SUR L'ITÉRATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES ENTIÈRES.

PAR

P. FATOU

à PARIS.

1. Nous avons, dans une série d'articles parus au Bulletin de la société mathématique de France[1], établi les principes généraux de l'itération des fonctions rationnelles et étudié les propriétés des équations fonctionnelles qui s'y rapportent. Nous nous proposons dans cet article d'étendre les résultats obtenus aux fonctions transcendantes entières. Cette extension présente des difficultés essentielles que nous n'avons pas entièrement surmontées; on conçoit aisément que, par suite de la présence d'un point singulier essentiel à l'infini, les phénomènes déjà si complexes qui se présentent dans l'étude de l'itération des polynômes acquièrent ici une complexité encore plus grande. C'est pourquoi nous nous bornerons à établir quelques théorèmes généraux et à étudier quelques cas particuliers relativement simples; nous laisserons d'ailleurs systématiquement de côté l'étude de l'itération des fonctions méromorphes qui donnerait lieu à des transcendantes possédant une infinité de points singuliers essentiels.

2. Soit $E(z)$ une fonction transcendante entière; les fonctions itérées d'indice entier positif sont définies par les relations:

$$E_0(z) = z$$
$$E_n(z) = E[E_{n-1}(z)].$$

Ce sont des fonctions entières qui sont encore transcendantes. D'une manière générale, si l'une des fonctions entières $E(z)$ ou $F(z)$ est transcendante, il en est

[1] Voir notamment nos trois mémoires *sur les équations fonctionnelles* (B. S. M. F, 1919—1920).

de même de $E[F(z)]$. Soit en effet y un nombre pris au hasard. L'équation

$$E(u)=y$$

admet des racines u_i au nombre de p si E est un polynôme de degré p, en infinité dénombrable si $E(u)$ est transcendante. Chacune des équations:

$$F(z)=u_i$$

admet m racines, si $F(z)$ est un polynôme de degré m, en infinité dénombrable si $F(z)$ est transcendante. Donc l'équation:

$$E[F(z)]=y$$

où y est arbitraire admet une infinité de racines si E et F ne sont pas tous deux des polynômes.

3. Si z est un point quelconque du plan analytique les points

$$z_1=E(z), z_2=E_2(z), \ldots, z_n=E_n(z), \ldots$$

s'appellent les *conséquents* du point z. Inversement les points-racines des équations

$$E(Z)=z, E_2(Z)=z, \ldots E_n(Z)=z, \ldots$$

sont les *antécédents* du point z de *rangs* respectifs $1, 2, \ldots n, \ldots$ Un point quelconque du plan admet en général des antécédents de tout rang et les antécédents de rang n sont en nombre infini si $n>1$. Il existe au plus un *point remarquable* α pour lequel ce principe est en défaut; la fonction $E(z)$ est alors de la forme

$$E(z)=\alpha+(z-\alpha)^p e^{G(z)}$$

$G(z)$ étant une fonction entière, et les antécédents de α coïncident tous avec α si $p>0$, et n'existent pas si $p=0$. S'il n'existe aucun nombre α tel que $E(z)$ soit de la forme précédente, les antécédents de tout point z existent et ceux de rang n sont en nombre infini pour $n>1$. Ce sont là des conséquences immédiates du théorème de M. Picard d'après lequel il existe au plus une constante C telle que l'équation

$$E(z)=C$$

n'ait qu'un nombre fini de racines.

Comme dans le cas des polynômes nous remarquerons que si deux points

z et z' ont en commun un conséquent de rang n pour le premier et n' pour le second, z et z' ne sont pas en général conséquent l'un de l'autre, et cela à cause des déterminations multiples de la fonction inverse de $E(z)$. Autrement dit le groupe des substitutions analytiques définies par les équations

$$E_n(z) = E_{n'}(z') \qquad (n, n' = 0, 1, 2, \ldots)$$

ne peut pas être regardé comme un groupe cyclique simple. Ce groupe G admet un sous-groupe invariant Γ constitué par les substitutions, en nombre infini:

$$E_n(z) = E_n(z').$$

Le problème qui consiste à étudier la distribution des conséquents et des antécédents d'un point du plan est en relation étroite avec l'étude des conditions de discontinuité propre des groupes G et Γ; mais dans ce mémoire nous n'insisterons pas sur cet aspect du problème de l'itération.

4. Pour une étude approfondie de l'itération des fonctions entières il serait important de savoir résoudre le problème suivant: connaissant le mode de croissance des fonctions entières $E(z)$ et $F(z)$, obtenir des renseignements aussi précis que possible sur celui de la fonction $E[F(z)]$. C'est là une recherche difficile dont nous ne pousserons pas l'étude très loin. Nous devons toutefois chercher à obtenir sur ce mode de croissance quelques données qui nous seront utiles pour démontrer, dans la question qui nous occupe, les généralisations de quelques principes que nous avons rencontrés en étudiant l'itération des polynômes.

$E(z)$ étant une fonction transcendante entière, le théorème de Liouville nous apprend que, si $|z|$ devient infiniment grand, il en est de même du module maximum de $\frac{E(z)}{z^p}$, p désignant un nombre positif arbitraire. On peut se demander si, inversement, la plus petite racine en module de l'équation

$$E(z) = Z$$

pour $|Z|$ infiniment grand est toujours inférieure à $|Z|^{\frac{1}{p}}$, p étant un nombre positif donné arbitrairement. Nous ne sommes pas parvenus à résoudre complètement cette question. Cependant la réponse partielle qui découle des considérations qui suivent est suffisante pour les applications que nous avons en vue.

Nous dirons que la suite

$$Z_1, Z_2, \ldots Z_n, \ldots$$

est une suite singulière d'ordre p, si l'on a

$$|Z_1| \leq |Z_2| \leq \ldots \leq |Z_n| \leq \ldots$$

$$\lim_{n=\infty} |Z_n| = \infty$$

et si en outre toutes les racines de l'équation

$$E(z) = Z_n$$

ont un module supérieur ou égal à $|Z_n|^{\frac{1}{p}}$. Je dis que le quotient $\frac{Z_{n+1}}{Z_n}$ ne peut avoir pour limites d'indétermination que les nombres 1 et ∞.

Supposons en effet que pour une suite infinie de valeurs de n ($n = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q, \ldots$) le quotient $\frac{Z_{n+1}}{Z_n}$ ait une limite k différente de 1 et de ∞. Posons:

$$\varphi_n(t) = \frac{E(|Z_n|^{\frac{1}{p}} t)}{Z_n}.$$

Pour $n = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q, \ldots$ les deux équations:

$$\varphi_n(t) = 1$$

$$\varphi_n(t) = \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \lambda_n \qquad (\lim \lambda_n = k)$$

n'ont pas de racines inférieures en module à l'unité. Les fonctions

$$\psi_n(t) = \frac{\varphi_n(t) - 1}{\lambda_n - 1} \qquad (n = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \ldots)$$

sont holomorphes et différentes de zéro et de 1 pour $|t| < 1$. Elles forment donc, d'après M. Montel, une *famille normale* dans le cercle unité; pour $t = 0$ elles prennent les valeurs

$$\frac{\frac{E(0)}{Z_n} - 1}{\lambda_n - 1}$$

qui tendent vers la limite finie et différente de zéro $\frac{1}{1-k}$. Elles sont donc bornées dans leur ensemble à l'intérieur de tout cercle de rayon $\theta < 1$ dont le centre est à l'origine. Or ceci est impossible, car, en désignant par p' un nombre positif supérieur à p, le théorème de Liouville donne:

$$\underset{|t|\leq\theta}{\text{mod. max.}}\ \varphi_n(t) > (\theta\,|Z_n|^{\frac{1}{p}})^{p'} \times \frac{1}{|Z_n|} = \theta^{p'}\,|Z_n|^{\frac{p'-p}{p}}.$$

Comme $p' > p$ cette expression tend vers l'∞, et puisque la limite de $\frac{1}{\lambda_n - 1}$ n'est pas nulle, il s'ensuit que $\psi_n(t)$ tend vers l'infini pour les valeurs de n considérées et pour $|t| \leq \theta$. Il y a donc contradiction et l'on voit que les suites singulières d'ordre p possèdent, quelque soit p, la propriété annoncée.

