

# Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire

par

BERTRAND DEROIN

*Université Paris-Sud  
Orsay, France*

VICTOR KLEPTSYN

*Université de Genève  
Genève, Suisse*

ANDRÉS NAVAS

*Universidad de Santiago de Chile  
Santiago, Chile*

## Table des matières

Introduction . . . . .	200
Quelques motivations . . . . .	200
Présentation des résultats . . . . .	201
Sur la méthode de démonstration . . . . .	206
1. Quelques exemples . . . . .	207
1.1. Les contre-exemples de Denjoy–Herman . . . . .	208
1.2. Le lemme de Kopell et les contre-exemples de Pixton–Tsuboi . . . . .	211
2. Le principe général . . . . .	214
3. Preuves des théorèmes A, B et C . . . . .	217
3.1. Le théorème de Denjoy généralisé . . . . .	217
3.2. Le lemme de Kopell généralisé . . . . .	223
3.3. Un théorème à la Denjoy–Szekeres . . . . .	224
4. Le théorème de Sacksteder généralisé . . . . .	226
4.1. Une alternative topologique pour des pseudo-groupes d’homéomorphismes . . . . .	226
4.2. Pseudo-groupes de difféomorphismes : le cas $C^{1+\tau}$ . . . . .	231
4.3. Pseudo-groupes de difféomorphismes : le cas $C^1$ . . . . .	235
4.4. Groupes de difféomorphismes du cercle . . . . .	237
5. Appendice . . . . .	246
5.1. Contraction topologique et mesure stationnaire . . . . .	246
5.2. Exposants de Lyapunov et mesures invariantes . . . . .	254
Bibliographie . . . . .	258

## Introduction

### Quelques motivations

Dans ce travail, nous nous intéressons à la dynamique des groupes de difféomorphismes de variétés unidimensionnelles (séparées) dont la classe de différentiabilité est *intermédiaire*, c'est-à-dire supérieure ou égale à  $C^1$  mais strictement inférieure à  $C^2$ . À première vue, cela peut paraître un sujet d'étude à la fois artificiel et très technique. Il y a néanmoins plusieurs raisons qui le justifient.

La première est d'ordre dynamique. On sait depuis le célèbre travail de Denjoy [10] que l'étude de la dynamique des difféomorphismes de classe  $C^2$  du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel se ramène (à conjugaison topologique près) à celle des rotations. Ce n'est plus le cas en classe  $C^1$ , ce qui a été illustré aussi dans [10] par des « contre-exemples » (voir également [3]). Au §3 du chapitre X de [27], et en suivant une idée de Milnor et Sergeraert, Herman a amélioré ces contre-exemples en les rendant de classe  $C^{1+\tau}$  pour tout  $\tau < 1$ . Au §5 de ce même chapitre, on trouve des contre-exemples de Denjoy continus avec des centralisateurs non isomorphes à  $\mathbf{Z}$ . Il est bien possible que Herman ait déjà réfléchi au problème d'améliorer la classe de différentiabilité de ces derniers. Ce problème est en fait au cœur de notre travail.

Une autre raison pour entreprendre cette étude, de nature cohomologique, est liée à l'invariant de Godbillon–Vey. Rappelons que pour des groupes agissant sur des variétés unidimensionnelles, cet invariant correspond à une classe de 2-cohomologie (à valeurs réelles) dont le représentant (non homogène) est donné par

$$\mathcal{GV}(f, g) = \int \log f' \, d\log(g' \circ f).$$

Cette définition a un sens évident lorsque les difféomorphismes  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$ . Or, on s'aperçoit facilement que le domaine de définition le plus naturel est celui des difféomorphismes dont le logarithme de la dérivée appartient à l'espace de Sobolev  $H^{1/2}$ . En particulier, l'invariant peut être défini (et il est continu) dans le groupe des difféomorphismes de classe  $C^{3/2+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Cette « extension » proposée par Hurder et Katok dans [32] (voir aussi [73]) est à comparer avec le travail remarquable [71] de Tsuboi, où il est démontré (parmi bien d'autres choses) qu'aucune extension n'est envisageable en classe  $C^1$  (voir également [72], [74]). La preuve de Tsuboi s'appuie sur l'existence d'une famille assez large de contre-exemples  $C^1$  (dûs à Pixton [60]) à un lemme classique de Kopell [41], selon lequel le centralisateur de tout difféomorphisme de classe  $C^2$  de l'intervalle  $[0, 1[$  sans point fixe à l'intérieur agit librement sur  $]0, 1[$ . Si l'on tient compte de l'extension de Hurder et Katok, on devrait s'attendre à ce que de tels contre-exemples

ne puissent pas être construits en classes intermédiaires trop élevées. Cette motivation a amené Tsuboi à construire des contre-exemples au lemme de Kopell (et aussi au théorème de Denjoy avec des centralisateurs non isomorphes à  $\mathbf{Z}$ ) dont la régularité est supérieure à  $C^1$  [74]. Il a également conjecturé des phénomènes de rigidité en classe intermédiaire, mais il n'a pas donné de résultats concrets dans cette direction. Notre travail confirme l'intuition de Tsuboi, et de plus il montre que ses constructions sont en fait optimales en ce qui concerne la régularité atteinte.

Signalons en passant que la classe de différentiabilité  $C^{3/2}$  apparaît de manière naturelle dans d'autres situations. Par exemple, dans [51], [55] et [56], elle se trouve être la classe critique pour la définition d'un autre invariant cohomologique : le « cocycle de Liouville ». Ce cocycle est un outil important dans l'étude de phénomènes de rigidité (dans l'esprit des théorèmes de Margulis et Zimmer) pour les actions de groupes « de rang supérieur » par difféomorphismes du cercle (voir [48] pour un lien entre le cocycle de Liouville et la classe de Godbillon–Vey; voir aussi [50]). D'autre part, la résolution d'équations différentielles stochastiques dans le groupe des difféomorphismes du cercle donne lieu à des analogues de la mesure de Wiener sur  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$  dont le support s'avère être précisément l'espace des difféomorphismes de classe  $C^{3/2}$  (voir [44], [43]). À notre connaissance, les théorèmes A, B et C de ce travail dans le cas  $d=2$  correspondent aux premiers résultats de nature essentiellement dynamique et liés à la classe  $C^{3/2}$ .

La dernière justification de notre étude concerne la théorie des feuilletages de codimension 1. En effet, en s'inspirant du théorème classique de Denjoy, cette théorie s'est développée en admettant dans la plupart des cas une hypothèse de régularité transverse  $C^2$ . Or, si l'on tient compte de sa nature dynamique, et du fait que de nombreux résultats fondamentaux en systèmes dynamiques, notamment la théorie de Pesin, sont encore valables en classe  $C^{1+\tau}$  (et parfois même en classe  $C^1$ ), on peut espérer que plusieurs propriétés des feuilletages de classe  $C^2$  soient encore valables dans ce contexte (quelques progrès importants dans cette direction sont déjà connus [12], [28], [29], [31], [30], [33]). Si tel est le cas, on devrait s'attendre également à voir apparaître des obstructions en régularité intermédiaire.

### Présentation des résultats

Suivant un principe exprimé par Herman dans l'introduction de [27], « tout chercheur désireux de travailler sur les difféomorphismes du cercle doit s'habituer à construire et étudier des exemples ». Ce point de vue est illustré par le fait que Denjoy lui-même ait abouti à son célèbre théorème parce que « il ne pouvait pas en construire des contre-exemples de classe  $C^2$  » (des contre-exemples qui, néanmoins, étaient vraisemblables à Poincaré). Dans ce même esprit, si l'on essaie de construire des contre-exemples en ré-

gularité inférieure à  $C^2$  à plusieurs résultats de dynamique unidimensionnelle, on voit apparaître des obstructions pour des classes de différentiabilité intermédiaires très précises. La première est liée à des actions libres de groupes abéliens sur le cercle.

**THÉORÈME A.** *Si  $d$  est un entier supérieur ou égal à 2 et  $\varepsilon > 0$ , alors toute action libre de  $\mathbf{Z}^d$  par difféomorphismes de classe  $C^{1+1/d+\varepsilon}$  du cercle est minimale.*

Ce résultat peut être considéré comme une généralisation du théorème de Denjoy (le cas  $d=1$ ) avec une petite hypothèse de régularité supplémentaire (donnée par le  $\varepsilon > 0$ ). Il est bien possible qu'il soit encore valable en classe  $C^{1+1/d}$ . Nous en donnons une preuve simple dans ce cas sous une hypothèse dynamique assez naturelle (voir la proposition 1.1). Signalons que le théorème A a été conjecturé dans [74] par Tsuboi, qui l'a également illustré par des contre-exemples de classe  $C^{1+1/d-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$  (nous discuterons de telles constructions au §1.1). Il serait sans doute intéressant d'obtenir, sous les hypothèses du théorème, un résultat d'ergodicité (par rapport à la mesure de Lebesgue) similaire à celui valable pour les difféomorphismes de classe  $C^2$  du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel (voir [37], [27]). Quant à la régularité de la linéarisation, le lecteur trouvera dans le §3 de [42] des résultats optimaux (qui généralisent ceux de Moser [49]) pour des groupes commutatifs engendrés par des petites perturbations de rotations.<sup>(1)</sup>

Dû à l'absence de récurrence pour la dynamique, le cas où il existe des points fixes globaux, i.e. le cas de l'intervalle, est fort différent. Dans ce contexte, on dispose d'un analogue du théorème de Denjoy : c'est le théorème de Kopell–Szekerés concernant la rigidité des centralisateurs de difféomorphismes de classe  $C^2$  (voir par exemple [77]). Le résultat suivant peut être vu comme une généralisation du fameux *lemme de Kopell* (le cas  $d=1$ ) pour les actions de  $\mathbf{Z}^{d+1}$  (sous une légère hypothèse supplémentaire de régularité). Une nouvelle fois, la classe de différentiabilité  $C^{1/d+\varepsilon}$  pour la dérivée est optimale (à  $\varepsilon > 0$  près). La construction de contre-exemples, bien plus délicate que dans le cas du cercle, apparaît aussi dans [74] (voir le §1.2).

**THÉORÈME B.** *Soient  $d \geq 2$  un entier et  $\varepsilon > 0$ . Soient  $f_1, \dots, f_{d+1}$  des difféomorphismes de classe  $C^1$  de l'intervalle  $[0, 1]$  qui commutent entre eux. Supposons qu'il existe des intervalles ouverts disjoints  $I_{n_1, \dots, n_d}$  qui sont disposés dans  $]0, 1[$  en respectant l'ordre lexicographique et tels que, pour tout  $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{Z}^d$ ,*

$$\begin{aligned} f_i(I_{n_1, \dots, n_i, \dots, n_d}) &= I_{n_1, \dots, n_i-1, \dots, n_d} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, d\}, \\ f_{d+1}(I_{n_1, \dots, n_d}) &= I_{n_1, \dots, n_d}. \end{aligned} \tag{1}$$

*Si  $f_1, \dots, f_d$  sont de classe  $C^{1+1/d+\varepsilon}$ , alors la restriction de  $f_{d+1}$  à la réunion des  $I_{n_1, \dots, n_d}$  est l'identité.*

---

<sup>(1)</sup> Nous devons impérativement signaler que les exemples du §2 de [42] sont erronés. Ceci est une conséquence directe de la proposition 1.1, et résulte également du théorème A.

Le lecteur pourrait être incommodé à cause de l'hypothèse combinatoire (1). Sa première justification vient du fait que c'est en utilisant des difféomorphismes (de petite régularité) qui vérifient cette propriété que Tsuboi a démontré dans [71] le théorème d'acyclicité cohomologique auquel nous faisons référence au paragraphe précédent. D'autre part, lorsqu'on étudie des actions de groupes abéliens sur l'intervalle qui ne sont pas libres à l'intérieur, on tombe nécessairement sur des éléments qui vérifient ce type d'hypothèse (par exemple, elle apparaît lors de la démonstration du lemme de Kopell classique : voir le §1.2). Ceci reste valable pour des actions d'autres classes de groupes, ce qui a été exploité avec succès par le troisième auteur dans [58]. Ce dernier travail, à la fois précurseur de et ultérieur à celui-ci, sera discuté un peu plus loin.

Rappelons qu'un théorème classique de Hölder (voir par exemple [21], [57]) stipule que toute action libre par homéomorphismes de la droite est topologiquement semiconjugée à une action par des translations; en particulier, le groupe qui agit doit être isomorphe à un sous-groupe de  $(\mathbf{R}, +)$ . Puisque l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  s'identifie topologiquement à la droite, si l'on s'intéresse à des actions par difféomorphismes de  $[0, 1]$  qui sont libres à l'intérieur, alors la question qui s'impose est celle de savoir si la semi-conjugaison induite est nécessairement une conjugaison topologique. Pour des groupes abéliens de rang supérieur, cette question est équivalente à celle de la densité des orbites dans  $]0, 1[$ . Le résultat suivant (encore optimal à  $\varepsilon > 0$  près) répond à cette question. Il est à rapprocher avec un théorème de Szekeres sur l'existence de champs de vecteurs associés aux difféomorphismes de classe  $C^2$  de l'intervalle sans point fixe à l'intérieur [66]. Il est aussi étroitement lié au lemme 3.2 de [53].

**THÉORÈME C.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{1+\tau}([0, 1])$  isomorphe à  $\mathbf{Z}^d$ , avec  $\tau > 1/d$  et  $d \geq 2$ . Si la restriction à  $]0, 1[$  de l'action de  $\Gamma$  est libre, alors elle est minimale et topologiquement conjuguée à l'action d'un groupe de translations.*

Les théorèmes B et C (resp. A, B et C) devraient sans nulle doute permettre de formuler des résultats généraux qui décrivent toutes les possibilités d'actions de groupes abéliens sur l'intervalle (resp. sur le cercle) par difféomorphismes de régularité intermédiaire. Des généralisations moins évidentes sont aussi envisageables pour d'autres classes de groupes, tels que des groupes nilpotents [62] ou résolubles [19], [52], [53]. Dans ce sens, un résultat concret et important a été obtenu par le troisième auteur dans [58].

**THÉORÈME.** (Navas) *Si  $\tau > 0$  alors tout sous-groupe de type fini de  $\text{Diff}_+^{1+\tau}([0, 1])$  sans semigroupe libre à deux générateurs est presque nilpotent. De plus, cette affirmation n'est pas valable dans  $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ .*

Ce théorème fournit une première obstruction pour la réalisation d'un groupe abstrait comme un groupe de difféomorphismes de classe  $C^{1+\tau}$  de l'intervalle. Rappelons

par ailleurs que le fameux théorème de stabilité de Thurston [70] donne une obstruction pour des réalisations en classe  $C^1$  (voir aussi la proposition 4.2.25 de [57]). Dans cette direction, le résultat suivant montre qu'il n'y a pas d'obstruction pour des réalisations lipschitziennes. Sa preuve est étonnamment simple, et s'inspire d'un travail du premier auteur sur les feuilletages minimaux de codimension 1 [11]. Signalons en passant que, d'après [24], un tel résultat ne peut être valable qu'en dimension 1.

**THÉORÈME D.** *Tout sous-groupe dénombrable de  $\text{Homéo}_+(S^1)$  ou de  $\text{Homéo}_+([0, 1])$  est topologiquement conjugué à un groupe d'homéomorphismes lipschitziens.*

Si l'on s'intéresse à des spécificités en régularité intermédiaire motivées par la théorie des feuilletages de codimension 1 et liées plutôt à la dynamique et pas à la structure de groupe, le premier problème qui se pose est celui de la validité du théorème classique de Sacksteder en classe inférieure à  $C^2$ . Ce problème a été d'abord abordé par Hurder dans plusieurs travaux [28], [29], [31], [30]. En particulier, dans [30] il a démontré (de manière indépendante et par des méthodes complètement différentes qui s'appuient sur la théorie de Pesin feuilletée) un résultat étroitement lié au théorème suivant.

**THÉORÈME E.** *Soit  $\Gamma$  un pseudo-groupe d'homéomorphismes respectant l'orientation d'une variété unidimensionnelle compacte (et séparée)  $X$ . Si  $\Gamma$  ne préserve aucune mesure de probabilité sur  $X$ , alors  $\Gamma$  admet des orbites de type ressort. Si de plus  $\Gamma$  est constitué de difféomorphismes locaux de classe  $C^1$ , alors il admet des orbites de type ressort hyperboliques.*

Rappelons que l'orbite  $O(x)$  d'un point  $x \in X$  est dite *de type ressort* si d'une part il existe un élément  $g \in \Gamma$  dont le domaine de définition contient un demi-intervalle  $[x, p[$  ou  $]p, x]$  pour lequel  $x$  est un point fixe attractif topologique (i.e.  $g^n(p)$  converge vers  $x$  quand  $n$  tend vers l'infini), et d'autre part  $O(x)$  intersecte l'intérieur de ce demi-intervalle. La première affirmation du théorème est à comparer avec le §2.1 de [58]. Sa démonstration suit une idée contenue dans la partie moins valorisée (et pourtant très intéressante) du travail célèbre [64] de Sacksteder, et elle est complètement indépendante du reste de l'article. La preuve de la deuxième affirmation consiste alors à montrer que, sous une hypothèse de régularité  $C^1$ , en présence de feuilles ressort topologiques il existe nécessairement des feuilles ressort hyperboliques. Pour ce faire, la méthode utilisée est simple et directe : en classe  $C^{1+\tau}$  elle est à rapprocher avec celle des preuves des théorèmes A, B et C, bien qu'en classe  $C^1$  elle nécessite un peu plus de travail. Nous espérons que cette méthode puisse être appliquée à l'étude des applications de l'intervalle dans un esprit dynamique « classique ». Par ailleurs, le théorème E permet d'obtenir un résultat de différentiabilité de conjugaisons qui raffine l'un des théorèmes contenus dans [23] (voir la proposition 4.9).

Le théorème E est un résultat « local », et il est naturel de se demander s'il en existe des versions « globales ». Bien sûr, de telles versions ne sont envisageables que pour des groupes de difféomorphismes. Le théorème suivant répond à cette question pour le cas du cercle.

**THÉORÈME F.** *Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Diff}_+^1(S^1)$  qui ne préserve aucune mesure de probabilité du cercle, alors  $\Gamma$  contient des éléments n'ayant que des points fixes hyperboliques.*

Remarquons que l'hypothèse de non existence d'une mesure de probabilité invariante équivaut à ce que le groupe  $\Gamma$  ne soit pas semi-conjugué à un groupe de rotations et qu'il n'ait pas d'orbite finie.

Tel qu'il est énoncé, le théorème F généralise des résultats obtenus par Hurder dans [28] et [29] dans trois directions : l'hypothèse faite sur la dynamique (nous admettons aussi les groupes non abéliens agissant minimalement), le nombre de points fixes hyperboliques, et la non existence d'autres points fixes. La première direction n'est pas nouvelle, car il avait été déjà remarqué par Ghys que, en classe  $C^2$ , le théorème de Sacksteder (qui en général est présenté comme un résultat qui n'est valable qu'en présence d'un minimal exceptionnel) reste valide pour les groupes non commutatifs qui agissent de manière minimale (voir la page 11 de [13]). De plus, Hurder a récemment démontré que tout sous-groupe de  $\text{Diff}_+^1(S^1)$  sans probabilité invariante possède des éléments avec des points fixes hyperboliques [31], [30]. La deuxième direction, suivant laquelle il existe des éléments avec des points fixes hyperboliquement dilatants et contractants, est une amélioration non banale déjà en classe  $C^2$ . Finalement, l'obtention d'un élément n'ayant que des points fixes hyperboliques est un raffinement bien plus subtil (en effet, même dans le cas analytique réel on ne dispose d'aucune démonstration de ce fait par des méthodes « standard »). Signalons de plus que dans la preuve du théorème F nous démontrons l'existence d'éléments dont le nombre de points fixes est *minimal* dans un sens bien précis. Avec ce complément le théorème F est certainement le meilleur possible dans le contexte.

Pour la preuve du théorème F nous nous appuyons fortement sur des résultats concernant la mesure stationnaire et les exposants de Lyapunov d'une action. Même s'ils ne sont pas tous originaux, ces résultats ou bien ne sont pas faciles à situer dans la littérature (proposition 5.2), ou bien ils sont des corollaires d'autres résultats plus forts et élaborés (propositions 5.5 et 5.9). Pour la commodité du lecteur nous les avons inclus dans l'appendice de ce travail avec des démonstrations relativement simples (et nouvelles). Signalons cependant que cet appendice contient aussi des résultats nouveaux (et qui portent un intérêt en soi), notamment la proposition 5.7, ainsi que la preuve du théorème D.

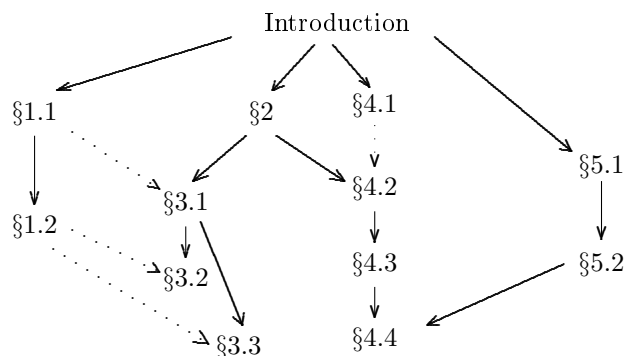
### Sur la méthode de démonstration

L'un des aspects techniques les plus importants de la dynamique unidimensionnelle différentiable est lié à la possibilité de contrôler la distorsion (linéaire ou projective) des itérées d'une application (ou de composées de différentes applications). Dans le cas d'une dynamique « inversible », i.e. lorsqu'il n'y a pas de point critique, deux principes sont plus au moins canoniques pour contrôler la distorsion linéaire. Le premier vient du théorème de Denjoy : en classe  $C^2$ , on peut contrôler la distorsion des itérées sur des intervalles disjoints en la comparant avec la somme des longueurs de ces intervalles. Le deuxième principe, dit du « folklore » dans [67], est valable en classe  $C^{1+\tau}$  lorsqu'on sait *a priori* qu'il y a suffisamment d'hyperbolicité.

Dans ce travail nous introduisons des nouvelles méthodes pour contrôler la distorsion en classe intermédiaire lorsque la dynamique a une structure topologique et combinatoire bien précise et qui apparaît de manière naturelle dans de nombreuses situations. Ces méthodes s'appuient sur des arguments de nature probabiliste (inspirés en grande partie du travail [12] des deux premiers auteurs sur la mesure stationnaire des feuilletages de codimension 1) : nous cherchons à assurer un contrôle uniforme pour la distorsion d'une suite aléatoire « typique » de compositions (bien qu'en général il soit impossible de déterminer précisément quelle suite conviendra!). Nous croyons que, au delà même des théorèmes présentés, ces méthodes sont celles qui donnent le plus d'intérêt à cet article. D'ailleurs, il est très raisonnable d'essayer de les utiliser afin de raffiner d'autres résultats classiques de la théorie des feuilletages de codimension 1, comme par exemple ceux de Duminy [7], [54] (voir à ce propos [33]). Il pourrait s'avérer également intéressant de repenser en régularité intermédiaire la *théorie des niveaux* [6], [26], tout en s'appuyant sur les techniques introduites dans ce travail.

*Quelques recommandations pour la lecture.* La structure de cet article n'est pas toujours linéaire. Le lecteur pressé pour la démonstration du théorème de Denjoy généralisé peut aller directement au §2 et puis au §3.1 (bien que la lecture des exemples du §1.1 peut aider à éclaircir un peu le panorama). Celui qui est plutôt intéressé par le théorème de Sacksteder peut passer immédiatement au §2 et puis aux §§4.1–4.3 (où l'on démontre les versions généralisées pour des pseudo-groupes). Le cas des difféomorphismes du cercle du §4.4 nécessite cependant des résultats probabilistes de l'appendice (qui peuvent être étudiés sans la nécessité du reste de l'article). Nous proposons ici un schéma d'interdépendance logique entre les différents paragraphes. Une flèche continue représente une lecture indispensable, alors qu'une flèche pointillée indique une lecture non indispensable mais tout à fait conseillée pour la compréhension.





*Remerciements.* Nous sommes très reconnaissants envers Étienne Ghys pour avoir partagé avec nous ses connaissances sur les groupes de difféomorphismes du cercle, ainsi qu'envers Sylvain Crovisier, sans l'aide de qui nous n'aurions jamais réalisé la validité des versions  $C^1$  (et non seulement  $C^{1+\tau}$ ) du théorème de Sacksteder. Nous exprimons aussi notre gratitude à Jérôme Buzzi, Danijela Damjanovic, Anna Erschler, Isabelle Liousse et Jean-Christophe Yoccoz, pour l'intérêt qu'ils ont porté à cet article, ainsi qu'au rapporteur anonyme dont le travail remarquable de correction a permis d'améliorer significativement la présentation.

