GEORGES VALIRON

Sur la dérivée des fonctions algébroïdes

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 17-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__17_0>

SUR LA DÉRIVÉE DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES

PAR M. GEORGES VALIRON.

Dans des Notes récentes (¹) j'ai montré comment on peut étendre aux fonctions appelées, par Rémoundos, algébroïdes la plupart des propriétés précises qui ont été obtenues ces dernières années dans la théorie des fonctions méromorphes. Les indications données dans la première de ces Notes sont suffisantes pour que le lecteur puisse rétablir complètement les démonstrations pourvu que l'on admette l'inégalité fondamentale (2) de cette Note relative à la dérivée logarithmique. C'est cette inégalité, qui ne peut plus être obtenue dans ce cas par la formule de Jensen-Poisson, qui m'avait arrêté tout d'abord, ce qui m'avait obligé à me limiter au cas du second degré. J'ai indiqué ensuite (2ᵉ et 3ᵉ Notes) que cette inégalité est valable pour toutes les algébroïdes. M. Selberg qui, à la même époque que moi, poursuivait les mêmes recherches par une autre méthode, celle de M. F. Nevanlinna, a donné d'autre part l'inégalité fondamentale en question dans le cas de l'ordre fini et il indique que M. F. Nevanlinna l'a également obtenue par sa méthode basée sur l'emploi de certaines solutions de l'équation de Poincaré-Picard

$$\Delta u = e^{cu} \quad (^2).$$

Je me propose de donner ici ma méthode de démonstration de l'inégalité en question, ce qui justifiera mes affirmations des *Comptes rendus* et ce qui me permettra aussi de trouver des relations entre les fonctions caractéristiques d'une fonction et de sa dérivée, complétant celles que j'ai données dans les *Comptes rendus* (³).

(¹) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 623-625, 728-731, 824-826.
(²) *Comptes rendus du Congrès des mathématiciens scandinaves tenu à Oslo en août* 1929, Oslo, 1930, p. 89-91; *Norske Videnskaps Akademie i Oslo*, octobre 1929, nº 14, publié en 1930; *Math. Zeitschrift*, t. 31, 1930, p. 709-728.
(³) *Comptes rendus*, t. 190, 1930, p. 1222-1225.

Dans une première partie je donne la définition de la fonction caractéristique $T(r, u)$ d'une fonction algébroïde $u(z)$ et la relation entre cette fonction et une fonction simple des coefficients de l'équation définissant $u(z)$, relation qui joue un rôle important dans ma méthode. Dans une seconde partie, j'établis des relations entre le maximum de $|u(z)|$ et de $\left|\frac{1}{u(z)}\right|$ et la fonction $T(r, u)$ lorsque z est extérieur à certaines régions; de ces relations qui généralisent le théorème de M. Hadamard sur le minimum du module d'une fonction entière je déduis le théorème fondamental sur la valeur moyenne de $m\left(r, \frac{u'}{u}\right)$. Dans la troisième partie, je donne des inégalités entre les fonctions $T(r, u)$ et $T(r, u')$; je les applique dans une quatrième partie à l'étude des solutions de certaines équations différentielles fonctionnelles.

I. — Définitions et notations et première inégalité fondamentale.

1. Nous appelons fonction algébroïde méromorphe dans un cercle $|z| < R$ la fonction $u(z)$ définie par une équation algébrique

$$(1) \qquad \psi(u) \equiv A_\nu(z)u^\nu + A_{\nu-1}(z)u^{\nu-1} + \ldots + A_0(z) = 0,$$

dont les coefficients $A_j(z)$ sont des fonctions données de la variable z holomorphes dans le cercle $|z| < R$. On suppose essentiellement que les $A_j(z)$ ne s'annulent pas simultanément pour une même valeur de z.

$u(z)$ sera en général une fonction multiforme à ν branches. Je désignerai par $u_q(z)$ $(q = 1, 2, \ldots, \nu)$ ces ν valeurs de $u(z)$. En utilisant les notations habituelles dans ces questions, je poserai [1]

$$N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) = \int_0^r \left[n\left(t, \frac{1}{A_\nu}\right) - n\left(0, \frac{1}{A_\nu}\right)\right]\frac{dt}{t} + n\left(0, \frac{1}{A_\nu}\right)\log r,$$

$n(t, g)$ désigne le nombre des pôles de $g(z)$ dans le cercle $|z| < t$,

---

[1] J'emploie strictement les notations de M. R. Nevanlinna dans son Ouvrage de la Collection Borel. Je désignerai par (N, x) le renvoi à la page x de ce livre.

chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. En posant $\overset{+}{v} = v$ si $v > 0$ et $\overset{+}{v} = 0$ si $v \leq 0$, j'introduis également la moyenne logarithmique

$$m(r, u) = \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \sum_{q=1}^{\nu} \overset{+}{\log} | u_q(re^{i\varphi}) | \, d\varphi.$$

La fonction caractéristique $T(r) = T(r, u)$ *est définie par l'égalité*

$$T(r) = m(r, u) + \frac{1}{\nu} N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right). \tag{2}$$

Pour $\nu = 1$ on retombe sur la fonction introduite par M. Nevanlinna dans la théorie des fonctions méromorphes.

Nous allons chercher la relation entre la fonction $T(r)$ et les coefficients de l'équation (1). On a identiquement, z étant constant,

$$\psi(u) \equiv A_\nu(z)[u - u_1(z)] \ldots [u - u_\nu(z)],$$

en supposant $u = e^{i\alpha}$ et en intégrant de 0 à 2π, la formule de Jensen donne

$$V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log | \psi(e^{i\alpha}) | \, d\alpha = \log | A_\nu(z) | + \sum_{1}^{\nu} \overset{+}{\log} | u_q(z) |. \tag{3}$$

Mais en supposant que le développement taylorien de $A_\nu(z)$ autour de l'origine est

$$A_\nu(z) = c_\lambda z^\lambda + \ldots,$$

on a (N, 5)

$$N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) + \log | c_\lambda | = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log | A_\nu(re^{i\varphi}) | \, d\varphi. \tag{4}$$

Donc, en prenant $z = re^{i\varphi}$ dans (3) et en intégrant, on a

$$T(r, u) + \frac{1}{\nu} \log | c_\lambda | = \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} V(re^{i\varphi}) \, d\varphi \quad (^1). \tag{5}$$

Désignons par $A(z)$ le plus grand des nombres $| A_j(z) |$, $j = 0, 1, \ldots, \nu$. On a

$$V(z) \leq \log[\Sigma | A_j(z) |] \leq \log A(z) + \log(\nu + 1)$$

---

(1) Ce procédé de double intégration est celui donné par M. H. Cartan dans ses travaux sur $T(r)$ (*Comptes rendus*, t. 188, 1929, p. 1374-1376).

et par suite, en posant

$$(6)\qquad \mu(r,\,A) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi} \log A(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

on a

$$(7)\qquad T(r) + \frac{1}{\nu}\log|c_\lambda| \leqq \mu(r,\,A) + \frac{1}{\nu}\log(\nu+1).$$

Il est clair que cette inégalité obtenue à partir de l'égalité (5) ne peut être remplacée par une autre plus précise.

