SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DES FONCTIONS MÉROMORPHES.

PAR

G. VALIRON

à STRASBOURG.

Dans une note des Comptes Rendus[1] j'ai donné une proposition générale sur le nombre moyen des points intérieurs à un cercle $|z| < r$, en lesquels une fonction entière $f(z)$ prend une valeur donnée arbitraire. M. R. NEVANLINNA[2] a montré depuis que les méthodes si remarquables qu'il a introduites dans cette théorie, permettent de traiter sans difficultés nouvelles le cas des fonctions méromorphes; plus récemment M. COLLINGWOOD[3] a apporté un complément important aux résultats de M. Nevanlinna. Je me propose d'utiliser ces méthodes pour démontrer et compléter le résultat en question.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un cercle ayant pour centre l'origine. On se propose d'étudier la distribution des points où la fonction prend une valeur donnée a et tout d'abord d'obtenir des renseignements sur le nombre $n(r; a) \equiv n(r, f - a)$[4] de ces points situés dans un cercle $|z| < r$, chacun d'eux étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Les études nombreuses faites sur les fonctions entières à la suite des travaux fondamentaux de MM. Picard, Hadamard et Borel ont montré qu'on ne peut avoir des formules

---

[1] t. 177, p. 740.

[2] *Comptes Rendus,* 1924, t. 178, p. 367 et t. 179, p. 24.

[3] *Comptes Rendus,* 1924, t. 179, p. 955.

[4] On écrira $n(r; a)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité à craindre, $n(r, f - a)$ lorsqu'il sera nécessaire de bien spécifier la fonction dont on s'occupe; même remarque pour la définition (1) donnée plus bas.

générales précises et simples donnant $n(r; a)$; il faut prendre une valeur moyenne de cette fonction, celle qui s'introduit dans le théorème de Jensen:

$$(1)\qquad N(r, f-a) \equiv N(r; a) = \int_0^r [n(t, a) - n(0, a)] \frac{dt}{t} + n(0, a) \log r.$$

Dans un travail antérieur[1] j'avais donné une relation entre la somme de deux de ces fonctions $N(r, a) + N(r, b)$ et le maximum $M(r)$ du module de la fonction $f(z)$ supposée entière. M. Nevanlinna a obtenu des relations plus serrées en introduisant à la place de $\log M(r)$ la moyenne des valeurs positives de $\log |f(z)|$ sur le cercle $|z| = r$. Nous poserons avec M. Nevanlinna

$$(2)\qquad m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{iu})|\, du,$$

$\overset{+}{\log}\, v$ étant égal à $\log v$ si $v > 1$ et à 0 si $v \leq 1$. La formule de Jensen montre que l'on a

$$m(r, f-a) - m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N(r; a) - N(r; \infty) + C(f-a)$$

$C(f-a)$ désignant le logarithme du module du premier coefficient du développement de Laurent de $f(z) - a$ autour de l'origine. La différence entre deux quelconques des fonctions

$$T(r, f-a) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N(r, f-a)$$

$\left(\text{pour } a \text{ infini, on prend } T(r, f-\infty) = T\left(r, \frac{1}{f}\right)\right)$, pour deux valeurs quelconques de a, reste bornée; la fonction

$$(3)\qquad T(r) = T(r, f-\infty)$$

sert à caractériser la fonction méromorphe. Pour une fonction méromorphe en tout point à distance finie l'ordre est le nombre

[1] *Annales de l'Ecole normale,* 1922.

$$\varrho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

Cette définition coïncide avec celles données par M. Borel.[1]

M. Collingwood a établi que, les p nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant distincts $(p \geq 3)$, on a

$$(p-2)\, T(r) \leq \sum_1^p N(r;\, a_j) + S(r), \tag{4}$$

le reste $S(r)$ étant de l'ordre de $\log r$ lorsque la fonction $f(z)$ est d'ordre fini. Pour $p=3$ on retombe sur un résultat antérieur de M. Nevanlinna. M. R. Nevanlinna a étendu ce résultat au cas de l'ordre infini, $S(r)$ est de l'ordre de $\log T(r)$ sauf dans des intervalles dans lesquels r varie d'une quantité finie. Il en déduit que, $R_1, R_2, \ldots, R_m$ étant une suite de nombres non exceptionnels indéfiniment croissants, on a

$$\delta_a = \overline{\lim_{m=\infty}} \frac{N(R_m;\, a)}{T(R_m)} \geq 1 - \frac{2}{p}$$

sauf au plus pour $(p-1)$ valeurs de a. Il en résulte aussi que, sauf au plus pour un ensemble dénombrable de points a, δ_a est égal à 1.

Dans ce qui suit je donnerai d'abord des résultats relatifs à la limite inférieure du rapport $N(r;\, a) : T(r)$. Pour les obtenir, il suffit d'expliciter la valeur des constantes qui s'introduisent dans le reste $S(r)$. On obtient notamment la proposition suivante qui complète et précise celle de ma note signalée au début:

I. *Pour une fonction méromorphe donnée d'ordre fini, le rapport*

$$\frac{N(r;\, a)}{T(r)} \tag{5}$$

tend vers un lorsque r croît indéfiniment, sauf peut-être pour les points a appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle.[2]

On a une proposition analogue pour les fonctions d'ordre infini et pour les fonctions méromorphes dans un cercle. Je démontrerai ensuite quelques propriétés du nombre des zéros de $f(z)-a$ situés dans certains secteurs lorsque la fonction méromorphe $f(z)$ est d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Enfin j'indiquerai rapidement

[1] Pour la définition de M. Borel, voir ses *Leçons sur les fonctions méromorphes.*

[2] J'entends par ensemble de mesure *linéaire* nulle dans un plan un ensemble dont les points peuvent être enfermés dans une suite de circonférences dont la somme des *rayons* est arbitrairement petite.

comment on peut donner une démonstration du théorème de M. Schottky qui se rattache à la méthode de M. Nevanlinna.

Afin de ne pas allonger inutilement ce mémoire je me suis borné, dans les deux premiers paragraphes, à donner des indications succintes sur la marche des démonstrations, suffisantes cependant pour les reconstituer, en renvoyant pour les détails au mémoire de M. R. Nevanlinna.[1] J'ai désigné par (R. N. α) le renvoi à la page α de ce mémoire.