Ce travail s'est déroulé à l'IHÉS et à l'UMPA de l'ENS-Lyon, et nous voudrions remercier ces deux institutions pour leur hospitalité. Le deuxième auteur voudrait aussi remercier le financement des projets de recherche RFBR 7-01-00017-a et CNRS-L\_a 05-01-02801, ainsi que celui du Swiss National Science Foundation.

## 1. Quelques exemples

Tout au long de ce travail nous ne considérerons que des transformations qui respectent l'orientation. En nous inspirant du travail de Denjoy [10], où la construction des contre-exemples  $C^1$  précède au théorème (et en constitue la partie la plus longue), nous ferons une révision rapide des constructions d'exemples de difféomorphismes du cercle et de l'intervalle à des centralisateurs non conjugués respectivement à des groupes de rotations et de translations. Rappelons qu'étant donné un homéomorphisme  $\eta: ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$ , on dit qu'une fonction  $\psi$  définie sur le cercle ou un intervalle et à valeurs réelles est  $\eta$ -continue s'il existe  $C < \infty$  tel que pour tout  $x, y$  on ait

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C\eta(|x - y|).$$

Lorsque  $\tau$  appartient à  $]0, 1[$ , un difféomorphisme  $f$  est dit de classe  $C^{1+\tau}$  si sa dérivée est  $\eta$ -continue par rapport à  $\eta(s) = s^\tau$ , c'est-à-dire s'il existe une constante  $C < \infty$  telle que pour tout  $x, y$  on ait  $|f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y|^\tau$  (on dit également que  $f'$  est  $\tau$ -Hölder continue). Nous dirons que  $f$  est de classe  $C^{1+\text{lip}}$  si sa dérivée est lipschitzienne.

### 1.1. Les contre-exemples de Denjoy–Herman

Bien que les exemples d'actions libres non minimales et à régularité optimale de  $\mathbf{Z}^d$  sur le cercle n'apparaissent que dans [74], la méthode utilisée ici est essentiellement la même que celle de [27]. Pour notre présentation nous nous servirons de la famille d'applications  $\varphi_{a,b}: [0, a] \rightarrow [0, b]$  introduite par Yoccoz (voir [14]) et donnée sur  $]0, a[$  par  $\varphi_{a,b}(x) = \varphi_b \circ (\varphi_a)^{-1}(x)$ , où  $\varphi_a: \mathbf{R} \rightarrow ]0, a[$  est défini par

$$\varphi_a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^u \frac{ds}{s^2 + (1/a)^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} \arctan(au).$$

En faisant  $u = \varphi_a^{-1}(x)$  on voit que

$$\varphi'_{a,b}(x) = \varphi'_b(u) (\varphi_a^{-1})'(x) = \frac{\varphi'_b(u)}{\varphi'_a(u)} = \frac{u^2 + 1/a^2}{u^2 + 1/b^2},$$

ce qui montre que  $\varphi_{a,b}$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  tangent à l'identité aux extrémités. De plus, lorsque  $\frac{1}{2} \leq a/b \leq 2$  on trouve la majoration (voir [58])

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq \frac{6\pi}{a} \left| \frac{b}{a} - 1 \right|. \quad (2)$$

Si pour des intervalles non dégénérés  $I = [x_0, y_0]$  et  $J = [x_1, y_1]$  on désigne par  $\varphi(I, J): I \rightarrow J$  le difféomorphisme donné par

$$\varphi(I, J)(x) = x_1 + \varphi_{y_0 - x_0, y_1 - x_1}(x - x_0),$$

alors on constate immédiatement que la famille des  $\varphi(I, J)$  est équivariante, dans le sens que

$$\varphi(J, K) \circ \varphi(I, J) = \varphi(I, K). \quad (3)$$

Grâce aux propriétés précédentes, cette famille permet de construire des contre-exemples de Denjoy de classe  $C^{1+1/d-\varepsilon}$  dont le centralisateur contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbf{Z}^d$  qui agit librement. Plus généralement, nous construirons de tels contre-exemples en classe  $C^{1+\eta}$  par rapport au module de continuité  $\eta(s) = s^{1/d} [\log(1/s)]^{1/d+\delta}$ , où  $\delta$  est un réel strictement positif.<sup>(2)</sup> Pour cela, on commence avec  $d$  rotations  $R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_d}$  d'angles *indépendants sur les rationnels*, i.e. tels que pour tout  $(r_0, r_1, \dots, r_d) \in \mathbf{Q}^{d+1}$  non nul on a  $r_1\theta_1 + \dots + r_d\theta_d \neq r_0$ . On fixe un entier  $m \geq d-1$  et un point  $p \in S^1$ , et pour chaque  $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbf{Z}^d$  on remplace le point  $p_{i_1, \dots, i_d} = R_{\theta_1}^{i_1} \dots R_{\theta_d}^{i_d}(p)$  par un intervalle  $I_{i_1, \dots, i_d}$  de longueur

$$\ell_{(i_1, \dots, i_d)} = \frac{1}{(|i_1| + \dots + |i_d| + m)^d [\log(|i_1| + \dots + |i_d| + m)]^{1+\delta}}.$$

---

<sup>(2)</sup> On vérifie sans difficulté que si un difféomorphisme a une dérivée  $\eta$ -continue alors il est de classe  $C^{1+\tau}$  pour tout  $\tau < 1/d$ .

On obtient ainsi un nouveau cercle (de longueur finie  $T_m \leq 2^d / \delta (\log m)^\delta (d-1)!$ ), sur lequel les  $R_{\theta_j}$  induisent de manière unique des homéomorphismes  $f_j$  vérifiant

$$f_j(x) = \varphi(I_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}, I_{i_1, \dots, 1+i_j, \dots, i_d})(x) \quad \text{pour tout } x \in I_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}.$$

En vertu des propriétés d'équivariance des  $\varphi(I, J)$ , ces homéomorphismes  $f_j$  commutent entre eux. Vérifions maintenant que  $f_1$  est de classe  $C^{1+\eta}$ , le cas des autres  $f_i$  étant analogue. Pour cela, on remarque d'abord que si  $x$  et  $y$  appartiennent au même intervalle  $I_{i_1, \dots, i_d}$ , alors  $|f_1'(x) - f_1'(y)| = |f_1''(q)| |x - y|$  pour un point  $q \in I_{i_1, \dots, i_d}$ . Ceci donne, grâce à (2) et au fait que la fonction  $s \mapsto s/\eta(s)$  est croissante,

$$\frac{|f_1'(x) - f_1'(y)|}{\eta(|x - y|)} \leq \frac{|x - y|}{\eta(|x - y|)} \frac{6\pi}{|I_{i_1, \dots, i_d}|} \left| \frac{|I_{1+i_1, \dots, i_d}|}{|I_{i_1, \dots, i_d}|} - 1 \right| \leq \frac{6\pi}{\eta(|I_{i_1, \dots, i_d}|)} \left| \frac{|I_{1+i_1, \dots, i_d}|}{|I_{i_1, \dots, i_d}|} - 1 \right|.$$

Or, l'expression à droite est égale à

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(|i_1| + \dots + |i_d| + m)^d [\log(|i_1| + \dots + |i_d| + m)]^{1+\delta}}{(|1+i_1| + \dots + |i_d| + m)^d [\log(|1+i_1| + \dots + |i_d| + m)]^{1+\delta}} - 1 \right| \\ & \times \frac{6\pi(|i_1| + \dots + |i_d| + m) [\log(|i_1| + \dots + |i_d| + m)]^{(1+\delta)/d}}{[d \log(|i_1| + \dots + |i_d| + m) + (1+\delta) \log \log(|i_1| + \dots + |i_d| + m)]^{1/d+\delta}}. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $s \mapsto s^d (\log s)^{1+\delta}$ , on constate que cette expression est majorable par une constante de la forme

$$\frac{C_d}{(\log m)^{\delta(1-1/d)}}.$$

Lorsque  $x$  et  $y$  appartiennent à des intervalles  $|I_{i_1, \dots, i_d}|$  distincts, la même majoration modulo un facteur 2 est valable, car les difféomorphismes sont tangents à l'identité aux extrémités de ces intervalles. Remarquons qu'en faisant tendre  $m$  vers l'infini, les difféomorphismes  $f_j$  deviennent aussi proches que l'on veut de l'identité en topologie  $C^{1+\eta}$ . Puisque  $T_m \leq 1$  pour tout  $m \in \mathbf{N}$  assez grand, ceci reste encore valable après renormalisation du cercle (de façon à ce que sa longueur soit égale à 1).

Les exemples que nous venons de construire vérifient  $f_j'(x) = 1$  pour toute extrémité  $x$  d'un des intervalles  $I_{i_1, \dots, i_d}$ . Nous verrons ci-dessous que, sous une telle hypothèse, il est impossible de fabriquer des exemples analogues de classe  $C^{1+1/d}$ . L'argument de la preuve présentée ci-après est à rapprocher avec [25] et [59].

**PROPOSITION 1.1.** *Considérons une action de  $\mathbf{Z}^d$  par difféomorphismes du cercle qui soit libre et semiconjuguée à une action par des rotations sans y être conjugquée. Supposons que pour toute composante connexe  $I$  du complémentaire du Cantor invariant minimal, et pour tout élément  $h \in \mathbf{Z}^d$ , la dérivée de (l'image de)  $h$  aux extrémités de  $I$  soit égale à 1. Alors la régularité de l'action est strictement inférieure à  $C^{1+1/d}$ .*

*Preuve.* Supposons le contraire et soient  $f_1, \dots, f_d$  les générateurs de  $\mathbf{Z}^d$  en tant que sous-groupe de  $\text{Diff}_+^{1+1/d}(S^1)$ . Notons  $C_i$  la constante de Hölder d'exposant  $1/d$  pour  $f'_i$ , et posons  $C = \max\{C_1, \dots, C_d\}$ . Fixons une composante connexe  $I$  du complémentaire du Cantor invariant, et pour chaque entier  $n \geq 0$  notons  $\ell_n$  la longueur minimale d'un intervalle de la forme  $f_1^{i_1} \dots f_d^{i_d}(I)$ , avec  $i_j \geq 0$  et  $\sum_{j=1}^d i_j = n$ . Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que tous ces intervalles ont une longueur inférieure ou égale à

$$\left( \frac{1}{C(1+1/d)} \right)^d.$$

Nous affirmons que

$$\ell_{n+1} \geq \ell_n (1 - C \ell_n^{1/d}). \quad (4)$$

En effet, si  $\ell_{n+1}$  est réalisé comme la longueur correspondante à un intervalle  $J$ , alors  $J$  est l'image par l'un des générateurs  $f_i$  d'un intervalle  $K = [a, b]$  dont la longueur est par définition supérieure ou égale à  $\ell_n$ . Puisqu'il existe  $q \in K$  tel que  $f'_i(q) = |J|/|K|$  et que  $f'_i(a) = f'_i(b) = 1$ , on a

$$\left| \frac{|J|}{|K|} - 1 \right| \leq C_i |q - a|^{1/d} \leq C |K|^{1/d},$$

d'où on obtient

$$|\ell_{n+1} - |K|| = ||J| - |K|| \leq C |K|^{1+1/d}.$$

Donc

$$\ell_{n+1} \geq |K| (1 - C |K|^{1/d}),$$

et ceci implique (4), car  $|K| \geq \ell_n$  et la fonction  $s \mapsto s(1 - Cs^{1/d})$  est croissante sur l'intervalle  $[0, (1/C(1+1/d))^d]$ .

Nous affirmons maintenant que pour  $A = \min\{\ell_1, d^d/2^{d^2}C^d\}$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\ell_n \geq \frac{A}{n^d}. \quad (5)$$

Cette inégalité est vérifiable aisément par récurrence. Pour  $n=1$  elle a lieu à cause de la condition  $A \leq \ell_1$ . D'autre part, si elle est valable pour un entier  $n \geq 1$  alors, la fonction

$$s \mapsto s(1 - Cs^{1/d})$$

étant croissante sur l'intervalle  $[0, (1/C(1+1/d))^d]$ , à partir de l'inégalité (4) et de la condition  $A^{1/d} \leq d/2^d C$  on obtient

$$\ell_{n+1} \geq \frac{A}{n^d} \left( 1 - C \frac{A^{1/d}}{n} \right) \geq \frac{A}{(n+1)^d}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la preuve de la proposition. Pour cela, remarquons que la quantité d'intervalles de la forme  $I_{i_1, \dots, i_d} = f_1^{i_1} \dots f_d^{i_d}(I)$ , avec  $i_j \geq 0$  et  $\sum_{j=1}^d i_j = n$ , est supérieure ou égale à  $Bn^{d-1}$  pour une certaine constante universelle  $B > 0$ . Ceci donne, grâce à (5),

$$\sum_{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbf{N}_0^d} |I_{i_1, \dots, i_d}| = |I| + \sum_{n \geq 1} \sum_{\sum_j i_j = n} |I_{i_1, \dots, i_d}| \geq B \sum_{n \geq 1} n^{d-1} \ell_n \geq AB \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

ce qui est absurde, car la somme des longueurs des intervalles (disjoints)  $I_{i_1, \dots, i_d}$  est finie. □

### 1.2. Le lemme de Kopell et les contre-exemples de Pixton–Tsuboi

Dans le contexte des groupes abéliens de difféomorphismes de l'intervalle on dispose du fameux lemme de Kopell [41], dont la version la plus connue n'est d'habitude énoncée qu'en classe  $C^2$ . Pour la commodité du lecteur, nous donnons ci-dessous la version générale avec une preuve simple (tirée de [57]) dont l'idée sous-jacente sera utilisée à plusieurs reprises. Rappelons qu'un difféomorphisme  $f$  de  $[0, 1[$  est de classe  $C^{1+vb}$  si sa dérivée est à variation bornée sur tout intervalle compact contenu dans  $[0, 1[$ .

LEMME. (Kopell) *Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de l'intervalle  $[0, 1[$  qui commutent entre eux. Supposons que  $f$  soit de classe  $C^{1+vb}$  et  $g$  de classe  $C^1$ . Si  $f$  n'a pas de point fixe sur  $]0, 1[$  et  $g$  possède de tels points, alors  $g$  est l'identité.*

*Preuve.* Quitte à changer  $f$  par son inverse, on peut supposer que  $f(x) < x$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ . Soit  $b \in ]0, 1[$  l'un des points fixes de  $g$ . Pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$  notons  $b_n = f^n(b)$ , et soit  $a = b_1 = f(b)$  (remarquons en passant que pour  $f_1 = f$ ,  $f_2 = g$  et  $I_n = f^n([a, b])$ , nous sommes exactement sous une hypothèse combinatoire du type (1), avec  $d=1$ ). Puisque  $g$  fixe l'intervalle  $[b_{n+1}, b_n]$ , pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  il existe  $c_n \in [b_n, b_{n+1}]$  tel que  $g'(c_n) = 1$ . Étant donné que la suite  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  tend vers l'origine et que  $g$  est de classe  $C^1$ , on a nécessairement  $g'(0) = 1$ . Notons  $M = M(f)$  la variation du logarithme de la dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[0, b]$ . Si  $u$  et  $v$  appartiennent à  $[a, b]$  alors

$$\left| \log \frac{(f^n)'(v)}{(f^n)'(u)} \right| \leq \sum_{i=1}^n |\log f'(f^{i-1}(v)) - \log f'(f^{i-1}(u))| \leq M. \tag{6}$$

En posant  $u = x \in [a, b]$  et  $v = f^{-n} g f^n(x) = g(x) \in [a, b]$ , en utilisant l'égalité

$$g'(x) = \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(f^{-n} g f^n(x))} g'(f^n(x)) = \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(g(x))} g'(f^n(x)),$$

et en passant à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini, on obtient l'inégalité

$$\sup_{x \in [a, b]} g'(x) \leq \exp M.$$

Or, ceci reste valable lorsqu'on remplace  $g$  par  $g^j$  pour n'importe quel  $j \in \mathbf{Z}$  (car  $M$  ne dépend que de  $f$ ). On en déduit que

$$\sup_{x \in [a, b]} (g^j)'(x) \leq \exp M \quad \text{pour tout } j \in \mathbf{Z}.$$

Comme  $g$  fixe  $a$  et  $b$ , ceci implique que la restriction de  $g$  à l'intervalle  $[a, b]$  est l'identité. Finalement, en conjuguant successivement par  $f$ , on conclut que  $g$  est l'identité sur tout l'intervalle  $[0, 1[$ .  $\square$

*Remarque 1.2.* Il n'est pas difficile de voir que le lemme précédent n'est plus valable lorsque  $f$  est de classe  $C^{1+vb}$  et  $g$  est supposé seulement d'être lipschitzien (voir à ce propos le théorème 3.6.13 de [57]).

On peut donner des contre-exemples au lemme de Kopell généralisé analogues à ceux du théorème de Denjoy généralisé, tout en respectant la propriété combinatoire (1). Pour cela, fixons un entier  $m \geq d-1$ , et pour  $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbf{Z}^d$  posons une nouvelle fois

$$\ell_{(i_1, \dots, i_d)} = \frac{1}{(|i_1| + \dots + |i_d| + m)^d [\log(|i_1| + \dots + |i_d| + m)]^{1+\delta}}.$$

Par récurrence sur  $j$  définissons  $\ell_{(i_1, \dots, i_{j-1})} = \sum_{i_j \in \mathbf{Z}} \ell_{(i_1, \dots, i_{j-1}, i_j)}$ . Notons

$$x_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)} = \sum_{i'_1 < i_1} \ell_{(i'_1)} + \sum_{i'_2 < i_2} \ell_{(i_1, i'_2)} + \dots + \sum_{i'_d < i_d} \ell_{(i_1, \dots, i_{d-1}, i'_d)},$$

$$y_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)} = x_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)} + \ell_{(i_1, \dots, i_d)}.$$

Considérons le difféomorphisme  $f_j$  de  $[0, 1]$  dont la restriction aux intervalles

$$[x_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)}, y_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)}]$$

coïncide avec

$$\varphi([x_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)}, y_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d)}], [x_{(i_1, \dots, i_{j-1}, \dots, i_d)}, y_{(i_1, \dots, i_{j-1}, \dots, i_d)}]).$$

Les estimées qui précèdent la proposition 1.1 permettent de démontrer une nouvelle fois que les  $f_i$  ainsi obtenus sont de classe  $C^{1+\eta}$  par rapport au module de continuité  $\eta(s) = s^{1/d} [\log(1/s)]^{1/d+\delta}$ . On obtient donc des contre-exemples au lemme de Kopell donnés par

des actions de  $\mathbf{Z}^d$  par difféomorphismes de classe  $C^{1+1/d-\varepsilon}$  de l'intervalle. Cependant, nous devons impérativement souligner que la régularité atteinte par cette méthode n'est pas optimale. Pour aboutir à la classe optimale  $C^{1+1/(d-1)-\varepsilon}$ , il est nécessaire de modifier la construction précédente afin de supprimer les tangences à l'identité « excessives ». En effet, une modification simple de la proposition 1.1 montre que par cette méthode on n'atteindra même pas la classe  $C^{1+1/d}$ . La méthode pour la construction des contre-exemples optimaux que nous esquissons ci-dessous pour le cas d'actions de  $\mathbf{Z}^2$  est due essentiellement à Pixton [60] et a été exploitée par Tsuboi dans [74].

Soit  $X = \varrho \partial / \partial x$  un champ de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$  tel que  $|\varrho'(x)| \leq 1$  pour tout  $x \in [0, 1]$ , et tel que  $\varrho(x) = x$  pour tout  $x \in [0, \frac{1}{8}]$  et  $\varrho(x) = 0$  pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Désignons par  $\varphi^t(x)$  le flot associé à  $X$ . Pour  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $t \geq 0$ , le difféomorphisme  $x \mapsto b\varphi^t(x/a)$  envoie l'intervalle  $[0, a]$  sur  $[0, b]$ , avec dérivée égale à  $b/a$  sur  $[\frac{1}{2}a, a]$  et  $be^t/a$  à l'origine. Étant donnés  $a' < 0 < a$  et  $b' < 0 < b$ , considérons le difféomorphisme  $\varphi_{b',b}^{a',a} : [0, a] \rightarrow [0, b]$  défini par

$$\varphi_{b',b}^{a',a}(x) = b\varphi^{\log(b'a/a'b)}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Notons que pour tout  $c' < 0 < c$  on a la propriété d'équivariance (à comparer avec (3))

$$\varphi_{c',c}^{b',b} \circ \varphi_{b',b}^{a',a} = \varphi_{c',c}^{a',a}. \tag{7}$$

D'autre part, puisque

$$\frac{\partial \varphi_{b',b}^{a',a}}{\partial x}(0) = \frac{b'}{a'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_{b',b}^{a',a}}{\partial x}(a) = \frac{b}{a}, \tag{8}$$

ces difféomorphismes ne sont pas toujours tangents à l'identité aux extrémités. Ils satisfont cependant une propriété de régularité analogue à (2), à savoir pour tout  $x \in [0, a]$  on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial \varphi_{b',b}^{a',a}}{\partial x}(x) \right| \leq \frac{C}{a} \left| \frac{b'a}{a'b} - 1 \right|, \tag{9}$$

où  $C = \sup_{y \in [0,1]} \varrho''(y)$ .

Fixons  $m \in \mathbf{N}$  et  $\varepsilon > 0$ , et pour toute paire d'entiers  $(i_1, i_2)$  posons

$$\ell_{(i_1, i_2)} = \frac{1}{(|i_1| + |i_2| + m)^{2+\varepsilon}}.$$

Soit  $\{I_{i_1, i_2}\}$ ,  $I_{i_1, i_2} = [x_{(i_1, i_2)}, y_{(i_1, i_2)}]$ , une famille d'intervalles disposés sur un intervalle  $I$  en respectant l'ordre lexicographique et de telle sorte que leur réunion soit dense sur  $I$ , avec  $|I_{i_1, i_2}| = \ell_{(i_1, i_2)}$ . Définissons les homéomorphismes  $f$  et  $g$  de  $I$  en posant, pour tout  $x \in I_{i_1, i_2}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_{\ell_{(i_1-1, i_2-1)}, \ell_{(i_1-1, i_2)}}^{\ell_{(i_1, i_2-1)}, \ell_{(i_1, i_2)}}(x - x_{(i_1, i_2)}) + x_{(i_1-1, i_2)}, \\ g(x) &= \varphi_{\ell_{(i_1, i_2-2)}, \ell_{(i_1, i_2-1)}}^{\ell_{(i_1, i_2-1)}, \ell_{(i_1, i_2)}}(x - x_{(i_1, i_2)}) + x_{(i_1, i_2-1)}. \end{aligned}$$

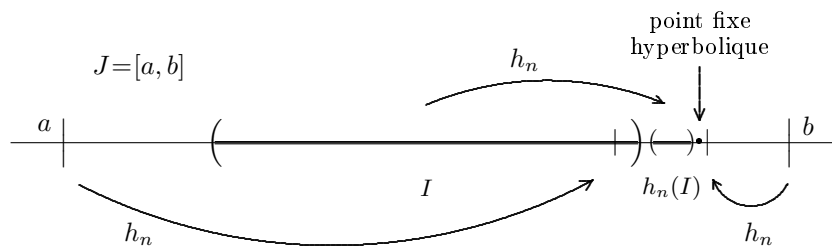


Figure 1.

Les propriétés (7) et (8) entraînent que  $f$  et  $g$  sont des difféomorphismes de classe  $C^1$  qui commutent. Or, en utilisant l'estimée (9), on vérifie (mais ce n'est pas du tout immédiat !) que  $f$  et  $g$  sont en fait des difféomorphismes de classe  $C^{2-\varepsilon'}$ , où  $\varepsilon' > 0$  ne dépend que de  $\varepsilon > 0$  et tend vers zéro avec  $\varepsilon$ .

## 2. Le principe général

Nous rappelons dans la suite l'idée de la preuve du théorème de Denjoy donnée par Schwartz dans [65]. C'est un principe qui est devenu classique grâce à la formulation et les applications aux feuilletages de codimension 1 données par Sacksteder dans [64] (voir [6] pour une discussion plus détaillée).