2. On obtient une inégalité de sens contraire en utilisant encore les relations entre les coefficients et les racines de (1). On a

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_\nu(z)}\right| \leqq \Sigma\,|u_1(z)\ldots u_{\nu-j}(z)| \qquad (j=0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1),$$

la sommation étant étendue aux C_ν^j combinaisons des racines $\nu-j$ à $\nu-j$.

On a donc

$$\begin{aligned}\log|A_j(z)| &\leqq \log|A_\nu(z)| + \log\Sigma\,|u_1(z)\ldots u_{\nu-j}(z)| \\ &\leqq \log|A_\nu(z)| + \log|u_{\beta_1}(z)\ldots u_{\beta_{\nu-j}}(z)| + \log C_\nu^j,\end{aligned}$$

le produit mis en évidence dans le dernier membre étant celui qui a le plus grand module. Il s'ensuit que pour tous les j, même pour $j=\nu$,

$$\log|A_j(z)| \leqq \log|A_\nu(z)| + \log C_\nu^j + \sum_1^\nu \overset{+}{\log}\,|u_q(z)|$$

et *a fortiori*

$$\log A(z) \leqq \log|A_\nu(z)| + \sum_1^\nu \overset{+}{\log}\,|u_q(z)| + \log 2.$$

En tenant compte de (4), on aura

$$(8)\qquad \mu(r,\,A) \leqq T(r,\,u) + \frac{1}{\nu}\log|c_\lambda| + \nu\log 2.$$

Les inégalités (7) et (8) donnent le premier théorème fondamental de la théorie des fonctions algébroïdes :

I. $T(r,\,u)$ *et* $\mu(r,\,A)$ *étant respectivement les fonctions défi-*

nies par (2) *et* (6), *la différence*

$$T(r, u) + \frac{1}{\nu}\log|c_\lambda| - \mu(r, A)$$

a sa valeur absolue inférieure à log 2.

$u(z)$ étant la fonction définie par (1), sa transformée homographique $\frac{\alpha u + \beta}{\delta u + \gamma}$, $|\alpha\gamma - \beta\delta| = 1$, est aussi une fonction algébroïde à ν branches qui vérifie une équation de la forme (1) dont les coefficients $B_j(z)$ sont des fonctions linéaires des $A_j(z)$ et inversement. Si l'on désigne par Δ le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a

$$B(z) = \text{maximum des } |B_j(z)| \text{ pour } j = 0, 1, \ldots \nu < (\nu + 1)(2\Delta)^\nu A(z)$$

et inversement, donc

$$|\mu(r, B) - \mu(r, A)| < \log 2e\Delta.$$

En désignant par c'_λ le premier coefficient non nul du développement de $\delta^\nu \times \psi(-\gamma : \delta)$ autour de l'origine et en appliquant le théorème I on obtient l'inégalité

$$\left| T\left(r, \frac{\alpha u + \beta}{\delta u + \gamma}\right) - T(r, u) + \frac{1}{\nu}\log\left|\frac{c'_\lambda}{c_\lambda}\right|\right| < K + \log\Delta, \tag{9}$$

K étant une constante absolue.

En se reportant à l'expression de $T(r, u)$, on a donc ce corollaire :

Si a est un nombre donné, on a

$$N\left(r, \frac{1}{\psi(a)}\right) < \nu T(r, u) + h(a, \nu),$$

$h(a, \nu)$ *ne dépendant que de* a, ν *et du comportement à l'origine de* A_ν *et* $\psi(a)$.

3. On peut arriver à une inégalité de la forme (7) par une méthode plus élémentaire. Pour la valeur z rangeons les $|u_q(z)|$ par ordre de modules non croissants, soit

$$U_1 = |u_1| \geqq U_2 = |u_2| \geqq \ldots \geqq U_\nu = |u_\nu|,$$

cette suite. Désignons par λ le maximum de $2C_\nu^j$. Si $U_\nu \geqq \lambda^{-\nu}$, la relation

$$u_1 u_2 \ldots u_\nu = \pm \frac{A_0}{A_\nu}$$

donne

$$\sum_1^\nu \overset{+}{\log} \mid u_q \mid \leqq \log(\lambda^{\nu^2} U_1 U_2 \ldots U_\nu)$$
$$\leqq \nu^2 \log\lambda + \log\left|\frac{A_0}{A_\nu}\right| \leqq \nu^2 \log\lambda + \log\left|\frac{A(z)}{A_\nu}\right|.$$

Si $U_\nu < \lambda^{-\nu}$ avec $U_{1\ldots\nu} \geqq \lambda^{1-\nu}$, on utilise la seconde relation entre les coefficients et les racines en y mettant en évidence le terme $U_1 U_2 \ldots U_{\nu-1}$, ce qui donne

$$\frac{1}{2} U_1 U_2 \ldots U_{\nu-1} < \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right) U_1 U_2 \ldots U_{\nu-1} < \left|\frac{A_1}{A_\nu}\right|$$

et par suite

$$\sum_1^\nu \overset{+}{\log} \mid u_q \mid \leqq \log(\lambda^{(\nu-1)^2} U_1 U_2 \ldots U_{\nu-1}) < (\nu - 1)^2 \log\lambda + \log 2 + \log\left|\frac{A_1}{A_\nu}\right|$$
$$< \nu^2 \log\lambda + \log\left|\frac{A(z)}{A_\nu}\right|.$$