I. Fonctions méromorphes en tout point à distance finie.

1. Supposons les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ finis et distincts $(p \geq 2)$ et, $f(z)$ étant une fonction méromorphe et $f'(z)$ sa dérivée, écrivons l'identité

$$\psi(z) \equiv \psi_1(z) \times \frac{1}{\psi_2(z)} \tag{6}$$

avec

$$\psi \equiv (f-a_1)(f-a_2)\ldots(f-a_{p-1}), \psi_1 \equiv \frac{f'}{f-a_p}, \psi_2 \equiv \frac{f'}{\psi(f-a_p)} \equiv \sum_1^p \frac{f' b_j}{f-a_j},$$

les b_j étant donnés par les égalités

$$\frac{1}{b_j} = (a_j-a_1)\ldots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\ldots(a_j-a_p).$$

Si A est un nombre supérieur à 1 et aux modules des a_j, on a (R. N. 91)

$$(p-1)\, m(r, f) \leq m(r, \psi) + (p-1) \log 4A. \tag{7}$$

D'autre part, si $u_1, u_2, \ldots, u_q$ sont des fonctions méromorphes pour $|z| < R$, on a toujours pour $r < R$, (R. N. 53),

$$m(r, u_1 u_2 \ldots u_q) \leq \sum_1^q m(r, u_j) \tag{8}$$

$$m(r, u_1 + u_2 + \cdots + u_q) \leq \sum_1^q m(r, u_j) + \log q, \tag{9}$$

[1] M. R. Nevalinna a bien voulu me communiquer les épreuves de ce mémoire *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* qui a paru pendant l'impression du travail présent dans le tome 46 des *Acta mathematica*. Je tiens à le remercier ici de son amabilité.

on a aussi d'après la formule de Jensen

$$m\left(r, \frac{1}{u}\right) = m(r, u) + N\left(r, \frac{1}{u}\right) - N(r, u) - C(u) \tag{10}$$

$C(u)$ étant le logarithme du module du premier coefficient dans le développement de Laurent de la fonction méromorphe u dans le voisinage de l'origine.

Partant de l'inégalité (7) on considère ψ comme égal au produit (6) et on applique l'inégalité (8), puis (10) pour introduire $m(r, \psi_2)$; on considère alors ψ_2 comme somme des fractions simples et on applique (9) ce qui donne

$$(p-1)\, m(r, f) \leq \sum_1^p N(r;\, a_j) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - p\, N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r)$$

avec

$$S(r) = (p-1)\log 4A + \log(p-1) - C(\psi_2) + m\left(r, \frac{f'}{f-a_p}\right) + \sum_1^p m\left(r, \frac{f' b_j}{f-a_j}\right). \tag{11}$$

En ajoutant $(p-1)\, N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ aux deux membres de l'inégalité obtenue on fait apparaître $T(r)$ dans le premier membre; dans le second membre on remarque que $N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - 2N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ et $-N(r, f')$ sont négatifs ou nuls, et on arrive à l'inégalité

$$(p-1)\; T(r) \leq \sum_1^p N(r;\, a_j) + N(r, \infty) + S(r). \tag{12}$$

Pour calculer une limitation supérieure de $S(r)$ on emploie la limitation de $m\left(r, \frac{f'}{f-a_j}\right)$ qui est fournie par la formule de Poisson-Jensen. On a (R. N. 53)

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a_j}\right) < \log 2 + \overset{+}{\log} R + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log}\left[m(R, f-a_j) + m\left(R, \frac{1}{f-a_j}\right)\right] \tag{13}$$

$$+ N(R, f-a_j) - N(r, f-a_j) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overset{+}{\log}\left[n(R;\, f-a_j) + n\left(R, \frac{1}{f}\right) + 1\right],$$

$$(r < R).$$

L'inégalité (8) et la définition de $T(r)$ permettent d'écrire

$$m(R, f-a_j) < m(R, f) + \log A \leq T(R) + \log A,$$

$$m\left(R, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq T(R, f-a_j)$$

et les inégalités (10) et (8) donnent

$$(14) \quad T(R, f-a_j) = m(R, f-a_j) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - C(f-a_j) < T(R) + \log A - C(f-a_j).$$

Nous supposerons dorénavant que $T(r)$ est supérieur à $\log A$ et aux quantités $-C(f-a_j)$; il en sera de même de $T(R)$ car $T(r)$ est croissant (R. N. 13), le quatrième terme du second membre de (13) sera moindre que

$$\overset{+}{\log}\ 5\, T(R).$$

Pour traiter la différence $N(R, f-a_j) - N(r, f-a_j)$ on utilise la propriété de convexité de la fonction $N(r, f-a_j)$ considérée comme fonction de $\log r$ (R. N. 55). En supposant R' donné et compris entre r et $2r$ et en prenant

$$R - r = \frac{R'-r}{T(R')+1}$$

on obtient

$$N(R;\, a_j) - N(r;\, a_j) \leq \frac{N(R';\, a_j)}{(T(R')+1)\log 2} \leq \frac{T(R', f-a_j)}{(T(R')+1)\log 2} \leq \frac{3}{\log 2}.$$

Pour la différence analogue on a le même résultat, 3 pouvant être remplacé par 1 dans le dernier membre. Enfin on a

$$n(R;\, a_j)\frac{R'-R}{R}\log 2 \leq n(R;\, a_j)\log\frac{R'}{R} \leq N(R';\, a_j) - n(0;\, a_j)\log R$$

$$\leq 3\, T(R') - n(0;\, a_j)\log R$$

ce qui donne

$$n(R;\, a_j) \leq \frac{R\,[3\,T(R') - n(0;\, a_j)\log R]}{(R'-R)\log 2}$$

et en supposant $T(r)$ supérieur à 1, on trouve

$$n(R;\, a_j) \leq \frac{2R'}{(R'-r)\log 2}\left[3\,T(R') + n(0;\, a_j)\overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right].$$

Le résultat est analogue pour $n(R; \infty)$ le coefficient 3 pouvant être remplacé par 1. En tenant compte de ces inégalités, en écrivant de nouveau R à la place de R', l'inégalité (13) devient

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a_j}\right) < 2 \overset{+}{\log} R + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + 4 \log T(R) + 16$$

pourvu que

$$r > \frac{1}{e} = 0{,}367\ldots, \quad r < R < 2r,$$

et que $T(r)$ soit supérieur aux nombres

$$(15) \qquad 1, \log A, \; -C(f-a_j), \; n(0; a_j).$$

On a d'ailleurs

$$m\left(r, \frac{f' b_j}{f-a_j}\right) \leq m\left(r, \frac{f'}{f-a_j}\right) + \overset{+}{\log} b_j$$

et, en se reportant à la valeur de b_j, on arrive à l'inégalité

$$(16) \qquad S(r) < (p+1)\left[4 \log T(R) + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + \right.$$
$$\left. + 2 \overset{+}{\log} R + \log A + 2 \sum \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{a_j - a_k}\right| + 19\right] - C(\psi_2)$$

$T(r)$ étant supérieur aux nombres (15), r supérieur à $\frac{1}{e}$ et R compris entre r et $2r$.