**LEMME 2.1.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de difféomorphismes de classe  $C^{1+\text{lip}}$  d'une variété unidimensionnelle compacte. Supposons qu'il existe un sous-ensemble fini  $\mathcal{G}$  de  $\Gamma$  et un intervalle ouvert  $I$  satisfaisant la propriété suivante : pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  il existe un élément  $h_n = g_{i_n} g_{i_{n-1}} \dots g_{i_1}$  dans  $\Gamma$  tel que tous les  $g_{i_m}$  appartiennent à  $\mathcal{G}$ , les intervalles  $I, g_{i_1}(I), g_{i_2} g_{i_1}(I), \dots, g_{i_{n-1}} \dots g_{i_1}(I)$  sont deux à deux disjoints, et  $h_n(I)$  s'accumule sur l'une des extrémités de  $I$ . Alors pour  $n \in \mathbf{N}$  assez grand, l'application  $h_n$  possède un point fixe hyperbolique (qui est proche de l'extrémité correspondante de  $I$ ).*

La démonstration de ce lemme utilise le fait que les intervalles  $I, \dots, g_{i_{n-1}} \dots g_{i_1}(I)$  sont disjoints, ainsi que l'hypothèse de régularité  $C^{1+\text{lip}}$ , pour contrôler la distorsion de  $h_n$  sur  $I$  grâce à l'argument classique de Denjoy. Ensuite, l'idée consiste à contrôler la distorsion de  $h_n$  sur un intervalle plus large  $J$  contenant  $I$  et indépendant de  $n \in \mathbf{N}$ . On aboutit à ceci par un argument de récurrence assez subtil (remarquons que, en général, les intervalles  $J, \dots, g_{i_{n-1}} \dots g_{i_1}(J)$  ne sont pas disjoints!). La contraction (topologique) devient alors évidente (voir la figure 1), et cette contraction doit être hyperbolique à cause du contrôle (uniforme) de la distorsion.



Si l'on veut contrôler les distorsions en classe  $C^{1+\tau}$ , on est amené à estimer des sommes du type

$$|I|^\tau + \sum_{k=1}^{n-1} |g_{i_k} \dots g_{i_1}(I)|^\tau. \quad (10)$$

Or, même si les intervalles  $I, \dots, g_{i_{n-1}} \dots g_{i_1}(I)$  sont deux à deux disjoints, cette somme peut devenir trop grande avec  $n$ . Pour résoudre ce problème, notre idée consiste à penser les compositions de manière aléatoire (contrairement au cas de la preuve de Schwartz et Sacksteder, où la suite des compositions est fixée de manière déterministe). Plus précisément, nous considérerons des suites d'applications  $h_n$  de la forme  $h_n = g_n h_{n-1}$  de façon à ce que les intervalles  $h_0(I) = I, h_1(I), \dots$  soient deux à deux disjoints, et par des arguments d'ordre probabiliste nous chercherons à montrer que pour un « chemin typique » la valeur de la somme (10) est uniformément bornée. Cela nous permettra de trouver des éléments avec des points fixes hyperboliques grâce au lemme général suivant (nous convenons que pour  $L > 0$  le  $L$ -voisinage d'un intervalle  $I = ]a, b[$  est l'intervalle  $]a - L, b + L[$ ).

LEMME 2.2. *Soit  $\Gamma$  un pseudo-groupe de difféomorphismes de classe  $C^{1+\tau}$  d'une variété unidimensionnelle compacte  $X$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble fini  $\mathcal{G}$  de  $\Gamma$ , un intervalle ouvert  $I$  et une constante  $M < \infty$  tels que la propriété suivante soit satisfaite : à chaque élément  $g \in \mathcal{G}$  on peut associer un intervalle compact  $C_g$  contenu dans un domaine ouvert de définition de  $g$  de sorte que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe un élément  $h_n = g_{i_n} \dots g_{i_1}$  dans  $\Gamma$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- tous les  $g_{i_k}$  appartiennent à  $\mathcal{G}$  ;
- si  $g_{i_k} = g$  alors l'intervalle  $g_{i_{k-1}} \dots g_{i_1}(I)$  est contenu dans  $C_g$  (où nous convenons que  $g_{i_{k-1}} \dots g_{i_1}$  est l'identité lorsque  $k=1$ ) ;
- on a l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g_{i_k} \dots g_{i_1}(I)|^\tau \leq M.$$

Alors il existe une constante strictement positive  $L = L(\tau, M, |I|; \mathcal{G})$  telle que si  $n \in \mathbf{N}$  est tel que  $h_n(I)$  n'intersecte pas l'intérieur de  $I$  mais il est contenu dans le  $L$ -voisinage de  $I$ , alors l'application  $h_n$  possède un point fixe hyperbolique (qui est proche de l'extrémité correspondante de  $I$ ).

*Preuve.* La preuve du lemme étant bien connue, nous ne la répétons que pour un cas particulier qui sera néanmoins suffisant pour établir nos résultats, à savoir celui où il existe un compact  $K$  invariant par les éléments de  $\mathcal{G}$  contenant la fermeture de  $I$  dans son intérieur et tel que  $C_g = K$  pour tout  $g \in \mathcal{G}$  (c'est le cas par exemple d'un groupe de difféomorphismes). Fixons une constante  $C > 0$  telle que

$$|\log g'(x) - \log g'(y)| \leq C|x - y|^\tau \quad \text{pour tout } g \in \mathcal{G} \text{ et tout } x, y \in K.$$

Nous montrerons alors que l'affirmation du lemme est satisfaite pour

$$L = L(\tau, M, |I|; \mathcal{G}) = \min \left\{ \frac{|I|}{2 \exp(2^\tau CM)}, \frac{\text{dist}(I, X \setminus K)}{2} \right\},$$

où nous convenons que  $\text{dist}(I, \emptyset) = \infty$ .

Désignons par  $J$  le  $2L$ -voisinage de  $I$ , et notons  $I'$  (resp.  $I''$ ) la composante connexe de  $J \setminus I$  à droite (resp. à gauche) de  $I$ . Nous montrerons par récurrence sur  $n \geq 0$  que les deux propriétés suivantes sont simultanément vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{(i)}_n \quad & |g_{i_n} \dots g_{i_1}(I')| \leq |g_{i_n} \dots g_{i_1}(I)|; \\ \text{(ii)}_n \quad & \sup_{\{x, y\} \subset I \cup I'} \frac{(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(x)}{(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(y)} \leq \exp(2^\tau CM). \end{aligned}$$

La condition  $(ii)_0$  est trivialement vérifiée, tandis que  $(i)_0$  est satisfaite grâce à l'hypothèse  $|I'| = 2L \leq |I|$ . Supposons que les conditions  $(i)_k$  et  $(ii)_k$  soient valables pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Dans ce cas, pour tout  $x, y \in I \cup I'$  nous avons

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(x)}{(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(y)} \right| & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \log g'_{i_{k+1}}(g_{i_k} \dots g_{i_1}(x)) - \log g'_{i_{k+1}}(g_{i_k} \dots g_{i_1}(y)) \right| \\ & \leq C \sum_{k=0}^{n-1} |g_{i_k} \dots g_{i_1}(x) - g_{i_k} \dots g_{i_1}(y)|^\tau \\ & \leq C \sum_{k=0}^{n-1} (|g_{i_k} \dots g_{i_1}(I)| + |g_{i_k} \dots g_{i_1}(I')|)^\tau \\ & \leq C 2^\tau M. \end{aligned}$$

Ceci montre  $(ii)_n$ . Quant à  $(i)_n$ , remarquons qu'il existe  $x \in I$  et  $y \in I'$  tels que

$$|g_{i_n} \dots g_{i_1}(I)| = |I|(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(x) \quad \text{et} \quad |g_{i_n} \dots g_{i_1}(I')| = |I'|(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(y).$$

Donc, par  $(ii)_n$ ,

$$\frac{|g_{i_n} \dots g_{i_1}(I')|}{|g_{i_n} \dots g_{i_1}(I)|} = \frac{(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(x)}{(g_{i_n} \dots g_{i_1})'(y)} \frac{|I'|}{|I|} \leq \exp(2^\tau CM) \frac{|I'|}{|I|} \leq 1,$$

ce qui montre  $(i)_n$ . Bien sûr, un argument analogue montre que  $(i)_n$  et  $(ii)_n$  sont vérifiées pour tout  $n \geq 0$  lorsqu'on remplace  $I'$  par  $I''$ .

Supposons maintenant que  $h_n(I)$  soit contenu dans le  $L$ -voisinage de l'intervalle  $I$ . La propriété  $(i)_n$  donne alors  $h_n(J) \subset J$ . De plus, si  $h_n(I) \subset J$  se trouve à droite (resp. à gauche) de  $I$ , alors  $h_n(I \cup I') \subset I'$  (resp.  $h_n(I'' \cup I) \subset I''$ ). Les deux cas étant analogues, considérons seulement le premier. Bien évidemment,  $h_n$  possède au moins un point fixe  $x$

dans  $I'$ . Il nous reste donc à vérifier qu'il s'agit d'un point fixe hyperbolique contractant. Or, il existe  $y \in I$  tel que

$$h'_n(y) = \frac{|h_n(I)|}{|I|} \leq \frac{L}{|I|}.$$

Donc, d'après (ii)<sub>n</sub>,

$$h'_n(x) \leq h'_n(y) \exp(2^\tau CM) \leq \frac{L \exp(2^\tau CM)}{|I|} \leq \frac{1}{2},$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 3. Preuves des théorèmes A, B et C

#### 3.1. Le théorème de Denjoy généralisé

Avant de rentrer dans les détails de la démonstration du théorème A, nous en donnons l'idée essentielle. Supposons que  $I$  soit un intervalle ouvert errant pour la dynamique de deux difféomorphismes  $g_1$  et  $g_2$  du cercle qui sont de classe  $C^{1+\tau}$  et qui commutent entre eux. Remarquons que l'ensemble

$$\{g_1^m g_2^n(I) : (m, n) \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \text{ et } m+n \leq k\}$$

contient exactement  $(k+1)(k+2)/2$  intervalles. Puisqu'ils sont deux à deux disjoints, leur « longueur typique » est de l'ordre de  $1/k^2$ . Donc, pour une « suite aléatoire typique »  $I, h_1(I), h_2(I), \dots$ , où  $h_{n+1} = g_1 h_n$  ou  $h_{n+1} = g_2 h_n$ , on s'attend à ce que, pour  $\tau > \frac{1}{2}$ ,

$$\sum_{k \geq 1} |h_k(I)|^\tau \leq C \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2\tau}} < \infty.$$

Or, la série à gauche est exactement celle dont la convergence permet de contrôler les distorsions, et donc de trouver des éléments avec des points fixes (hyperboliques), contredisant ainsi la liberté de l'action.

Afin de « modeler » une preuve dans l'esprit de l'idée ci-dessus, nous devons préciser quelles sont nos « suites aléatoires typiques ». Pour cela, notons  $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$  et considérons le processus de Markov sur  $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$  dont les probabilités de transition sont

$$p((m, n) \mapsto (m+1, n)) = \frac{m+1}{m+n+2} \quad \text{et} \quad p((m, n) \mapsto (m, n+1)) = \frac{n+1}{m+n+2} \quad (11)$$

(voir la figure 2). Ce processus markovien induit naturellement une mesure de probabilité  $\mathbf{P}$  sur l'espace de chemins correspondant  $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{(1, 0), (0, 1)\}\}$ . Plus précisément, pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  dans  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  fixés on a

$$\mathbf{P}[w \in \Omega : x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_n = \bar{x}_n] = p((0, 0) \mapsto \bar{y}_1) p(\bar{y}_1 \mapsto \bar{y}_2) \dots p(\bar{y}_{i-1} \mapsto \bar{y}_i),$$

où  $\bar{y}_i = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_i$ . On vérifie aisément que (en partant de l'origine) la probabilité d'arriver en  $k$  pas au point  $(m, n)$  est égale à  $1/(k+1)$  (resp. 0) si  $m+n=k$  (resp.  $m+n \neq k$ ).

*Remarque 3.1.* Il est intéressant de constater que les probabilités de passage (11) ci-dessus coïncident avec celles qui apparaissent dans le modèle d'urne de Polya (voir [15]).

*Remarque 3.2.* Les probabilités de sortie à partir du point  $(m, n) \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$  s'identifient aux probabilités conditionnelles associées à la partition de  $[0, 1]$  en intervalles de longueur  $1/(k+2)$  étant donnée la partition en intervalles de longueur  $1/(k+1)$  (où  $k=m+n$ ) :

$$p((m, n) \mapsto (m+1, n)) = \frac{\text{Leb}\left(\left[\frac{m}{k+1}, \frac{m+1}{k+1}\right] \cap \left[\frac{m+1}{k+2}, \frac{m+2}{k+2}\right]\right)}{\text{Leb}\left(\left[\frac{m}{k+1}, \frac{m+1}{k+1}\right]\right)},$$

$$p((m, n) \mapsto (m, n+1)) = \frac{\text{Leb}\left(\left[\frac{m}{k+1}, \frac{m+1}{k+1}\right] \cap \left[\frac{m}{k+2}, \frac{m+1}{k+2}\right]\right)}{\text{Leb}\left(\left[\frac{m}{k+1}, \frac{m+1}{k+1}\right]\right)}.$$

Avec cette identification, la propriété d'équidistribution précédente devient complètement naturelle.

Pour démontrer le théorème A dans le cas  $d=2$ , nous procédons par contradiction. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux difféomorphismes du cercle de classe  $C^{1+\tau}$  qui commutent. Le semi-groupe  $\Gamma^+$  engendré par  $g_1$  et  $g_2$  s'identifie à  $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ . Par suite, le processus markovien décrit précédemment induit une « promenade aléatoire » sur  $\Gamma^+$ . Dans ce qui suit nous identifierons  $\Omega$  à l'espace des chemins correspondants sur  $\Gamma^+$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ , désignons par  $h_n(\omega) \in \Gamma^+$  le produit des  $n$  premières cordonnées de  $\omega$ . Autrement dit, pour  $\omega = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots) \in \Omega$  notons  $h_n(\omega) = g_{i_n} \dots g_{i_1}$ , où  $i_j \in \{1, 2\}$ , et convenons que  $h_0(\omega) = \text{id}$ .

Si l'action du groupe  $\Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle \sim \mathbf{Z}^2$  est libre, alors les nombres de rotation  $\varrho(g_1)$  et  $\varrho(g_2)$  de  $g_1$  et  $g_2$  respectivement sont indépendants sur les rationnels. En effet, dans le cas contraire on pourrait trouver des éléments non triviaux (et donc d'ordre infini) avec un nombre de rotation rationnel ; de tels éléments possédant des points périodiques, ceci contredirait la liberté de l'action.

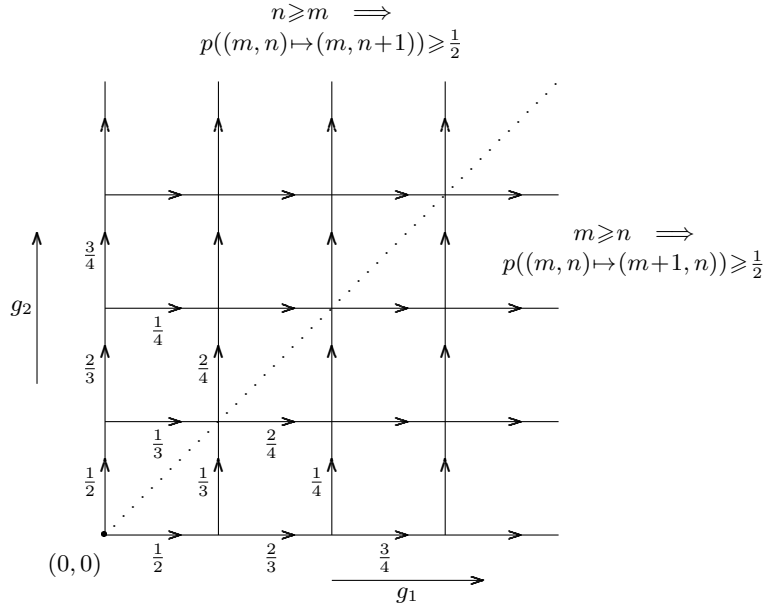


Figure 2.

Supposons maintenant que l'action de  $\Gamma$  soit (libre et) non minimale. Dans ce cas, il existe un ensemble de Cantor invariant et minimal pour l'action. De plus, toute composante connexe  $I$  du complémentaire de cet ensemble est errante pour la dynamique, dans le sens que ses images par des éléments distincts du groupe sont disjointes.

**LEMME 3.3.** *Si  $\tau > \frac{1}{2}$  alors la valeur de la série  $\sum_{n \geq 0} |h_n(\omega)(I)|^\tau$  est finie pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ .*

*Preuve.* Pour tout chemin  $\omega \in \Omega$  définissons

$$\ell_\tau(\omega) = \sum_{k \geq 0} |h_k(\omega)(I)|^\tau.$$

Nous allons vérifier que, si  $\tau > \frac{1}{2}$ , alors l'espérance (par rapport à  $\mathbf{P}$ ) de la fonction  $\ell_\tau$  est finie, ce qui implique évidemment l'affirmation du lemme. Remarquons d'abord que

$$\mathbf{E}(\ell_\tau) = \mathbf{E}\left(\sum_{k \geq 0} |h_k(\omega)(I)|^\tau\right) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}(|h_k(\omega)(I)|^\tau) = \sum_{k \geq 0} \sum_{m+n=k} \frac{|g_1^m g_2^n(I)|^\tau}{k+1}.$$

Or, l'inégalité de Hölder montre aisément que

$$\sum_{m+n=k} \frac{|g_1^m g_2^n(I)|^\tau}{k+1} \leq \left(\sum_{m+n=k} |g_1^m g_2^n(I)|\right)^\tau \left((k+1) \frac{1}{(k+1)^{1/(1-\tau)}}\right)^{1-\tau},$$

et donc,

$$\mathbf{E}(\ell_\tau) \leq \sum_{k \geq 0} \left( \frac{1}{k+1} \sum_{m+n=k} |g_1^m g_2^n(I)| \right)^\tau.$$

En appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder on obtient

$$\mathbf{E}(\ell_\tau) \leq \left( \sum_{(m,n) \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0} |g_1^m g_2^n(I)| \right)^\tau \left( \sum_{k \geq 1} \left( \frac{1}{k^\tau} \right)^{1/(1-\tau)} \right)^{1-\tau}.$$

Étant donné que  $\tau > \frac{1}{2}$ , la série

$$\sum_{k \geq 1} \left( \frac{1}{k^\tau} \right)^{1/(1-\tau)} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\tau/(1-\tau)}}$$

converge, et puisque les intervalles  $g_1^m g_2^n(I)$  sont deux à deux disjoints, ceci montre la finitude de  $\mathbf{E}(\ell_\tau)$ .  $\square$

*Remarque 3.4.* Dans la démonstration précédente, la seule propriété du processus de diffusion sur  $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$  que l'on a utilisé est le fait que les probabilités d'arrivée en  $k$  pas sont équidistribuées sur l'ensemble des points à distance (simpliciale)  $k$  de l'origine.

D'après le lemme précédent, si  $M$  est suffisamment grand alors l'ensemble

$$\Omega(M) = \{\omega \in \Omega : \ell_\tau(\omega) \leq M\}$$

possède une probabilité strictement positive (en fait,  $\mathbf{P}[\Omega(M)]$  converge vers 1 lorsque  $M$  tend vers l'infini). Fixons un tel  $M$ , et soit  $L = L(\tau, M, |I|; \{g_1, g_2\})$  la constante du lemme 2.2. Considérons finalement l'intervalle ouvert  $K'$  de taille  $|K'| = L$  et adjacent à droite à  $I$ . Nous affirmons que

$$\mathbf{P}[\omega \in \Omega : h_n(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}] = 0. \quad (12)$$

Pour démontrer (12) remarquons d'abord que l'action du groupe engendré par les difféomorphismes  $g_1$  et  $g_2$  est semiconjugué à une action par des rotations. Par suite, si l'on « écrase » chaque composante connexe du complémentaire du Cantor invariant minimal  $\Lambda$ , alors on obtient un cercle topologique  $S^1_\Lambda$  sur lequel  $g_1$  et  $g_2$  induisent des homéomorphismes dont toutes les orbites sont denses. De plus, l'intervalle  $K'$  devient un intervalle  $U$  d'intérieur non vide dans  $S^1_\Lambda$ . Les nombres de rotation de  $g_1$  et  $g_2$  étant irrationnels, il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que, après écrasement,  $g_1^{-1}(U), \dots, g_1^{-N}(U)$  recouvrent le cercle topologique  $S^1_\Lambda$ , et de même pour  $g_2^{-1}(U), \dots, g_2^{-N}(U)$ . Sur le cercle original  $S^1$  cela se traduit par le fait que, pour toute composante connexe  $I_0$  de  $S^1 \setminus \Lambda$ , il existe

$n_1$  et  $n_2$  dans  $\{1, \dots, N\}$  tels que  $g_1^{n_1}(I_0) \subset K'$  et  $g_2^{n_2}(I_0) \subset K'$ . Par suite, pour tout entier  $k \geq 0$  on a

$$\mathbf{P}[g_1^i h_k(\omega)(I) \not\subset K' \text{ et } g_2^i h_k(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } i \leq N \mid h_j(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } j \leq k] = 0. \tag{13}$$

Soulignons maintenant la propriété élémentaire suivante qui découle directement de (11) : les probabilités de passage à droite (resp. vers le haut) du processus markovien considéré sont  $\geq \frac{1}{2}$  au dessous (resp. au dessus) de la diagonale (voir la figure 2). D'après (13), cette dernière inégalité implique

$$\mathbf{P}[h_{k+i}(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } i \leq N \mid h_j(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } j \leq k] \leq 1 - \frac{1}{2^N}. \tag{14}$$

Par conséquent, pour tout  $r \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[h_n(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}] &\leq \mathbf{P}[h_n(\omega)(I) \not\subset K' \text{ pour tout } n \in \{1, \dots, rN\}] \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^r, \end{aligned}$$

d'où l'on obtient (12) en faisant tendre  $r$  vers l'infini.

Pour finir la preuve du théorème A (toujours dans le cas  $d=2$ ), remarquons que si  $\omega \in \Omega(M)$  et  $n \in \mathbf{N}$  sont tels que  $h_n(\omega)(I) \subset K'$ , alors le lemme 2.2 permet de trouver un point fixe hyperbolique pour  $h_n(\omega) \in \Gamma^+$ , contredisant ainsi l'hypothèse de liberté de l'action.

*Modifications pour le cas  $d > 2$ .* La démonstration du théorème A pour  $d > 2$  est tout à fait analogue à celle donnée pour le cas  $d=2$ . Elle se fait aussi par contradiction : on suppose l'existence d'un intervalle errant et on considère le processus markovien sur  $\mathbf{N}_0^d$  à probabilités de transition

$$p((n_1, \dots, n_i, \dots, n_d) \mapsto (n_1, \dots, 1+n_i, \dots, n_d)) = \frac{1+n_i}{n_1 + \dots + n_d + d}.$$

Les probabilités d'arrivée en  $k$  pas pour ce processus sont aussi équidistribuées sur l'ensemble des points à distance (simpliciale)  $k$  de l'origine. Cela permet à nouveau de contrôler les distortions pour presque toute suite aléatoire. En effet, on vérifie aisément qu'il existe une constante  $C_d \leq (d-1)!$  telle que

$$\mathbf{E}(\ell_\tau) \leq (C_d)^\tau \left( \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k}\right)^{(d-1)\tau/(1-\tau)} \right)^{1-\tau},$$

ce qui montre la convergence de la série  $\ell_\tau(\omega)$  pour presque toute suite aléatoire  $\omega$  lorsque  $\tau > 1/d$ . On remarque ensuite que chaque point  $(n_1, \dots, n_d)$  de  $\mathbf{N}_0^d$  est le point de départ d'au moins une ligne droite telle les probabilités de passage entre deux sommets consécutifs soient supérieures ou égales à  $1/d$  (il suffit de suivre la direction de la coordonnée  $i$ -ème pour laquelle  $n_i$  prend la valeur la plus grande). Cela permet d'obtenir une inégalité analogue à (14) (dont le membre à droite sera égal à  $1 - 1/d^N$  pour un certain entier  $N$  assez grand). Une telle inégalité entraîne la propriété (12), qui grâce au contrôle de distorsion permet d'utiliser le lemme 2.2. On trouve ainsi des éléments avec des points fixes hyperboliques, contredisant une nouvelle fois la liberté de l'action.