D'une façon générale, si

$$U_{\nu-j} \geqq \lambda^{j-\nu}, \qquad U_{\nu-j+1} < \lambda^{j-\nu-1},$$

on aura

$$\frac{1}{2} U_1 U_2 \ldots U_{\nu-j} \leqq \left(1 - \frac{C_\nu^j}{\lambda}\right) U_1 U_2 \ldots U_{\nu-j} < \left|\frac{A_j}{A_\nu}\right|,$$

donc

$$\sum_1^\nu \overset{+}{\log} \mid u_q \mid \leqq \log(\lambda^{(\nu-j)^2} U_1 U_2 \ldots U_{\nu-j}) < (\nu - j)^2 \log\lambda + \log 2 + \log\left|\frac{A_j}{A_\nu}\right|$$
$$< \nu^2 \log\lambda + \log\left|\frac{A(z)}{A_\nu}\right|.$$

On a donc dans tous les cas

$$(10) \qquad \sum_1^\nu \overset{+}{\log} \mid u_q \mid + \log \mid A_\nu(z) \mid < \nu^3 + \log A(z),$$

ce qui, eu égard à (4), conduit à une inégalité de la forme (7) mais avec une valeur beaucoup plus grande pour la constante du second membre. On pourrait chercher dans (10) la plus petite constante dépendant ou non de ν par laquelle on peut remplacer ν^2.

II. — Inégalités relatives à $|u(z)|$ et à la dérivée logarithmique.

4. Pour obtenir une inégalité entre la moyenne $m\left(r, \frac{u'}{u}\right)$ et la fonction $T(r)$ nous emploierons la méthode suivante. De l'inégalité (10) nous pourrons tirer en fonction de $T(r)$ une borne de

$$|\log|u(z)||$$

dans des régions ne contenant ni pôles, ni zéros, ni points de ramification de $u(z)$; le théorème de M. Hadamard sur la partie réelle fournira alors une borne de

$$|\log u(z)|$$

et le théorème de Cauchy permettra d'en déduire une autre pour

$$\left|\frac{u'(z)}{u(z)}\right|.$$

La démonstration s'achèvera en faisant intervenir la seconde propriété fondamentale de $T(r)$:

II. $T(r)$ *est une fonction croissante convexe de* $\log r$, propriété que j'ai établie très simplement dans la seconde Note citée en employant la méthode de M. H. Cartan [1].

5. Remplaçons d'abord (10) par une autre inégalité plus facile à obtenir et plus précise pour l'objet actuel. Écrivons

$$u_q(z) = -\frac{1}{A_\nu(z)}[A_{\nu-1}(z) + \ldots + A_0(z)u_q(z)^{-\nu+1}].$$

Nous obtenons si $|u_q(z)| \geqq 1$

$$|u_q(z)| \leqq \frac{\nu A(z)}{|A_\nu(z)|}$$

[1] *Comptes rendus*, t. 189, 1929, p. 625-627.

et cette inégalité est vraie à plus forte raison si $|u_q(z)| < 1$ puisque le second membre est au moins égal à 1. Donc

$$(11) \qquad \overset{+}{\log} |u_q(z)| \leqq \log \left| \frac{A(z)}{A_\nu(z)} \right| + \log \nu.$$

On déduirait de là une inégalité moins précise que (10), mais inversement (10) conduirait à une inégalité moins précise que (11) en ce qui concerne la constante du second membre. Remarquons que les calculs qui vont suivre pourraient être faits en conservant partout la somme relative aux ν branches qui figure dans (10), mais le gain ainsi obtenu serait insignifiant.

6. Considérons la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{A_j(z)}{A_\nu(z)}$$

et appliquons-lui les théorèmes connus. $T(r, f)$ étant sa fonction caractéristique, on sait que (N, 25) si $t > r = |z|$,

$$(12) \qquad \overset{+}{\log} |f(z)| \leqq \frac{t+r}{t-r} T(t, f) + \sum_{|b_\mu| < t} \log \frac{2t}{|z - b_\mu|},$$

les b_μ désignant les pôles de $f(z)$. Supposons $|z - b_\mu| > 2h$, prenons $t = r + h$, chaque terme de la somme du second membre est moindre que $\log \frac{t}{h}$ et l'on a

$$\overset{+}{\log} |f(z)| \leqq \frac{2r+h}{h} T(r+h, f) + n(r+h, f) \log \frac{r+h}{h}.$$

Mais on a, d'après la définition de la fonction N et en vertu de II,

$$\begin{gathered}
[n(r+h, f) - n(0, f)] \log \frac{r+2h}{r+h} \\
< -n(0, f) \log(r+2h) + N(r+2h, f), \\
N(r+2h, f) < T(r+2h, f), \\
T(r+h, f) < T(r+2h, f),
\end{gathered}$$

donc après quelques réductions

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\log} |f(z)| \leqq & \left[\frac{2r+h}{h} + 2\frac{r+h}{h} \log \frac{r+h}{h} \right] \\
& \times \left[T(r+2h, f) + n(0, f)\left(1 + \overset{+}{\log} \frac{1}{r}\right) \right].
\end{aligned}$$

A fortiori, on voit que, si $A_\nu(z)$ ne s'annule pas dans la couronne

$$0 < r - 2h < |z| < r + 2h,$$

on a pour $|z| = r$

$$\overset{+}{\log} |f(z)| \leqq 11 \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[T(r+2h) + n(0, f)(1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{r})\right].$$

Mais on a, d'après les travaux cités de M. H. Cartan, en désignant par $A_{j,\nu}(z)$ le plus grand des deux nombres $|A_j(z)|$, $|A_\nu(z)|$,

$$T\left(r, \frac{A_j}{A_\nu}\right) + \log|c_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log A_{j,\nu}(re^{i\varphi})\, d\varphi$$
$$\leqq \nu\mu(r, A) < \nu T(r, u) + \nu \log 2 + \log|c_\lambda|.$$

On aura donc finalement, dans les conditions indiquées ci-dessus,

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{A_j(z)}{A_\nu(z)}\right| \leqq 11\nu\left(\frac{r}{h}\right)^2 [T(r+2h, u) + K],$$

avec

$$\nu K = \nu \log 2 + \lambda\left(1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right).$$

Tenons compte de cette inégalité dans (11) et appliquons aussi le résultat obtenu à la fonction $\left|\frac{1}{u(z)}\right|$. Nous obtenons pour toutes les branches de $u(z)$ l'inégalité

$$(13) \quad |\log|u(z)|| < 11\nu\left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[T(r+2h, u) + \sigma + \sigma' \overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right], \qquad r = |z|,$$

σ et σ' ne dépendant que du comportement à l'origine des deux fonctions $A_\nu(z)$ et $A_0(z)$ et l'inégalité étant valable pourvu que ces deux fonctions ne s'annulent pas dans la couronne

$$(r - 2h, r + 2h).$$

Remarquons ici qu'en remplaçant dans le premier membre de (12) $|f(z)|$ par son maximum pour $|z| = r$, en intégrant de 0 à $\frac{r}{k}$, $k > 1$, les deux membres multipliés par dr, et en tenant compte de (11), on obtient cet énoncé :

A $k > 1$ *donné correspond un nombre* $C(k)$ *tel que l'on ait*

$$\frac{1}{r}\int_0^r \log M(t, u)\, dt < C(k) T(kr, u),$$

$\mathrm{M}(t, u)$ désignant le maximum de $|u(z)|$ pour $|z| = t$.

