ordinaire, cette fonction est nécessairement définissable au moyen de récurrences ordinaires et en employant exclusivement des types (Z).

Le sens et la portée de ce lemme nous seront rendus clairs par l'exemple caractéristique que voici:

Supposons qu'on ait donné un caractère formel à la correspondance entre les fonctions d'argument entier et les nombres de la seconde classe; nous avons ainsi déterminé une fonction $\zeta(a, n)$ qui fait correspondre un entier ordinaire à un nombre quelconque a de la seconde classe et à l'entier ordinaire n: pour a constant et n variable, $\zeta(a, n)$ sera précisément la fonction de l'entier n qui correspond à a. Prenons maintenant pour a un nombre de la seconde classe, α_n, dépendant de n, la suite des α_n pouvant d'ailleurs être définie par une récurrence ordinaire ou transfinie, comme par exemple:

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n};$$

$\zeta(\alpha_n, n)$ est alors une fonction de la variable n; et notre lemme II affirme à son sujet qu'elle peut être définie par des récurrences ordinaires et au moyen de types (Z), alors qu'une telle définition n'existe certainement pas pour $\zeta(a, n)$: car si l'on supposait qu'il en existât une, on serait visiblement conduit à une contradiction.

Je voudrais faire expressément remarquer, une fois de plus, qu'en exposant comme je viens de le faire la démonstration du théorème du continu, je n'ai indiqué que les idées essentielles; pour la rendre complète, il faudrait, non seulement démontrer les deux lemmes, mais encore la refondre de façon qu'elle satisfasse rigoureusement à notre condition du fini.

Pour terminer, reportons à nouveau notre pensée sur notre sujet propre, et tirons, en ce qui concerne l'infini, la conclusion de toute cette étude. Le résumé est alors celui-ci: l'infini ne se trouve réalisé nulle part; il n'est pas présent dans la nature, et nous ne pouvons non plus le considérer comme un fondement de notre pensée intelligible — remarquable harmonie entre l'être et la pensée. Contrairement aux efforts passés de Frege et Dedekind, nous arrivons à la conviction que pour rendre possible une connaissance scientifique, la condition préalable est la présence de représentations et de perceptions intuitives, et que la logique ne suffit pas. Les opérations sur l'infini ne peuvent être garanties que par le fini.

16—25389. *Acta mathematica.* 48. Imprimé le 18 février 1926.

Le rôle qui reste à l'infini est seulement celui d'une idée — si l'on entend par idée, comme faisait Kant, un concept de la raison qui dépasse toute expérience, et par lequel le concret se trouve complété dans le sens de la totalité; c'est de plus une idée à laquelle nous pouvons faire confiance sans hésiter, dans le cadre déterminé par la théorie que je viens de vous esquisser.

Enfin, j'exprime mes remercîments à M. P. Bernays, pour le concours intelligent et l'aide précieuse qu'il m'a apportés, en particulier dans la démonstration du théorème du continu, aussi bien pour la forme que pour le fond.