*Remarque 3.5.* Dans la démonstration précédente nous n'avons eu besoin de la finitude de la fonction  $\ell_\tau$  que pour un ensemble de suites de mesure strictement positive. Néanmoins, la méthode du lemme 3.3 mène à une conclusion beaucoup plus forte : l'espérance de la fonction  $\ell_\tau$  est finie dès que  $\tau > 1/d$ . On pourrait donc imaginer qu'en affaiblissant cette dernière affirmation on puisse attaquer le cas critique  $\tau = 1/d$  par des méthodes analogues. On constatera cependant que pour la preuve du lemme 3.3 nous sommes appuyés uniquement sur le fait que  $I$  était un intervalle errant. Or, c'est aussi le cas de l'intervalle  $I_{0, \dots, 0}$  de l'exemple du §1.1, alors que pour cet exemple la valeur de la fonction  $\ell_{1/d}$  est infinie pour toute suite  $\omega$  (lorsque  $\delta \leq d-1$ ). Ceci indique que pour démontrer le théorème dans le cas critique, il est nécessaire d'introduire des méthodes plus fines et qui prennent en compte la nature dynamique des intervalles  $g_1^m g_2^n(I)$  (et non seulement le fait qu'il soient deux à deux disjoints). En effet, la preuve précédente ne permet pas de conclure que (pour  $\delta \leq d-1$ ) l'exemple du §1.1 n'est pas de classe  $C^{1+1/d}$ , alors que ceci est aisément vérifiable d'après les définitions (et résulte également de la proposition 1.1).

Nous voudrions conclure ce paragraphe en donnant le schéma d'une autre preuve du théorème A dont l'idée sera essentielle à la fin du §3.2. Pour simplifier, nous ne considérons que le cas  $d=2$ , et nous gardons les notations introduites tout au long de ce paragraphe. En raffinant légèrement les arguments donnés précédemment, on démontre que pour presque toute suite  $\omega \in \Omega$  et pour tout point  $p$  appartenant au cercle topologique  $S_\Lambda^1$ , l'ensemble des points de la forme  $h_n(\omega)(p)$  est dense dans  $S_\Lambda^1$ . Fixons  $M > 0$  suffisamment grand de façon à ce que  $\mathbf{P}[\Omega(M)] > 0$ , et comme dans la preuve du lemme 2.2 notons  $J = I' \cup I \cup I''$  le  $2L$ -voisinage de  $I$ . Choisissons un élément  $h \in \Gamma$  tel que  $h(I)$  et  $h^{-1}(I)$  soient des intervalles de taille strictement inférieure à  $|I| \exp(-2^\tau CM)$  contenus dans  $I'$  et  $I''$  respectivement. Fixons un point arbitraire  $a \in \Lambda$ , et supposons que  $h'(a) \geq 1$  (le cas où  $h'(a) \leq 1$  est réglé en appliquant les arguments qui suivent à  $h^{-1}$  au lieu de  $h$ , tout en remarquant que dans ce cas  $(h^{-1})'(h(a)) = 1/h'(a) \geq 1$  et  $h(a) \in \Lambda$ ). La première partie de



la démonstration du lemme 2.2 montre que pour tout  $x$  et  $y$  appartenant à  $\bar{I}' \cup \bar{I}$ , tout  $\omega \in \Omega(M)$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\frac{h_n(\omega)'(x)}{h_n(\omega)'(y)} \leq \exp(2^\tau CM).$$

À partir de l'égalité  $h = h_n(\omega)^{-1} \circ h \circ h_n(\omega)$  on en déduit que, pour tout  $y \in I$ ,

$$h'(y) = \frac{h_n(\omega)'(y)}{h_n(\omega)'(h(y))} h'(h_n(\omega)(y)) \geq \exp(-2^\tau CM) \limsup_{n \rightarrow \infty} h'(h_n(\omega)(y)).$$

Or, puisque la suite  $\{h_n(\omega)(p)\}_{n \in \mathbf{N}}$  est dense sur  $S_\lambda^1$  pour tout  $p \in S_\lambda^1$ , il existe une suite croissante et infinie d'entiers  $n_k$  tels que l'intervalle  $h_{n_k}(\omega)(I)$  tend vers le point  $a$ . Par suite,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} h'(h_n(\omega)(y)) \geq h'(a) \geq 1$ , et donc  $h'(y) \geq \exp(-2^\tau CM)$  pour tout  $y \in I$ . Ceci implique que la taille de l'intervalle  $h(I)$  est au moins égale à  $|I| \exp(-2^\tau CM)$ , ce qui contredit notre choix de  $h$ .

### 3.2. Le lemme de Kopell généralisé

De manière analogue à ce que nous avons fait pour la généralisation du théorème de Denjoy, pour la preuve du théorème B nous ne considérerons que le cas  $d=2$ , et nous laisserons au lecteur le soin d'adapter nos arguments au cas  $d \geq 3$ . Tout en gardant les notations de l'énoncé du théorème (avec  $d=2$ ), identifions le semigroupe  $\Gamma^+$  engendré par les éléments  $f_1$  et  $f_2$  de  $\text{Diff}_+^{1+\tau}([0,1])$  avec  $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ , et considérons le processus markovien du §3.1. Si l'on fixe l'intervalle  $I = I_{0,0}$  et pour chaque  $\omega \in \Omega$  on définit

$$\ell_\tau(\omega) = \sum_{i \geq 0} |h_i(\omega)(I)|^\tau,$$

alors l'argument de la preuve du lemme 3.3 montre que, lorsque  $\tau > \frac{1}{2}$ , la fonction  $\ell_\tau : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  est presque sûrement finie (et qu'en fait, son espérance est finie).

Soit  $C$  une constante de  $\tau$ -höldérianité pour  $\log f_1'$  et  $\log f_2'$ . Pour chaque

$$\omega = (f_{j_1}, f_{j_2}, \dots) \in \Omega,$$

tout  $n, k$  dans  $\mathbf{N}$  et tout  $x \in I$ , l'égalité  $f_3^n = h_k(\omega)^{-1} \circ f_3^n \circ h_k(\omega)$  donne

$$\log(f_3^n)'(x) = \log(f_3^n)'(h_k(\omega)(x)) + \sum_{i=1}^k [\log f_{j_i}'(h_{i-1}(\omega)(x)) - \log f_{j_i}'(f_3^n \circ h_{i-1}(\omega)(x))],$$

et donc

$$\begin{aligned} |\log(f_3^n)'(x)| &\leq |\log(f_3^n)'(h_k(\omega)(x))| + C \sum_{i=1}^k |h_{i-1}(\omega)(x) - f_3^n \circ h_{i-1}(\omega)(x)|^\tau \\ &\leq |\log(f_3^n)'(h_k(\omega)(x))| + C \sum_{i=1}^k |h_{i-1}(\omega)(I)|^\tau. \end{aligned}$$

En prenant  $\omega \in \Omega$  tel que  $\ell_\tau(\omega) = M$  soit fini, l'inégalité précédente implique que

$$|\log(f_3^n)'(x)| \leq |\log(f_3^n)'(h_k(\omega)(x))| + CM.$$

Or, le point  $h_k(\omega)(x)$  doit converger vers un point fixe nécessairement parabolique de  $f_3$ . En faisant tendre  $k$  vers l'infini on en déduit que  $|\log(f_3^n)'(x)| \leq CM$ . Par suite,

$$(f_3^n)'(x) \leq \exp(CM)$$

pour tout  $x \in I$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ , ce qui entraîne évidemment que la restriction de  $f_3$  à l'intervalle  $I$  est l'identité. Par commutativité, ceci est aussi vrai sur tous les intervalles  $I_{n_1, n_2}$ , ce qui conclut la démonstration.

*Remarque 3.6.* Une lecture attentive de la preuve précédente montre que le théorème B est encore valable pour des difféomorphismes de classe  $C^{1+\tau}$  de l'intervalle  $[0, 1[$ , i.e. pour des difféomorphismes dont on ne dispose d'une borne uniforme pour la constante de  $\tau$ -hölderianité que sur chaque intervalle compact contenu dans  $[0, 1[$ . Le lecteur constatera que cette remarque s'applique aussi au théorème C.

### 3.3. Un théorème à la Denjoy–Szekeres

Avant de rentrer dans la preuve du théorème C, remarquons que si  $f_1, \dots, f_d$  sont les générateurs d'un groupe  $\Gamma \sim \mathbf{Z}^d$  qui agit librement sur  $]0, 1[$ , alors en identifiant les points des orbites par  $f_1$  les éléments  $f_2, \dots, f_d$  deviennent les générateurs d'un groupe agissant librement sur le cercle. Bien sûr, si  $\Gamma$  n'est pas conjugué à un groupe de translations, alors le groupe engendré par  $f_2, \dots, f_d$  n'est pas conjugué à un groupe de rotations. Le théorème A implique dans ce cas que les  $f_i$  ne peuvent pas être tous des difféomorphismes de classe  $C^{1+1/(d-1)+\varepsilon}$ .

L'argument précédent n'a utilisé que la différentiabilité des applications à l'intérieur. Dans ce contexte la régularité de l'obstruction obtenue est en fait optimale. Or, le théorème C stipule que ce n'est plus le cas dans le cadre des groupes de difféomorphismes de l'intervalle fermé  $[0, 1]$  (et même de  $[0, 1[$ ). Pour chercher à démontrer cela nous devons donc tenir compte de la régularité des applications aux extrémités.

Encore une fois, nous ne donnons la preuve du théorème C que pour le cas  $d=2$ , en laissant le cas général au soin du lecteur. Soient  $f_1$  et  $f_2$  les générateurs d'un groupe  $\Gamma \sim \mathbf{Z}^2$  de difféomorphismes de classe  $C^{1+\tau}$  de  $[0, 1]$  qui agit librement à l'intérieur. Quitte à les échanger par leurs inverses, nous pouvons supposer qu'ils contractent topologiquement vers l'origine. Supposons que l'action de  $\Gamma$  sur  $]0, 1[$  ne soit pas conjuguée à une action par des translations. Dans ce cas, un argument simple de contrôle de distorsion hyperbolique

montre que tous les éléments de  $\Gamma$  doivent être tangents à l'identité à l'origine. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe des intervalles errants ainsi qu'un élément  $f \in \Gamma$  tel que  $f'(0) < 1$ . Fixons  $\lambda < 1$  et  $c \in ]0, 1[$  tels que  $f'(x) \leq \lambda$  pour tout  $x \in ]0, c[$ , et fixons un intervalle errant ouvert et maximal  $I = ]a, b[$  contenu dans  $]0, c[$ . Si l'on désigne par  $K$  l'intervalle  $[f(b), b]$  alors

$$\sum_{n \geq 0} |f^n(K)|^\tau \leq |K|^\tau \sum_{n \geq 0} \lambda^{n\tau} = \frac{|K|^\tau}{1 - \lambda^\tau} = \bar{M}.$$

Par conséquent,  $(f^n)'(x)/(f^n)'(y) \leq \exp(C\bar{M})$  pour tout  $x, y$  dans  $K$ , où  $C > 0$  est une constante de  $\tau$ -hölderianité pour  $\log f'$ . Or, cette dernière estimée permet d'appliquer les arguments de la preuve du lemme 3.2 de [53], en parvenant ainsi à une contradiction.<sup>(3)</sup>

Identifions maintenant le semigroupe  $\Gamma^+$  engendré par  $f_1$  et  $f_2$  à  $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ , et considérons le processus markovien du §3.1. Lorsque  $\tau > \frac{1}{2}$ , la preuve du lemme 3.3 montre la finitude de l'espérance de la fonction

$$\omega \mapsto \ell_\tau(\omega) = \sum_{k \geq 0} |h_k(\omega)(I)|^\tau.$$

Prenons  $M > 0$  suffisamment grand de façon à ce que l'ensemble

$$\Omega(M) = \{\omega \in \Omega : \ell_\tau(\omega) \leq M\}$$

ait une probabilité strictement positive, et notons  $\bar{L} = |I| / \exp(2^\tau CM)$ . D'après la première partie de la preuve du lemme 2.2, si  $I''$  désigne l'intervalle adjacent à gauche à  $I$  et de longueur  $\bar{L}$ , alors pour tout  $x$  et  $y$  appartenant à  $J = \bar{I}'' \cup \bar{I}$ , tout  $\omega \in \Omega(M)$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\frac{h_n(\omega)'(x)}{h_n(\omega)'(y)} \leq \exp(2^\tau CM). \tag{15}$$

L'intervalle  $I$  n'étant contenu dans aucun autre intervalle errant et ouvert, il existe  $h \in \Gamma$  tel que  $h(I) \subset I''$  et  $|h(I)| < |I| \exp(-2^\tau CM)$ . Fixons un point arbitraire  $y$  dans  $I$ . Puisque  $h'(0) = 1$  et que  $h_n(\omega)(y)$  tend vers l'origine pour tout  $\omega \in \Omega(M)$ , à partir de l'égalité

$$h'(y) = \frac{h_n(\omega)'(y)}{h_n(\omega)'(h(y))} h'(h_n(\omega)(y))$$

et de (15) on conclut que  $h'(y) \geq \exp(-2^\tau CM)$ . Par suite,  $|h(I)| \geq |I| \exp(-2^\tau CM)$ , ce qui est en contradiction avec le choix de  $h$ .

---

<sup>(3)</sup> Remarquons que dans cette partie de la preuve nous n'avons utilisé que le fait que  $\tau > 0$ . Une manière plus conceptuelle d'expliquer le phénomène sous-jacent consiste à rappeler que le théorème de linéarisation de Sternberg [68], [77] est encore valable pour des germes hyperboliques et de classe  $C^{1+\tau}$  de l'intervalle (voir [8]). Or, le centralisateur d'un germe linéaire non trivial est le groupe à un paramètre des germes linéaires ; en particulier, l'existence d'intervalles errants pour la dynamique de sous-groupes denses de ce centralisateur est impossible.

## 4. Le théorème de Sacksteder généralisé

### 4.1. Une alternative topologique pour des pseudo-groupes d'homéomorphismes

Le but de ce paragraphe est de donner la preuve de la première affirmation du théorème E. Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, cette preuve est indépendante du reste de l'article, et elle peut être négligée lors d'une première lecture. Nous avons décidé de l'inclure pour deux raisons : d'une part l'affirmation (mais pas la méthode de démonstration) est à la base de la preuve de l'existence des orbites ressort hyperboliques des §4.2 et §4.3, et d'autre part parce que cela permet de faire le point sur une question déjà abordée par Sacksteder dans [64].

Fixons un pseudo-groupe  $\Gamma$  d'homéomorphismes respectant l'orientation d'une variété unidimensionnelle compacte (et séparée)  $X$  (que sans perdre en généralité on supposera égale à un intervalle compact), et soit  $\Lambda$  un sous-ensemble de  $X$  qui est compact, invariant par  $\Gamma$ , non vide et minimal. La première affirmation du théorème E est une conséquence directe de la proposition suivante.

**PROPOSITION 4.1.** *Avec les notations précédentes, soit il existe une mesure de probabilité supportée sur  $\Lambda$  et invariante par tous les éléments de  $\Gamma$ , soit il existe dans  $\Lambda$  une orbite de type ressort.*

Pour démontrer cette proposition, commençons par remarquer qu'il y a trois possibilités pour l'ensemble minimal  $\Lambda$  : soit il est fini, soit c'est un ensemble de Cantor, soit  $\Lambda = X$ . Ceci se montre en remarquant que la frontière  $\text{Fr } \Lambda$  et l'ensemble  $\Lambda^{\text{ac}}$  des points d'accumulation de  $\Lambda$  sont des fermés invariants contenus dans  $\Lambda$ . Donc soit ils sont vides, soit il sont égaux à  $\Lambda$ . En étudiant toutes les possibilités on démontre le fait escompté.

Dans le cas où  $\Lambda$  est fini, la moyenne des masses de Dirac aux points de  $\Lambda$  est une mesure invariante par  $\Gamma$ . Dans le cas où  $\Lambda = X$ , la proposition 4.1 a été démontrée par Sacksteder (voir [64, lemma 9.1]). Malheureusement, pour des pseudogroupes généraux le cas où  $\Lambda$  est un minimal exceptionnel ne peut pas se ramener directement au cas minimal en utilisant l'argument classique (valable dans le cas d'un groupe) qui consiste à « écraser » les composantes connexes du complémentaire du Cantor invariant.<sup>(4)</sup> Notre démonstration pour ce cas suit plutôt la stratégie de Sacksteder : nous définissons une notion d'équicontinuité pour la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$ , et puis nous prouvons que si cette restriction n'est pas équicontinue alors il existe une orbite de type ressort dans  $\Lambda$ . De plus, dans le cas équicontinu nous démontrons l'existence d'une mesure de probabilité

---

<sup>(4)</sup> Il n'est absolument pas clair comment traiter les applications dont le domaine de définition intersecte un intervalle à écraser sans le contenir entièrement.

invariante par  $\Gamma$  et supportée sur  $\Lambda$ . L'une des subtilités de la preuve vient de la définition suivante.

*Définition 4.2.* Fixons une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $X$  qui soit sans atome et dont le support coïncide avec tout l'ensemble  $\Lambda$ . Nous dirons que la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  est *équicontinue* si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout intervalle  $I$  de  $X$  de mesure  $\nu(I)$  inférieure ou égale à  $\delta$  et pour tout élément  $g$  de  $\Gamma$  dont le domaine de définition contient  $I$ , on a  $\nu(g(I)) \leq \varepsilon$ .

Il est facile de vérifier que cette notion d'équicontinuité ne dépend pas du choix de la mesure  $\nu$ .

**LEMME 4.3.** *Si la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  est non équicontinue alors  $\Lambda$  contient une orbite de type ressort.*

*Preuve.* Supposons que la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  ne soit pas équicontinue. Il existe donc  $\varepsilon_0 > 0$ , une suite d'intervalles  $I_n$  dont les mesures tendent vers 0, et une suite d'éléments  $g_n \in \Gamma$  dont les domaines de définition contiennent  $I_n$ , tels que  $\nu(g_n(I_n)) \geq \varepsilon_0$ .

Supposons d'abord que les longueurs des intervalles  $I_n$  soient minorées par une constante strictement positive indépendante de  $n$ . Dans ce cas, nous pouvons extraire de la suite des  $I_n$  une sous-suite qui converge vers un intervalle  $I$ . Puisque  $\nu$  n'a pas d'atome, la mesure de  $I$  est nulle, ce qui signifie que  $I$  est contenu dans une composante connexe de  $X \setminus \Lambda$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  la mesure de l'image par  $g_n$  de l'ensemble  $I_n \setminus I$  est supérieure ou égale à  $\varepsilon_0$ . De plus, cet ensemble  $I_n \setminus I$  est constitué soit d'un seul intervalle  $J_n$ , soit de deux intervalles disjoints  $I'_n$  et  $I''_n$ . Bien évidemment, dans le dernier cas l'image par  $g_n$  d'au moins l'un de ces intervalles (lequel nous noterons  $J_n$ ) a une mesure supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}\varepsilon_0$ .

Si l'on suppose maintenant que les longueurs des  $I_n$  ne sont pas minorées par une constante strictement positive, on peut en extraire une sous-suite d'intervalles  $J_m$  dont les longueurs tendent vers 0 et tels que leurs images respectives sont de mesure supérieure ou égale à  $\varepsilon_0$ .

Dans tous les cas, nous avons trouvé une suite d'intervalles  $J_m$  et des éléments  $g_m$  de  $\Gamma$  définis sur  $J_m$  tels que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |J_m| = 0 \quad \text{et} \quad \nu(g_m(J_m)) \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0 \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{N}.$$

De plus, ces intervalles  $J_m$  peuvent être pris fermés, avec leurs extrémités appartenant à  $\Lambda$ , et de sorte qu'ils convergent vers un point  $x_0 \in \Lambda$ . Quitte à extraire une sous-suite de la suite d'intervalles  $g_m(J_m)$ , nous pouvons supposer qu'ils contiennent tous dans leur intérieur un intervalle  $J$  de mesure supérieure ou égale à  $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ . Puisque l'orbite de  $x_0$  est

dense dans  $\Lambda$ , il existe un intervalle ouvert  $U$  contenant  $x_0$  ainsi qu'un élément  $h \in \Gamma$  défini sur  $U$  tels que  $h(U) \subset J$ . Lorsque  $m$  est assez grand, les intervalles  $J_m$  sont entièrement contenus dans  $U$ . Donc, la transformation  $g = h \circ g_m^{-1}$  est définie sur l'intervalle fermé  $g_m(J_m)$  et son image est contenue dans  $J$  qui est lui-même contenu dans l'intérieur de  $g_m(J_m)$ . Écrivons  $g_m(J_m) = [p, p']$ , avec  $p$  et  $p'$  dans  $\Lambda$ . Nous avons donc

$$p < g(p) < g(p') < p'.$$

L'orbite du point  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(p)$  est alors de type ressort, puisque d'une part les itérés de tout point  $q$  de  $]p, x[$  par  $g$  convergent vers  $x$ , et d'autre part l'ensemble  $]p, x[ \cap \Lambda$  est non vide (il contient notamment le point  $g(p)$ ).  $\square$

La proposition 4.1 résulte en combinant le lemme précédent avec celui qui suit.

LEMME 4.4. *Si la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  est équicontinue, alors il existe une mesure de probabilité supportée sur  $\Lambda$  qui est invariante par tous les éléments de  $\Gamma$ .*

*Preuve.* La preuve repose sur les idées de Weil pour construire la mesure de Haar d'un groupe localement compact [75]. Notons  $C_\Lambda(X)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $X$  à valeurs réelles qui sont constantes sur les composantes connexes de  $X \setminus \Lambda$ , et désignons par  $C_\Lambda^+(X)$  le sous-ensemble des fonctions positives et non identiquement nulles.<sup>(5)</sup> Si  $g$  est un élément de  $\Gamma$  et  $\psi$  un élément de  $C_\Lambda^+(X)$ , notons  $\psi \circ g^{-1}$  la fonction qui vaut  $\psi \circ g^{-1}$  sur l'image de  $g$  et 0 en dehors. Lorsque la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  est équicontinue, nous allons construire une fonctionnelle  $L: C_\Lambda^+(X) \rightarrow ]0, \infty[$  qui est linéaire et homogène, et qui vérifie

$$L(\zeta \circ g^{-1}) = L(\zeta)$$

pour toute fonction  $\zeta \in C_\Lambda^+(X)$  et tout  $g \in \Gamma$  dont le domaine de définition contient le support de  $\zeta$ . Puisque  $C_\Lambda^+(X)$  s'identifie de manière canonique à l'espace des fonctions continues et positives définies sur l'espace métrique compact (homéomorphe à un intervalle) obtenu en paramétrant  $\Lambda$  à l'aide de la mesure  $\nu$ , la fonctionnelle  $L$  définit bien une mesure de probabilité supportée sur  $\Lambda$  qui est invariante par  $\Gamma$ .

Soient  $\psi$  et  $\zeta$  des éléments de  $C_\Lambda^+(X)$ . Puisque  $\psi$  est non nulle sur  $\Lambda$ , on peut trouver un nombre fini de réels positifs  $c_i$ , ainsi que des éléments  $g_i$  de  $\Gamma$  dont les domaines de définition soient connexes, de telle sorte que pour tout  $x \in \Lambda$  on ait

$$\zeta(x) \leq \sum_i c_i \psi \circ g_i^{-1}(x).$$

---

<sup>(5)</sup> Rappelons que, en français, un nombre  $a \in \mathbf{R}$  est dit *positif* (resp. *négalif*) lorsque  $a \geq 0$  (resp.  $a \leq 0$ ).

Notons que nous ne supposons pas que le domaine de définition de  $g_i$  contienne le support de  $\psi$  : les fonctions  $\psi \circ g_i^{-1}$  ne sont donc pas nécessairement continues. Nous définissons  $(\zeta : \psi)$  comme étant l'infimum des valeurs des  $\sum_i c_i$  parmi tous les choix possibles des  $c_i$  pour lesquels une telle inégalité a lieu. Nous laissons au lecteur la vérification des propriétés suivantes<sup>(6)</sup> :

- $(\zeta : \psi) \geq \|\zeta\|_\infty / \|\psi\|_\infty$  ;
- $(c\zeta : d\psi) = (c/d)(\zeta : \psi)$  pour toute paire de réels strictement positifs  $c$  et  $d$  ;
- $(\zeta_1 + \zeta_2 : \psi) \leq (\zeta_1 : \psi) + (\zeta_2 : \psi)$  ;
- $(\zeta : \psi) \leq (\zeta : \xi)(\xi : \psi)$  ;
- $(\zeta \circ g^{-1} : \psi) \leq (\zeta : \psi)$ , avec égalité si le domaine de  $g$  contient le support de  $\zeta$ .