Cette proposition généralise des théorèmes connus se rattachant au théorème de M. Hadamard sur le minimum du module d'une fonction entière [1].

On voit de même que la convergeuce de

$$(14) \qquad \int_1^\infty \mathrm{T}(t, u) t^{-\rho-1}\, dt \qquad (\rho > 0),$$

entraîne celle de

$$(15) \qquad \int_1^\infty \log \mathrm{M}(t, u) t^{-\rho-1}\, dt$$

et aussi celle de

$$(16) \qquad \int_1^\infty \mathrm{N}\left(t, \frac{1}{\psi(a)}\right) t^{-\rho-1}\, dt$$

pour tous les a. La convergence de (16) pour *une* valeur a jointe à la convergence de (15) entraîne évidemment celle de (14), donc celle de (16) *pour tous les a.*

7. Les branches $u_q(z)$ ne s'annulent pas et restent finies dans la couronne dans laquelle (13) est vérifiée, mais elles peuvent admettre des points de ramification. Les valeurs de z fournissant de tels points sont les zéros de la fonction holomorphe formée par le discriminant du polynome $\psi(u)$; elle est de la forme

$$\mathrm{J}(z) = \Sigma \beta \mathrm{A}_0^{\alpha_0} \mathrm{A}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{A}_\nu^{\alpha_\nu},$$

ce polynome par rapport aux A_j étant de degré $2(\nu - 1)$. On a donc, d'après l'égalité de Jensen et le théorème I,

$$(17) \qquad \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\mathrm{J}}\right) < 2\nu(\nu - 1)\mathrm{T}(r, u) + \sigma'',$$

σ'' ne dépendant que du comportement à l'origine des fonctions $\mathrm{A}_j(z)$.

Plaçons-nous dans une couronne $0 < r - 2h < |t| < r + 2h < \mathrm{R}$ ne contenant pas de zéros de $\mathrm{A}_0(t)$, $\mathrm{A}_\nu(t)$ et $\mathrm{J}(t)$; les branches de $u(t)$ y sont partout régulières, donc sont holomorphes dans

---

[1] *Voir* G. Valiron, *Bulletin Sciences math.*, t. 46, 1922, p. 432-445, et l'Ouvrage de M. Nevanlinna.

tout cercle tangent aux deux circonférences limitant la couronne. Soit

$$|t - z| < 2h$$

un tel cercle et appelons

$$\log u_q(t)$$

la branche de $\log u(t)$ qui prend au point z la valeur $\log|u_q(z)| + i\omega$ avec $|\omega| \leq \pi$. D'après le théorème de Hadamard-Carathéodory sur la partie réelle d'une fonction holomorphe et d'après (13), on a pour $|t - z| < h$

$$|\log u_q(z)| < 4\left\{33\left(\frac{8r}{h}\right)^2\left[T(r + 2h, u) + \sigma + \sigma' \overset{+}{\log} \frac{4}{r}\right] + 2\pi\right\}$$

et, en appliquant le théorème de Cauchy, il s'ensuit que, pour toutes les branches,

$$(18) \qquad \left|\frac{u'(z)}{u(z)}\right| < 8448\left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{1}{h}\left[T(r + 2h, u) + \sigma'' + \sigma' \overset{+}{\log} \frac{1}{r}\right].$$

8. Pour les valeurs de r pour lesquelles (18) est vérifiée, on a

$$(19) \qquad m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < \overset{+}{\log} T(r + 2h, u) + 3 \overset{+}{\log} \frac{r}{h} + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + \sigma''',$$

σ''' ne dépendant que de ν et du comportement à l'origine de A_ν et A_0.

Donnons-nous deux nombres r', r'' tels que

$$0 < r' < r'' < R$$

et soit $t = \frac{r' + r''}{2}$. D'après l'inégalité (17), d'après les propriétés de $T(r, u)$ et d'après la formule de Jensen, le nombre total des points de module moindre que t et qui sont zéros, pôles ou points de ramification de $u(z)$ est au plus égal à

$$n' = \frac{HT(r'', u) + H'\left(1 + \overset{+}{\log} \frac{1}{r''}\right)}{\log \frac{r''}{t}},$$

H ne dépendant que de ν et H' de ν et du comportement des A_j à l'origine. Dans l'intervalle

$$r', \qquad r' + \frac{r'' - r'}{(n' + 2)^2} < t$$

existe au moins une valeur r pour laquelle (19) est vérifiée en prenant

$$h = \frac{r'' - r'}{4(n'+2)^3}.$$

Pour cet r, on aura

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < \overset{+}{\log} \mathrm{T}(r'', u) + 3 \overset{+}{\log} \frac{r}{r''-r'} + 9 \overset{+}{\log} n' + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + \sigma^{\mathrm{IV}}$$

$$< 10 \log \mathrm{T}(r'', u) + 12 \overset{+}{\log} \frac{r''}{r''-r'} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + \sigma^{\mathrm{V}},$$

σ^{V} ne dépendant toujours que de ν et du comportement à l'origine.