2. La formule (12) donne une relation entre $T(r)$ et les valeurs $N(r; a)$ pour $p+1$ valeurs a dont l'une est infinie; elle donne a fortiori une relation analogue entre $T(r)$ et les valeurs $N(r; a)$ pour p valeurs finies, puisqu'on en déduit

$$(17) \qquad (p-2)\, T(r) \leq \sum_{1}^{p} N(r; a_j) + S(r).$$

C'est cette dernière inégalité que j'utiliserai. Quelles sont les valeurs des nombres (15)? Le nombre $n(0; a)$ n'est différent de 0 que pour une valeur a au plus et sa valeur est alors une constante ne dépendant que de la valeur de $f(z)$ autour de l'origine. Si $f(0)$ est infini, $C(f-a_j)$ est aussi une constante indépendante de

a_j et connue dès que le développement de Laurent de $f(z)$ est connu; si $f(0)$ est fini, $C(f-a_j)$ est égal à $\log|a_j-f(0)|$ sauf pour la valeur $a_j=f(0)$ pour laquelle on a encore une valeur dépendant du développement de Laurent. Les conditions imposées à $T(r)$ peuvent donc être remplacées par les suivantes:

$$(18)\qquad \begin{cases} T(r)>c(f), & T(r)>\log A \\ T(r)>\overset{+}{\log}\left|\dfrac{1}{a_j-f(0)}\right| & \text{si } f(0) \text{ est fini} \end{cases}$$

$c(f)$ est une constante dépendant de f mais indépendante des a_j, et A est le plus grand des nombres e et $|a_j|$.

On voit de même que $-C(\psi_2)$ est inférieur à $p\log A+c_1(f)$, $c_1(f)$ étant indépendant des $|a_j|$; on a donc finalement

$$(19)\quad S(r)<(p+1)\left[6\log T(R)+3\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r}+2\overset{+}{\log}R+c_2(f)+2\sum\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_j-a_k}\right|\right].$$

Les inégalités (12) et (19) supposent seulement que $f(z)$ est méromorphe pour $|z|<R$.

3. Considérons maintenant une fonction $f(z)$ méromorphe en tout point à distance finie, d'ordre fini ϱ (positif ou nul) et que nous supposerons finie et non nulle à l'origine. (On se ramène à ce cas en faisant sur $f(z)$ une transformation homographique à coefficients constants.) Nous prenons $R=r+1$ et $r>r_0$, r_0 étant supérieur à 1 et assez grand pour que $T(r)$ soit supérieur à $c_2(f)$ et soit moindre que $r^{\varrho+1}$. Nous aurons

$$(20)\qquad (p-2)\,T(r)\leq\sum_1^p N(r;a_j)+$$
$$+(p+1)\left[(6\varrho+8)\log r+c_3(f)+2\sum\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_j-a_k}\right|\right],\ (r>r_0),$$

pourvu que $T(r)$ satisfasse aux conditions (18) (la première est déjà satisfaite). Nous nous proposons de montrer que, pour certains a, $N(r;a)$ est asymptotiquement égal à $T(r)$. A cet effet nous allons calculer une valeur approchée de $N(r;a)$ pour une suite de valeurs r_m assez rapprochées les unes des autres pour que, lorsqu'on passe de l'une à la suivante, la variation de $T(r)$ reste bornée; il est clair que, $N(r;a)$ et $T(r)$ étant croissantes, si l'on a

$$N(r_m;\, a) \sim T(r_m)$$

cette égalité asymptotique vaudra pour tous les r.

$T(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ (R. N. 14) qui croît indéfiniment avec r de telle façon que $T(r)$: $\log r$ ne reste pas borné, on a donc

$$T(r) = t(r) \log r,$$

$t(r)$ étant croissante à partir d'une valeur de r. Nous supposerons le nombre r_0, à partir duquel (20) est valable, choisi de telle façon que $t(r_0)$ soit supérieur à 1 et $t(r)$ croissant à partir de r_0.

Nous définirons la suite r_m par les égalités

$$T(r_1) = T(r_0) + 1, \ldots, T(r_m) = T(r_{m-1}) + 1, \ldots$$

Au nombre r_m nous faisons correspondre un nombre p_m indéfiniment croissant avec m dont la valeur sera précisée ultérieurement. Ecrivons l'inégalité (20) pour $r = r_m$ et pour p_m nombres a_j tels que

$$\text{(21)} \qquad \log |a_j| < \log r_m, \quad \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{a_j - f(0)} \right| < \log r_m;$$

toutes les conditions (18) sont ainsi réalisées. Supposons en outre que, quels que soient les indices j et k, on ait

$$\text{(22)} \qquad \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{a_j - a_k} \right| < \frac{T(r_m)}{p_m^3},$$

l'inégalité (20) donnera à fortiori

$$\text{(23)} \qquad \sum_1^{p_m} N(r_m;\, a_j) \geq (p_m - 2)\, T(r_m) \left[1 - (24\varrho + 32) \frac{1}{t(r_m)} - \frac{4\, c_3(f)}{T(r_m)} - \frac{4}{p_m} \right].$$

Par suite, si pour $p_m - 1$ valeurs des a_j, on a

$$\text{(24)} \qquad N(r_m;\, a_j) \leq T(r_m) \left(1 - \frac{2}{p_m} \right) (1 - \varepsilon_m)$$

$1 - \varepsilon_m$ désignant le dernier crochet dans (24), on aura l'inégalité contraire pour la dernière valeur a_j. Donc, si $p_m - 1$ nombres a_j satisfaisant aux conditions (22) et (21) vérifient l'inégalité (24), on a nécessairement

$$N(r_m; a) \geq T(r_m)\left(1 - \frac{2}{p_m}\right)(1 - \varepsilon_m) \tag{25}$$

pour toute valeur a formant avec les $p_m - 1$ nombres considérés un système vérifiant encore (21) et (22). Le nombre ε_m tend d'ailleurs vers o avec $\frac{1}{m}$.