5. Considérons dans le plan de la variable Z les points ζ tels que l'équation

$$E(z) = \zeta$$

n'ait pas de racine inférieure en module à $|\zeta|^{\frac{1}{p}}$. Supposons qu'il existe de telles valeurs de module aussi grand qu'on le veut et soit $R e^{i\Omega}$ l'une d'elles. Il résulte de ce qui précède que, si R est suffisamment grand, tous les points ζ situés à des distances de l'origine comprises entre R et $2R$ sont situés à l'intérieur d'un cercle Γ de rayon εR ayant pour centre le point $R e^{i\Omega}$, ε étant inférieur, par exemple, à $\frac{1}{10}$.

Considérons les points ζ extérieurs au cercle Γ et au cercle $C(|Z| \leq R)$. Soit R_1 le minimum de leur distance à l'origine. Tous les points ζ dont la distance à l'origine est comprise entre R_1 et $2R_1$ sont situés à l'intérieur d'un cercle Γ_1, ayant pour centre un point de la circonférence $|Z| = R_1$, et pour rayon εR_1, et ainsi de suite. Si l'on enlève du plan analytique l'intérieur des cercles

$$C,\ \Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2, \ldots,\ \Gamma_n, \ldots$$

les points Z restant possèdent cette propriété que l'équation

$$E(z) = Z$$

admet au moins une racine de module inférieur à $|Z|^{\frac{1}{p}}$. Les centres des cercles Γ, Γ_1, $\Gamma_2, \ldots$ sont à des distances R, R_1, $R_2, \ldots$ de l'origine qui croissent plus vite que les termes d'une progression géométrique:

$$R_{n+1} > 2R_n \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{R_{n+1}}{R_n} = \infty,$$

tandis que leurs rayons sont égaux à εR, εR_1, $\varepsilon R_2, \ldots$ $(\varepsilon \leq \frac{1}{10})$. On peut d'ailleurs remplacer le nombre fixe ε par des nombres décroissants et tendant vers zéro.

Il suit de là que, si l'on enlève du plan (z) des régions dont l'aire *relative* est infiniment petite, tous les points restants satisfont à la condition exprimée à l'instant. En particulier, il existe des couronnes circulaires concentriques d'épaisseur indéfiniment croissante à l'intérieur desquelles cette condition est vérifiée.

Il y a d'ailleurs des cas où l'on est certain que les suites singulières en question n'existent pas. Par une savante analyse pour laquelle nous renverrons à un article du Bulletin des Sciences mathématiques (t. XLVI, 1922), M. Valiron est parvenu à démontrer qu'il en est toujours ainsi pour les fonctions de genre fini.

Il y a un autre cas où la même circonstance se présente; c'est celui où la fonction entière $E(z)$ admet une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard, c'est à dire quand il existe un nombre α tel que l'équation

$$E(z) = \alpha$$

n'ait qu'un nombre limité de racines.

En effet, en appelant comme précédemment

$$Z, Z_1, Z_2, \ldots Z_n, \ldots$$

une suite singulière d'ordre p, les fonctions holomorphes

$$\frac{E(|Z_n|^{\frac{1}{p}} t) - \alpha}{Z_n - \alpha}$$

ne prennent jamais la valeur 1 pour $|t| < 1$; elles prennent au plus q fois la valeur zéro pour ces mêmes valeurs de t, q étant fixe. Elles forment donc, d'après les principes de M. Montel, une *famille normale* dans le cercle unité. Or à l'origine elles prennent la valeur

$$\frac{E(0) - \alpha}{Z_n - \alpha}$$

qui tend vers zéro, tandis que pour

$$|t| = \theta < 1$$

elles ont un module maximum qui tend vers l'infini, ce qu'on voit en appliquant comme plus haut le théorème de Liouville. On arrive donc encore à une contradiction.

Signalons encore le théorème suivant, bien que nous n'ayons pas à en faire usage par la suite: si l'équation

$$E(z) = z$$

n'admet qu'un nombre fini de racines, la fonction $E(z)$ n'admet pas de suite singulière d'ordre 1. On considère les fonctions

$$\varphi_n(t) = \frac{E(Z_n t) - Z_n t}{Z_n - Z_n t}$$

holomorphes dans le cercle unité, bornées dans leur ensemble pour $t = 0$, ne prenant jamais la valeur 1 et au plus m fois la valeur zéro à l'intérieur du cercle; elles seraient alors bornées dans leur ensemble pour

$$|t| \leq \theta < 1,$$

ce qui est encore incompatible avec le théorème de Liouville.

6. Théorème. Soient $E(z)$, $F(z)$ deux fonctions transcendantes entières, $M(r)$ le module maximum de $E(z)$ pour $|z| = r$, $M_1(r)$ celui de $E[F(z)]$. On aura

$$M_1(r) > M(r^q)$$

pour certaines valeurs infiniment grandes de r, q étant un nombre positif fixé arbitrairement.

En effet pour les valeurs de r extérieures à certains intervalles, le cercle $|z| \leq r$ a pour image, en posant:

$$Z = F(z)$$

un domaine D_1 du plan des Z contenant à son intérieur la circonférence $|Z| = r^q$. Cela revient à dire que pour tout point de la circonférence $|Z| = r^q$, l'équation

$$Z = F(z)$$

admet une racine z de module inférieur à $(r^q)^{\frac{1}{q}} = r$, ce que nous savons être exact pour toutes les valeurs de r^q non comprises dans certains intervalles exceptionnels dont la mesure relative est infiniment petite.

Le maximum de $|E(Z)|$ quand Z décrit D_1 étant atteint sur le contour extérieur de D_1, on a:

$$\operatorname{mod}\max E(Z) > M(r^q)$$

puisque la circonférence $|Z| = r^q$ est intérieure à D_1. Par suite:

$$\operatorname{mod}\max_{|z|\leq r} E[F(z)] > M(r^q)$$

ou

$$M_1(r) > M(r^q) \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Nous supposerons d'ailleurs $q > 1$. Remarquons que dans la démonstration qui précède, D_1 est regardé comme un domaine du plan simple qui peut donc être à connexion multiple.

7. Voici une conséquence du théorème précédent. Posons

$$\log r = \varrho,$$

$$\log M(r) = \psi(\varrho).$$

En vertu d'un important théorème de M. Hadamard, la fonction $\psi(\varrho)$ est une fonction *convexe;* sa dérivée à droite $\psi'(\varrho)$ est donc une fonction croissante qui d'ailleurs devient infinie avec ϱ.

Ceci posé, nous avons en vertu du théorème que nous venons de démontrer, lorsque r n'est pas dans un intervalle exceptionnel:

$$\log M_1(r) > \psi(q\varrho)$$

$$\log \frac{M_1(r)}{M(r)} > \psi(q\varrho) - \psi(\varrho)$$

et, d'après les propriétés que nous venons de rappeler de la fonction $\psi(\varrho)$:

$$\psi(q\varrho) - \psi(\varrho) > (q-1)\,\varrho\,\psi'(\varrho) > \varrho A$$

A étant aussi grand qu'on le veut pour ϱ suffisamment grand. On conclut des inégalités qui précèdent:

$$M_1(r) > M(r)\,.\,r^A.$$

On déduit de là en particulier que si P et Q sont des polynômes, et E une fonction entière, toute solution uniforme $\Phi(z)$ de l'équation fonctionnelle:

$$\Phi[E(z)] = P(z)\,\Phi(z) + Q(z)$$

admet au moins un point singulier à distance finie. En effet si $\Phi(z)$ était une fonction entière et A un nombre positif supérieur au degré de $P(z)$, le module maximum du second membre serait, pour $r > r_0$, inférieur à $r^A\, M(r)$, tandis que celui du premier membre serait supérieur à cette même quantité, du moins pour certaines valeurs de r supérieures à r_0.

Ce résultat est important pour l'étude de l'itération des fonctions entières, comme nous le verrons un peu plus loin.