La fonction $\frac{u'}{u}$ étant une fonction algébroïde à ν branches, la fonction

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{u'}{u}\right) = m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + \frac{1}{\nu} \mathrm{N}\left(r, \frac{u'}{u}\right)$$

est croissante et l'on aura

$$m\left(r', \frac{u'}{u}\right) < m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + \frac{1}{\nu}\left[\mathrm{N}\left(r, \frac{u'}{u}\right) - \mathrm{N}\left(r', \frac{u'}{u}\right)\right].$$

Or

$$r - r' < \frac{r'' - r'}{(n'+2)^2}$$

et les infinis de $\frac{u'}{u}$ ne proviennent que des zéros de $\mathrm{A}_0(z)$, $\mathrm{A}_\nu(z)$ et $\mathrm{J}(z)$ leur nombre pour $|z| < t$ est au plus égal à n'; on a donc

$$\mathrm{N}\left(r, \frac{u'}{u}\right) - \mathrm{N}\left(r', \frac{u'}{u}\right) < n' \log \frac{r}{r'} < n' \frac{r - r'}{r'} < \frac{r'' - r'}{r'(n'+2)} < 1,$$

pourvu que $r'' - r' < r'$. Par suite

$$m\left(r', \frac{u'}{u}\right) < 10 \overset{+}{\log} \mathrm{T}(r'', u) + 12 \overset{+}{\log} \frac{r''}{r''-r'} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{r'} + \sigma^{\mathrm{VI}}.$$

La restriction $r'' < 2r'$ peut être supprimée puisque $\mathrm{T}(r)$ croît et que le second terme du second membre est borné pour $r'' > 2r'$. On arrive ainsi au troisième théorème fondamental de la théorie des fonctions algébroïdes :

III. *Si* $u(z)$ *est la fonction définie par* (1), *les* $\mathrm{A}_j(z)$ *étant* *holomorphes pour* $|z| < \mathrm{R}$, *on a*

$$(20) \qquad m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < 10 \overset{+}{\log} \mathrm{T}(t, u) + 12 \overset{+}{\log} \frac{t}{t-r} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + \sigma_1,$$

pourvu que

$$0 < r < t < \mathrm{R},$$

σ_1 *ne dépendant que de* ν *et du comportement des* $\mathrm{A}_j(z)$ *à l'origine*

En particulier considérons les algébroïdes définies pour tous les z finis ; l'ordre ρ se définit comme pour les fonctions entières ou méromorphes, par

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{T}(r, u)}{\log r}$$

et le théorème I montre que, pour que $u(z)$ soit d'ordre ρ, il faut et il suffit que les $\mathrm{A}_j(z)$ soient tous d'ordre ρ au plus, l'une au moins étant d'ordre ρ (1). Pour une fonction d'ordre fini ρ, on a, à partir d'une valeur de r,

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < 11 \rho \log r.$$

Pour une fonction d'ordre quelconque, le théorème de M. Borel sur les fonctions croissantes montre que, sauf dans certains intervalles exceptionnels,

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < 11 \log \mathrm{T}(r, u).$$

Comparaison des fonctions $\mathrm{T}(r, u)$ et $\mathrm{T}(r, u')$.

9. On obtient une limitation supérieure de $\mathrm{T}(r, u')$ en fonction de $\mathrm{T}(r, u)$ comme dans le cas des fonctions uniformes. *Nous supposons ici que* $u(z)$ *est algébroïde pour tous les* z *finis*, les $\mathrm{A}_j(z)$ sont des fonctions entières. Nous supposerons $r > 1$, les termes en $\overset{+}{\log} \frac{1}{r}$ disparaissent. On a d'une part

$$m(r, u') \leq m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + m(r, u)$$

(1) On suppose que $\mathrm{A}_\nu(z)$ est un produit canonique.

et d'autre part, puisque dans l'équation vérifiée par u', le coefficient de u'^{ν} est le produit de A_ν^2 par le discriminant $J(z)$, on a, d'après (17),

$$\frac{1}{\nu}N(r, u') = \frac{1}{\nu}N\left(r, \frac{1}{A_\nu^2 J}\right) < \frac{1}{\nu}N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) + (2\nu - 1)T(r, u) + \sigma_2.$$

Par suite,

$$T(r, u') < 2\nu T(r, u) + m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + \sigma_2, \tag{21}$$

σ_2 ne dépendant que de ν et des conditions à l'origine.

Il en découle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, u')}{T(r, u)} \leqq 2\nu,$$

car, en prenant dans (20) $t = r + \frac{1}{T(r)}$ et en tenant compte de ce que $\log T(r) : \log r$ n'est pas borné du moment que la fonction n'est pas algébrique, on obtient

$$T(r, u') < 2\nu T(r, u) + 23 \log T\left(r + \frac{1}{T(r)}\right), \tag{22}$$

inégalité valable à partir d'une valeur de r. Le théorème de M. Borel sur les fonctions croissantes conduit ensuite au résultat.

Le coefficient 2ν de $T(r, u)$ dans ces inégalités ne peut être remplacé par un autre plus petit : en prenant par exemple

$$u^{\nu} = \tan z,$$

on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, u')}{T(r, u)} = 2\nu.$$

Toutefois, la valeur de ce coefficient s'abaisse dans le cas des algébroïdes entières, $A_\nu(z)$ peut alors être pris égal à 1 et le calcul précédent montre que 2ν peut être remplacé par $2\nu - 1$.

10. Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens nous remplacerons (13) par une inégalité plus précise. Au lieu de prendre dans (12) la même borne pour tous les termes en b_μ, nous emploierons le théorème de Boutroux complété par M. H. Cartan, d'après lequel, pour n de ces points

$$\Sigma \log |z - b_\mu| > -n \log h,$$

sauf pour des z que l'on peut enfermer dans des cercles dont la somme des diamètres est $4eh$ au plus.