Pour chaque  $\psi \in C_\Lambda^+(X)$  considérons la fonctionnelle  $L_\psi : C_\Lambda^+(X) \rightarrow \mathbf{R}$  donnée par

$$L_\psi(\zeta) = \frac{(\zeta : \psi)}{(1 : \psi)}.$$

Ces fonctionnelles sont positives, homogènes et sous-additives. Nous allons vérifier que lorsque le support de  $\psi$  est un intervalle dont la  $\nu$ -mesure tend vers 0, et que la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  est équicontinue, ces fonctionnelles deviennent de plus en plus linéaires. Choisissons deux fonctions  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $C_\Lambda^+(X)$  telles que  $\xi_1 + \xi_2 = 1$ . Nous allons démontrer que

$$|L_\psi(\xi_1\zeta) + L_\psi(\xi_2\zeta) - L_\psi(\zeta)|$$

tend vers 0 lorsque le diamètre du support de  $\psi$  tend vers 0. Pour cela considérons un réel  $\eta > 0$ . Puisque  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont continues et que  $X$  est compact, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si la  $\nu$ -mesure de l'intervalle d'extrémités  $x$  et  $x'$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$  alors

$$|\xi_1(x) - \xi_1(x')| \leq \eta \quad \text{et} \quad |\xi_2(x) - \xi_2(x')| \leq \eta.$$

De plus, puisque la restriction de  $\Gamma$  à  $\Lambda$  est équicontinue, il existe  $\delta > 0$  tel que si  $I$  est un intervalle vérifiant  $\nu(I) \leq \delta$ , alors pour tout  $g \in \Gamma$  dont le domaine de définition est connexe on a

$$\nu(g(I \cap \text{dom } g)) \leq \varepsilon.$$

Supposons que le support de  $\psi$  soit contenu dans un intervalle de  $\nu$ -mesure plus petite que  $\delta$ . Considérons une famille de réels positifs  $c_i$  et des  $g_i \in \Gamma$  dont le domaine de définition soit connexe et tels que, pour tout  $x \in \Lambda$ ,

$$\zeta(x) \leq \sum_i c_i \psi \circ g_i^{-1}(x).$$

---

<sup>(6)</sup> Le lecteur constatera que la validité des deux dernières propriétés utilise l'hypothèse que notre variété  $X$  est un intervalle.

Si le domaine de définition de  $g_i$  n'intersecte pas le support de  $\psi$ , alors la fonction  $\psi \circ g_i^{-1}$  est identiquement nulle, et on peut l'enlever de la somme en conservant l'inégalité. Nous supposons donc que le domaine de chaque  $g_i$  intersecte le support de  $\psi$ . Choisissons un point  $y_i$  dans  $g_i(\text{supp } \psi \cap \text{dom } g_i)$ . Pour tout  $x$  dans  $\Lambda$  nous avons

$$\zeta(x)\xi_1(x) \leq \sum_i c_i \xi_1(x) \psi \circ g_i^{-1}(x) = \sum_i^{(*)} c_i \xi_1(x) \psi(g_i^{-1}(x)),$$

où la deuxième somme (\*) ne porte que sur les termes pour lesquels  $g_i^{-1}(x)$  appartient au support de  $\psi$ , c'est-à-dire tels que  $x \in g_i(\text{supp } \psi \cap \text{dom } g_i)$ . D'après la définition de  $\delta$  nous avons que la  $\nu$ -mesure de l'intervalle d'extrémités  $x$  et  $y_i$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$ , et donc

$$|\xi_1(y_i) - \xi_1(x)| \leq \eta.$$

Par suite,

$$\xi_1 \zeta(x) \leq \sum_i^{(*)} c_i (\xi_1(y_i) + \eta) \psi \circ g_i^{-1}(x),$$

ce qui implique l'inégalité

$$(\xi_1 \zeta : \psi) \leq \sum_i^{(*)} c_i (\xi_1(y_i) + \eta).$$

Puisque nous avons les mêmes inégalités pour  $\xi_2$ , nous obtenons

$$(\xi_1 \zeta : \psi) + (\xi_2 \zeta : \psi) \leq \sum_i^{(*)} c_i (\xi_1(y_i) + \xi_2(y_i) + 2\eta) = (1 + 2\eta) \sum_i^{(*)} c_i.$$

En passant à l'infimum sur les  $\sum_i^{(*)} c_i$ , et puis en divisant par  $(1 : \psi)$ , nous en déduisons que

$$L_\psi(\xi_1 \zeta) + L_\psi(\xi_2 \zeta) \leq (1 + 2\eta) L_\psi(\zeta)$$

lorsque le support de  $\psi$  est un intervalle dont la  $\nu$ -mesure est inférieure ou égale à  $\delta$ . Comme nous savons déjà que  $L_\psi$  est sous-additive, ceci montre que

$$|L_\psi(\xi_1 \zeta) + L_\psi(\xi_2 \zeta) - L_\psi(\zeta)|$$

tend vers 0 lorsque le support de  $\psi$  est un intervalle dont la  $\nu$ -mesure tend vers 0.

Pour conclure la démonstration, il nous suffit de trouver une suite de fonctions  $\psi_n$  dans  $C_\Lambda^+(X)$  telle que les fonctionnelles  $L_{\psi_n}$  convergent simplement vers une fonctionnelle  $L$ . Pour cela, remarquons que pour tout  $\psi$  et  $\zeta$  dans  $C_\Lambda^+(X)$  on a

$$\frac{1}{(1 : \zeta)} \leq L_\psi(\zeta) \leq (\zeta : 1).$$



Ainsi, les fonctionnelles  $L_\psi$  définissent un point  $\{L_\psi(\zeta)\}_{\zeta \in C_\Lambda^+(X)}$  dans l'espace produit

$$\Pi = \prod_{\zeta \in C_\Lambda^+(X)} \left[ \frac{1}{(1:\zeta)}, (\zeta:1) \right].$$

Cet espace  $\Pi$  muni de la topologie produit est compact. Donc, si  $\psi_n$  est une suite d'éléments de  $C_\Lambda^+(X)$  dont les supports sont des intervalles qui tendent vers un point, de la suite d'éléments  $\{L_{\psi_n}(\zeta)\}_{\zeta \in C_\Lambda^+(X)}$  de  $\Pi$  on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément  $\{L(\zeta)\}_{\zeta \in C_\Lambda^+(X)}$ . D'après ce qui précède,  $L$  définit une fonctionnelle sur  $C_\Lambda^+(X)$  qui vérifie les conditions suivantes :

- $L$  est strictement positive;
- pour tout  $\zeta \in C_\Lambda^+(X)$  et tout  $g \in \Gamma$  tel que  $\text{dom } g$  contient le support de  $\zeta$  on a

$$L(\zeta \circ g^{-1}) = L(\zeta);$$

- $L$  est homogène;
- pour toutes fonctions  $\zeta, \xi_1$  et  $\xi_2$  de  $C_\Lambda^+(X)$  qui vérifient  $\xi_1 + \xi_2 = 1$  on a

$$L(\xi_1\zeta) + L(\xi_2\zeta) = L(\zeta).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que la dernière condition et la continuité de  $L$  impliquent que  $L$  est en fait linéaire, ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

La terminologie « ressort » vient de la théorie des feuilletages (voir par exemple [22] pour les détails ainsi qu'un joli dessin d'un ressort). Dans ce contexte ce qui précède se traduit par le résultat suivant, à comparer avec [34].

**PROPOSITION 4.5.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1 d'une variété compacte. Si  $\mathcal{F}$  n'admet pas de mesure (de probabilité) transverse invariante (au sens de Plante [61]), alors il contient une feuille ressort (topologique).*

*Preuve.* Quitte à passer au revêtement double orientable, nous pouvons supposer que  $\mathcal{F}$  est transversalement orientable. Il suffit alors d'appliquer la conclusion de la proposition 4.1 au pseudo-groupe d'holonomie de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

#### 4.2. Pseudo-groupes de difféomorphismes : le cas $C^{1+\tau}$

Dans ce paragraphe nous donnons la preuve (de la deuxième affirmation) du théorème E en classe  $C^{1+\tau}$ . Le cas  $C^1$  nécessite d'un peu plus de travail, et il sera traité au paragraphe suivant.

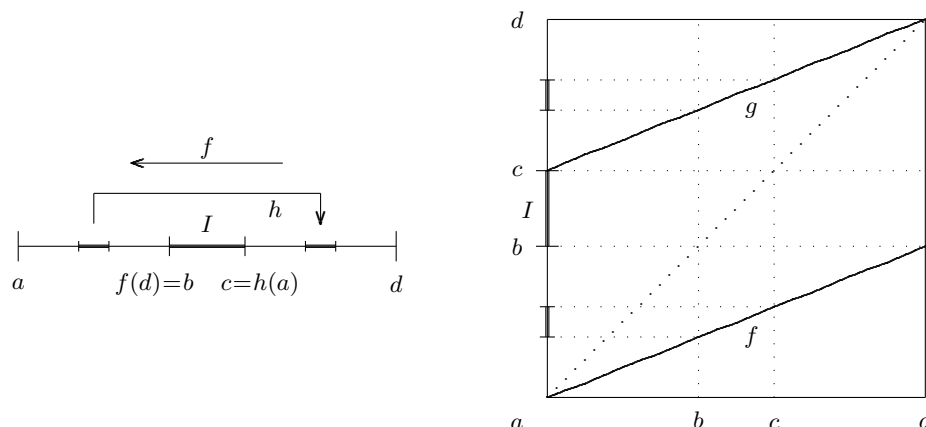


Figure 3.

D'après le §4.1, on est ramené à démontrer que, en présence d'une feuille ressort topologique, il existe nécessairement des feuilles ressort hyperboliques. Nous devons donc considérer la dynamique sur un intervalle  $[a, a']$  de deux difféomorphismes locaux  $f$  et  $h$  de classe  $C^{1+\tau}$  qui vérifient :

- $f$  est défini sur tout l'intervalle  $[a, a']$  et il contracte topologiquement vers le point fixe  $a$ ;

- $h$  est défini sur un voisinage de ce point fixe et  $h(a) \in ]a, a'[$ .

Posons  $c=h(a)$  et fixons  $d' \in ]c, a'[$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $f^n$  pour  $n \in \mathbf{N}$  assez grand, nous pouvons supposer que  $f(d') < c$ , que  $f(d')$  appartient au domaine de définition de  $h$ , et que  $hf(d') \in ]c, d'[$ . Cette dernière condition implique en particulier que  $hf$  possède des points fixes dans  $]c, d'[$ . Soit  $d$  le premier point fixe de  $hf$  à droite de  $c$ , et soit  $b=f(d)$ . L'intervalle ouvert  $I=]b, c[$  correspond au premier *gap* d'un ensemble de Cantor  $\Lambda$  qui est invariant par  $f$  et  $g=hf$  (voir la figure 3).

Puisque les orbites du pseudo-groupe engendré par  $f$  et  $g$  sont denses sur  $\Lambda$ , la preuve de la deuxième affirmation du théorème E (en classe  $C^{1+\tau}$ ) se réduit à démontrer la proposition suivante (laquelle est à rapprocher avec [38]).

**PROPOSITION 4.6.** *Sous les hypothèses précédentes, le pseudo-groupe engendré par  $f$  et  $g$  contient des éléments avec des points fixes hyperboliques appartenant à l'ensemble  $\Lambda$ .*

*Preuve.* Considérons l'espace  $\Omega = \{f, g\}^{\mathbf{N}}$  muni de la mesure de Bernoulli

$$\mathbf{P} = (B_{(1/2, 1/2)})^{\mathbf{N}}.$$

Pour tout  $\omega = (g_1, g_2, \dots) \in \Omega$  et tout  $n \in \mathbf{N}$  notons  $h_n(\omega) = g_n \dots g_1$ , et posons  $h_0(\omega) = \text{id}$ .

Puisque les intervalles de l'ensemble  $\{g_n \dots g_1(I) : n \geq 0 \text{ et } (g_1, \dots, g_n) \in \{f, g\}^n\}$  sont deux à deux disjoints,

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{(g_1, \dots, g_n) \in \{f, g\}^n} |g_n \dots g_1(I)| \leq d - a < \infty.$$

Or, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{(g_1, \dots, g_n) \in \{f, g\}^n} |g_n \dots g_1(I)| &= \sum_{n \geq 0} 2^n \int_{\Omega} |h_n(\omega)(I)| d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \mathbf{E} \left( \omega \mapsto \sum_{n \geq 0} 2^n |h_n(\omega)(I)| \right). \end{aligned}$$

Donc, pour  $\mathbf{P}$ -presque toute suite  $\omega \in \Omega$ , on a la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} 2^n |h_n(\omega)(I)|.$$

Fixons  $B > 0$  et considérons l'ensemble  $\Omega(B)$  défini par

$$\Omega(B) = \{\omega \in \Omega : |h_n(\omega)(I)| \leq B/2^n \text{ pour tout } n \geq 0\}.$$

D'après ce qui précède,  $\mathbf{P}[\Omega(B)]$  converge vers 1 lorsque  $B$  tend vers l'infini. Nous pouvons en particulier fixer  $B$  suffisamment grand de façon à ce que  $\mathbf{P}[\Omega(B)] > 0$ . Remarquons que si  $\omega$  appartient à  $\Omega(B)$  alors

$$\sum_{n \geq 0} |h_n(\omega)(I)|^\tau \leq B^\tau \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n\tau}} = M < \infty. \tag{16}$$

Considérons l'intervalle  $J' = [b - L, c + L]$  contenant l'intervalle errant  $I$ , où

$$L = L(\tau, M, |I|; \{f, g\})$$

est la constante qui apparaît dans le lemme 2.2. Si  $N \in \mathbf{N}$  est suffisamment grand alors  $f^N g$  et  $g^N f$  envoient tout l'intervalle  $[0, 1]$  sur  $J' \setminus I$ . Le lemme de Borel–Cantelli donne ainsi

$$\mathbf{P}[h_n(\omega)(I) \subset J' \setminus I \text{ une infinité de fois}] = 1.$$

Si  $\omega \in \Omega(B)$  et  $n \in \mathbf{N}$  satisfont  $h_n(\omega)(I) \subset J' \setminus I$ , alors le lemme 2.2 montre que  $h_n(\omega)$  possède un point fixe hyperbolique. Finalement, puisque l'ensemble  $\Lambda$  est invariant par le pseudo-groupe et que le point fixe que l'on a trouvé attire une partie de cet ensemble, ce point fixe appartient nécessairement à  $\Lambda$ . □

*Remarque 4.7.* Si l'on examine la preuve précédente de plus près, on s'aperçoit que la même technique permet de démontrer que pour presque tout  $\omega \in \Omega$  il existe une infinité d'entiers  $n \in \mathbf{N}$  tels que  $h_n(\omega)$  possède un point fixe hyperbolique  $p_n \in \Lambda$  de telle sorte que, asymptotiquement, la contraction  $h_n(\omega)'(p_n)$  est au moins de l'ordre de  $1/2^n$ .

*Remarque 4.8.* En classe  $C^{1+\text{lip}}$ , la proposition 4.6 découle directement du théorème de Sacksteder classique. Soulignons cependant que, dans ce contexte, on dispose d'une version beaucoup plus fine. En effet, considérons un intervalle  $]\bar{a}, \bar{d}[$  contenant strictement  $[a, d]$ , et fixons une application  $T: [\bar{a}, \bar{d}] \rightarrow [\bar{a}, \bar{d}]$  de classe  $C^{1+\text{lip}}$ , n'ayant que deux points critiques, et dont la restriction à  $[a, b]$  (resp.  $[c, d]$ ) coïncide avec  $f^{-1}$  (resp.  $g^{-1}$ ). Il résulte alors du théorème d'hyperbolicité de Mañé [45] que tous les points périodiques de  $T$  appartenant à l'ensemble de Cantor  $\Lambda$  et dont la période est suffisamment grande sont hyperboliques (dilatants). Or, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  la restriction de  $T^n$  à  $\Lambda$  coïncide localement avec des éléments du pseudo-groupe engendré par  $f$  et  $g$ .

Nous finissons ce paragraphe en utilisant la proposition 4.6 pour donner une version raffinée de l'un des résultats contenus dans [23] (voir le §3.6.2 de [57] pour une version « lipschitzienne » de la proposition ci-dessous).

**PROPOSITION 4.9.** *Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux groupes de difféomorphismes du cercle dont la classe de différentiabilité  $C^\alpha$  est strictement supérieure à  $C^1$ . Supposons qu'ils ne possèdent pas d'orbite finie et qu'ils ne soient pas semi-conjugués à des groupes de rotations. Alors tout difféomorphisme de classe  $C^1$  qui conjugue  $\Gamma_1$  avec  $\Gamma_2$  est nécessairement de classe  $C^\alpha$ .*

*Preuve.* Supposons que  $\varphi$  soit un difféomorphisme de classe  $C^1$  qui conjugue  $\Gamma_1$  avec  $\Gamma_2$ . Les hypothèses faites sur ces groupes impliquent, par des arguments bien connus (voir le §4.1 ou bien l'appendice 5.1), qu'ils contiennent des éléments vérifiant les hypothèses de la proposition 4.6. Par suite, ces groupes possèdent des éléments avec des points fixes hyperboliques. De plus, lorsqu'il existe un minimal exceptionnel, de tels points fixes peuvent être pris appartenant à cet ensemble minimal. Le difféomorphisme  $\varphi$  étant de classe  $C^1$ , il envoie des points fixes hyperboliques sur des points fixes hyperboliques. En particulier, il conjugue les germes correspondants. D'après le théorème de linéarisation de Sternberg, l'application  $\varphi$  est localement un difféomorphisme de classe  $C^\alpha$  autour de ces points fixes (voir la note au bas de la page 225). Puisque l'ensemble des points autour desquels  $\varphi$  est un difféomorphisme local de classe  $C^\alpha$  est invariant par  $\Gamma_1$ , lorsque les orbites sont denses cela suffit pour démontrer que  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^\alpha$  sur tout le cercle. C'est le cas aussi lorsqu'il y a un minimal exceptionnel, car toute orbite s'accumule sur ce minimal. Ceci termine la démonstration.  $\square$

**4.3. Pseudo-groupes de difféomorphismes : le cas  $C^1$**

Même en présence d'une dynamique dilatante, il est en général impossible de contrôler les distorsions en classe  $C^1$  (une illustration classique de ce fait apparaît dans [4]). Néanmoins, lorsqu'on sait *a priori* qu'il y a de l'hyperbolicité quelque part, des arguments élémentaires permettent d'en déduire qu'il y a de l'hyperbolicité partout : c'est l'idée sous-jacente de la preuve que nous donnons dans la suite.<sup>(7)</sup> Une formulation plus conceptuelle de cette idée (en termes d'exposants de Lyapunov et de mesures stationnaires) sera essentielle au §4.4.

Tout en gardant les notations du §4.2, fixons une fois pour toutes une constante  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Nous savons que pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$  il existe  $B = B(\omega) \geq 1$  tel que

$$|h_n(\omega)(I)| \leq \frac{B}{2^n} \quad \text{pour tout } n \geq 0. \tag{17}$$

LEMME 4.10. *Il existe une constante  $\bar{C}$  ne dépendant que de  $f$  et  $g$  telle que, si  $\omega = (g_1, g_2, \dots) \in \Omega$  satisfait (17), alors pour tout  $x \in I$  et tout entier  $n \geq 0$  on a*

$$h_n(\omega)'(x) \leq \frac{B\bar{C}}{(2-\varepsilon)^n}. \tag{18}$$

*Preuve.* Fixons  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit de façon à ce que pour tout  $y$  et  $z$  dans  $[a, d]$  à distance inférieure ou égale à  $\varepsilon_0$  on ait

$$\frac{f'(y)}{f'(z)} \leq \frac{2}{2-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{g'(y)}{g'(z)} \leq \frac{2}{2-\varepsilon}. \tag{19}$$

Il est facile de voir qu'il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $i \geq 0$ , la taille de l'intervalle  $h_{N+i}(\omega)(I)$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon_0$ . Nous affirmons alors que (18) a lieu pour  $\bar{C} = \max\{A, \bar{A}\}$ , où

$$A = \sup_{\substack{x \in I \\ n \leq N \\ \omega \in \Omega}} \frac{h_n(\omega)'(x)(2-\varepsilon)^n}{B} \quad \text{et} \quad \bar{A} = \sup_{\substack{x, y \in I \\ \omega \in \Omega}} \frac{h_N(\omega)'(x)}{h_N(\omega)'(y)|I|} \left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)^N.$$

En effet, si  $n \leq N$  alors (18) a lieu à cause de l'inégalité  $\bar{C} \geq A$ . Supposons donc  $n > N$ , et fixons  $y = y(n) \in I$  tel que  $|h_n(\omega)(I)| = h_n(\omega)'(y)|I|$ . Si  $x$  appartient à  $I$  alors la distance entre les points  $h_{N+i}(\omega)(x)$  et  $h_{N+i}(\omega)(y)$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon_0$  pour tout  $i \geq 0$ . Par (19),

$$\frac{h_n(\omega)'(x)}{h_n(\omega)'(y)} = \frac{h_N(\omega)'(x) g'_{N+1}(h_N(\omega)(x))}{h_N(\omega)'(y) g'_{N+1}(h_N(\omega)(y))} \cdots \frac{g'_n(h_{n-1}(\omega)(x))}{g'_n(h_{n-1}(\omega)(y))} \leq \frac{h_N(\omega)'(x)}{h_N(\omega)'(y)} \left(\frac{2}{2-\varepsilon}\right)^{n-N},$$

---

<sup>(7)</sup> Il est possible que par une méthode similaire on puisse traiter le cas critique (i.e. en classe  $C^{1+1/d}$ ) de nos résultats pour des groupes abéliens de difféomorphismes.

et donc

$$h_n(\omega)'(x) \leq \frac{h_N(\omega)'(x)}{h_N(\omega)'(y)} \frac{|h_n(\omega)(I)|}{|I|} \left(\frac{2}{2-\varepsilon}\right)^{n-N} \leq \frac{h_N(\omega)'(x)}{h_N(\omega)'(y)} \frac{B}{|I|2^n} \left(\frac{2}{2-\varepsilon}\right)^{n-N} \leq \frac{B\bar{C}}{(2-\varepsilon)^n},$$

où la dernière inégalité découle de la condition  $\bar{C} \geq \bar{A}$ .  $\square$

Pour obtenir de l'hyperbolicité au delà de l'intervalle  $I$  on doit utiliser un argument « dual » mais légèrement plus élaboré que celui du lemme précédent. Pour le formuler fixons une constante  $\varepsilon_1 > 0$  suffisamment petite de sorte que pour tout  $y$  et  $z$  dans  $[a, d]$  à distance inférieure ou égale à  $\varepsilon_1$  on ait

$$\frac{f'(y)}{f'(z)} \leq \frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{g'(y)}{g'(z)} \leq \frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}. \quad (20)$$

LEMME 4.11. *Soient  $C \geq 1$ ,  $\omega = (g_1, g_2, \dots) \in \Omega$  et  $x \in [a, d]$  tels que*

$$h_n(\omega)'(x) \leq \frac{C}{(2-\varepsilon)^n} \quad \text{pour tout } n \geq 0. \quad (21)$$

*Alors pour tout  $y \in [a, d]$  à distance inférieure ou égale à  $\varepsilon_1/C$  de  $x$  et tout  $n \geq 0$  on a*

$$h_n(\omega)'(y) \leq \frac{C}{(2-2\varepsilon)^n}. \quad (22)$$

*Preuve.* La vérification de l'inégalité (22) se fait par récurrence. Pour  $n=0$  elle a lieu à cause de l'hypothèse  $C \geq 1$ . Admettons qu'elle soit valable pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , et montrons qu'elle reste valable pour  $j=n+1$ . Pour cela, notons

$$y_j = h_j(\omega)(y) \quad \text{et} \quad x_j = h_j(\omega)(x).$$

Supposons que  $y \leq x$ , l'autre cas étant analogue. Chaque point  $y_j$  appartient alors à l'intervalle  $h_j(\omega)([x - \varepsilon_1/C, x])$ . Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\left| h_j(\omega)\left(\left[x - \frac{\varepsilon_1}{C}, x\right]\right) \right| \leq \frac{C}{(2-2\varepsilon)^j} \left| \left[x - \frac{\varepsilon_1}{C}, x\right] \right| \leq C \frac{\varepsilon_1}{C} = \varepsilon_1.$$

Par la définition de  $\varepsilon_1$  on conclut que, pour tout  $j \leq n$  on a

$$g'_{j+1}(y_j) \leq g'_{j+1}(x_j) \left(\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}\right).$$

Donc, par (21),

$$\begin{aligned} h_{n+1}(\omega)'(y) &= g'_1(y_0) \dots g'_{n+1}(y_n) \leq g'_1(x_0) \dots g'_{n+1}(x_n) \left(\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}\right)^{n+1} \\ &\leq \frac{C}{(2-\varepsilon)^{n+1}} \left(\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}\right)^{n+1} = \frac{C}{(2-2\varepsilon)^{n+1}}, \end{aligned}$$

ce qui achève la vérification par récurrence de (22).  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème E en classe  $C^1$ . Pour cela remarquons que, d'après le lemme 4.10, si  $C$  est suffisamment grand alors la probabilité de l'ensemble

$$\Omega(C, \varepsilon) = \{\omega \in \Omega : h_n(\omega)'(x) \leq C/(2-\varepsilon)^n \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et tout } x \in I\}$$

est strictement positive. Fixons un tel  $C \geq 1$  et notons  $L = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_1/C, |I|\}$ . Si l'on désigne par  $J$  le  $2L$ -voisinage de  $I$ , alors le lemme 4.11 entraîne que pour tout  $\omega \in \Omega(C, \varepsilon)$ , tout  $n \geq 0$  et tout  $y \in J$ ,

$$h_n(\omega)'(y) \leq \frac{C}{(2-2\varepsilon)^n}. \quad (23)$$

Si l'on désigne par  $J'$  le  $L$ -voisinage de  $I$ , alors

$$\mathbf{P}[h_n(\omega)(I) \subset J' \setminus I \text{ une infinité de fois}] = 1.$$

Par conséquent, et étant donné que  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , il existe  $\omega \in \Omega(C, \varepsilon)$  et  $m \in \mathbf{N}$  tels que

$$h_m(\omega)(I) \subset J' \setminus I \quad \text{et} \quad (2-2\varepsilon)^m > C.$$

D'après (23), et puisque  $L \leq \frac{1}{2}|I|$ , cela implique que  $h_m(\omega)$  envoie  $J$  sur l'une des deux composantes connexes de  $J' \setminus I$  de telle manière que  $h_m(\omega)$  possède un point fixe dans cette composante connexe, lequel est nécessairement hyperbolique (et appartient à  $\Lambda$ ).