8. Lorsque nous effectuons sur la variable z la substitution uniforme

$$z_1 = E(z)$$

il y a en général des points qui se transforment en eux-même. Ce sont les points-racines de l'équation

$$z = E(z) \tag{1}$$

en général en infinité dénombrable; on les appelle *points doubles* ou *points invariants* de la substitution considérée. Il est nécessaire de considérer également les points doubles des substitutions itérées:

$$z_p = E_p(z)$$

c'est-à-dire les points racines des équations

$$z = E_p(z) \tag{2}$$

pour toutes les valeurs entières et positives de p; ces points se répartissent en cycles, les points d'un même cycle se reproduisant périodiquement par l'itération de la substitution donnée; le nombre de points dont se compose chaque cycle est un diviseur de p. On trouvera des détails sur ces cycles de points dans nos mémoires déjà cités sur les substitutions rationnelles, la plupart des résultats obtenus s'appliquant au problème actuel. Rappelons que si α est une racine, d'ordre de multiplicité égal à μ, de l'équation (1), c'est également une racine de (2) dont l'ordre de multiplicité, en général égal à μ, peut être exceptionnellement supérieur à μ. Il peut arriver que l'équation (1) n'ait qu'un nombre fini de racines et même qu'elle n'en ait aucune. Faisons cette dernière hypothèse. Je dis que l'équation

$$E_2(z) = z \tag{3}$$

admet une infinité de racines. Considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{E_2(z) - z}{E(z) - z}.$$

C'est une fonction entière, puisque le dénominateur ne s'annule pas. L'équation

$$\varphi(z) = 1$$

n'a pas de racines, car cette équation équivaut à

$$E_2(z) = E(z),$$

d'où

$$E(w) = w$$

en posant $w = E(z)$. Donc, en vertu du théorème de M. Picard l'équation

$$\varphi(z) = 0$$

possède une infinité de racines; or cette dernière équation est équivalente à (3). On peut généraliser quelque peu cette remarque en faisant voir que si aucune des deux équations

$$E(z) = z,$$

$$E_{p-1}(z) = z$$

n'admet de racine (la seconde propriété entraîne la première), l'équation

$$E_p(z) = z$$

en possède une infinité.

Une extension beaucoup plus intéressante des considérations qui précèdent consiste à démontrer que si l'équation (1) n'admet qu'un nombre fini de racines, l'équation (3) en admet une infinité. On constatera aisément que c'est là une conséquence d'un théorème très profond de M. Borel, démontré par lui dans son mémoire *sur les zéros des fonctions entières* (Acta mathematica, t. 20) et concernant l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i(z)\, e^{H_i(z)} = 0$$

dans laquelle les $P_i(z)$ sont des polynômes et les $H_i(z)$ des fonctions entières; mais nous ne développerons pas cette démonstration, et ne ferons d'ailleurs aucun usage de cette proposition, afin de donner à la théorie qui nous occupe des bases plus élémentaires.

9. Nous désignerons, comme dans la théorie analogue concernant les polynômes, par la lettre F l'ensemble des points du plan autour desquels les fonctions itérées

$$E_1(z),\ E_2(z), \ldots,\ E_n(z), \ldots$$

ne forment pas une famille normale. Un grand nombre des propriétés de cet ensemble F, démontrées pour les polynômes s'étendent immédiatement au cas des fonctions entières. Il suffira de les énoncer brièvement, en renvoyant aux mémoires cités pour les démonstrations d'ailleurs faciles.

1°. F est un ensemble fermé à condition, dans le cas actuel, de lui adjoindre le point à l'infini.

2°. F est *complètement invariant* par la substitution $(z, E(z))$, c'est-à-dire que si un point z appartient à F, il en est de même de ses antécédents et de ses conséquents.

3°. F ne change pas si l'on remplace $E(z)$ par l'une de ses itérées $E_p(z)$.

4°. Soit α un point racine de

$$E_p(z) = z,$$

α appartient à F dans les cas suivants

$$|E_p'(\alpha)| > 1,$$

$$E_p'(\alpha) = e^{2i\pi\frac{m}{n}} \qquad (m, n \text{ entiers}).$$

Pour démontrer la seconde propriété, il est nécessaire de remarquer que l'on n'a jamais identiquement

$$E_n(z) = z$$

car le premier membre est une fonction transcendante; on est alors ramené au cas de $E_p'(\alpha) = +1$.

5°. Si $|E'_p(\alpha)| < 1$, le point α n'appartient pas à F; les points α, $E(\alpha), \ldots E_{p-1}(\alpha)$, forment un *cycle attractif* (groupe circulaire limite d'après M. Kœnigs); à l'intérieur de petits cercles entourant respectivement les p points du cycle les fonctions itérées convergent périodiquement et uniformément vers les points du cycle.

6°. Si $E'_p(\alpha)$ est égal en module à l'unité avec un argument incommensurable à 2π, α peut appartenir à F. S'il n'en est pas ainsi, les fonctions limites des fonctions itérées dans le voisinage de α ne sont jamais des constantes. Il existe alors un *domaine invariant singulier*, transformé en lui-même par la substitution $(z, E_p(z))$, qui contient α à son intérieur. Dans ce domaine les branches de fonctions inverses des fonctions itérées qui prennent en α les valeurs $\alpha, E(\alpha), \ldots E_{p-1}(\alpha)$, sont uniformes; un tel domaine ne contient à son intérieur aucun antécédent de α distinct de α. On démontre encore dans ce cas que le point α est le seul point, invariant par la substitution $(z, E_p(z))$, contenu dans le domaine invariant singulier D, mais nous n'aurons pas à faire usage de cette dernière propriété.

10. Il nous faut maintenant démontrer que F renferme au moins un point à distance finie. Dans le cas des polynômes cela résulte d'une proposition fort simple d'algèbre élémentaire d'après laquelle l'équation

$$E(z) = z \tag{1}$$

admet au moins une racine α pour laquelle

$$|E'(\alpha)| > 1$$

ou

$$E'(\alpha) = +1.$$

Mais ce théorème n'a pas d'équivalent dans le cas où $E(z)$ est une fonction transcendante; l'équation (1) peut alors n'avoir aucune racine ou n'avoir que des racines n'appartenant pas à F. Voici des exemples de ces deux circonstances:

$$E(z) = z + e^z,$$

$$E(z) = z - \sin z e^{iz} = z - \sin z (\cos z + i \sin z).$$

Dans le deuxième exemple on a:

$$E'(z) = 1 - e^{2iz}.$$

L'équation

$$E'(z) = 0$$

et l'équation

$$z - E(z) = 0$$

admettent l'une et l'autre les seules racines:

$$z = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

de sorte que tous les points doubles de la substitution $(z, E(z))$ ont des multiplicateurs nuls.

L'existence d'un point de F à distance finie va résulter indirectement de la discussion suivante.

1°. Supposons que l'équation (1) admette au moins une racine et au plus m racines distinctes. Si l'une de ces racines appartient à F, la proposition se vérifie. Nous admettrons donc qu'aucune de ces racines n'appartient à F. Soit α l'une d'elles.

Si $|E'(\alpha)| < 1$, α est intérieur à un domaine D invariant par la substitution $(z, E(z))$; à l'intérieur de D les fonctions itérées convergent vers la constante α. De plus la série

$$\sum_0^\infty [E_n(z) - \alpha]$$

converge, uniformément dans tout domaine fermé intérieur à D, le rapport d'un terme au précédent étant, pour $n > n_0$, inférieur à un nombre fini $k < 1$, en supposant:

$$0 \leq |E'(\alpha)| < k < 1.$$

La série précédente représente par conséquent une fonction analytique uniforme dans D qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Phi[E(z)] = \Phi(z) - (z - \alpha)$$

et $\Phi(z)$ serait une fonction entière si D n'admettait aucun point frontière à distance finie. Or nous avons démontré la non-existence d'une solution transcendante entière de cette équation et il est clair d'autre part que $\Phi(z)$ n'est pas un polynôme. On en conclut que D admet à distance finie au moins un point frontière β qui est évidemment un point de F.

Supposons maintenant que, α n'appartenant pas à F, on ait

$$|E'(\alpha)| = 1,$$

α étant par conséquent intérieur à un domaine invariant singulier. Soit β un antécédent de rang 1 de α, distinct de α; β existe, car l'équation (1) n'ayant qu'un nombre fini de racines, l'équation

$$E(z) = \alpha$$

en a une infinité d'après les théorèmes de M. Picard. Nous savons qu'au voisinage de α, il existe une suite de fonctions itérées qui tendent vers z (voir nos mémoires cités); il n'en est évidemment pas de même autour de β puisque pour $n \geq 1$:

$$E_n(\beta) = \alpha \neq \beta.$$

Donc sur toute ligne joignant α à β, il existe au moins un point (distinct des extrémités) où les $E_n(z)$ ne forment pas une famille normale. F a donc nécessairement la puissance du continu.

Ainsi dans l'hypothèse 1° nous avons démontré l'existence d'au moins un point de F et par suite d'une infinité dénombrable de ces points, car les antécédents de l'un de ces points (qui sont en nombre infini d'après une remarque faite à l'instant) sont encore de F.

2°. Supposons que (1) admette une infinité de racines. S'il n'y en a pas une infinité qui appartiennent à F, il y en a alors une infinité pour lesquelles

$$|E'(\alpha)| < 1$$

ou bien pour lesquels

$$|E'(\alpha)| = 1,$$

les $E_n(z)$ possédant dans cette deuxième hypothèse des fonctions limites non constantes au voisinage de α.