Nous supposerons

$$\frac{t}{kk'} < |z| = r < \frac{t}{k}, \qquad k > 1, \qquad k' > 1.$$

Pour les b_μ tels que $kk'^2 |b_\mu| < t$, on a

$$\sum \log\left|\frac{2t}{z - b_\mu}\right| < n\left(\frac{t}{kk'^2}, f\right) \log \frac{2kk'^2}{k' - 1}.$$

Pour les autres, le théorème de M. H. Cartan montre que

$$\sum \log\left|\frac{2t}{z - b_\mu}\right| < \left[n(t, f) - n\left(\frac{t}{kk'^2}, f\right)\right] \log 4ew,$$

sauf pour des z qui peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des diamètres est $t : w$ au plus. Il existera de tels z dès que $w(k' - 1) > kk'$. Nous prendrons $2ew(k' - 1) > kk'^2$ et nous aurons aux points z restants

$$\overset{+}{\log}|f(z)| < \frac{k+1}{k-1} \mathrm{T}(t, f) + n(t, f) \log 4ew.$$

On obtiendra comme au n° 6 une borne de $n(t, f)$ en fonction de $\mathrm{T}(kt, f)$ et l'on appliquera l'inégalité trouvée aux fonctions $\mathrm{A}_j : \mathrm{A}_\nu$ et $\mathrm{A}_j : \mathrm{A}_0$; en tenant compte de (11) on arrive ainsi à cette proposition qui généralise un théorème sur le minimum du module des fonctions entières que j'avais énoncé ailleurs :

IV. *k, k', k'' étant des nombres donnés supérieurs à* 1, *il existe un nombre* $\mathrm{H} = \mathrm{H}(k, k', k'', \nu)$ *tel que l'inégalité*

$$\big|\log|u(z)|\big| < \mathrm{HT}(kt, u) \tag{23}$$

a lieu dès que t est assez grand $[t > t_1(u)]$ *pour les z appartenant à la couronne $t' < |z| < t = t'k'$ et extérieurs à des cercles dont la somme des diamètres est au plus égale à $(t - t') : k''$.*

Nous supposerons $k' < 3$ et $k'' > 4$. Dans la couronne de l'énoncé on pourra trouver deux circonférences $|z| = r'(t)$, $|z| = r''(t)$ avec

$$t' < r'(t) < t' + \frac{t - t'}{4}, \qquad t - \frac{t - t'}{4} < r''(t) < t,$$

sur lesquelles (23) est vérifiée; il existe aussi un segment $s(t)$

$$\arg z = \text{const.}, \qquad t' \leqq |z| \leqq t$$

sur lequel (23) a lieu. Donnons à t une suite de valeurs

$$t_{m+1} = t_1(k')^{\frac{m}{2}}, \qquad t_1 = t_1(u) \qquad (m = 1, 2, \ldots);$$

soient r_{2m-1}, r_{2m} les valeurs de $r'(t_{2m})$ et $r''(t_{2m})$ et s_{2m-1} la portion du segment $s(t_{2m})$ comprise entre ces deux circonférences; soit s_{2m} la portion du segment $s(t_{2m+1})$ comprise entre les circonférences de rayon r_{2m} et r_{2m+1}. En chaque point z de ce système de circonférences $|z| = r_m$ et de segments s_m on a

$$\log |u(z)| < \mathrm{HT}(kk'|z|, u)$$

et un point z quelconque de la configuration ainsi formée est joint par cette configuration à un point déterminé z_0 de $|z| = r_1$, la longueur totale du chemin réalisant cette jonction étant au plus égale à $\gamma(k')|z|$, $\gamma(k')$ ne dépendant que de k'.

Cette configuration étant tracée pour la fonction $u'(z)$, on aura pour tout point de la configuration en intégrant le long du chemin joignant z à z_0

$$|u_q(z) - u_q(z_0)| < \gamma(k')|z| e^{\mathrm{HT}(kk'|z|, u')},$$

q pouvant être pris quelconque si l'on suppose, ce qui est loisible, que la configuration ne passe par aucun point de ramification de $u(z)$. Par suite,

$$\overset{+}{\log} |u(z)| < \mathrm{HT}(kk'|z|, u') + \mathrm{O}(\log r)$$

et par conséquent, pourvu qu'il ne s'agisse pas d'une fonction algébrique,

$$m(|z|, u) < \mathrm{H'T}(kk'|z|, u'),$$

H′ ne dépendant que de ν, k, k', k'' et $|z|$ étant assez grand.

A fortiori, puisque

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{N}(r, u) \leqq \frac{1}{\nu}\mathrm{N}(r, u') < \mathrm{T}(kk'r, u'),$$

on a, pour

$$|z| = r_m \qquad [m = 1, 2, \ldots, r_m > r_0(u)],$$
$$\mathrm{T}(|z|, u) < (\mathrm{H'}+1)\mathrm{T}(kk'|z|, u').$$

Mais $r_{m+1} < k' r_m$, donc si r est quelconque assez grand, $r_m \leq r < r_{m+1}$;

$$T(r, u) < T(r_{m+1}, u) < H'' T(kk' r_{m+1}, u') < H'' T(kk'^2 r, u'),$$
$$H'' = H' + 1,$$

ce qui donne la proposition suivante :

V. *$u(z)$ étant une algèbroïde non algébrique définie pour tous les z finis, à k donné supérieur à 1 correspond un nombre $\Omega(k, \nu)$ ne dépendant qne de k et de ν, tel que l'on ait*

$$T(r, u) < \Omega(k, \nu) T(kr, u'), \tag{24}$$

à partir d'une valeur $r(u)$ de r.

Ce résultat complète celui que j'avais signalé dans ma quatrième Note citée. En le rapprochant de (22) d'où l'on déduit *a fortiori*

$$T(r, u') < [2\nu + o(r)] T[r + o(r), u], \tag{25}$$

on obtient immédiatement les propositions que j'avais données dans cette Note :

D'après la définition de l'ordre, on voit de suite que u et u' sont de même ordre; elles sont en même temps à croissance régulière au sens de M. Borel, c'est-à-dire que, si l'on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log T(r, u)}{\log r} = \rho,$$

on a aussi

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log T(r, u')}{\log r} = \rho.$$

et inversement. Elles sont en même temps à croissance très régulière par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$ quelconque. Car, si les limites d'indétermination pour r infini de

$$T(r, u) : r^{\rho(r)}$$

sont positives et finies, $\rho(r)$ satisfaisant aux conditions

$$\lim_{r=\infty} \rho(r) = \rho, \qquad 0 < \rho < \infty, \qquad \lim_{r=\infty} \rho'(r) r \log r = 0,$$

donc telle que

$$(kr)^{\rho(kr)} : r^{\rho(r)}$$

tende vers k^ρ, le rapport

$$T(r, u'):r^{\rho(r)},$$

aura aussi ses limites d'indétermination finies positives, et inversement. Le type de l'ordre précisé est le même pour u et u' : les limites supérieures pour r infini de

$$T(r, u):r^{\rho(r)} \quad \text{et} \quad T(r, u'):r^{\rho(r)}$$

sont en même temps nulles, finies positives ou infinies. Enfin, si l'ordre est fini positif, si $\rho(r)$ est un ordre précisé et si

$$\int^{\infty} T(r, u)r^{-\rho(r)-1}\,dr$$

est bornée, il en est de même de l'intégrale analogue portant sur $T(r, u')$ et inversement.