A l'intérieur du domaine Δ_m du plan des a défini par

$$|a| < r_m, \quad |a - f(0)| > \frac{1}{r_m}$$

les valeurs donnant l'inégalité (24) peuvent donc être enfermées dans $p_m - 1$ petits cercles de rayon

$$e^{-\frac{T(r_m)}{p_m^3}}.$$

Nous prendrons par exemple $p_m^6 = T(r_m)$, alors la somme des rayons des cercles exclus, s'il y en a, est au plus

$$T(r_m)^{\frac{1}{6}} e^{-\sqrt{T(r_m)}}$$

et comme d'après sa définition $T(r_m)$ est supérieur à m, la série formée par la somme des rayons des cercles exclus est convergente. Pour tout point à distance finie, distinct de $f(0)$, qui n'est intérieur qu'à un nombre fini de ces petits cercles, l'inégalité (25) a lieu à partir d'une valeur de m. D'autre part, d'après l'inégalité (14), $N(r_m; a)$ est inférieur à

$$T(r_m) + \log|a| + \overset{+}{\log}|a - f(0)| + c(f)$$

On obtient donc la proposition I énoncée dans l'introduction et aussi celle-ci:

II. *Si la fonction méromorphe $f(z)$ est d'ordre fini, le rapport*

$$\frac{N(r; a)}{T(r)} \tag{5}$$

tend uniformément vers un lorsque r croît indéfiniment quel que soit a de module inférieur à un nombre fixe A donné arbitrairement, à l'exception des points intérieurs à des cercles dont la somme des rayons est arbitrairement petite.

L'énoncé I comprend ceux que j'avais donnés dans des notes précedentes[1], les exemples étudiés dans ces notes permettent d'affirmer que le rapport (5) peut

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 43 et 44.

ne pas tendre vers 1 pour tous les points d'un ensemble ayant la puissance du continu. L'énoncé I ne pourra donc être précisé qu'en examinant de plus près la nature de l'ensemble exceptionnel et en introduisant par exemple la classification des ensembles de mesure nulle de M. Borel. On pourra également chercher à déterminer des classes de fonctions pour lesquelles l'ensemble exceptionnel se simplifie. On sait par exemple que, pour les fonctions entières d'ordre nul telles que

$$\log |f(z)| : (\log r)^2$$

reste fini, l'ensemble exceptionnel n'existe pas.

4. Pour traiter les fonctions d'ordre infini on emploie les propriétés des fonctions croissantes dues à M. Borel. On sait qu'étant donnés deux nombres positifs α et λ on a l'inégalité

$$T\left(r + \frac{1}{T(r)^\lambda}\right) < T(r)(1+\alpha) \tag{26}$$

à condition d'exclure des intervalles de longueur totale finie.[1] L'inégalité (26) a lieu dans des segments que nous appellerons segments ordinaires. En supposant r sur un segment ordinaire et en prenant dans $S(r)$ (formule (19))

$$R = r + \frac{1}{T(r)^\lambda}$$

on obtient

$$S(r) < (p+1)\left[(6+3\lambda)\log T(r) + 2\log r + c_4(f) + 2\sum \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_j - a_k}\right|\right].$$

Considérons les segments ordinaires à partir de l'un d'eux, soient

$$R_1,\ R'_1;\ R_2,\ R'_2;\ldots;\ R_n,\ R'_n;\ \ldots.$$

leurs extrémités. Si pour l'un de ces segments, on a

$$T(R'_n) - T(R_n) > 1$$

on le divise en segments partiels à partir de R_n de telle façon que les valeurs de $T(r)$ aux points de division successifs différent d'une unité, sauf pour les deux

[1] Cette inégalité est une conséquence immédiate de celle qui est utilisée habituellement et qu'emploie M. Nevanlinna (R. N. 57).

points les plus à droite pour lesquels la variation de $T(r)$ sera inférieure ou égale à 1. Nous obtenons ainsi une suite de points

$$r_1 = R_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m,\ \ldots$$

tels que la variation de $T(r)$ lorsqu'on passe de l'un au suivant soit au plus égale à 1 si ces points appartiennent au même segment ordinaire. Ici $T(r_m)$ est au moins égal à $\frac{m}{2}\cdot$ On peut alors procéder comme dans le cas de l'ordre fini: si l'on considère les points a appartenant au domaine Δ_m défini plus haut et extérieure à $p_m - 1$ petits cercles de rayon

$$e^{-T(r_m)p_m^{-3}}$$

on a encore

$$N(r_m;\ a) > T(r_m)(1-\varepsilon'_m) \qquad (\lim \varepsilon'_m = 0)$$
$$N(r_m;\ a) < T(r_m) + 2\log r_m + c(f),$$

et on arrive à cette proposition:

III. *Lorsque r croît indéfiniment en restant sur les segments ordinaires, le rapport* (5) *tend vers un pour toute valeur a extérieure à un certain ensemble de mesure linéaire nulle.*

On a également une proposition correspondant à II.

L'exemple que j'ai étudié dans un mémoire précédent[1] montre que l'ensemble exceptionnel peut effectivement avoir la puissance du continu.

On remarquera que, à fortiori, pour les valeurs a non exceptionnelles, on a

$$\varliminf \frac{N(r+d;\ a)}{T(r)} \geq 1, \tag{27}$$

d étant un nombre positif donné arbitraire et r parcourant toutes les valeurs. Les points a ne vérifiant pas la condition (27) peuvent effectivement former un ensemble non dénombrable. Ce résultat sera suffisant toutes les fois que $T(r)$ ne sera pas connu d'une façon précise. En tenant compte de la longueur des intervalles exclus dans la méthode de M. Borel, en reconnaît que dans la condition (27), d peut être remplacé par $\frac{\gamma}{T(r)^{\lambda}}\cdot$

[1] *Annales de l'Ecole normale,* 1922.

5. Je ferai ici quelques remarques sur la comparaison des fonctions $T(r, f-\infty)$ et $T(r, f'-\infty)$ lorsque $f(z)$ est une fonction méromorphe (dans le cas d'une fonction entière, on retombe sur des propositions connues). On a

$$m(r, f') \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r, f)$$

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leq 2\, N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

donc

$$T(r, f'-\infty) \leq 2\, T(r, f-\infty) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

En employant la limitation trouvée pour $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, on voit que: *lorsque r croît indéfiniment (en restant dans les segments ordinaires dans le cas de l'ordre infini), on a*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f'-\infty)}{T(r, f-\infty)} \leq 2$$

L'exemple de la fonction tg z montre que ce résultat ne peut être amélioré. Il en découle que, si $f(z)$ est d'ordre fini positif ϱ, et si l'intégrale

$$\int^{\infty} T(r) \frac{dr}{r^{1+\varrho}}$$

converge, il en est de même de l'intégrale analogue relative à $f'(z)$. Par suite *la dérivée d'une fonction méromorphe de genre p est au plus de genre p.*

Signalons encore cette proposition: *l'ordre ϱ d'une fonction méromorphe $f(z)$ et l'ordre de sa dérivée sont égaux.* C'est évident lorsque f est le quotient d'une fonction entière f_1 d'ordre au plus égal à ϱ par un produit canonique P d'ordre ϱ, et dans le cas contraire, la propriété résulte de ce que la fonction $f_1 P' - f'_1 P$ est d'ordre ϱ si f_1 est d'ordre ϱ et P d'ordre inférieur à ϱ.