Si $|E'(\alpha)| < 1$, en joignant ce point α à un autre point α' de l'une des deux catégories désignées à l'instant par une ligne continue, il est visible que cette ligne $\alpha\alpha'$ renferme à son intérieur un point de F, qui possède ainsi la puissance du continu.

Si $|E'(\alpha)| = 1$, en joignant α avec un antécédent β de α, distinct de α, on parvient à la même conclusion.

3°. Supposons que l'équation (1) ne possède aucune racine. Alors l'equation (3) en admet une infinité. Il suffit donc de changer $E(z)$ en $E_2(z)$ pour être ramené au cas précédent. *F contient donc toujours au moins une infinité dénombrable de points.*

11. Soit z_0 un point de F. Les fonctions holomorphes $E_n(z)$, ne formant pas une famille normale autour de z_0, prennent dans leur ensemble toutes les valeurs finies, sauf une au plus, dans un cercle c de centre z_0 et de rayon arbitrairement petit ε. Si donc on se donne un point arbitraire β, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier n tel que l'équation

$$E_n(z) = \beta$$

admette un point racine à l'intérieur du cercle de centre z_0 et de rayon ε. Autrement dit z_0 est ou bien un antécédent de β, ou bien point limite d'antécédents de β, sauf peut-être pour une valeur particulière de β. Mais d'autre part nous avons remarqué que tout point du plan admet une infinité d'antécédents, à l'exception au plus d'un point remarquable α lorsque $E(z)$ est de la forme

$$E(z)=\alpha+(z-\alpha)^p e^{H(z)}.$$

Il s'ensuit que la valeur exceptionnelle de β, si elle existe, coïncide nécessairement avec cette valeur α, $E(z)$ étant alors de la forme précédente. On voit donc que tout point z_0 de F est limite d'antécédents d'un point quelconque z du plan, le point $z=\alpha$ étant seul excepté. Quant au point remarquable α, s'il existe, ou bien il n' a pas d'antécédent ($p=0$), ou bien il coïncide avec tous ses antécédents et conséquents ($p>0$). Il peut appartenir ou non à F.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

Théorème. Tout point z_0 de F est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf peut-être d'un point remarquable α (indépendant de z_0).

12. Soit maintenant a un point de F tel que l'équation

$$E(z)=a$$

admette une racine b. Il existe un élément, algébroïde au point b, de la fonction inverse de $E(z)$, et qui est défini par la série:

$$z=\psi(Z)=a+a_1(Z-b)^{\frac{1}{q}}+a_2(Z-b)^{\frac{2}{q}}+\cdots,$$

qui vérifie l'identité

$$E[\psi(Z)]=Z$$

et fait correspondre un élément du plan Z entourant b à un élément de surface de Riemann q fois ramifié autour de a. Posons:

$$t=(Z-b)^{\frac{1}{q}}$$

$$\psi(Z)=a+a_1 t+a_2 t^2+\cdots=h(t).$$

Considérons ensuite les fonctions

$$u_n(Z)=\frac{E_n(Z)-Z}{E_n(Z)-\psi(Z)}=v_n(t)$$

en posant:

$$v_n(t)=\frac{E_n(b+t^q)-(b+t^q)}{E_n(b+t^q)-h(t)}.$$

Si, dans le voisinage de a il n'y a pas de points racines des fonctions $E_n(Z) - Z$ et $E_{n+1}(Z) - Z$, les fonctions $v_n(t)$ seront, dans le voisinage de $t = 0$, des fonctions holomorphes ne prenant jamais la valeur zéro ni la valeur 1. Elles forment donc une famille normale, et de toute suite de ces fonctions on en peut extraire une autre qui converge uniformément, dans l'entourage de l'origine, vers une fonction holomorphe ou vers la constante infinie. On en déduit aisément que les fonctions $E_n(\beta + t^q)$ jouissent de la même propriété, et par suite que les fonctions $E_n(Z)$ forment une famille normale autour de a, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si donc le point a n'est pas un point périodique, il est limite de points périodiques.

Supposons maintenant que $z = a$ soit un point de période p et soit

$$E_p(z) = F(z).$$

Comme a appartient à F on a:

$$|F'(a)| \geq 1.$$

Si $|F'(a)| = 1$, et si l'argument de $F'(a)$ est commensurable à π, le point a sera pour certaines valeurs de n un zéro multiple de la fonction $F_n(z) - z$. Dans ce cas nous supposerons pour simplifier que l'on ait

$$F'(a) = +1$$

résultat auquel on parvient en remplaçant $F(z)$ par l'une de ses itérées. On aura alors

$$\begin{aligned} F(z) &= z + k(z-a)^\mu + \cdots \\ F_n(z) &= z + nk(z-a)^\mu + \cdots \end{aligned} \qquad (k \neq 0)$$

et la branche $F_{-1}(z)$, de la fonction inverse de $F(z)$ qui prend la valeur a en a a pour développement:

$$F_{-1}(z) = z - k(z-a)^\mu + \cdots$$

Les fonctions $F_n(z) - z$, et $F_n(z) - F_{-1}(z)$ ont pour z voisin de a des développements qui commencent respectivement par les termes

$$nk(z-a)^\mu,$$

et

$$(n+1)k(z-a)^\mu.$$

Si donc l'on pose

$$u_n(z) = \frac{F_n(z) - z}{F_n(z) - F_{-1}(z)}$$

cette fonction, régulière pour $z = a$, prend en ce point la valeur $\frac{n}{n+1}$, distincte des valeurs 0, 1 et ∞.

Si maintenant $|F'(a)| > 1$, ou si $F'(a)$ possède un module égal à 1 avec un argument incommensurable à π, le point a sera toujours un zéro simple des fonctions $F_n(z) - z$, et $F_n(z) - F_{-1}(z)$ qui ont pour premiers termes de leurs développements:

$$(s^n - 1)(z - a) + (\quad)(z - a)^2 + \cdots$$

$$\left(s^n - \frac{1}{s}\right)(z - a) + (\quad)(z - a)^2 + \cdots$$

en posant $s = F'(a)$. La fonction

$$u_n(z) = \frac{F_n(z) - z}{F_n(z) - F_{-1}(z)}$$

est, quel que soit n, régulière pour $z = a$ et l'on a:

$$u_n(a) = \frac{s^n - 1}{s^n - \frac{1}{s}}$$

quantité distincte de 0 et de 1.

Cela étant, si dans un cercle entourant a les fonctions $F_n(z) - z$ et $F_n(z) - F_{-1}(z)$ ne possèdent pour $n > n_0$, aucun zéro distinct de a, les fonctions $u_n(z)$ forment dans ce cercle une famille normale de fonctions holomorphes, puisqu'elles n'y prennent pas les valeurs zéro et un. Il en sera de même des fonctions $F_n(z)$, et par suite aussi des fonctions $E_n(z)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On voit donc que le point a est limite de points périodiques distincts de lui-même.

Ainsi tout point de l'ensemble F est limite de points périodiques distincts de lui-même. La démonstration qui précède est toutefois en défaut pour un point α qui n'a pas d'antécédent, $E(z)$ étant de la forme

$$a + e^{G(z)}.$$

Nous verrons tout à l'heure que la proposition est encore exacte pour un tel point.

Dans tous les cas, comme nous avons déjà démontré que F renferme une infinité de points, il s'ensuit qu'il existe des points périodiques de période aussi élevée qu'on le voudra. Il en résulte en particulier que F renferme des points b *non équivalents* à un point donné a relativement au groupe G défini plus haut, c'est à dire tels que l'on n'ait jamais

$$E_p(a) = E_q(b) \qquad (p,\ q \text{ entiers quelconques}).$$

En effet deux points équivalents à un troisième sont équivalents entre eux. Considérons alors deux points périodiques de périodes différentes; ces deux points ne sont pas équivalents, donc l'un au plus d'entre eux est équivalent à a; si ces points périodiques appartiennent à F notre assertion est exacte. S'il est impossible de trouver deux points périodiques de F ayant des périodes distinctes, il y aura alors une infinité de points périodiques étrangers à l'ensemble F, ce qui entraîne, comme il résulte de remarques antérieures que F possède la puissance du continu. Il renferme alors des points non équivalents à a, puisque les équivalents de a sont en infinité dénombrable.