IV. — Application aux solutions de certaines équations fonctionnelles.

11. Nous allons appliquer les inégalités obtenues à l'étude de la fonction caractéristique $T(r, f)$ des fonctions méromorphes (uniformes) vérifiant une équation fonctionnelle de la forme

$$(26) \qquad [f(Q(z))]^m = R[z, f(z)] \qquad (m \text{ entier positif}),$$

où $Q(z)$ est un polynome et $R(x, y)$ une fraction rationnelle en x, y, irréductible, de degré p en y. La théorie des fonctions elliptiques conduit à des fonctions vérifiant de telles équations [1].

Nous montrerons d'abord que l'on a

$$(27) \qquad T[r, R(z, f)] = pT(r, f) + O(\log r).$$

Posons

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{S(x, y)},$$

$$P(x, y) \equiv P_0(x)y^p + \ldots + P_p(x), \qquad S(x, y) \equiv S_0(x)y^p + \ldots + S_p(x),$$

les $P_j(x)$ et $S_j(x)$ sont des polynomes qui ne s'annulent pas tous

---

[1] *Voir* la quatrième de mes Notes citées.

simultanément. On supposera en outre que $S_0(x)$ n'est pas identiquement nul, s'il l'était on remplacerait R par $\frac{1}{R}$. $R(x, y)$ est irréductible, les polynomes en y, $P(x, y)$ et $S(x, y)$ n'ont pas de diviseur commun. Si l'on écrit

$$P(x, y) \equiv P_0(x)\prod_1^p[y - \psi_m(z)], \qquad S(x, y) \equiv S_0(x)\prod_1^p[y - \theta_n(z)],$$

les branches de fonctions algébriques $\psi_m(z)$ sont toujours distinctes des $\theta_n(z)$, il existe donc un nombre fini γ tel que, pour tout m et n,

$$|\psi_m(x) - \theta_n(x)| > |x|^{-\gamma}, \tag{28}$$

dès que $|x| > x_0 > 1$.

Comparons les fonctions

$$m[r, R(z, f)], \qquad m\left[r, \frac{1}{S(z, f)}\right].$$

Nous supposerons $|z| = r > x_0$, en augmentant x_0, s'il y a lieu, pour que $|S_0(x)| > 2^p\delta > 0$ si $|x| > x_0$, et nous appellerons λ le plus grand degré des P_j et S_j.

Si $|f(z)| \geqq r^{\lambda+1}$,

$$\log|R(z, f)| = O(\log r), \qquad \log\left|\frac{1}{S(z, f)}\right| = O(1).$$

Si $|f(z)| < r^{\lambda+1}$ et $|S(z, f)| \geqq \delta r^{-\gamma p}$,

$$\log|R(z, f)| = O(\log r), \qquad \log\left|\frac{1}{S(z, f)}\right| = O(\log r).$$

Si $|f(z)| < r^{\lambda+1}$ et $|S(z, f)| < \delta r^{-\gamma p}$, la seconde condition entraîne que, pour un indice n au moins

$$|f - \theta_n(z)| < \frac{1}{2} r^{-\gamma},$$

donc, en vertu de (28), on a pour tous les m

$$|f - \psi_m(z)| > \frac{1}{2} r^{-\gamma},$$

donc

$$\frac{1}{K} r^{-\gamma p} < |P(z, f)| < K r^{2\lambda+1},$$

K étant fixe. On a ainsi, dans ce dernier cas,

$$\log|\mathrm{R}(z, f)| - \left|\log \frac{1}{\mathrm{S}(z, f)}\right| = \mathrm{O}(\log r),$$

inégalité qui était aussi vérifiée dans les deux premiers cas. Il s'ensuit que

$$(29) \qquad m[r, \mathrm{R}(z, f)] - m\left(r, \frac{1}{\mathrm{S}(z, f)}\right) = \mathrm{O}(\log r).$$

Les pôles de $\mathrm{R}(z, f)$ proviennent des zéros de $\mathrm{S}_0(z)$ qui sont pôles de $f(z)$ et des zéros de $\mathrm{S}(z, f)$ qui ne sont pas zéros de $\mathrm{P}(z, f)$; or les zéros communs à $\mathrm{S}(z, f)$ et $\mathrm{P}(z, f)$ sont zéros du discriminant de $\mathrm{P}(z, y)$ et $\mathrm{S}(z, y)$ qui est un polynome en z non identiquement nul puisque R est irréductible. Par suite,

$$\mathrm{N}[r, \mathrm{R}(z, f)] - \mathrm{N}\left[r, \frac{1}{\mathrm{S}(z, f)}\right] = \mathrm{O}(\log r),$$

inégalité qui, jointe à (29), donne

$$(30) \qquad \mathrm{T}[r, \mathrm{R}(z, f)] - \mathrm{T}[r, \mathrm{S}(z, f)] = \mathrm{O}(\log r).$$

La comparaison de $\mathrm{T}[r, \mathrm{S}(z, f)]$ et de $\mathrm{T}(r, f)$ est presque immédiate. On a manifestement

$$(31) \qquad p\mathrm{N}(r, f) - \mathrm{N}[r, \mathrm{S}(z, f)] = \mathrm{O}(\log r);$$

d'autre part, si $|f(z)| \leqq r^{\lambda+1}$,

$$\overset{+}{\log}|f(z)| = \mathrm{O}(\log r), \qquad \overset{+}{\log}|\mathrm{S}(z, f)| = \mathrm{O}(\log r)$$

et si $|f(z)| > r^{\lambda+1}$ et r assez grand,

$$|\mathrm{S}(z, f)| \sim |f(z)^p \mathrm{S}_0(z)| > 1,$$

donc

$$\overset{+}{\log}|\mathrm{S}(z, f)| - p\,\overset{+}{\log} f(z) = \mathrm{O}(\log r),$$

de sorte que

$$m[r, \mathrm{S}(z, f)] - pm(r, f) = \mathrm{O}(\log r).$$

En rapprochant de (31), on a

$$\mathrm{T}[r, \mathrm{S}(z, f)] - p\mathrm{T}(r, f) = \mathrm{O}(\log r)$$

et en tenant compte de (30), on voit que l'égalité (27) est établie.