#### 4.4. Groupes de difféomorphismes du cercle

Le problème qui consiste à trouver des éléments n'ayant que des points fixes hyperboliques pour des groupes de difféomorphismes du cercle est fort délicat. La stratégie que nous proposons pour le résoudre diffère radicalement des méthodes employées dans les paragraphes précédents. Pour sa mise en œuvre nous aurons fortement besoin des résultats contenus dans l'appendice de ce travail, dont la lecture préliminaire est fondamentale pour la compréhension de ce qui suit.

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Homéo}_+(S^1)$  qui ne préserve aucune mesure de probabilité du cercle, alors un argument classique de compacité montre l'existence d'un sous-groupe de type fini de  $\Gamma$  qui ne fixe aucune probabilité sur  $S^1$ . Donc, dans l'énoncé du théorème D, nous pouvons supposer (sans perdre en généralité) que  $\Gamma$  est de type fini. Considérons une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$  qui soit non dégénérée, symétrique et de support fini, et désignons par  $\Omega$  l'espace  $\Gamma^{\mathbf{N}}$  (muni de la mesure  $\mathbf{P} = \mu^{\mathbf{N}}$ ). Notons  $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$  le décalage, et considérons la transformation  $T: \Omega \times S^1 \rightarrow \Omega \times S^1$  définie par  $T(\omega, x) = (\sigma(\omega), h_1(\omega)(x))$ . Soit  $\nu$  une probabilité sur  $S^1$  stationnaire par rapport à  $\mu$ , i.e. telle que la transformation

$T$  préserve la mesure de probabilité  $\mathbf{P} \times \nu$ . Le théorème ergodique de Birkhoff donne l'existence (presque partout) de la limite

$$\lambda_{(\omega, x)}(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(h_n(\omega)'(x))}{n}.$$

Ce nombre est par définition l'exposant de Lyapunov du point  $(\omega, x) \in \Omega \times S^1$ .

Lorsque  $\Gamma$  ne préserve pas de mesure de probabilité du cercle, la mesure stationnaire (par rapport à  $\mu$ ) est unique et ne possède pas d'atome; par ailleurs, la transformation  $T$  est ergodique. L'exposant de Lyapunov est donc  $(\mathbf{P} \times \nu)$ -presque partout constant; de plus, la valeur  $\lambda = \lambda(\nu)$  de cette constante est strictement négative (voir l'appendice).

Pour démontrer le théorème F nous examinons d'abord le cas le plus simple, à savoir celui d'une action minimale qui vérifie la propriété d'expansivité forte (voir l'appendice 5.1). Dans ce cas, nous savons d'après le §5.1 que pour tout  $\omega$  appartenant à un sous-ensemble  $\Omega^*$  de probabilité totale de  $\Omega$ , le *coefficient de contraction*  $c(h_n(\omega))$  converge vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cela se traduit par le fait que pour tout  $\omega \in \Omega^*$  il existe des intervalles fermés  $I_n(\omega)$  et  $J_n(\omega)$  dont la taille converge vers zéro et tels que  $h_n(\omega)(S^1 \setminus I_n(\omega)) = J_n(\omega)$ . De plus, l'intervalle  $I_n(\omega)$  converge vers un point  $\varsigma_+(\omega)$  (de telle sorte que l'application  $\varsigma_+ : \Omega^* \rightarrow S^1$  ainsi définie soit mesurable). Si  $I_n(\omega)$  et  $J_n(\omega)$  sont disjoints alors les points fixes de  $h_n(\omega)$  sont inclus à l'intérieur de ces deux intervalles. Pour démontrer l'unicité et l'hyperbolicité d'au moins le point fixe contractant (i.e. celui situé dans  $J_n(\omega)$ ), nous aimerions nous servir du fait que l'exposant de Lyapunov de l'action est strictement négatif (ce qui correspond à une propriété de contraction différentielle au niveau local). Néanmoins, on voit apparaître immédiatement deux difficultés techniques : les intervalles  $I_n(\omega)$  et  $J_n(\omega)$  ne sont pas toujours disjoints, et la rapidité de contraction différentielle locale dépend du point initial  $(\omega, x)$ . Pour résoudre le premier problème il suffit de remarquer que les instants  $n \in \mathbf{N}$  pour lesquels  $I_n(\omega) \cap J_n(\omega) \neq \emptyset$  sont assez rares (en effet, la densité de cet ensemble d'entiers est génériquement égale à zéro). La deuxième difficulté est surmontée en utilisant le fait que la transformation  $T$  est ergodique, ce qui implique que presque tout point initial  $(\omega, x)$  tombera au bout d'un certain moment sur un point où la rapidité de contraction est bien contrôlée. Soulignons finalement que, pour obtenir l'unicité et l'hyperbolicité du point fixe dilatant, il est nécessaire d'utiliser un argument analogue à celui qui précède mais pour les compositions des inverses et dans l'ordre opposé. Pour cela nous passons aux distributions en temps finis; en effet, puisque la mesure de départ  $\mu$  est symétrique, en temps fini les distributions pour ces deux processus coïncident.

Pour mettre en œuvre les idées ci-dessus, commençons par fixer une constante  $C \geq 1$  suffisamment grande de façon à ce que l'ensemble

$$E(C) = \left\{ (\omega, x) \in \Omega \times S^1 : h_n(\omega)'(x) \leq C \exp\left(\frac{2}{3}\lambda n\right) \text{ pour tout } n \geq 0 \right\}$$



ait une mesure strictement positive.<sup>(8)</sup> Considérons  $\bar{\varepsilon} > 0$  tel que pour tout  $g$  dans le support de  $\mu$  et tout  $x$  et  $y$  à distance au plus  $\bar{\varepsilon}$  on ait

$$\frac{g'(x)}{g'(y)} \leq \exp\left(\frac{1}{6}\lambda\right).$$

La preuve du lemme suivant est analogue à celle du lemme 4.11, et nous la laissons au lecteur.

LEMME 4.12. *Si  $(\omega, y)$  appartient à  $E(C)$  et  $x \in S^1$  est un point à distance inférieure ou égale à  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}/C$  de  $y$ , alors*

$$h_n(\omega)'(x) \leq C \exp\left(\frac{1}{2}\lambda\right) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Pour  $\delta \in ]0, 1[$  posons

$$\alpha_\nu(\delta) = \inf \{ \nu(I) : I \text{ intervalle de taille supérieure ou égale à } 1 - \delta \}.$$

Puisque  $\nu$  est sans atome,  $\alpha_\nu(\delta)$  tend vers 1 lorsque  $\delta$  tend vers zéro. Pour tout  $\omega \in \Omega$  et chaque entier  $k > 10$  notons<sup>(9)</sup>

$$\mathbf{N}(\omega, k) = \{ n \in \mathbf{N} : \text{dist}(\varsigma_+(\omega), J_n(\omega)) \geq 4/k \},$$

et posons

$$\Omega_{1/k}^* = \{ \omega \in \Omega^* : \text{dens}(\mathbf{N}(\omega, k)) \geq \alpha_\nu(10/k) \},$$

où dens désigne la densité de l'ensemble d'entiers strictement positifs correspondant.<sup>(10)</sup>

LEMME 4.13. *Pour chaque entier  $k > 10$  la probabilité de l'ensemble  $\Omega_{1/k}^*$  est totale.*

*Preuve.* Lorsque l'action est minimale, le support de toute probabilité stationnaire est total. Par conséquent, d'après le théorème ergodique de Birkhoff, pour chaque  $k > 10$  on peut fixer un point  $y_k$  dans  $S^1 \setminus [\varsigma_+(\omega) - 5/k, \varsigma_+(\omega) + 5/k]$  de sorte que pour un sous-ensemble générique  $\bar{\Omega}_{1/k}^*$  de  $\Omega^*$  on ait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{n \leq N : h_n(\omega)(y_k) \notin [\varsigma_+(\omega) - 5/k, \varsigma_+(\omega) + 5/k]\}}{N} = \nu(S^1 \setminus [\varsigma_+(\omega) - 5/k, \varsigma_+(\omega) + 5/k]). \tag{24}$$

<sup>(8)</sup> À l'aide du lemme classique de Pliss [63], on peut démontrer que la mesure de l'ensemble  $E(1)$  est déjà strictement positive. Cependant, nous n'aurons pas besoin de cela pour poursuivre notre argumentation.

<sup>(9)</sup> La condition  $k > 10$  est imposée afin que les arguments qui suivent ne tombent pas en défaut par des raisons « stupides » (impossibilité d'existence d'intervalles avec les propriétés demandées, etc.).

<sup>(10)</sup> Nous entendons par densité d'un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbf{N}$  la valeur

$$\text{dens}(X) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(X \cap \{1, \dots, N\})}{N}.$$

Pour chaque  $\omega \in \bar{\Omega}_{1/k}^*$  fixons  $n(\omega) \in \mathbf{N}$  de sorte que

$$c(h_n(\omega)) \leq \frac{1}{k} \text{ et } I_n(\omega) \subset \left[ \varsigma_+(\omega) - \frac{1}{k}, \varsigma_+(\omega) + \frac{1}{k} \right] \text{ pour tout } n \geq n(\omega).$$

Si  $n \geq n(\omega)$  alors  $y_k$  est évidemment dans  $S^1 \setminus I_n(\omega)$ , et donc  $h_n(\omega)(y_k)$  appartient à  $J_n(\omega)$ . Par suite, si  $n \geq n(\omega)$  est tel que  $h_n(\omega)(y_k)$  n'est pas dans  $[\varsigma_+(\omega) - 5/k, \varsigma_+(\omega) + 5/k]$ , alors  $\text{dist}(\varsigma_+(\omega), J_n(\omega)) \geq 4/k$ . D'après (24), ceci implique que l'ensemble  $\bar{\Omega}_{1/k}^*$  est contenu dans  $\Omega_{1/k}^*$ , ce qui permet de conclure la preuve du lemme.  $\square$

Puisque l'application  $T$  est ergodique, si l'on désigne par  $\Omega(C)$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que pour  $\nu$ -presque tout  $y \in S^1$  on ait  $(\sigma^n(\omega), h_n(\omega)(y)) \in E(C)$  pour une infinité d'entiers  $n \in \mathbf{N}$ , alors la probabilité de  $\Omega(C)$  est totale. Par suite, pour tout entier  $k > 10$  l'ensemble  $\Omega_{1/k}^{**} = \Omega_{1/k}^* \cap \Omega(C)$  possède lui aussi une probabilité égale à 1. Pour chaque  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$  désignons par  $D_\eta(S^1)$  l'ensemble des difféomorphismes  $g$  de classe  $C^1$  du cercle qui vérifient la propriété suivante : il existe deux intervalles fermés  $I'$  et  $J'$  de taille au plus  $\eta$  et à distance au moins  $2\eta$  entre eux tels que  $g$  envoie  $S^1 \setminus I'$  dans  $J'$  et la contraction  $g: S^1 \setminus I' \rightarrow J'$  est uniformément hyperbolique (i.e. la dérivée de  $g$  sur  $\overline{S^1 \setminus I'}$  est strictement inférieure à 1).

LEMME 4.14. *Si  $\omega$  appartient à  $\Omega_{1/k}^{**}$  alors l'ensemble  $\mathbf{N}^*(\omega, k)$  des entiers  $n \in \mathbf{N}$  tels que  $h_n(\omega)$  appartient à  $D_{1/k}(S^1)$  a une densité au moins égale à  $\alpha_\nu(10/k)$ .*

*Preuve.* Posons  $\varepsilon_k = \min\{1/2k, \varepsilon\}$ , et pour chaque  $\omega \in \Omega_{1/k}^{**}$  prenons :

– un entier positif  $n_0 = n_0(\omega)$  tel que

$$c(h_n(\omega)) \leq \varepsilon_k \text{ et } I_n(\omega) \subset \left[ \varsigma_+(\omega) - \frac{1}{k}, \varsigma_+(\omega) + \frac{1}{k} \right] \text{ pour tout } n \geq n_0;$$

– un point  $y$  n'appartenant pas à

$$\left[ \varsigma_+(\omega) - \frac{1}{k}, \varsigma_+(\omega) + \frac{1}{k} \right]$$

et un entier positif  $n_1 = n_1(\omega) \geq n_0$  tels que  $(\sigma^{n_1}(\omega), h_{n_1}(\omega)(y)) \in E(C)$  ;

– un entier positif  $n_2 = n_2(\omega)$  tel que si l'on désigne par  $M$  le supremum des valeurs de  $g'(z)$  avec  $z \in S^1$  et  $g$  dans le support de  $\mu$ , alors

$$C \exp\left(\frac{1}{2}\lambda n_2\right) M^{n_1} < 1.$$

Supposons que  $n \in \mathbf{N}$  soit supérieur ou égal à  $n_1 + n_2$  et qu'il appartienne à  $\mathbf{N}(\omega, k)$ . Le point  $h_{n_1}(\omega)(y)$  appartient à l'intervalle  $J_{n_1}(\omega)$ , dont la taille n'est pas plus grande que  $\varepsilon$ . Par le lemme 4.12, pour tout  $x \in J_{n_1}(\omega)$  et tout  $m \geq 0$ ,

$$h_m(\sigma^{n_1}(\omega))'(x) \leq C \exp\left(\frac{1}{2}\lambda m\right).$$

En particulier, si  $m \geq n_2$  alors pour tout  $z \notin I_{n_1}(\omega)$  on a

$$h_{n_1+m}(\omega)'(z) = h_{n_1}(\omega)'(z)h_m(\sigma^{n_1}(\omega))'(h_{n_1}(\omega)(z)) \leq M^{n_1}C \exp\left(\frac{1}{2}\lambda m\right) < 1.$$

Donc, si  $m \geq n_2$  est tel que  $n = n_1 + m$  appartient à  $\mathbf{N}(\omega, k)$ , alors :

– la dérivée de  $h_n(\omega)$  sur  $\overline{S^1 \setminus I_{n_1}(\omega)}$  est bornée par une constante strictement inférieure à 1 ;

– la taille de l'intervalle  $h_n(\omega)(S^1 \setminus I_{n_1}(\omega)) = h_m(\sigma^{n_1}(\omega))(J_{n_1}(\omega))$  est inférieure ou égale à  $|J_{n_1}(\omega)| \leq \varepsilon_k$  ;

– on a  $h_n(\omega)(\overline{S^1 \setminus I_n(\omega)}) = J_n(\omega)$ .

Puisque les quatre intervalles concernés ci-dessus ont une taille au plus égale à  $\varepsilon_k \leq 1/2k$ , des arguments élémentaires montrent que  $I_{n_1}(\omega)$  et  $I_n(\omega)$  s'intersectent, et de même pour  $J_n(\omega)$  et  $h_n(\omega)(I_{n_1}(\omega))$  ; de plus si l'on désigne par  $I'_n(\omega)$  (resp.  $J'_n(\omega)$ ) l'intervalle  $I_{n_1}(\omega) \cup I_n(\omega)$  (resp.  $J_n(\omega) \cup h_n(\omega)(I_{n_1}(\omega))$ ), alors  $I'_n(\omega)$  et  $J'_n(\omega)$  ont une taille au plus égale à  $1/k$ , ils sont à une distance supérieure ou égale à  $2/k$  et

$$h_n(\omega)(S^1 \setminus I'_n(\omega)) \subset J'_n(\omega).$$

Nous avons donc montré que tout entier  $n \geq n_1(\omega) + n_2(\omega)$  dans  $\mathbf{N}(\omega, k)$  appartient à  $\mathbf{N}^*(\omega, k)$ . Puisque la densité de  $\mathbf{N}(\omega, k)$  est supérieure ou égale à  $\alpha_\nu(10/k)$ , ceci conclut la preuve du lemme.  $\square$

Fixons maintenant une constante  $\gamma > \frac{1}{2}$  et un entier  $k_0 > 10$  tels que  $\alpha_\nu(10/k_0) > \gamma$ . Prenons une autre constante  $\varrho \in ]0, 1[$  telle que  $\gamma\varrho > \frac{1}{2}$ , et pour chaque  $N \in \mathbf{N}$  désignons par  $\Omega(k_0, N)$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega_{1/k_0}^{**}$  tels que

$$\frac{\text{card}\{n \in \{1, \dots, N\} : h_n(\omega) \in D_{1/k_0}(S^1)\}}{N} \geq \gamma.$$

D'après les lemmes 4.13 et 4.14, pour  $N$  suffisamment grand nous avons  $\mathbf{P}[\Omega(k_0, N)] \geq \varrho$ . Pour  $n \in \mathbf{N}$  notons  $\mathbf{P}_n$  la probabilité  $\mu^n$  définie sur  $\Gamma^n$ .

LEMME 4.15. *Si  $\mathbf{P}[\Omega(k_0, N)] \geq \varrho$  alors il existe  $n \in \{1, \dots, N\}$  tel que*

$$\mathbf{P}_n[(g_1, \dots, g_n) : g_n \dots g_1 \in D_{1/k_0}(S^1)] \geq \gamma\varrho. \tag{25}$$

*Preuve.* Pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  notons  $\xi_n$  la variable aléatoire définie par

$$\xi_n(\omega) = \mathcal{X}_{D_{1/k_0}(S^1)}(h_n(\omega)),$$

où  $\mathcal{X}$  désigne la fonction indicatrice. Un élément  $\omega \in \Omega_{1/k_0}^{**}$  appartient à  $\Omega(k_0, N)$  si et seulement si

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n(\omega) \geq \gamma.$$

Donc, si  $\mathbf{P}[\Omega(k_0, N)] \geq \varrho$  alors

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n\right) \geq \gamma \varrho.$$

Par suite, il existe  $n \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $\mathbf{E}(\xi_n) \geq \gamma \varrho$ . Puisque

$$\mathbf{E}(\xi_n) = \mathbf{P}_n[(g_1, \dots, g_n) : g_n \dots g_1 \in D_{1/k_0}(S^1)],$$

ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

Rappelons que la mesure  $\mu$  sur  $\Gamma$  est supposée symétrique. Par suite, la distribution dans  $\Gamma$  des éléments de la forme  $g_n \dots g_1$  obtenus à partir d'éléments  $(g_1, \dots, g_n) \in \Gamma^n$  est exactement la même que celle des  $g_1^{-1} \dots g_n^{-1}$ . Donc, si  $n \in \mathbf{N}$  vérifie (25) alors

$$\mathbf{P}_n[(g_1, \dots, g_n) : g_n \dots g_1 \text{ et } (g_n \dots g_1)^{-1} \text{ appartiennent à } D_{1/k_0}(S^1)] \geq 2\gamma \varrho - 1 > 0,$$

La preuve du théorème F (dans le cas minimal et fortement expansif) est alors conclue par le lemme suivant.

**LEMME 4.16.** *Soit  $g$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  du cercle. Si  $g$  et  $g^{-1}$  appartiennent à  $D_{1/k_0}(S^1)$  alors  $g$  ne possède que deux points fixes, l'un hyperboliquement contractant et l'autre hyperboliquement dilatant.*

*Preuve.* Il est facile de voir que l'intersection des intervalles  $I'(g)$  et  $J'(g^{-1})$  est d'intérieur non vide, et de même pour  $J'(g)$  et  $I'(g^{-1})$ . Puisque tous ces intervalles ont une taille au plus égale à  $1/k_0$  et  $\text{dist}(I'(g), J'(g)) \geq 2/k_0$ , les intervalles  $K(g) = I'(g) \cup J'(g^{-1})$  et  $K'(g) = J'(g) \cup I'(g^{-1})$  sont disjoints. De plus,  $g$  envoie  $S^1 \setminus K(g)$  dans  $K'(g)$ , et  $g^{-1}$  envoie  $S^1 \setminus K'(g)$  dans  $K(g)$ . Puisque la dérivée de  $g$  (resp. de  $g^{-1}$ ) dans  $S^1 \setminus K(g)$  (resp. dans  $S^1 \setminus K'(g)$ ) est strictement inférieure à 1, ceci démontre le lemme.  $\square$

*Remarque 4.17.* Une bonne lecture de la preuve précédente permet de conclure que, lorsqu'on fait des compositions aléatoires, très probablement à partir d'un certain moment on tombera assez souvent sur un difféomorphisme avec deux points fixes hyperboliques. Plus précisément, si l'on désigne par  $D_2(S^1)$  l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^1$  du cercle qui possèdent exactement deux points fixes tous les deux hyperboliques, alors

$$\mathbf{P}[\omega : \text{dens}\{n \in \mathbf{N} : h_n(\omega) \in D_2(S^1)\} = 1] = 1.$$

L'extension de la démonstration précédente au cas minimal et expansif (mais non fortement expansif) ne présente pas de difficulté majeure. En effet, nous savons d'après le §5.1 qu'il existe un homéomorphisme  $\theta: S^1 \rightarrow S^1$  d'ordre fini  $\kappa = \kappa(\Gamma)$  et qui commute avec tous les éléments de  $\Gamma$ . De plus, si l'on désigne par  $S^1/\sim$  le cercle topologique obtenu

en identifiant les points des orbites de  $\theta$  et par  $\widehat{\Gamma}$  le sous-groupe de  $\text{Homéo}_+(S^1/\sim)$  induit, alors l'action de  $\widehat{\Gamma}$  est minimale et fortement expansive. Remarquons que  $\theta$  n'est pas nécessairement différentiable. Cependant, tous les arguments topologiques de la preuve donnée pour le cas minimal et fortement expansif s'appliquent à l'action de  $\widehat{\Gamma}$  sur  $\text{Homéo}_+(S^1/\sim)$ . D'autre part, les arguments de nature différentielle doivent être lus dans l'action originale de  $\Gamma$  sur  $S^1$ . On démontre ainsi l'existence d'un élément  $g = g_n \dots g_1$  dans  $\Gamma$  tel qu'il existe des intervalles disjoints  $K(g)$  et  $K'(g)$  dans  $S^1/\sim$  qui se relèvent respectivement en des intervalles  $K_1(g), \dots, K_\varkappa(g)$  et  $K'_1(g), \dots, K'_\varkappa(g)$  qui sont deux à deux disjoints et qui vérifient :

- $g$  envoie  $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\varkappa} K_i(g)$  sur  $\bigcup_{i=1}^{\varkappa} K'_i(g)$  avec dérivée strictement inférieure à 1 ;
- $g^{-1}$  envoie  $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\varkappa} K'_i(g)$  sur  $\bigcup_{i=1}^{\varkappa} K_i(g)$  avec dérivée strictement inférieure à 1.

Il est alors facile de s'apercevoir que l'élément  $g^\varkappa \in \Gamma$  ne contient que  $2\varkappa$  points fixes, dont la moitié sont hyperboliquement contractants et l'autre moitié sont hyperboliquement dilatants.

*Remarque 4.18.* Le dernier argument de la preuve précédente (i.e. celui qui consiste à remplacer  $g$  par  $g^\varkappa$ ) n'est pas de nature probabiliste, dans le sens que si bien  $g$  correspond à un produit aléatoire générique d'éléments de  $\Gamma$ , l'élément  $g^\varkappa \in \Gamma$  ne jouit pas de cette propriété. Il est donc naturel d'essayer de déterminer la fréquence avec laquelle on voit apparaître des difféomorphismes n'ayant que des points fixes hyperboliques dans une suite aléatoire typique. Ce problème a une réponse évidente – cette fréquence est (génériquement) égale à  $1/\varkappa$  – mais la démonstration de ce fait n'est pas complètement élémentaire (elle utilise une loi de type 0-2).