Démontrons maintenant que F est un ensemble parfait. En effet tout point a de F est limite d'antécédents d'un point b, distinct du point remarquable s'il existe. Autrement dit les équations

$$E_n(z) = b$$

admettent des racines dans tout entourage de a. Si l'on prend pour b un point de F non équivalent à a, ce qui est possible comme nous venons de le voir, les antécédents de b qui tendent vers a et qui sont encore des points de F seront distincts de a. On voit donc que tout point de F est limite de points de F distincts de lui-même, ce qui démontre que F est parfait. Remarquons que les antécédents de rang donné $n > 1$ d'un point arbitraire de F ont pour point limite le point à l'infini qui est regardé comme appartenant à F, ce qui complète la démonstration. Enfin la démonstration s'applique au point remarquable α s'il fait partie de F; α étant limite de points de F qui sont eux-mêmes points limites de points périodiques, possède à son tour cette dernière propriété. On peut alors énoncer les deux théorèmes suivants:

Théorème. L'ensemble F est un ensemble parfait.

Théorème. Tout point de F est limite de points périodiques.

13. Je dis maintenant qu'en un point de F, ancune suite partielle formée

avec les $E_n(z)$ ne peut converger uniformément vers une fonction holomorphe $\varphi(z)$ ou vers la constante infinie.

En effet, soit z_0 un point de F. Dans tout cercle de centre z_0 et de rayon ε, les deux équations

$$E_m(z) = \beta,$$

$$E_{m'}(z) = \gamma$$

admettent des solutions pour des valeurs convenables de m et de m', pourvu que β et γ soient distincts d'un point remarquable α. Comme nous avons démontré l'existence d'une infinité de groupes de points périodiques ou cycles, nous pouvons supposer que β et γ appartiennent respectivement à deux cycles distincts d'ordres q et r:

$$\beta, \beta_1, \ldots \beta_{q-1},$$

$$\gamma, \gamma_1, \ldots \gamma_{r-1}.$$

Par suite pour toute valeur de n supérieure à un entier N, $E_n(z)$ prendra à l'intérieur du cercle considéré c l'une des valeurs $(\beta, \beta_1, \ldots \beta_{q-1})$, et l'une des valeurs $(\gamma, \gamma_1, \ldots \gamma_{r-1})$. Il s'ensuit tout d'abord que dans le cercle c aucune suite formée avec les $E_n(z)$ ne peut converger uniformément vers l'infini. Supposons que la suite

$$E_{\lambda_1}(z), E_{\lambda_2}(z), \ldots E_{\lambda_n}(z), \ldots$$

converge dans c vers la fonction $\varphi(z)$ et cela uniformément. On peut prendre ε assez petit pour que l'on ait en tout point de c, en appelant δ un nombre positif arbitraire:

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \delta,$$

puisque $\varphi(z)$ est régulière en z_0, d'autre part à cause de la convergence uniforme des $E_{\lambda_n}(z)$ vers $\varphi(z)$, on aura

$$|E_{\lambda_n}(z) - \varphi(z)| < \delta$$

$$\text{pour } \lambda_n > N$$

si N est suffisamment grand. Par suite:

$$|E_{\lambda_n}(z) - \varphi(z_0)| < 2\delta$$

et comme $E_{\lambda_n}(z)$ prend dans c l'une des valeurs $\beta, \beta_1, \ldots \beta_{q-1}$ on aura

$$|\varphi(z_0) - \beta_i| < 2\delta$$

c'est à dire:

$$\varphi(z_0) = \beta_i,$$

puisque δ est arbitraire Mais le même raisonnement prouve que

$$\varphi(z_0) = \gamma_j$$

et ces deux égalités sont incompatible puisque les deux cycles sont distincts. Notre assertion est donc démontrée.

Soit alors c_n le $n^{\text{ième}}$ conséquent du cercle c entourant un point z_0 de F. Soit Δ la région du plan comprise à l'intérieur d'un cercle de rayon R infiniment grand ayant son centre à l'origine et à l'extérieur d'un cercle de rayon infiniment petit entourant le point remarquable a s'il existe. Je dis que pour n suffisamment grand c_n couvrira Δ.

Supposons en effet que l'on puisse trouver deux suites de points

$$h_1, h_2, \ldots h_n, \ldots$$

$$k_1, k_2, \ldots k_n, \ldots$$

tendant respectivement vers deux points limites distincts h et k à distance finie, et d'autre part une suite d'entiers croissants

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$$

tels que, pour tout point z de c on ait constamment:

$$E_{\lambda_n}(z) \neq h_n,$$

$$E_{\lambda_n}(z) \neq k_n.$$

Les fonctions holomorphes

$$\frac{E_{\lambda_n}(z) - h_n}{k_n - h_n}$$

n'étant jamais nulles ni égales à 1 dans c, forment une famille normale, et l'on peut en extraire une suite infinie qui converge uniformément dans c vers une fonction holomorphe $\varphi(z)$, pouvant être égale à la constante infinie. On peut donc, en changeant les notations, admettre que la suite initiale des $E_{\lambda_n}(z)$ possède cette propriété. Il s'ensuit que $E_{\lambda_n}(z)$ tend uniformément vers la fonction holomorphe

$$h + (k-h)\varphi(z) \qquad (k-h \neq 0)$$

égale éventuellement à la constante infinie, s'il en est ainsi de $\varphi(z)$. Ce résultat est en contradiction avec le théorème que nous venons démontrer.

Il s'ensuit qu'une série de points respectivement extérieurs à une infinité de domaines conséquents de c possède au maximum un point limite à distance finie.

Soit d'autre part h une valeur telle que les équations:

$$\begin{gathered} E_{\lambda_1}(z) = h_1, \\ E_{\lambda_2}(z) = h_2, \\ \vdots \\ E_{\lambda_n}(z) = h_n, \\ \vdots \end{gathered}$$

n'aient pas de racines dans c, $h_1, h_2, \ldots h_n, \ldots$ tendant vers h. Si h admet deux antécédents de rang p distincts h' et h'', les équations

$$\begin{array}{ll} E_{\lambda_1-p}(z) = h_1', & E_{\lambda_1-p}(z) = h_1'', \\ E_{\lambda_2-p}(z) = h_2', & E_{\lambda_2-p}(z) = h_2'', \\ \vdots & \vdots \\ E_{\lambda_n-p}(z) = h_n', & E_{\lambda_n-p}(z) = h_n'', \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

n'auront pas de racines dans c, h_n' et h_n'', antécédents de rang p de h_n, tendant respectivement vers les valeurs h' et h'', distinctes et finies, ce qui est impossible. Or si h est distinct du point remarquable α, il admet toujours plusieurs antécédents distincts de rang $p > 1$. Un point limite des h_n coïncde donc nécessairement avec le point remarquable ou avec le point à l'infini. Cela revient à dire que le domaine c_n couvre $\varDelta$ pour $n > n_0$.

14. On déduit de là, comme dans le cas des fonctions rationnelles, diverses

conséquences au sujet de la structure de F, notamment celle-ci: si F ne remplit pas tout le plan, il n'est dense superficiellement nulle part.

L'ensemble F divise, dans cette dernière hypothèse, le plan en régions dans chacune desquelles on devra étudier la distribution des *conséquents* d'un *point*; les résultats sont essentiellement différents suivant que les fonctions limites des fonctions itérées sont ou non des constantes. On verra sans peine que la plupart des résultats obtenus pour les fonctions rationnelles s'étendent au cas actuel, moyennant quelques changements insignifiants. Toutefois nous devons noter les principales questions qu'il faudrait élucider pour arriver à une vue d'ensemble à peu près satisfaisante de la question qui nous occupe. Nous avons obtenu dans le cas des fractions rationnelles le résultat suivant: les points périodiques de multiplicateur égal ou inférieur en module à l'unité sont en nombre fini, de sorte que l'ensemble F peut être regardé comme l'ensemble dérivé des points périodiques de multiplicateurs supérieurs en module à l'unité et formant ce qu'on appelle des cycles de points répulsifs. Dans le cas actuel, les points doubles de multiplicateur < 1, formant des cycles attractifs, peuvent être en nombre infini et nous en avons donné plus haut un exemple. Mais en outre, nous ne savons même pas s'il existe toujours des cycles répulsifs. La méthode élégante employée par M. Julia (Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles, J. M., 7e série, 1918) pour étudier l'ensemble F regardé a priori comme le dérivé de l'ensemble des points appartenant à des cycles répulsifs ne peut donc pas être appliquée ici, tant que l'on n'aura pas démontré préalablement l'existence d'au moins un cycle de cette nature. En outre il y aurait lieu de vérifier par de nombreux exemples si les différentes hypothèses que l'on peut faire a priori sur la division du plan en régions, contiguës à l'ensemble F, se réalisent effectivement; la construction de pareils exemples, conduisant à des discussions d'équations ou d'inégalités transcendantes, est beaucoup plus laborieuse que dans le cas des fonctions rationnelles. Nous traiterons seulement les deux exemples qui suivent:

15. *Exemple I.*

$$E(z) = z + 1 + e^{-z}. \tag{4}$$

En appliquant la méthode que j'ai développée ailleurs pour étudier les substitutions ayant un point double à l'infini de multiplicateur $+1$ (B. S. M. F., 1919, ch. II, § 8—14), on obtient aisément des domaines où les itérées $E_n(z)$ convergent vers l'∞. Si l'on pose

$$z_n = x_n + i\, y_n = E_n(z)$$

on trouve que l'inégalité

$$x \geq a > 0$$

entraîne

$$x_n > x_{n-1}$$

$$x_n > x + n\,(1 - e^{-a})$$

$$\lim_{n=\infty} x_n = \infty\,.$$

Il y a donc convergence uniforme vers l'∞ dans la région $(x \geq a)$, quel que soit $a > 0$. Le domaine d'*attraction* du point $z = \infty$ contient donc le demi-plan P:

$$x > 0\,.$$

P contient (au sens large) le domaine conséquent P_1.