On remarquera que l'égalité (27) vaut également pour une fonction algébroïde.

12. Dans (26) interviendra la fonction $T[r, f'(Q)]$; on a à trouver la valeur approchée de $T[r, f'(Q)]$ en fonction de $T(r, f')$. On utilise mon théorème d'après lequel pour tous les α, sauf pour un ensemble de mesure linéaire nulle, on a asymptotiquement

$$T[r, f'(Q)] \sim N\left(r, \frac{1}{f'(Q)-\alpha}\right),$$
$$T(r, f') \sim N\left(r, \frac{1}{f'(z)-\alpha}\right).$$

A un zéro a_n de $f'(z)-\alpha$ correspondent q zéros de $f'(Q)-\alpha$ donnés par

$$Q(z) = a_n;$$

ils sont de la forme

$$h(a_n)^{\frac{1}{q}}[1+o(1)].$$

Il s'ensuit que D étant le module du coefficient de z^q dans $Q(z)$,

$$n\left[r, \frac{1}{f'(Q)-\alpha}\right] = qn\left(D\, r^q[1+o(1)], \frac{1}{f'-\alpha}\right).$$

En multipliant par $\frac{1}{r}dr$ et en intégrant de o à r, puis en prenant Dr^q pour variable au second membre, on trouve

$$N\left[r, \frac{1}{f'(Q)-\alpha}\right] = N\left(D\, r^q + o(r^q), \frac{1}{f'-\alpha}\right).$$

Par suite,

$$T[r, f'(Q)] = T[D\, r^q + o(r^q), f'), \tag{32}$$

$o(r^q)$ étant d'ailleurs de la forme $O(1)r^{q-1}$.

13. En tenant compte de (27) et (32) dans (26), on aura

$$m\, T[D\, r^q + o(r^q), f') = p\, T(r, f) + O(\log r)$$

et, d'après (24) et (25), k étant donné supérieur à 1, et r assez grand,

$$\frac{1}{\Omega(k, 1)} T(D' r^q, f) < \frac{p}{m} T(r, f) < T(D'' r^q, f)[2+o(1)], \tag{33}$$

D' étant inférieur à D : k et D'' supérieur à D.

La quantité $\Omega(k, 1)$ est celle qui s'introduit dans le théorème V. Dans le cas actuel ce sont les coefficients numériques extérieurs à T qui jouent le rôle principal, tandis que D' et D'' sont beaucoup moins importants. Nous prendrons k très grand et nous nous appuierons sur la remarque suivante : *lorsque k est très grand*, $\Omega(k, 1)$ *est aussi voisin de* 1 *que l'on veut*. Pour le voir il suffit de se reporter d'abord à l'inégalité (12) dans laquelle $T(t, f)$ peut être remplacé par $m(t, f)$ (N, 25) et de remarquer que $n(r, f)$: $T(kr, f)$ est égal à $o(1)$; alors l'inégalité (23) est remplacée par

$$\log|f(z)| < [1 - o(1)]m(kr, f) + o(1)T(kr, f).$$

En procédant comme au n° 10, on en déduit, pour les points des circonférences de rayon r,

$$m(|z|, f) < [1 + o(1)]m(kk'|z|, f') + o(1)T(kk'|z|, f')$$

et en ajoutant respectivement aux deux membres

$$N(|z|, f), \qquad N(|z|, f'),$$

on arrive à l'inégalité

$$T(r, f) < [1 + o(1)]T(rk, f'),$$

valable pour tous les r. C'est le résultat indiqué.

Eu itérant la première partie de l'inégalité (33) dans laquelle $\Omega(k, 1)$ est remplacé par un nombre supérieur à 1, on obtient

$$T[o(1)q^n, f) < o(1)\left[\frac{p + o(1)}{m}\right]^n$$

et par suite

$$(34) \qquad T(r, f) < [\log r]^{\rho + o(1)}, \qquad \rho = \frac{\log p - \log m}{\log q},$$

ce qui implique $p \geq mq$. *L'équation* (26) *ne peut être vérifiée par une fonction méromorphe que si $p \geq mq$, une solution s'il y en a, vérifie la condition* (34), *elle est d'ordre nul.*

Lorsque $p > 2mq$, l'itération de la seconde partie de l'inégalité (33) donne de même

$$T(r, f) > [\log r]^{\rho' - o(1)}, \qquad \rho' = \frac{\log p - \log 2m}{\log q}.$$

Dans ce cas, on est renseigné d'une façon plus précise sur le mode de croissance de $T(r)$, mais les résultats ici obtenus ne peuvent suffire à reconnaître si les solutions sont nécessairement à croissance régulière.

14. On obtiendra de même une borne pour l'ordre des fonctions méromorphes $f(z)$ vérifiant une équation de la forme

(35) $\quad [f'(zs)]^m = R[z, f(z)], \qquad S = |s| > 1,$ m entier positif,

R étant toujours une fraction rationnelle de degré p. On aura ici

$$\frac{1}{\Omega(k, 1)} T\left(\frac{S}{k} r, f\right) < \frac{p}{m} T(r, f) < [2 + o(1)] T(Sr, f),$$

Il faudra prendre $k < S$ et la limitation de m en fonction de p sera mal connue. L'itération de la première partie de l'inégalité donnera

$$\log T(r, f) < \rho \log r + o(1), \qquad \rho = \frac{\log[p\Omega(k, 1)] - \log m}{\log S - \log k}.$$

L'ordre de $f(z)$ est fini. En outre, lorsque $p > 2m$ l'itération de la seconde partie montre que l'ordre est effectivement positif et au moins égal à

$$\frac{\log p - \log 2m}{\log S}.$$

On obtient des équations de la forme (35) admettant des solutions d'ordre fini positif en partant de fonctions trigonométriques ou elliptiques convenables. Mais il est vraisemblable qu'il existe de telles équations admettant des solutions d'ordre nul puisqu'il en est ainsi lorsque l'on considère des solutions méromorphes sauf à l'infini et à l'origine [exemples fournis par la théorie des fonctions invariantes par la substitution (z, sz)]. D'ailleurs lorsque $m = 1$ et lorsque $R(x, y)$ se réduit à un polynome, (35) admet toujours des solutions entières à croissance régulière qui sont d'ordre nul lorsque le degré de ce polynome est égal à un [1],

---

[1] *Voir* DEBEY, *Bull. Sciences math.*, t. 52, 1928, p. 297-303.