6. Je donnerai ici un exemple de fonction entière pour laquelle le calcul de la fonction $m(r, f)$ est aussi simple que celui de log $M(r)$. C'est celui des fonctions définies par les équations fonctionnelles de Poincaré

$$f(z\sigma) = P(z, f(z)),$$

où $\Sigma = |\sigma| > 1$ et où $P(x, y)$ est un polynome. Les solutions holomorphes autour de l'origine, qui existent dès que le calcul formel des coefficients est possible, sont évidemment des fonctions entières. Nous supposerons ici que le degré q de $P(x, y)$ en y est supérieur à 1[1]; alors on a

$$m(r\Sigma, f) = q\, m(r, f) + h \log r$$

$|h|$ étant inférieur à un nombre fixe dès que r est assez grand. Comme $m(r, f)$ croît plus vite que $k \log r$, on obtient en itérant cette égalité

$$m(r_0 \Sigma^n, f) \backsim \varphi(r_0) q^n$$

et par suite, on posant $r = r_0 \Sigma^n$, on a

$$m(r, f) \backsim A(\log r) r^{\varrho}, \qquad \varrho = \frac{\log q}{\log \Sigma}$$

$A(x)$ étant une fonction périodique, de periode $\log \Sigma$. $A(x)$ est effectivement périodique dans certains cas, et non pas constante, c'est ce que montre le cas de l'équation simple

$$f(z\sigma) = (1 - z)(f(z))^2$$

dont la solution est

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sigma^n}\right)^{2^{n-1}} \qquad (\Sigma > 2).$$

L'ordre de cette fonction est inférieur à $\frac{1}{2}$ dès que Σ est supérieur à 4, $m(r, f)$ est alors asymptotiquement égal à $N(r; a)$ sur une suite de cercles indépendants de a d'après le théorème de M. Wiman. En supposant pour fixer les idées $\Sigma = 16$, $N(r; 0)$ est égal à $m(r, f)$ pour $2\Sigma^n < r < \frac{1}{2}\Sigma^{n+1}$; or $N(r; 0)$ se calcule sans peine: en posant $r = \Sigma^n \lambda$ on trouve

$$\begin{aligned} N(r; 0) &= (2^n - 1) \log(\lambda \Sigma) - n \log \Sigma \backsim 2^n \log(\lambda \Sigma) \\ &= r^{\frac{1}{4}} \log(16\lambda) \lambda^{-\frac{1}{4}} \qquad\qquad (2 < \lambda < 8). \end{aligned}$$

Le rapport de $m(r, f)$ à $r^{\frac{1}{4}}$ ne tend pas vers une limite. En outre le rapport de

[1] Pour $q = 1$ on obtient une fonction d'ordre nul pour laquelle $m(r, f)$ est asymptotiquement égale à $\log M(r)$. Voir *Lectures on the general theory of integral functions*, Deighton, Bell and C°, Cambridge, p. 46.

$n(r; a)$ (qui est constant dans cet intervalle pour tous les a bornés) à $m(r, f)$ est également compliqué.

Remarquons ici que, d'une façon générale, les conditions auxquelles doit satisfaire $T(r)$ pour que, pour les a non exceptionnels, $n(r; a)$ s'exprime en fonction simple de r et $T(r)$ sont les mêmes que celles que l'on obtient lorsqu'on cherche à exprimer que le rang du terme maximum d'une série de Taylor définissant une fonction entière est une fonction simple de r et $\log M(r)$.

II. Fonctions méromorphes d'ordre fini dans un cercle.

7. Les proposition I et II s'étendent en partie au cas des fonctions $F(z)$ méromorphes dans le cercle $|z| < 1$. L'ordre est défini ici par

$$\varrho = \overline{\lim} \frac{\log T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \qquad \text{(R. N. 81)}$$

Une source nouvelle de difficultés est qu'ici $T(r) : \log \frac{1}{1-r}$ n'est pas nécessairement croissant, même lorsque l'ordre est positif. Par exemple il est aisé de construire des séries de Taylor lacunaires pour lesquelles le maximum du module $M(r)$ vérifie alternativement en une suite de points r tendant vers 1 les inégalités

$$\log M(r) > \left(\frac{1}{1-r}\right)^2, \qquad \log M(r) \leq \log \frac{1}{1-r}.$$

L'ordre est au moins égal à 1 et la limite inférieure de $m(r, f) : \log \frac{1}{1-r}$ est au plus égale à 1.

En supposant l'ordre ϱ fini on peut prendre $R = r + \frac{1}{2}(1-r)$ dans l'inégalité (19), ce qui donne pour $r > r_0$

$$S(r) < (p+1)\left[(7\varrho + 3)\log \frac{1}{1-r} + c_3(f) + 2\sum \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_j - a_k}\right|\right].$$

Pour écarter les petites valeurs possibles de $T(r)$ on procédera de la façon suivante. Donnons nous une fonction indéfiniment croissante lorsque r tend vers 1, à croissance très lente, par exemple $\Theta(r) = \log_2 \frac{1}{1-r}$, et considérons la suite des points r_m définis comme plus haut par les égalités

$$T(r_1) = T(r_0) + 1, \ldots, T(r_m) = T(r_{m-1}) + 1, \ldots$$

Nous nous bornerons à prendre ceux de ces points pour lesquels on a

$$T(r_m) \geq \Theta(r_m) \log \frac{1}{1-r_m} - 1 \tag{28}$$

et nous appliquerons le raisonnement du n° 3 aux points de cette suite $\Big($en remplaçant dans les conditions (21) r_m par $\frac{1}{1-r_m}\Big)$. Si a satisfait aux conditions (21) transformées on a encore

$$N(r_{m+1}; a) < T(r_{m+1}) + 2 \log \frac{1}{1-r_m} + c(f),$$

et si pour une valeur r on a

$$T(r) \geq \Theta(r) \log \frac{1}{1-r} \tag{29}$$

le point r_m précédant immédiatement r vérifie la condition (28). On obtient ainsi la proposition suivante:

IV. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| < 1$ et $\Theta(r)$ une fonction indéfiniment croissante lorsque r tend vers 1. Bornons nous à considérer les points r vérifiant l'inégalité* (29). *Pour toute valeur a n'appartenant pas à un ensemble de mesure linéaire nulle le rapport* (5) *tend vers* 1 *lorsque r tend vers* 1.