Les points critiques algébriques de la fonction $E_{-1}(z)$, inverse de $E(z)$ sont les points $E(\zeta)$, ζ étant un zéro de la dérivée $E'(z)$. On a:

$$E'(z) = 1 - e^{-z}, \tag{5}$$

$$\zeta = 2\,k\,i\,\pi \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

$$c = E(\zeta) = 2 + 2\,k\,i\,\pi\,.$$

Les points sont donc dans le demi-plan P et leurs conséquents tendent vers l'∞. La fonction $E^{-1}(z)$ possède d'autre part le seul point critique $z = \infty$. En effet ces points critiques transcendants sont d'après Hurwitz les valeurs asymptotiques que peut avoir $E(z)$ le long d'un chemin continu aboutissant au point à l'infini; si z tend vers l'infini de manière que x soit borné inférieurement, il en est de même de z_1, car

$$z_1 - z = 1 + e^{-x}\,e^{-iy}$$

reste bornée. Pour que z_1 tende vers une limite finie, il faut que x tende vers $-\infty$ et que x et $e^{-x}\cos y$ soient du même ordre de grandeur; on a alors

$$\lim\ \cos\, y = 0$$

et la ligne décrite par le point z est asymptote à la droite

$$y = k\,\pi + \frac{\pi}{2}\cdot$$

On a par suite

$$\lim \sin y = \pm 1,$$

$$\lim y_1 = \lim (y - e^{-x} \sin y) = \pm \infty,$$

$$\lim z_1 = \infty.$$

On n'obtient donc pas de limite finie pour $E(z)$ et le point $z=\infty$ est le seul point critique transcendant de $E_{-1}(z)$, propriété qui s'étend immédiatement aux fonctions itérées. Les diverses branches des fonctions $E_{-n}(z)$ sont d'après cela holomorphes uniformes dans le demi-plan

$$x < 0$$

et sur sa frontière, sauf au point ∞.

Cherechons d'après cela les régions antécédentes de P. La région P_{-1} sera limitée par les courbes, transformées de l'axe imaginaire ($x=0$) par les différentes branches de $E_{-1}(z)$; ce sont des courbes simples, extérieures les unes aux autres, ayant seulement en commun le point $z=\infty$ et représentées par l'équation:

$$x + 1 + e^{-x} \cos y = 0 \quad \text{ou} \quad \cos y = -(x+1) e^{x}. \tag{6}$$

On doit faire décroître x de 0 à $-\infty$ pour obtenir des valeurs réelles de y; $\cos y$ varie de -1 à zéro, et atteint son maximum e^{-2} pour $x=-2$. En prenant la valeur de y égale à $+\pi$ pour $\cos y = -1$, on obtient une courbe ayant au point $z = i\pi$ un sommet, la droite $y=\pi$ comme axe de symétrie et un point de rebroussement à l'infini dans la direction de l'axe réel, les deux asymptotes étant $y=\frac{\pi}{2}$ et $y=\frac{3\pi}{2}$. Les autres courbes se déduisent de celle-ci par les translations $(z, z+2ki\pi)$. On a figuré (fig. 1) deux de ces courbes; les régions couvertes de hachures sont les régions antécédentes du demi-plan $x<0$. La région complémentaire, P_{-1}, antécédente de P, est d'un seul tenant et contient P, ayant en commun avec P les points frontières $(\ldots -3i\pi, -i\pi, +i\pi, +3i\pi, \ldots)$, qui sont les points doubles de la substitution; ils sont répulsifs avec le multiplicateur 2. En prenant de nouveau les transformées de ces courbes par la substitution $(z, E_{-1}(z))$ on obtient le domaine P_{-2} contenant P_{-1}, qui est toujours d'un seul tenant et limité par des courbes ayant une forme analogue; chaque courbe limite de P_{-1} renferme une infinité de courbes limites de P_{-2} qui ont en commun un seul point à l'infini dans la direction de l'axe réel. On formera de même les domaines P_{-3}, $P_{-4}, \ldots$. Ces domaines contenus chacun dans le suivant, sont tous d'un seul tenant et simplement connexes; le domaine limite D, qui est le domaine d'attraction du point ∞, possède les mêmes propriétés. D est identique à ses conséquents et

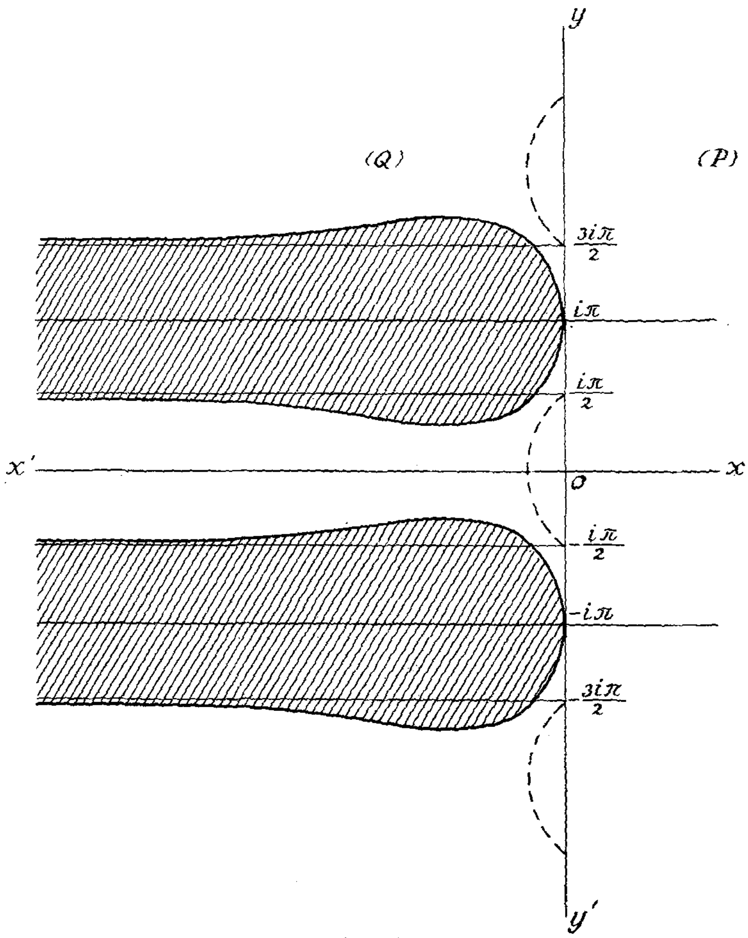

Fig. 1.

antécédents de rang quelconque; c'est ce que nous appelons un domaine *complètement invariant.*

Faisons voir maintenant que D, en lui adjoignant ses points frontières couvre tout le plan. S'il en était autrement il existerait un cercle δ dont tous les conséquents seraient extérieurs à D. La figure montre que l'axe réel, et les droites $y = 2k\pi$ pour k entier, sont contenues dans P_{-1} et par suite dans D. Si donc le domaine δ existait, tous les domaines conséquents seraient compris entre deux parallèles successives à l'axe réel:

$$y = 2k\pi, \quad y = (2k+2)\pi.$$

Soit z_0 le centre de δ; on aura dans ces conditions, en tout point z de δ:

$$|Y_n| < 2\pi$$

en posant:

$$E_n(z) - E_n(z_0) = X_n + iY_n.$$

Les fonctions $X_n + iY_n$ forment donc dans δ une famille normale; comme elles sont nulles pour $z = z_0$, elles sont bornées dans leur ensemble, ainsi que leurs dérivées dans tout cercle intérieur à δ. On aurait donc

$$|E_n'(z_0)| < K.$$

Nous allons montrer qu'une pareille inégalité est impossible. Admettons, ce que nous vérifierons dans un instant, que l'on ait

$$(7) \qquad |E'(z)| > \sqrt{2}$$

en tout point extérieur à P_{-1} et par suite en tout point des domaines $\delta, \delta_1, \ldots \delta_n, \ldots$ En vertu de l'identité:

$$E_n'(z) = E'[E_{n-1}(z)] \,.\, E'[E_{n-2}(z)] \ldots E'(z)$$

on aura

$$|E_n'(z)| > (\sqrt{2})^n$$

et $E_n'(z_0)$ ne sera pas borné. Il suffit donc de démontrer l'inégalité (7).