Le cas où il existe un minimal exceptionnel (et il n'y a pas de probabilité invariante) est plus compliqué. En effet, dans cette situation le support de l'unique mesure stationnaire coïncide avec cet ensemble minimal  $\Lambda$  ; le fait que l'exposant de Lyapunov soit strictement négatif ne donne donc aucune information d'hyperbolicité loin de l'ensemble  $\Lambda$ .

En écrasant les composantes connexes de  $S^1 \setminus \Lambda$  on obtient un cercle topologique  $S^1_\Lambda$  muni d'une action (non nécessairement fidèle) de  $\Gamma$  par homéomorphismes (pour chaque  $g \in \Gamma$  nous noterons encore  $g$  l'homéomorphisme induit sur  $S^1_\Lambda$ ). Si l'on désigne par  $\Gamma_\Lambda$  le sous-groupe correspondant de  $\text{Homeo}_+(S^1_\Lambda)$ , alors l'action de  $\Gamma_\Lambda$  est minimale et expansive. Pour simplifier, nous supposerons dans la suite que cette action est fortement expansive, en laissant le traitement du cas général au lecteur. L'idée de la preuve consiste alors à appliquer les arguments topologiques du début de ce paragraphe à l'action de  $\Gamma_\Lambda$ , et puis de lire les propriétés de nature différentielle dans l'action originale sur  $S^1$ . Bien évidemment, pour aboutir à l'hyperbolicité nous devons travailler « suffisamment loin »

des composantes connexes de  $S^1 \setminus \Lambda$  qui sont « trop grandes ».

Remarquons que le cercle topologique  $S^1_\Lambda$  peut être muni d'une structure métrique naturelle : on peut le paramétrer en utilisant la mesure  $\nu$ . Nous entendons alors par « taille » d'un intervalle  $V$  de  $S^1_\Lambda$  la valeur de  $\nu(V)$ , et par « distance » entre deux points  $p$  et  $q$  de  $S^1_\Lambda$  la valeur  $\text{dist}_\Lambda(p, q) = \min\{\nu([p, q]), \nu([q, p])\}$ .

Notons encore une fois

$$E(C) = \{(\omega, x) \in \Omega \times S^1 : h_n(\omega)'(x) \leq C \exp(\frac{2}{3}\lambda n) \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

et fixons une constante  $C \geq 1$  telle que  $\mathbf{P} \times \nu[E(C)] > 0$ . Considérons  $\bar{\varepsilon} > 0$  tel que pour tout  $g$  dans le support de  $\mu$  et tout  $x$  et  $y$  à distance au plus  $\bar{\varepsilon}$  on ait  $g'(x)/g'(y) \leq \exp(\frac{1}{6}\lambda)$ , et posons  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}/C$ . Pour chaque  $\eta > 0$  les composantes connexes de  $S^1 \setminus \Lambda$  de taille supérieure ou égale à  $\frac{1}{3}\eta$  se projettent en des points distincts  $p_1, \dots, p_{m(\eta)}$  de  $S^1_\Lambda$ . Il n'est pas difficile de voir que si  $\eta \leq \varepsilon$  est suffisamment petit (et strictement positif), alors il existe des constantes strictement positives  $\gamma, \bar{\gamma}, \varrho, \bar{\varrho}, \delta$  et  $\bar{\delta}$  telles que :

(i)  $1 > \bar{\varrho} > \varrho > \bar{\gamma} > \gamma > \frac{1}{2}$  et  $\gamma\varrho > \frac{1}{2}$  ;

(ii) si  $V$  est un intervalle quelconque de  $S^1_\Lambda$  de taille au plus  $\delta$  et dont le centre est à distance au moins  $(1 - \bar{\varrho})/2m(\eta)$  de tous les  $p_i$ , alors la taille de la préimage de  $V$  dans  $S^1$  est inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}\eta$  ;

(iii) si  $V$  est un intervalle quelconque de  $S^1_\Lambda$  de taille au moins égale à  $\bar{\delta}$ , alors la taille de la préimage de  $V$  dans  $S^1$  est supérieure ou égale à  $2\eta$  ;

(iv) on a l'inégalité  $\bar{\varrho} - 2(\delta + \bar{\delta}) \geq \bar{\gamma}$ .

Fixons de telles constantes et pour tout  $i \in \{1, \dots, m(\eta)\}$  désignons par  $U_i$  (resp.  $U_i^+$ ) l'intervalle fermé dans  $S^1_\Lambda$  de centre  $p_i$  et de taille  $(1 - \bar{\varrho})/m(\eta)$  (resp.  $(1 - \bar{\varrho} + \delta)/m(\eta)$ ). Bien évidemment,

$$\nu(S^1_\Lambda \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i) = \bar{\varrho} \quad \text{et} \quad \nu(S^1_\Lambda \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i^+) = \bar{\varrho} - \delta. \quad (26)$$

Pour chaque  $\omega \in \Omega^*$  notons  $I_n(\omega)$  et  $J_n(\omega)$  les intervalles de  $S^1_\Lambda$  donnés par la propriété d'expansivité forte de l'action de  $\Gamma_\Lambda$  sur  $S^1_\Lambda$ , et désignons par  $\tilde{I}_n(\omega)$  et  $\tilde{J}_n(\omega)$  ses préimages dans  $S^1$ . Posons

$$\mathbf{N}_*(\omega, \eta) = \{n \in \mathbf{N} : \varsigma_+(\omega) \in S^1_\Lambda \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i, |\tilde{I}_n(\omega)| \leq \frac{1}{2}\eta, |\tilde{J}_n(\omega)| \leq \frac{1}{2}\eta \\ \text{et } \text{dist}(\tilde{I}_n(\omega), \tilde{J}_n(\omega)) \geq 2\eta\}$$

et

$$\Omega_*(\eta) = \{\omega \in \Omega^* : \text{dens}(\mathbf{N}_*(\omega, \eta)) \geq \bar{\varrho}\}.$$

LEMME 4.19. *La probabilité de l'ensemble  $\Omega_*(\eta)$  est supérieure ou égale à  $\bar{\varrho}$ .*

*Preuve.* La distribution des points  $\varsigma_+(\omega)$  coïncide avec  $\nu$  (voir la preuve de la proposition 5.5 plus loin). Par suite,

$$\mathbf{P}[\omega \in \Omega^* : \varsigma_+(\omega) \in S_\Lambda^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i] = \nu(S_\Lambda^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i) = \bar{\varrho}.$$

Nous affirmons que presque tout  $\omega$  dans l'ensemble

$$\bar{\Omega}_*(\eta) = \{\omega \in \Omega^* : \varsigma_+(\omega) \in S_\Lambda^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i\}$$

appartient à  $\Omega_*(\eta)$ , ce qui implique évidemment l'affirmation du lemme. Pour vérifier cela, notons d'abord que si  $\varsigma_+(\omega)$  appartient à  $S_\Lambda^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i$  alors  $I_n(\omega)$  est contenu dans  $S_\Lambda^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i$  pour tout  $n$  assez grand. Donc, d'après (ii), on a  $|\tilde{I}_n(\omega)| \leq \frac{1}{2}\eta$  pour tout  $n$  suffisamment grand. Pour chaque  $\omega \in \bar{\Omega}_*(\eta)$  désignons par  $V(\omega)$  l'intervalle de centre  $\varsigma_+(\omega)$  et de taille  $2\bar{\delta} + \delta$ . D'après le théorème ergodique de Birkhoff et (26), pour presque tout  $\omega \in \bar{\Omega}_*(\eta)$  il existe  $p \in S_\Lambda^1 \setminus [\varsigma_+(\omega) - \frac{1}{3}, \varsigma_+(\omega) + \frac{1}{3}]$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{n \in \{1, \dots, N\} : h_n(\omega)(p) \notin \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i^+ \cup V(\omega)\}}{N} \geq \bar{\varrho} - 2(\delta + \bar{\delta}). \quad (27)$$

Pour  $n$  assez grand on a

$$h_n(\omega)(p) \in J_n(p) \quad \text{et} \quad \nu(J_n(\omega)) \leq \delta,$$

et donc la condition  $h_n(\omega)(p) \notin \bigcup_{i=1}^{m(\eta)} U_i^+$  (resp.  $h_n(\omega)(p) \notin V(\omega)$ ) implique d'après (ii) que  $|\tilde{J}_n(\omega)| \leq \frac{1}{2}\eta$  (resp. implique d'après (iii) que la valeur de  $\text{dist}(\tilde{I}_n(\omega), \tilde{J}_n(\omega))$  est supérieure ou égale à  $2\eta$ ). Le lemme s'en suit alors de (27) et de la condition  $\bar{\varrho} - 2(\delta + \bar{\delta}) \geq \bar{\gamma}$ .  $\square$

La démonstration continue de manière analogue à celle donnée pour le cas minimal (et fortement expansif). On note  $\Omega(C)$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que pour  $\nu$ -presque tout  $y \in S^1$  on ait  $(\sigma^n(\omega), h_n(\omega)(y)) \in E(C)$  pour une infinité d'entiers  $n \in \mathbf{N}$ , et on considère l'ensemble  $\Omega_{**}(\eta) = \Omega_*(\eta) \cap \Omega(C)$  (dont la probabilité est encore supérieure ou égale à  $\bar{\varrho}$ ). Si l'on tient compte du fait que  $\eta \leq \varepsilon$  (et que la conclusion du lemme 4.12 est donc valable), alors par des arguments analogues à ceux du lemme 4.14 on constate aisément que pour tout  $\omega \in \Omega_{**}(\eta)$  la densité des entiers  $n \in \mathbf{N}$  tels que  $h_n(\omega)$  appartienne à  $D_\eta(S^1)$  est supérieure ou égale à  $\bar{\gamma}$ . Par suite, pour  $N$  suffisamment grand on a

$$\mathbf{P} \left[ \omega \in \Omega_{**}(\eta) : \frac{\text{card}\{n \in \{1, \dots, N\} : h_n(\omega) \in D_\eta(S^1)\}}{N} \geq \gamma \right] \geq \varrho.$$

La preuve du lemme 4.15 montre alors qu'il existe  $n \in \{1, \dots, N\}$  tel que

$$\mathbf{P}_n[(g_1, \dots, g_n) : g_n \dots g_1 \in D_\eta(S^1)] \geq \gamma \varrho > \frac{1}{2}.$$

En passant aux inverses on conclut que

$$\mathbf{P}_n[(g_1, \dots, g_n) : g_n \dots g_1 \text{ et } (g_n \dots g_1)^{-1} \text{ appartiennent à } D_\eta(S^1)] \geq 2\gamma \varrho - 1 > 0,$$

ce qui permet de conclure la preuve par un argument analogue à celui du lemme 4.16.

## 5. Appendice

### 5.1. Contraction topologique et mesure stationnaire

Une élaboration plus simple et géométrique des idées du §4.1 peut être faite pour les groupes d'homéomorphismes du cercle. En suivant Ghys [21, p. 360–362] (voir aussi [46]), considérons un tel groupe  $\Gamma$  et supposons d'abord que ses orbites soient denses. Si son action sur le cercle est *équicontinue* (dans le sens que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\text{dist}(x, y) \leq \delta$  alors  $\text{dist}(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$  pour tout  $g \in \Gamma$ ), alors  $\Gamma$  est topologiquement conjugué à un groupe de rotations. Sinon, c'est que son action est *expansive*, dans le sens que pour tout  $x \in S^1$  il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $x$  et une suite  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$  d'éléments de  $\Gamma$  tels que la taille de  $h_n(I)$  tend vers zéro. En particulier, il existe des points  $y \in S^1$  tels que l'intervalle  $[x, y[$  est « contractable ». Si l'on denote par  $\theta(x)$  le « supremum » de ces points, alors l'application  $x \mapsto \theta(x)$  s'avère être un homéomorphisme d'ordre fini  $\varkappa(\Gamma)$  qui commute avec tous les éléments de  $\Gamma$  (le nombre  $\varkappa(\Gamma)$  est appelé le *degré* de  $\Gamma$ ). Par suite, si l'on identifie les points des orbites par  $\theta$ , alors on obtient un cercle topologique  $S^1/\sim$  sur lequel le groupe  $\Gamma$  agit par homéomorphismes. Remarquons que cette dernière action n'est pas nécessairement fidèle. Cependant, elle vérifie une *propriété d'expansivité forte*, à savoir tout intervalle dont le complémentaire n'est ni vide ni réduit à un seul point est contractable par une suite d'éléments du groupe.

Si les orbites de notre groupe original ne sont pas denses, alors il peut se présenter deux cas : soit il possède une orbite finie, soit il existe un (unique) ensemble de Cantor invariant minimal (et sur lequel les orbites de tous les points du cercle s'accumulent). En écrasant les composantes connexes du complémentaire de cet ensemble, ce dernier cas peut être ramené à celui d'orbites denses.

Cherchons maintenant à donner des versions probabilistes de ce qui précède. Pour simplifier, supposons que  $\Gamma$  soit dénombrable, et fixons une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$  qui soit *non dégénérée*, c'est-à-dire telle que son support engendre  $\Gamma$  en tant que semigroupe. Une mesure de probabilité  $\nu$  sur le cercle est dite *stationnaire* (par rapport à  $\mu$ ) si  $\mu * \nu = \nu$ , c'est-à-dire si pour toute fonction continue  $\psi$  définie sur le cercle on a

$$\int_{S^1} \psi(x) d\nu(x) = \int_{\Gamma} \int_{S^1} \psi(g(x)) d\nu(x) d\mu(g).$$

Pour mieux comprendre cette définition, considérons l'opérateur de diffusion agissant sur les fonctions continues du cercle par la formule

$$D\psi(x) = \int_{\Gamma} \psi(g(x)) d\mu(g). \tag{28}$$



Cet opérateur agit de manière duale sur les mesures de probabilité en préservant le compact convexe des mesures de probabilité : cette action duale correspond précisément à celle donnée par  $v \mapsto \mu * v$ . L'existence de (au moins) une mesure stationnaire  $\nu$  sur le cercle est ainsi assurée par le théorème du point fixe de Kakutani (bien sûr, on peut aussi démontrer cela par un argument de moyennes de Birkhoff).

LEMME 5.1. *Si les orbites de  $\Gamma$  sont denses, alors  $\nu$  est à support total et sans atome. Si  $\Gamma$  admet un ensemble de Cantor invariant et minimal, alors cet ensemble coïncide avec le support de  $\nu$ , et  $\nu$  est encore sans atome.*

*Preuve.* Montrons d'abord que si  $\nu$  possède des atomes, alors  $\Gamma$  a des orbites finies (signalons en passant que, contrairement à ce que l'on peut croire, ce dernier cas peut être très compliqué; voir par exemple la proposition 5.7 et la remarque 5.8 plus loin). En effet, si  $p$  est un point de mesure (positive et) maximale, alors à partir de l'égalité

$$\nu(p) = \int_{\Gamma} \nu(g^{-1}(p)) d\mu(g),$$

on conclut que  $\nu(g^{-1}(p)) = \nu(p)$  pour tout  $g$  dans le support de  $\nu$ . Ceci reste vrai pour tout élément de  $\Gamma$ , car  $\mu$  est une mesure non dégénérée. La masse totale de  $\nu$  étant finie, l'orbite de  $p$  par  $\Gamma$  doit nécessairement être finie.

Si l'action de  $\Gamma$  est minimale, alors le support de  $\nu$  est tout le cercle puisque c'est un ensemble fermé invariant. Si  $\Gamma$  admet un minimal exceptionnel  $\Lambda$  alors cet ensemble étant unique, il doit être contenu dans le support de  $\nu$ . Donc, pour montrer que  $\Lambda$  et  $\text{supp } \nu$  coïncident, nous devons montrer que  $\nu(I) = 0$  pour toute composante connexe de  $S^1 \setminus \Lambda$ . Or, si ce n'est pas le cas, en prenant une telle composante de masse maximale, on conclut (par un argument analogue à celui donné dans le cas d'existence d'atomes) que l'orbite de  $I$  est finie. Néanmoins, ceci est absurde, car les orbites des extrémités de  $I$  sont denses dans  $\Lambda$ .  $\square$

De manière un peu surprenante, la seule existence de la mesure stationnaire combinée à ses propriétés élémentaires et contenues dans le lemme précédent permet de donner une preuve simple et élégante du théorème D.

*Preuve du théorème D.* Considérons d'abord un sous-groupe dénombrable  $\Gamma$  de  $\text{Homéo}_+(S^1)$  dont les orbites sont denses. Munissons ce groupe d'une mesure de probabilité non dégénérée et symétrique  $\mu$ , et considérons une mesure de probabilité  $\nu$  sur le cercle qui soit stationnaire par rapport à  $\mu$ . Pour chaque intervalle  $I \subset S^1$  et chaque élément  $g \in \text{supp } \mu$  on a

$$\nu(I) = \sum_{h \in \text{supp } \mu} \nu(h^{-1}(I)) \mu(h) \geq \nu(g(I)) \mu(g^{-1}),$$

et donc

$$\nu(g(I)) \leq \frac{1}{\mu(g)} \nu(I). \quad (29)$$

Prenons maintenant un homéomorphisme  $\varphi$  du cercle dans lui-même qui envoie  $\nu$  sur la mesure de Lebesgue. Si  $J$  est un intervalle quelconque du cercle alors, d'après (29), pour tout  $g \in \text{supp } \mu$  on a

$$|\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(J)| = \nu(g \circ \varphi^{-1}(J)) \leq \frac{1}{\mu(g)} \nu(\varphi^{-1}(J)) = \frac{1}{\mu(g)} |J|.$$

Ainsi, pour tout  $g$  dans  $\text{supp } \mu$ , la transformation  $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$  est lipschitzienne de rapport  $1/\mu(g)$ . Puisque la mesure  $\mu$  est non dégénérée, cela démontre la proposition dans le cas minimal.

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe dénombrable quelconque de  $\text{Homéo}_+(S^1)$ , alors en rajoutant une rotation d'angle irrationnel et en considérant le groupe engendré, on se ramène au cas minimal. Les arguments plus haut montrent que ce nouveau groupe (et donc le groupe originel  $\Gamma$ ) est topologiquement conjugué à un groupe d'homéomorphismes lipschitziens. Finalement, en identifiant les extrémités de l'intervalle  $[0, 1]$ , chaque sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Homéo}_+([0, 1])$  induit un groupe d'homéomorphismes du cercle (avec un point fixe global marqué). D'après ce qui précède, si  $\Gamma$  est dénombrable alors ce nouveau groupe est conjugué par un élément  $\varphi$  de  $\text{Homéo}_+(S^1)$  à un groupe d'homéomorphismes lipschitziens du cercle. Pour obtenir une vraie conjugaison dans  $\text{Homéo}_+([0, 1])$ , il suffit de composer  $\varphi$  avec une rotation de façon à ramener le point marqué du cercle sur lui-même.  $\square$

Revenons maintenant au contexte général d'un groupe  $\Gamma$  d'homéomorphismes du cercle muni d'une mesure de probabilité non dégénérée  $\mu$ , et désignons par  $\Omega$  l'espace des suites  $(g_1, g_2, \dots) \in \Gamma^{\mathbf{N}}$  (muni de la mesure  $\mathbf{P} = \mu^{\mathbf{N}}$ ). Si l'on désigne par  $\sigma$  le décalage sur  $\Omega$ , alors on vérifie aisément qu'une mesure de probabilité  $\nu$  sur le cercle est stationnaire par rapport à  $\mu$  si et seulement si la mesure  $\mathbf{P} \times \nu$  est invariante par le *produit croisé*  $T: \Omega \times S^1 \rightarrow \Omega \times S^1$  défini par

$$T(\omega, x) = (\sigma(\omega), h_1(\omega)(x)) = (\sigma(\omega), g_1(x)), \quad \omega = (g_1, g_2, \dots).$$

En suivant Furstenberg [17], pour étudier l'évolution des compositions aléatoires on considère le *processus inverse*  $\bar{h}_n(\omega) = g_1 \dots g_n$ . Si  $\psi$  est une fonction continue définie sur le cercle et  $\nu$  est une mesure stationnaire, alors la suite de variables aléatoires

$$\xi_n(\omega) = \int_{S^1} \psi d(g_1 \dots g_n(\nu))$$

est une martingale. Le théorème de convergence de martingales [15] (plus un argument de densité) montre ainsi que, pour un sous-ensemble de probabilité total  $\Omega_0$  de  $\Omega$ , la

limite suivante (par rapport à la topologie faible) existe :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_1 g_2 \dots g_n(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}_n(\omega)(\nu) = \omega(\nu).$$

De plus, l'application (bien définie presque partout)

$$\omega \longmapsto \omega(\nu)$$

est mesurable (voir [47, p. 199]). Une proposition équivalente à celle présentée ci-après a été originalement démontrée par Antonov dans [1]. Elle est à rapprocher avec des résultats contenus dans [17], [36], [76] et [47, §VI.2], et la preuve que nous proposons ici est fortement inspirée de [40].

**PROPOSITION 5.2.** *Supposons que  $\Gamma$  soit dénombrable, que ses orbites soient denses et que la propriété d'expansivité forte soit vérifiée. Alors pour presque toute suite  $\omega$  dans  $\Omega_0$ , la mesure  $\omega(\nu)$  est une mesure de Dirac.*

*Preuve.* Nous montrerons que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  il existe un sous-ensemble  $\Omega_\varepsilon$  de  $\Omega_0$  dont la probabilité est totale et tel que pour tout  $\omega \in \Omega_\varepsilon$  il existe un intervalle  $I$  de longueur  $|I| \leq \varepsilon$  tel que  $\omega(\nu)(I) \geq 1 - \varepsilon$ . Ceci permet de conclure de manière évidente que, pour tout  $\omega$  dans l'ensemble  $\Omega^* = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Omega_{1/n}$  (dont la probabilité est encore totale), la mesure  $\omega(\nu)$  est une mesure de Dirac.

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ . Pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  désignons par  $\Omega^{n,\varepsilon}$  l'ensemble des suites  $\omega \in \Omega_0$  telles que, pour tout  $m \geq 0$  et tout intervalle  $I$  de  $S^1$  de longueur inférieure ou égale à  $\varepsilon$ , on ait

$$\bar{h}_{n+m}(\omega)(\nu)(I) < 1 - \varepsilon.$$

Nous devons démontrer que la mesure de  $\Omega^{n,\varepsilon}$  est nulle. Pour cela, nous allons commencer par exhiber un sous-ensemble fini  $\mathcal{G}_\varepsilon$  de  $\text{supp } \mu$  ainsi qu'un entier  $l \in \mathbf{N}$  tels que, pour tout  $r \in \mathbf{N}$  et tout  $(g_1, \dots, g_r) \in \Gamma^r$ , il existe un intervalle  $I$  de longueur  $|I| \leq \varepsilon$ , un entier  $\ell \leq 2l$ , et des éléments  $f_1, \dots, f_\ell$  dans  $\mathcal{G}_\varepsilon$  vérifiant

$$g_1 \dots g_r f_1 \dots f_\ell(\nu)(I) \geq 1 - \varepsilon. \tag{30}$$

Fixons deux points distincts  $a$  et  $b$  du cercle, ainsi qu'un entier  $q > 1/\varepsilon$ , et prenons  $q$  points distincts  $a_1, \dots, a_q$  de l'orbite de  $a$  par  $\Gamma$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, q\}$  fixons un élément  $h_i \in \Gamma$  et un intervalle ouvert  $U_i$  contenant  $a_i$  de façon à ce que les  $U_i$  soient deux à deux disjoints,  $h_i(a) = a_i$  et  $h_i(U) = U_i$  pour un certain voisinage  $U$  de  $a$  qui ne contient pas  $b$ . Prenons maintenant un voisinage  $V$  de  $b$  disjoint de  $U$  et tel que  $\nu(S^1 \setminus V) \geq 1 - \varepsilon$ . Par la minimalité et la propriété d'expansivité forte, il existe  $h \in \Gamma$  tel que  $h(S^1 \setminus V) \subset U$ . Chaque

élément dans  $\{h_1, \dots, h_q, h\}$  peut être écrit comme un produit d'éléments du support de  $\mu$ . Cela peut être fait de plusieurs manières différentes, mais si l'on fixe une fois pour toutes une écriture pour chaque élément, alors l'ensemble  $\mathcal{G}_\varepsilon$  des éléments de  $\text{supp } \mu$  qui sont utilisés est fini. Soit  $l$  le nombre maximal d'éléments qui apparaissent dans l'une des écritures précédentes. Pour vérifier (30), notons que pour  $g = g_1 \dots g_r$  les intervalles  $g(U_i)$  sont deux à deux disjoints, et donc la longueur d'au moins l'un d'entre eux doit être majorée par  $\varepsilon$ . Si l'on fixe un tel intervalle  $I = g(U_i)$  alors on obtient

$$g_1 \dots g_r h_i h(\nu)(I) = \nu(h^{-1}(U)) \geq \nu(S^1 \setminus V) \geq 1 - \varepsilon,$$

ce qui achève la vérification de (30).