III. Fonctions méromorphes d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$.

8. Soit $F(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| < 1$ et telle que, k étant un nombre donné positif, l'intégrale

$$\int^1 N(x; F-a)(1-x)^{k-1}\, dx$$

converge pour trois valeurs distinctes de a. On sait alors que l'intégrale

$$\int^{1} T(x, F-\infty)(1-x)^{k-1}\,dx$$

est aussi convergente (R. N. 85). On en déduit une propriété des zéros des fonctions $f(z)-a$, $f(z)$ étant méromorphe sauf à l'infini et d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Soit $f(z)$ une telle fonction et k un nombre inférieur à son ordre ϱ (ou égal à ϱ si l'intégrale

$$\int^{\infty} T(x, f-\infty)\frac{dx}{x^{1+\varrho}}$$

diverge) mais supérieur à $\frac{1}{2}$. On sait (R. N. 64) que, $r_n(a)$ désignant le module du $n^{\text{ième}}$ point non nul où $f(z)=a$, la série

(30) $$\sum \frac{1}{[r_n(a)]^k}$$

diverge pourvu que a ne soit pas l'une des deux valeurs exceptionnelles possibles. Il existe donc un angle A au moins ayant son sommet à l'origine et une ouverture donnée $\alpha < \frac{\pi}{k}$, pour lequel la série (30) restreinte aux points intérieurs à cet angle est encore divergente. Soit B un angle de sommet O et d'ouverture $\frac{\pi}{k'}$, k' étant compris entre $\frac{1}{2}$ et k, comprenant A à son intérieur (au sens étroit). Il est loisible de supposer que cet angle B a pour bissectrice l'axe des quantités réelles positives. Posons alors

$$Z = z^{-k'},$$

$Z = X + iY$ étant pris réel et positif en même temps que z. $f(z)$ se transforme en une fonction $\Phi(Z)$ méromorphe pour $X > 0$; en posant enfin $Z = 1 - z$ on obtient une fonction $F(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ qui prend la valeur a en une suite de points intérieurs à ce cercle, les modules $r'_n(a)$ de ces points rendant divergente la série

(31) $$\sum (1 - r'_n(a))^{\frac{k}{k'}};$$

$\frac{k}{k'}$ est supérieur à 1, l'intégrale

$$\int^{1} N(x, F-a)(1-x)^{\frac{k}{k'}-2} dx$$

(qui converge alors en même temps que (31)) est divergente, donc aussi

$$\int^{1} T(x, F-a)(1-x)^{\frac{k}{k'}-2} dx.$$

D'après le résultat rappelé ci-dessus la série (31) diverge donc pour tous les a sauf deux au plus et en repassant à $f(z)$ on obtient, parmi d'autres la proposition suivante:

V. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$ et A un angle d'ouverture $\alpha < \frac{\pi}{\varrho}$ dans lequel la série* (30) *restreinte à cet angle est divergente quel que soit $k < \varrho$. La série* (30) *restreinte à un angle B d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\varrho}$ et comprenant A à son intérieur (côtés compris) diverge pour toute valeur de k inférieure à ϱ et pour toute valeur a, sauf peut-être pour deux valeurs a'_B, a''_B. Si l'on peut faire $k = \varrho$ dans l'hypothèse, il en est de même dans la conclusion.*

L'hypothèse relative à l'ouverture de B est essentielle[1], mais il n'en est peut-être plus de même, tout au moins pour les fonctions entières, dans le corollaire suivant: *pour toute fonction méromorphe d'ordre $\varrho > \frac{1}{2}$, il existe au moins un angle B d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\varrho}$ dans lequel l'exposant de convergence de la série* (30) *restreinte à B est égal à ϱ sauf peut-être pour deux valeurs a.*

Pour *les fonctions d'ordre infini il existe au moins un angle d'ouverture arbitrairement petite dans lequel l'exposant de convergence de la série* (30) *est infini sauf pour deux valeurs a au plus.* Cette proposition complète les théorèmes qui découlent de la méthode de M. Julia.[2]

---

[1] Voir mon mémoire *Remarques sur le théorème de M. Picard, Bull. sc. math.* 1920 et le mémoire de M. Nevanlinna *Über den Picard-Borelschen Satz in der Theorie der ganzen Funktionen, Annales Academiae sc. Fennicae,* 1924.

[2] Les résultats de M. Julia s'appliquaient aux fonctions méromorphes possédant une valeur asymptotique (voir ses *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*); dans

9. On peut également étendre aux fonctions méromorphes d'ordre fini ϱ un résultat que j'avais donné pour les fonctions entières et le compléter dans le cas de l'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Je me bornerai à ce complément. Soit $f(z)$ la fonction en question, $T(r) = T(r, f-\infty)$ la fonction caractéristique correspondante. On peut d'une infinité de manières adjoindre à $T(r)$ une fonction $V(r)$ vérifiant la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{V(hr)}{V(r)} = h^{\varrho}$$

pour tout nombre fini h et telle que

$$T(r) \leq V(r), \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{V(r)} = 1.^{1}$$

D'après le théorème de M. Nevanlinna rappelé dans l'introduction (R. N. 69) on a, sauf pour l'une ou l'autre des deux valeurs exceptionnelles possibles,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, a)}{V(r)} \geq \frac{1}{3}.$$

On peut donc trouver un angle A de sommet O et d'ouverture $\alpha < \frac{\pi}{k}$, $\frac{1}{2} < k < \varrho$, dans lequel la fonction $N(r;\, a,\, A)$ correspondant au nombre $n(r;\, a,\, A)$ des zéros de $f(z) - a$ intérieurs à A vérifie encore la condition

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, a,\, A)}{V(r)} \geq \beta > 0.$$

Quelque petit que soit ε on a la double inégalité

$$(1-\varepsilon)\,\beta\, V(r) < \int_0^r n(x;\, a,\, A)\frac{dx}{x} < (1+\varepsilon)\, V(r)$$

---

deux notes du *Bulletin des sciences math.* (une de mars 1925, et l'autre non encore parue) j'avais indiqué que sa méthode s'applique dans des cas plus généraux. Dans un important mémoire *Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes* qui doit paraître incessamment dans les *Mathematische Zeitschrift,* M. A. Ostrowski montre notamment que les ensembles E_{σ} de M. Julia existent pour toutes les fonctions méromorphes sauf pour certaines fonctions d'ordre nul.