Cherchons pour cela les points du demi-plan Q $(x \leq 0)$ où l'inégalité (7) n'est pas vérifiée. On a:

$$|E'(z)|^2 = 1 + e^{-2x} - 2e^{-x}\cos y.$$

On aura

$$|E'(z)|^2 \leq 2$$

si

$$\cos y \geq \frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$$

ou en posant $x = -\xi$ $(\xi > 0)$:

$$(8) \qquad \cos y \geq \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour ξ compris entre 0 et α $(\alpha < 1)$. On voit aisément que les points de Q où l'inégalité (8) est vérifiée forment des domaines déduits de l'un d'eux par les translations $(z, z+2ik\pi)$ et limités chacun par le segment de l'axe imaginaire $\left(2ik\pi-\frac{i\pi}{2},\quad 2ik\pi+\frac{i\pi}{2}\right)$ et par un arc de courbe. Ces domaines ne sont pas traversés par les courbes (6) qui limitent P_{-1}; en effet les deux équations

$$\cos\, y=\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}$$

$$\cos\, y=-(x+1)\, e^{x}=(\xi-1)\, e^{-\xi}$$

ne peuvent pas être vérifiées simultanément pour une valeur réelle et positive de ξ, car cela donnerait

$$\frac{e^{2\xi}-1}{2}=\xi-1$$

ou

$$e^{2\xi}-2\xi+1=0$$

et le premier membre, développé suivant les puissances de ξ n'a que des termes positifs pour $\xi>0$.

Il résulte de là qu'on a bien

$$|E'(z)|>\sqrt{2}$$

en tout point extérieur à P_{-1} et notre assertion est vérifiée.

Ainsi les fonctions itérées forment une famille normale à l'intérieur du seul domaine D, qui est le domaine d'attraction du point à l'infini. L'ensemble F n'est autre que la frontière de D; F est ici identique à l'ensemble dérivé des points périodiques de multiplicateur >1 en module, car il n'y en a pas d'autres d'aprés (7).

Remarquons que les formules

$$x_1=x+e^{-x}\cos\, y+1$$

$$y_1=y-e^{-x}\sin\, y$$

deviennent pour $y=(2k+1)\pi$:

$$\begin{cases} x_1=x-e^{-x}+1 \\ y_1=y=(2k+1)\pi. \end{cases}$$

La première, en changeant x en $-\xi$ et x_1 en $-\xi_1$ devient:

$$\xi_1=\xi+e^{\xi}-1.$$

ξ variant de o à $+\infty$, il en est de même de ξ_1. En outre si l'on forme

$$\xi_2 = \xi_1 + e^{\xi_1} - 1$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\xi_n = \xi_{n-1} + e^{\xi_{n-1}} - 1$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

on déduit bien facilement de ces formules de récurrence que ξ_n tend vers $+\infty$ avec n si $\xi > 0$. Ainsi la demi-droite $d^{(k)}$ $(y = (2k+1)\pi,\ x < 0)$ est invariante, et les conséquents d'un point (sauf son origine qui est un point double) tendent vers l'infini. Cependant il résulte de ce qui précède que les points de cette demi-

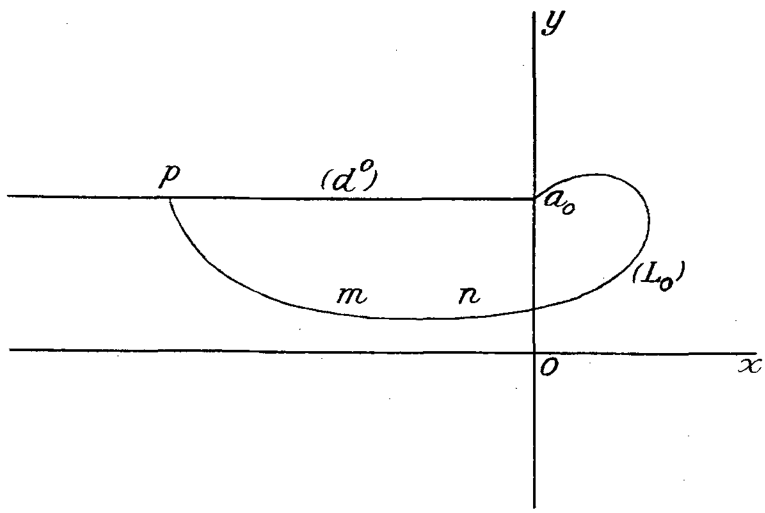

Fig. 2.

droite appartiennent, non pas au domaine d'attraction D du point à l'infini, mais à sa frontière F. F est formé par les demi-droites $d^{(k)}$, leurs lignes antécédentes et les points limites de toutes ces lignes: il y en a une infinité qui n'appartiennent à aucune d'elles, notamment les points périodiques d'ordre > 1. Il est aisé de vérifier que le système des lignes d et c (courbes antécédentes des d) est symétrique par rapport à toutes les d.

Ceci posé, je vais démontrer que tout point intérieur aux lignes c ou d est *inaccessible* relativement au domaine D. Il suffit de démontrer ce fait pour $d^{(0)}$.

Supposons que le point p, intérieur à $d^{(0)}$, soit accessible; soit $m\ p$ un arc de courbe simple de Jordan aboutissant en p et intérieur à D, sauf en p. D'autre part le point a_0 $(z = i\pi)$ est accessible, notamment par tous les chemins du demi-plan $P(x > 0)$. On peut joindre m, a_0 par une ligne simple intérieure à D et ne rencontrant pas m, p. On forme ainsi le contour simple $m\ n\ a_0\ p\ m$ ou L_0 qui devise le plan en deux régions. Comme tout point du segment $a_0\ p$ est limite de points appartenant à des courbes c, la symétrie remarquée tout à l'heure montre qu'il y a des points des courbes c intérieures à L_0. Ceci est évidemment absurde, puisque toute courbe c ne peut traverser ni $d^{(0)}$, ni la ligne $a_0\ n\ m\ p$ dont tous les points (sauf a_0 et p) sont intérieurs à D, et que ces courbes ont toutes un point à l'infini. Ainsi tous les points de $d^{(0)}$ (sauf a_0 et ∞) sont inaccessibles. La même propriété s'applique aux courbes antécédentes. On voit que l'ensemble parfait et continu F renferme un ensemble dense de lignes analytiques. On peut remarquer que l'inégalité:

$$|E'(z)| > K > 1$$

vérifiée en tout point de F, aurait justement pour conséquence, si $E(z)$ était un polynôme, que la frontière du domaine du point ∞ (jouant le rôle de F) n'aurait que des points frontières accessibles (voir notre article *sur les frontières de certains domaines*, B. S. M. F, 1923, p. 16—22).

Remarquons que D est le domaine d'existence des fonctions uniformes, définies à une constante additive près, par la condition de vérifier l'équation fonctionnelle:

$$A[E(z)] = 1 + A(z),$$

d'être en outre holomorphes à l'intérieur d'un angle A ayant pour bissectrice le demi axe réel positif, et non indéterminées à l'infini dans A; on a alors:

$$A(z) = C + \lim_{n=\infty} [E_n(z) - n].$$

Cela résulte de nos recherches déjà citées sur l'équation fonctionnelle d'Abel. On voit par là que les points inaccessibles de la frontière d'un domaine, signalés jusqu'ici comme une simple curiosité d'analysis situs, se présentent d'eux-mêmes dans l'étude des transcendantes définies par des équations fonctionnelles; l'ensemble F n'est autre en effet que l'ensemble des singularités de $A(z)$.

16. *Exemple II.* Posons

$$z_1 = E(z) = h \sin z + a \qquad (0 < h < 1,\ a \text{ réel}). \tag{9}$$

Il est bien connu, par l'étude de l'équation de Képler, que la substitution ainsi définie admet un point double réel et un seul, de multiplicateur plus petit que 1, et que les conséquents de tout point réel à distance finie tendent vers ce point double α. Je dis que le domaine d'attraction D_α, dans le plan complexe, renferme une bande illimitée comprise entre deux parallèles à l'axe réel. En effet la formule (9) en séparant le réel de l'imaginaire devient:

$$x_1 = h \sin x \, Ch\, y + a$$

$$y_1 = h \cos x \, Sh\, y.$$

Supposons $|y| < L$. On aura

$$|y_1| < |h\, Sh\, L| < L$$

si L est suffisamment petit, puisque $\frac{Sh\, y}{y}$ tend vers 1 pour $y \to 0$ et que $h < 1$. La bande $|y| \leq L$ contient donc ses conséquentes, si L est convenablement choisi. Dans toute partie bornée B de cette bande, les conséquents d'un point tendent uniformément vers α, car les fonctions $E_n(z)$ restant bornées quant à la partie imaginaire forment une famille normale, et d'autre part elles tendent uniformément vers α dans un certain entourage de α qu'on peut supposer contenu dans B. Il en est de même dans le domaine illimité $|y| \leq L$, puisque son conséquent immédiat est un domaine borné.

La fonction inverse de $E(z)$:

$$E_{-1}(z) = \text{arc sin} \frac{z - a}{y}$$

n'admet comme singularités à distance finie que les points critiques algébriques:

$$\frac{z - a}{h} = \pm 1, \qquad z = a \pm h.$$

Les conséquents de ces deux points, qui sont les points critiques à distance finie des fonctions $E_{-n}(z)$ sont des points réels admettant le seul point limite à distance finie $z = \alpha$. Dans tout domaine ne contenant à son intérieur ni le point ∞, ni aucun des points critiques c_n et c'_n considérés à l'instant, les branches des fonctions $E_{-n}(z)$ forment une famille normale puisqu'elles y sont holomorphe et n'y prennent pas les valeurs c_p et c'_q. Les fonctions limites des fonctions de cette famille sont des constantes, puisque le domaine en question peut être supposé contenir une partie du domaine D_α, et les antécédents de tout domaine fermé contenu dans D_α tendent vers la frontière de D_α, c'est-à-dire vers un ensemble n'ayant pas de points intérieurs. D_α est d'un seul tenant, puisque toutes les branches de $E_{-1}(z)$ se permutent entre elles à l'intérieur de D_α. Il suit de là, comme nous l'avons vu maintes fois dans l'étude de questions analogues concernant les polynômes, que les seules fonctions limites possibles des $E_n(z)$ sont la constante ∞ d'une part et d'autre part la constante α.

La bande $\Delta(|y| \leq L)$ est représentée sur la sphère de Riemann par une région comprise entre deux cercles tangents entre eux au point O', image de ∞. Chacune de ces deux lignes admet une infinité de courbes antécédentes de rang 1, qui sont des courbes fermées sur la sphère et représentées dans leur ensemble par l'équation:

$$h \cos x \, Sh\, y = \pm L$$

ou

$$\cos x = \frac{\pm L}{h\, Sh\, y},$$

d'où l'inégalité

$$|Sh\, y| \geq \frac{L}{h}$$

ou

$$|y| \geq \beta \qquad \left(Sh\, \beta = \frac{L}{h}\right).$$

Il est facile de construire les courbes considérées, qui ont chacune un point de rebroussement à l'infini dans la direction de l'axe imaginaire, avec les deux asymptotes

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad x = (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Sur la sphère de Riemann, elles sont orthogonales en O' aux circonférences initiales. Les courbes ainsi obtenues limitent le domaine Δ_{-1}, antécédent de rang 1 de la bande Δ. En construisant de même le domaine Δ_{-2} antécédent immédiat de Δ_{-1}, et répétant cette opération indéfiniment, on obtient la suite de domaines

$$\Delta, \Delta_{-1}, \ldots \Delta_{-n}, \ldots$$

contenus chacun dans le suivant et qui sont tous d'un seul tenant et simplement connexes. Le domaine limite est le domaine d'attraction D_α du point α qui possède les mêmes propriétés et il est à peu près évident que tout point dont les conséquents convergent vers α appartient à D_α.

Je dis maintenant que ce domaine et sa frontière recouvrent tout le plan, c'est à dire qu'il n'y a pas de régions extérieures à D où les fonctions itérées $E_n(z)$ forment une famille normale. Supposons qu'il existe un domaine δ extérieur à D et possédant cette propriété. Nous avons remarqué tout à l'heure, en nous appuyant sur des résultats obtenus dans l'étude de l'itération des fonction rationnelles, que la seule fonction limite admissible des $E_n(z)$ dans δ est la constante infinie. Nous pourrions en employant une analyse semblable à celle de l'exemple I, retrouver directement ce résultat, mais nous l'admettrons ici pour plus de rapidité. On aura donc uniformément dans δ:

$$\lim E_n(z) = \infty .$$

Les domaines $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ sont tous extérieurs à D_α et par suite à Δ_{-1}, et contenus par conséquent dans la convexité des courbes:

$$h \cos x \, Sh\, y = \pm L.$$

Il s'ensuit que ces domaines sont bornés en largeur et, comme dans l'exemple I, on conclut que les fonctions

$$E_n(z) - E_n(z_0)$$

forment une famille normale et que $|E_n'(z_0)|$ est inférieur à un nombre positif indépendant de n. Or ceci est impossible, car z_n tendant régulièrement vers l'∞, il en est de même de sin z_n, d'après la loi de récurrence:

$$z_{n+1} = h \sin z_n + a$$

et aussi de $\cos z_n = \sqrt{1 - \sin^2 z_n}$. Or on a:

$$\frac{d z_{n+1}}{d z_n} = h \cos z_n$$

et le module du second membre dépassant toute quantité donnée pour n suffisamment grand, l'identité

$$E' \ (z) = E'(z_{n-1})\, E'(z_{n-2}) \ldots E'(z)$$

montre que $|E_n'(z)|$ tend vers l'infini avec n, en tout point z intérieur à S. Notre assertion est donc exacte.

Si l'on veut ne pas faire l'hypothèse que z_n tend vers l'infini et employer une analyse plus directe, semblable à celle de l'exemple I, il faut démontrer au préalable que l'on a en tout point extérieur à D_α:

$$|E'(z)| = h|\cos z| > K > 1.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de cette démonstration.

Ainsi donc, comme dans l'exemple précédent, le domaine D_α couvre tout le plan, lorsqu'on lui adjoint ses points frontières qui constituent l'ensemble F. F est encore ici l'ensemble dérivé des points périodiques qui forment des cycles répulsifs. Remarquons que le point ∞ est, en tant que point frontière de D_α, un point multiple d'ordre infini, de même que dans l'exemple I.

Si l'on suppose $a = 0$, on obtient immédiatement une infinité de lignes analytiques, faisant partie de F, sur lesquelles les conséquents d'un point tendent vers l'∞. Car si dans la relation

$$z_1 = h \sin z$$

on remplace z_1 et z par $i y_1$ et $i y$, il vient

$$y_1 = h\, Sh\, y$$

et si l'on suppose $|y|$ supérieur à la racine positive β de l'équation

$$y = h\, Sh\, y$$

on démontre aisément que la suite

$$y, y_1, \ldots y_n, \ldots$$

a l'infini pour limite. Les deux demi-droites $(i\beta, +i\infty)$ et $(-i\beta, -i\infty)$ répendent donc à la question ainsi que les lignes antécédentes. Il serait intéressant de rechercher si cette propriété n'appartiendrait pas à des substitutions beaucoup plus générales.

Je signale pour terminer l'intérêt qu'il y aurait à rechercher s'il n'existe pas des substitutions entières pour lesquelles le point ∞ possède un domaine d'attraction dont la frontière soit un ensemble parfait partout discontinu. Il serait également intéressant d'obtenir un exemple pour lequel l'ensemble F couvre tout le plan. Cette dernière circonstance semble se produire pour la fonction exponentielle e^z; mais je n'en ai pas de preuve rigoureuse. J'ai pu seulement démontrer qu'il n'existe aucun domaine de convergence régulière vers l'∞ et qu'il n'existe d'autre part aucun cycle attractif (de multiplicateur < 1 en module).

Paris le 1er octobre 1925.