[1] Voir le mémoire des *Annales Ec. norm.* déjà cité.

la seconde partie ayant lieu à partir d'une valeur de r tandis que la première est valable pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r. On en tire les inégalités

$$n(r;\, a,\, A) < (1+\varepsilon)\varrho e\, V(r) \qquad (r > r_0) \tag{32}$$

$$n(r;\, a,\, A) > \beta H(\varrho)\, V(r) \tag{33}$$

cette dernière inégalité ayant lieu pour une suite de r. Faisons la même transformation qu'au n° 8, nous obtiendrons une fonction $F(z)$. L'inégalité (33) montre que $n(r, F-a)$ est supérieur à

$$\beta H_1(\varrho)\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right)$$

pour une suite de valeurs r tendant vers 1; il s'ensuit qu'il existe aussi une suite de valeurs de r tendant vers 1 pour lesquelles

$$T(r, F-a) \geq N(r, F-a) > (1-r)\, n(2r-1, F-a) > \beta H_2(\varrho)(1-r)\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right). \tag{34}$$

On constate aisément que la fonction $F(z)$ est d'ordre fini, en outre, elle vérifie, à partir d'une valeur de r, l'inégalité

$$T(r, F-\infty) < H_3(1-r)\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right) \tag{35}$$

H_3 dépendant de ϱ. Car si l'inégalité contraire était vérifiée pour une suite de valeurs r tendant vers 1, on aurait pour une valeur b non exceptionnelle et pour une suite de r extraite de celle-là

$$N(r, F-b) > \frac{1}{4} H_3(1-r)\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right)$$

ce qui exigerait que l'on ait pour une suite de r,

$$n(r, F-b) > \frac{1}{4} H_3 H_4\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right).$$

En revenant à $f(z)$ on obtiendrait pour $n(r, b, B)$ une inégalité en contradiction avec (32) (qui est vérifiée quel que soit b et A) pourvu que H_3 soit convenablement choisi. Ainsi, $T(r, F-\infty)$ vérifie (35) et l'inégalité en sens contraire qui découle de (34). On peut appliquer aux valeurs donnant (34) le théorème de M. Nevanlinna (R. N. 84, 85) qui se déduit de l'inégalité obtenue pour $S(r)$ au n° 7: on a pour une suite de r

$$\sum_3 N(r, F-c) \geq (1-\varepsilon(r))\, T(r, F-\infty).$$

Il est possible que pour ces r, on ait, quel que soit c,

$$N(r, F-c) > \frac{1}{3}(1-\varepsilon(r))\, T(r, F-\infty); \tag{36}$$

dans le cas contraire on pourra extraire de la suite r une autre suite pour laquelle la proposition aura lieu sauf pour deux c au plus (on fera une ou deux opérations). Pour ces valeurs r on aura

$$\frac{1}{4}\beta H_2(1-r)\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right) < N(r, F-c) < 2H(1-r)\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right)$$

dès que $r > r_c$, la seconde inégalité ayant lieu à partir d'une valeur de r. On en déduit que

$$n(r, F-c) > H(\varrho, k')\, V\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{k'}}\right)$$

pour une suite de r indépendants de c et pour les r de cette suite supérieurs à r_c. En revenant à $f(z)$ on trouve l'inégalité

$$n(r; a, B) > H_4 V(r)$$

valable pour une suite de r indépendants de c $(r > r_c)$ et pour tous les c sauf deux au plus, ce qui permet d'énoncer ce résultat:

VI. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$ et B un angle arbitraire de sommet O et d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\varrho}$ comprenant à son intérieur un angle A défini ci-dessus. Il existe trois nombres positifs finis h, h_1, h_2 et une suite infinie de nombres R_m $(R_{m+1} > hR_m)$ tels que*

$$\lim_{m=\infty} \frac{\log T(R_m)}{\log R_m} = \varrho$$

jouissant de la propriété suivante: dans la portion $\varDelta_m$ *de* B *appartenant à la couronne*

$$R_m < |z| < h R_m$$

$f(z)$ *prend* $k\, T(R_m)$ *fois* $(h_1 < k < h_2)$ *toute valeur* c *sauf au plus deux valeurs, pourvu que* $m > m_c$.

Ici encore l'hypothèse sur l'ouverture de B est essentielle, mais on peut faire des remarques analogues à celles de la fin du n° 8.

10. Dans la proposition précédente la répartition des domaines $\varDelta_m$ n'est pas connue d'avance, même si l'angle A et la fonction $T(r)$ sont connus. En utilisant le théorème IV on arrive à une proposition valable dans des domaines $\varDelta_m$ qui sont complètement déterminés dès que A et $T(r)$ sont connus, mais dans laquelle les valeurs exceptionnelles peuvent former un ensemble de mesure linéaire nulle.

De ce point de vue on pourra examiner le cas des croissances régulières et arriver à une proposition assez précise. Nous supposerons que la fonction $T(r)$ elle-même vérifie les conditions

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{T(hr)}{T(r)} \geq h^{\varrho} h_1, \quad \varlimsup_{r=\infty} \frac{T(hr)}{T(r)} \leq h^{\varrho} h_2, \qquad (0 < h_1 \leq h_2 < \infty),$$

pour tout nombre fini $h > 1$ (h_1 et h_2 sont indépendants de h). On fera alors usage du théorème I qui permet d'assurer que, sauf pour les a exceptionnels, le rapport

$$\frac{N(r, f-a)}{T(r)} \tag{37}$$

reste compris entre deux nombres fixes (indépendants de a) à partir d'une valeur r_a. a étant choisi, on marquera dans le plan des angles A de sommets O adjacents les uns aux autres; quel que soit r le rapport (37) restreint à ces angles sera encore compris entre deux nombres fixes pour l'un au moins de ces angles, qui variera en général avec r. On introduira des angles B recouvrant les angles A et ayant même bissectrices que ces angles et on fera la transformation utilisée précédemment simultanément pour tous ces angles, enfin on appliquera le théorème IV aux fonctions ainsi obtenues. En revenant à $f(z)$ on voit que l'on aura la proposition suivante: *on peut trouver une suite de domaines Δ_m limités par des arcs de cercles*

$$|z| = R_m, \quad |z| = R_m h = R_{m+1}$$

et par des demi-droites D_m, D'_m passant par l'origine et faisant entre elles un angle $\frac{\pi}{\varrho - \varepsilon}$ tels que le nombre des points intérieurs à Δ_m où $f(z)$ prend la valeur c reste dans un rapport fini (compris entre deux nombres positifs fixes) avec $T(R_m)$ pour toute valeur m suffisamment grande ($m > m_c$) et pour tous les c extérieurs à un certain ensemble de mesure linéaire nulle.

Ce résultat s'applique en particulier aux fonctions entières d'ordre fini que j'ai appelées ailleurs fonctions à croissance très régulière et qui sont celles qui se présentent dans bien des applications.

IV. Théorème de M. Schottky.

11. Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$, ne prenant pas les valeurs 0 et 1 et telle que $f'(0) = c_1 \neq 0$. En posant $f(0) = c_0$ et en appliquant la formule (12) avec $p = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, on voit que $m(r, f)$ est au plus égal à $S(r)$. Le calcul de $S(r)$ se simplifie beaucoup ici puisque les $n(r, a)$ sont nuls; on trouve facilement

$$m(r, f) \leq 3 \overset{+}{\log}\, m(R, f) + 6 \log \frac{1}{R - r} + C_0 + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|$$

avec

$$C_0 = 8 \log 2 + \log |c_0(c_0 - 1)| + \overset{+}{\log} \big| \log |c_0| \big| + \overset{+}{\log} \big| \log |c_0 - 1| \big|.^{1} \tag{38}$$

Or, $\overset{+}{\log}\, u$ est inférieur à $\sqrt{u}$, on a donc a fortiori, pour $r > \frac{2}{3}$,

$$m(r, f) < 3 \sqrt{m(R, f)} + D \log \frac{1}{R - r} + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right| \tag{39}$$

$$(D = 6 + C_0).$$

[1] La méthode même de M. Nevanlinna conduit à une inégalité avec des coefficients numériques inférieurs; voir *Beweis des Picard-Landauschen Satzes, Göttinger Nachrichten,* 1924.

En employant la méthode de MM. Borel et Landau on déduit de là que l'on a

$$(40)\qquad m(r, f) \leq 6\, D \log \frac{1}{R - r} + 4 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|.$$

Car, si l'inégalité contraire avait lieu pour un nombre r_1 $\left(r_1 > \frac{2}{3}\right)$, en posant

$$r_2 = r_1 + \frac{1}{3}(1 - r_1), \ldots, r_{p+1} = r_p + \frac{1}{3^p}(1 - r_1), \ldots$$

on aurait

$$m(r_p, f) > (2p + 4)\, D \log \frac{1}{1 - r_1} + 4 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|$$

ce qui conduirait à un résultat absurde puisque r_p tend vers $r_1 = \frac{1}{2}(1 - r_1)$. Pour démontrer cette dernière inégalité, qui est vérifiée par hypothèse pour $p = 1$, on procède par récurrence: si l'inégalité est vérifiée pour p, on a d'après (39)

$$3 \sqrt{m(r_{p+1}, f)} > (2p + 4)\, D \log \frac{1}{1 - r_1} + 3 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right| - D \log \frac{3^p}{1 - r_1}$$

$$> (p + 3)\, D \log \frac{1}{1 - r_1} + 3 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|$$

donc, comme $D \log \frac{1}{1 - r_1} > 6$,

$$m(r_{p+1}, f) > \left[\left(1 + \frac{1}{3} p\right) D \log \frac{1}{1 - r_1} + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|\right]^2 > (2p + 6)\, D \log \frac{1}{1 - r_1} + 4 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|.$$

L'inégalité (40) est donc vérifiée pour $r > \frac{2}{3}$ et puisque $m(r, f)$ est croissante on a, quel que soit $r < 1$,

$$(41)\qquad m(r, f) \leq 6\,(C_0 + 6) \log \frac{3}{1 - r} + 4 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_1} \right|,$$

C_0 étant une fonction de c_0 qui, d'après sa définition (38), est bornée lorsque $|c_0|$ est borné.

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ et ne prenant pas les valeurs 0 et 1, et soit encore $f(0)=c_0$. Si, quel que soit $|z|<1$, $|f'(z)|$ est inférieur à 1, on a

$$(42) \qquad |f(z)| < |c_0| + 1, \qquad m(r, f) < \log(|c_0| + 1).$$

Supposons que $f(z)$ puisse atteindre la valeur 1, et soit a un point pour lequel $|f'(z)| = 1$ tandis que $|f'(z)| < 1$ pour $|z| < |a| = A$. Pour $|z| \leq A$ on a encore les inégalités (42). Soit r un nombre supérieur à $\frac{1}{2}(A+1)$. Faisons la transformation conforme

$$(43) \qquad Z = \frac{r^2(z-a)}{a'z-r^2}$$

a' étant le point imaginaire conjugué de a; $f(z)$ se transforme en $F(Z)$ qui est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle

$$|Z| < \frac{r^2 + Ar^2}{r^2 + A},$$

en outre on a

$$|F(0)| < |c_0| + 1, \qquad |F'(0)| = \frac{r^2 - A^2}{r^2} > r - A.$$

En appliquant à cette fonction l'inégalité (41) on a

$$m(r, F) < C_0' \log \frac{3r(A+1)}{(r-A)(1-r)} + 4 \log \frac{2}{r-A} < C_0'' \log \frac{12}{1-r}.$$

C_0'' est égal à $76 + 12\,C_0$, C_0 étant la constante de la formule (41), c'est une fonction de $c_0 = f(0)$ qui est bornée lorsque $|c_0|$ est borné. La transformation (43) conserve la circonférence $|z| = r$, et l'on a

$$m(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(re^{iu})|\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} f(re^{iu}) \frac{r^2 - A^2}{r^2 + A^2 - 2rA\cos(u-v)}\, du$$

$$> m(r, f)\frac{r-A}{r+A}.$$ [1]

[1] Cette méthode donne le passage de l'égalité de Jensen à la formule de Jensen-Poisson qui sert de base à la méthode de M. Nevanlinna. M. Bloch a obtenu, d'une manière indépendante, une démonstration du théorème de M. Schottky un peu différente de celle-ci.

Ainsi, pour $r > \frac{1}{2}(A+1)$, nous avons

$$m(r,f) < \frac{\varphi(c_0)}{1-r} \log \frac{2}{1-r}$$

et puisque $m(r,f)$ est croissant, on en déduit, pour r compris entre A et $\frac{1}{2}(A+1)$, donc a fortiori pour $r > A$,

$$m(r,f) < \frac{2\varphi(c_0)}{1-r} \log \frac{4}{1-r}.$$

Enfin en se reportant à (42) on voit que l'on a, quel que soit r, et dans tous les cas où $f(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1:

$$m(r,f) < \frac{\chi(c_0)}{1-r} \log \frac{4}{1-r},$$

$\chi(c_0)$ restant bornée lorsque $|c_0|$ est borné. C'est le théorème de M. Schottky, sous une forme d'ailleurs moins précise que celle obtenue par M. Landau[1] au moyen de la fonction modulaire, puisqu'on en déduit seulement

$$\log |f(z)| < \frac{2\chi(c_0)}{(1-r)^2} \log \frac{4}{1-r}.$$

[1] *Über den Picard'schen Satz* (*Viertelj. der naturf. Gesellschaft in Zürich,* 1906).