Notons maintenant  $\varrho = \min\{\mu(f) : f \in \mathcal{G}_\varepsilon\}$  et posons

$$\Omega_{n+m}^\varepsilon = \{\omega \in \Omega_0 : \text{pour tout intervalle } I \text{ de longueur } |I| \leq \varepsilon \text{ et tout } k \leq m \\ \text{on a } \bar{h}_{n+k}(\omega)(\nu)(I) < 1 - \varepsilon\}.$$

D'après (30) nous avons  $\mathbf{P}(\Omega_{n+2lt}^\varepsilon) \leq (1 - \varrho^{2l})^t$ . Donc, en passant à la limite lorsque  $t$  tend vers l'infini, on conclut que  $\mathbf{P}(\Omega^{n,\varepsilon}) = 0$ , ce qui permet de finir la démonstration.  $\square$

On définit le *coefficient de contraction*  $c(h)$  d'un homéomorphisme  $h$  du cercle comme étant l'infimum parmi tous les  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe deux intervalles fermés  $I$  et  $J$  du cercle de taille au plus  $\varepsilon$  et tels que  $h(\overline{S^1 \setminus I}) = J$ . Cette définition permet de donner une « version topologique » de la proposition précédente pour les compositions dans « l'ordre naturel ».

**PROPOSITION 5.3.** *Sous les hypothèses de la proposition 5.2, pour tout*

$$\omega = (g_1, g_2, \dots) \in \Omega^*$$

*le coefficient de contraction de  $h_n(\omega) = g_n \dots g_1$  converge vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

*Preuve.* Comme  $\nu$  est sans atome et son support est total, il existe un homéomorphisme  $\varphi$  du cercle qui envoie  $\nu$  sur la mesure de Lebesgue. Par suite, et puisque l'affirmation à démontrer est de nature purement topologique, nous pouvons supposer que  $\nu$  coïncide avec la mesure de Lebesgue.

Désignons par  $\bar{\mu}$  la mesure sur  $\Gamma$  définie par  $\bar{\mu}(g) = \mu(g^{-1})$ , et notons  $\bar{\Omega}$  l'espace de probabilité  $\Gamma^{\mathbf{N}}$  muni de la mesure  $\bar{\mu}^{\mathbf{N}}$ . Sur cet espace considérons le processus

$$\bar{h}_n(\bar{\omega}) = g_1 \dots g_n,$$

où  $\bar{\omega}=(g_1, g_2, \dots)$ . D'après la proposition 5.2, pour tout  $\varepsilon>0$  il existe  $n(\varepsilon)\in\mathbf{N}$  tel que si  $n\geq n(\varepsilon)$  alors il existe un intervalle (fermé)  $I$  tel que  $\nu(I)\leq\varepsilon$  et  $\bar{h}_n(\bar{\omega})(\nu)(I)\geq 1-\varepsilon$ . Si l'on note  $J$  la fermeture de  $S^1\setminus g_n^{-1}\dots g_1^{-1}(I)$ , alors on voit que  $|I|=\nu(I)\leq\varepsilon$ ,

$$|J|=1-|g_n^{-1}\dots g_1^{-1}(I)|=1-\nu(\bar{h}_n(\bar{\omega})^{-1}(I))=1-\bar{h}_n(\bar{\omega})(\nu)(I)\leq\varepsilon$$

et  $g_n^{-1}\dots g_1^{-1}(S^1\setminus I)=J$ . Par suite,  $c(g_n^{-1}\dots g_1^{-1})\leq\varepsilon$  pour tout  $n\geq n(\varepsilon)$ . La preuve est conclue en remarquant que la transformation  $(g_1, g_2, \dots)\mapsto(g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots)$  est un isomorphisme entre  $(\bar{\Omega}, \bar{\mu}^{\mathbf{N}})$  et  $(\Omega, \mu^{\mathbf{N}})$ .  $\square$

*Remarque 5.4.* Soulignons que le coefficient de contraction est toujours réalisé, dans le sens que pour tout homéomorphisme  $h$  du cercle il existe des intervalles fermés  $I$  et  $J$  tels que  $\max\{|I|, |J|\}=c(h)$  et  $h(S^1\setminus I)=J$  (ces intervalles ne sont pas nécessairement uniques). En conséquence, pour tout  $\omega\in\Omega^*$  on peut choisir deux suites d'intervalles fermés  $I_n(\omega)$  et  $J_n(\omega)$  dont la taille tend vers zéro et tels que  $h_n(\omega)(S^1\setminus I_n(\omega))=J_n(\omega)$  pour tout  $n\in\mathbf{N}$ . Pour n'importe quel choix, les intervalles  $I_n(\omega)$  convergent vers le point  $\varsigma_+(\omega)$ , tandis que (génériquement) les intervalles  $J_n(\omega)$  se promènent un peu partout sur le cercle.

La proposition 5.2 permet (par un argument bien connu) de démontrer l'unicité de la mesure stationnaire. Signalons que ce résultat est valable dans le cadre beaucoup plus général des feuilletages de codimension 1 sans mesure transverse invariante [12] (la notion de mesure stationnaire dans ce contexte est celle de Garnett ; voir [5], [18]).

PROPOSITION 5.5. *Soit  $\Gamma$  un groupe dénombrable d'homéomorphismes du cercle muni d'une mesure de probabilité non dégénérée  $\mu$ . Si  $\Gamma$  ne préserve aucune probabilité du cercle, alors la mesure stationnaire (par rapport à  $\mu$ ) est unique.*

*Preuve.* Supposons d'abord que l'action de  $\Gamma$  est minimale et satisfait la propriété d'expansivité forte, et fixons une mesure  $\nu$  sur  $S^1$  qui soit stationnaire par rapport à  $\mu$ . Pour chaque  $\omega\in\Omega$  telle que la limite  $\lim_{n\rightarrow\infty}\bar{h}_n(\omega)(\nu)$  existe et soit une mesure de Dirac, désignons par  $\varsigma_\nu(\omega)$  l'atome de la mesure  $\omega(\nu)$ , i.e. le point de  $S^1$  tel que  $\omega(\nu)=\delta_{\varsigma_\nu(\omega)}$ . L'application  $\varsigma_\nu:\Omega\rightarrow S^1$  est presque partout bien définie et mesurable. Nous affirmons que les mesures  $\nu$  et  $\varsigma_\nu(\mathbf{P})$  coïncident. En effet, d'après la stationnarité de  $\nu$ ,

$$\nu=\mu^{*n}*\nu=\sum_{g\in\Gamma}\mu^{*n}(g)g(\nu)=\int_{\Omega}\bar{h}_n(\omega)(\nu)d\mathbf{P}(\omega).$$

Donc, en passant à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini (ce qui peut facilement être justifié par le théorème de convergence dominée),

$$\nu=\int_{\Omega}\lim_{n\rightarrow\infty}h_n(\omega)(\nu)d\mathbf{P}(\omega)=\int_{\Omega}\delta_{\varsigma_\nu(\omega)}d\mathbf{P}(\omega),$$

c'est-à-dire  $\nu=\varsigma_\nu(\mathbf{P})$ .

Considérons maintenant deux mesures stationnaires  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . La mesure

$$\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

est elle aussi stationnaire, et la fonction  $\varsigma_\nu$  vérifie, pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\frac{\delta_{\varsigma_{\nu_1}(\omega)} + \delta_{\varsigma_{\nu_2}(\omega)}}{2} = \delta_{\varsigma_\nu(\omega)}.$$

Bien évidemment, ceci n'est possible que si  $\varsigma_{\nu_1}$  et  $\varsigma_{\nu_2}$  coïncident presque partout. Par conséquent, d'après l'affirmation de la première partie de la preuve,

$$\nu_1 = \varsigma_{\nu_1}(\mathbf{P}) = \varsigma_{\nu_2}(\mathbf{P}) = \nu_2.$$

Supposons maintenant que  $\Gamma$  agisse de façon minimale et expansive (mais non fortement expansive), et fixons une probabilité  $\nu$  qui soit stationnaire (par rapport à  $\mu$ ). D'après le §5.1, il existe un homéomorphisme  $\theta: S^1 \rightarrow S^1$  d'ordre fini, commutant avec (tous les éléments de)  $\Gamma$ , et tel que l'action induite sur le cercle topologique  $S^1/\sim$  obtenu en tant qu'espace d'orbites de  $\theta$  est (minimale et) fortement expansive. Pour chaque  $x \in S^1$  notons  $\psi(x) = \nu([x, \theta(x)])$ . Comme  $\nu$  est sans atome, la fonction  $\psi$  est continue, et puisque  $\theta$  commute avec tous les éléments de  $\Gamma$ , elle est harmonique. Par suite, l'ensemble des points où  $\psi$  prend sa valeur maximale est invariant par  $\Gamma$ . Les orbites de  $\Gamma$  étant denses,  $\psi$  est une fonction constante; en d'autres termes,  $\nu$  est invariante par  $\theta$ . Par ailleurs,  $\nu$  se projette sur une mesure de probabilité stationnaire pour l'action de  $\Gamma$  sur  $S^1/\sim$ . D'après la première partie de la preuve, cette dernière mesure est unique, ce qui montre alors l'unicité de  $\nu$ .

Si  $\Gamma$  admet un ensemble de Cantor invariant et minimal, alors cet ensemble coïncide avec le support de  $\nu$ . Si l'on écrase les composantes connexes du complémentaire de cet ensemble on obtient une action avec toutes ses orbites denses; lorsque cette action est expansive, on peut appliquer les arguments précédents afin de conclure l'unicité de la mesure stationnaire. Pour compléter la démonstration on constate aisément que, dans tous les cas qui n'ont pas encore été considérés, le groupe  $\Gamma$  laisse invariante une mesure de probabilité du cercle.  $\square$

*Remarque 5.6.* Sous les hypothèses de la proposition précédente, il est intéressant de chercher des conditions sous lesquelles le cercle  $S^1$  (l'espace  $S^1/\sim$  le cas échéant), muni de la mesure stationnaire, est un bord stochastique maximal pour  $(\Gamma, \mu)$  (i.e. il coïncide avec son bord de Poisson–Furstenberg).

Comme nous l'avons déjà signalé, lorsqu'il existe une mesure de probabilité invariante on est ramené à l'étude d'un groupe de rotations ou à celle d'un groupe avec des

orbites finies. Dans le premier cas la mesure stationnaire  $\nu$  est encore unique et coïncide avec l'unique mesure invariante. En effet, pour chaque borélien  $X \subset S^1$  la fonction  $g \mapsto \nu(g^{-1}(X))$  est harmonique (par rapport à  $\mu$ ), et donc constante d'après [9]. Le cas où il existe des orbites finies est plus intéressant. À indice fini près, il se ramène à celui d'un groupe agissant sur l'intervalle. Or, dans ce contexte la mesure stationnaire ne donne aucune information dynamique (tout au moins lorsque la mesure de départ  $\mu$  est symétrique).

**PROPOSITION 5.7.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Homéo}_+([0, 1])$  sans point fixe global à l'intérieur. Si  $\mu$  est une mesure de probabilité non dégénérée et symétrique sur  $\Gamma$ , alors toute mesure de probabilité sur  $[0, 1]$  qui est stationnaire par rapport à  $\mu$  est supportée sur les extrémités de  $[0, 1]$ .*

*Première preuve.* Supposons par contradiction que  $\bar{\nu}$  soit une mesure stationnaire telle que  $\bar{\nu}(\{0, 1\}) < 1$ . Notons  $\nu$  la partie de  $\bar{\nu}$  supportée dans  $]0, 1[$  convenablement normalisée : c'est encore une mesure stationnaire, et elle vérifie  $\nu(]0, 1[) = 1$ . Comme dans la preuve du lemme 5.1, on montre aisément que  $\nu$  est sans atome. Donc, quitte à écraser les composantes connexes du complémentaire du support de  $\nu$ , nous pouvons supposer que le support de  $\nu$  coïncide avec  $]0, 1[$ . De plus, en reparamétrant l'intervalle, nous pouvons supposer que  $\nu$  est la mesure de Lebesgue.

Puisque  $\nu$  est une mesure stationnaire par rapport à la probabilité symétrique  $\mu$ , pour tout  $s \in ]0, 1[$  on a

$$s = \nu([0, s]) = \int_{\Gamma} \nu(g^{-1}([0, s])) d\mu(g) = \int_{\Gamma} \frac{\nu(g([0, s])) + \nu(g^{-1}([0, s]))}{2} d\mu(g),$$

et donc

$$s = \int_{\Gamma} \frac{g(s) + g^{-1}(s)}{2} d\mu(g).$$

En intégrant entre 0 et un point arbitraire  $t \in ]0, 1[$  on obtient

$$t^2 = \int_{\Gamma} \int_0^t (g(s) + g^{-1}(s)) ds d\mu(g). \quad (31)$$

Or, pour tout homéomorphisme  $f$  de l'intervalle et tout  $t \in [0, 1]$  on a

$$\int_0^t (f(s) + f^{-1}(s)) ds \geq t^2,$$

avec l'égalité si et seulement si  $f(t) = t$  (voir la figure 4). D'après (31), ceci implique que  $g(t) = t$  pour tout  $g$  appartenant au support de  $\mu$ . Puisque  $\mu$  est une mesure non dégénérée, on conclut que  $t \in ]0, 1[$  est un point fixe global pour l'action de  $\Gamma$ , ce qui contredit notre hypothèse.  $\square$

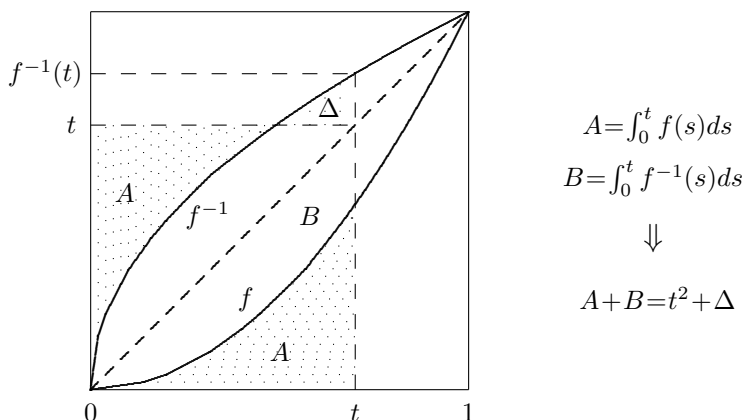


Figure 4.

*Deuxième preuve.* Pour une mesure stationnaire  $\nu$  considérons la fonction

$$x \mapsto \nu([0, x]).$$

Si  $\mu$  est symétrique, alors cette fonction est harmonique par rapport à  $\mu$  le long de toute orbite. D'après le théorème ergodique de Garnett (Theorem 1 (b) dans [18]), cette fonction est constante pour  $\nu$ -presque toute orbite. Autrement dit, pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  l'égalité  $\nu([0, g(x)]) = \nu([0, x])$  est vérifiée pour tout  $g \in \Gamma$ . L'hypothèse de non existence de point fixe global pour l'action de  $\Gamma$  sur  $]0, 1[$  implique alors que le support de  $\nu$  est contenu dans  $\{0, 1\}$ .  $\square$

*Remarque 5.8.* Comme nous l'avons déjà suggéré, l'hypothèse de symétrie pour la mesure  $\mu$  est essentielle pour la validité de la proposition 5.7 : voir par exemple [35].

## 5.2. Exposants de Lyapunov et mesures invariantes

Considérons un sous-groupe dénombrable  $\Gamma$  de  $\text{Diff}_+^1(S^1)$ . Pour simplifier, supposons que  $\Gamma$  soit de type fini, et munissons-le d'une mesure de probabilité  $\mu$  qui soit non dégénérée et à support fini. Soit  $\nu$  une probabilité stationnaire (par rapport à  $\mu$ ) sur le cercle, et considérons la transformation  $T$  de  $\Omega \times S^1$  donnée par

$$T(\omega, x) = (\sigma(\omega), h_1(\omega)(x)).$$

Puisque  $T$  préserve  $\mathbf{P} \times \nu$ , en appliquant le théorème ergodique de Birkhoff à la fonction  $(\omega, x) \mapsto \log h_1(\omega)'(x)$  on conclut que pour  $\nu$ -presque tout point  $x$  du cercle et pour  $\mathbf{P}$ -presque tout chemin aléatoire  $\omega$  dans  $\Omega$ , la limite

$$\lambda_{(\omega, x)}(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log h_n(\omega)'(x)}{n}$$



existe : c'est l'exposant de Lyapunov correspondant au point  $(\omega, x)$ . Si la mesure de probabilité stationnaire  $\nu$  est ergodique, c'est-à-dire si elle ne peut pas être exprimée comme une combinaison convexe de deux probabilités stationnaires distinctes, alors la transformation  $T$  est ergodique (au sens classique) par rapport à  $\mathbf{P} \times \nu$  (c'est le théorème ergodique aléatoire de Kakutani : voir [16], [39]). Dans ce cas, l'exposant de Lyapunov est  $(\mathbf{P} \times \nu)$ -presque partout constant et égal à

$$\lambda(\nu) = \int_{\Omega} \int_{S^1} \log h_1(\omega)'(x) d\nu(x) d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\Gamma} \int_{S^1} \log g'(x) d\nu(x) d\mu(g).$$

Lorsque de plus  $\mu$  est symétrique et la mesure  $\nu$  est invariante par l'action de  $\Gamma$ , l'exposant de Lyapunov  $\lambda_{(\omega, x)}(\nu)$  est presque partout nul. En effet, si  $\nu$  est invariante alors la transformation  $S$  de  $\Omega \times S^1$  sur lui-même définie par  $S(\omega, x) = (\omega, h_1(\omega)^{-1}(x))$  préserve  $\mathbf{P} \times \nu$ . Ceci implique que

$$\begin{aligned} \lambda(\nu) &= \int_{\Omega} \int_{S^1} \log h_1(\omega)'(x) d\nu(x) d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_{S^1} \log h_1(\omega)'(h_1(\omega)^{-1}(x)) d\nu(x) d\mathbf{P}(\omega) \\ &= - \int_{\Omega} \int_{S^1} \log (h_1(\omega)^{-1})'(x) d\nu(x) d\mathbf{P}(\omega) \\ &= - \int_{\Gamma} \int_{S^1} \log (g^{-1})'(x) d\nu(x) d\mu(g) \\ &= -\lambda(\nu), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de la symétrie de  $\mu$ . Par suite, si  $\nu$  est invariante et ergodique, alors son exposant de Lyapunov est nul. Le cas général s'en déduit par un argument de décomposition ergodique.

L'objectif de cet appendice est de donner une démonstration courte et autocontenue d'une affirmation réciproque. Le résultat suivant a été originalement démontré par Baxendale dans un contexte bien plus général [2]; ici nous donnons une preuve qui est fortement inspirée de [12].

**PROPOSITION 5.9.** *Si la mesure  $\mu$  est (non dégénérée, à support fini et) symétrique et  $\Gamma$  ne préserve aucune mesure de probabilité du cercle, alors l'exposant de Lyapunov de l'unique mesure stationnaire est strictement négatif.*

Pour la démonstration notons

$$\psi(x) = \int_{\Gamma} \log g'(x) d\mu(g),$$

et supposons par contradiction que  $\lambda(\nu) \geq 0$ , c'est-à-dire

$$\int_{S^1} \psi(x) d\nu(x) \geq 0. \quad (32)$$

Nous allons démontrer dans ce cas que  $\Gamma$  préserve une mesure de probabilité, contredisant ainsi notre hypothèse. Pour cela nous nous appuyons sur un lemme inspiré des travaux de Sullivan sur les cycles feuilletés [69] (voir également [20]). Rappelons que le *laplacien*  $\Delta\zeta$  d'une fonction réelle et continue  $\zeta$  est défini par  $\Delta\zeta = D\zeta - \zeta$ , où  $D$  désigne l'opérateur de diffusion (28).

LEMME 5.10. *Sous l'hypothèse (32), il existe une suite de fonctions continues  $\zeta_n$  définies sur le cercle telles que, pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$  et tout point  $x$  du cercle,*

$$\psi(x) + \Delta\zeta_n(x) \geq -\frac{1}{n}. \quad (33)$$

*Preuve.* Désignons par  $C(S^1)$  l'espace des fonctions continues sur le cercle. Notons  $E$  le sous-espace constitué des fonctions qui sont des laplaciens de fonctions dans  $C(S^1)$ , et soit  $C_+$  le cône convexe des fonctions partout positives. Nous devons démontrer que si  $\psi$  satisfait (32), alors son image par la projection  $\pi: C(S^1) \rightarrow C(S^1)/\bar{E}$  est contenue dans  $\pi(C_+)$ . Supposons que ce ne soit pas le cas. Le théorème de séparation de Hahn–Banach donne alors l'existence d'une fonctionnelle continue  $\bar{L}: C(S^1)/\bar{E} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que

$$\bar{L}(\pi(\psi)) < 0 \leq \bar{L}(\pi(\Phi))$$

pour tout  $\Phi \in C_+$ . Bien sûr,  $\bar{L}$  induit une fonctionnelle continue  $L: C(S^1) \rightarrow \mathbf{R}$  qui est identiquement nulle sur  $E$  et telle que  $L(\psi) < 0 \leq L(\Phi)$  pour tout  $\Phi \in C_+$ . Nous affirmons que  $L = c\nu$  pour certain  $c \in \mathbf{R}$  (nous identifions les mesures de probabilité aux fonctionnelles linéaires qu'elles définissent sur l'espace des fonctions continues). Pour montrer cela, commençons par remarquer que, puisque  $L$  est nul sur  $E$ , pour tout  $\zeta \in C(S^1)$  on a

$$\langle DL, \zeta \rangle = \langle L, D\zeta \rangle = \langle L, \Delta\zeta + \zeta \rangle = \langle L, \zeta \rangle,$$

c'est-à-dire que  $L$  est invariant par la diffusion. Supposons que la décomposition de Hahn de  $L$  s'exprime sous la forme

$$L = \alpha\nu_1 - \beta\nu_2,$$

où  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont des mesures de probabilité de supports disjoints du cercle,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Dans ce cas, l'égalité  $DL = L$  et l'unicité de la décomposition de Hahn pour  $DL$  montrent que  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont elles aussi invariantes par la diffusion. Par suite,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , ce qui contredit le fait que les supports de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont disjoints. La fonctionnelle  $L$

s'exprime donc sous la forme  $L=c\nu$  pour certaine mesure de probabilité  $\nu$  du cercle; l'égalité  $L=DL$  donne évidemment  $\nu=\nu$ .

Notons maintenant que, puisque

$$0 > L(\psi) = c\nu(\psi) = c \int_{S^1} \psi(x) d\nu(x),$$

l'hypothèse (32) entraîne que  $\nu(\psi) > 0$  et  $c < 0$ . Or, comme la fonction constante égale à 1 appartient à  $C_+$ , nous avons  $c=L(1) \geq 0$ . Cette contradiction conclut la preuve.  $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition 5.9. Quitte à rajouter une constante à chaque  $\zeta_n$ , nous pouvons supposer que l'intégrale de  $\exp \zeta_n$  est égale à 1 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons les mesures de probabilité  $\nu_n$  sur le cercle définies par

$$\frac{d\nu_n(s)}{ds} = \exp \zeta_n(s).$$

Prenons une sous-suite  $\nu_{n_i}$  qui converge vers une mesure de probabilité  $\bar{\nu}$  sur le cercle. Nous allons montrer que  $\bar{\nu}$  est invariante par  $\Gamma$ .

Commençons par démontrer que  $\bar{\nu}$  est une mesure harmonique. Pour cela, remarquons d'abord que si l'on désigne par  $\text{Jac}_n g$  le jacobien de  $g \in \Gamma$  par rapport à  $\nu_n$ , alors la relation (33) donne, pour tout point  $x$  du cercle,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \log(\text{Jac}_n g)(x) d\mu(g) &= \int_{\Gamma} \log g'(x) d\mu(g) + \int_{\Gamma} (\zeta_n(g(x)) - \zeta_n(x)) d\mu(g) \\ &= \psi(x) + \Delta \zeta_n(x) \geq -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que puisque la diffusion agit continûment sur l'espace des mesures de probabilité sur le cercle, la suite de mesures  $D\nu_{n_i}$  converge faiblement vers la mesure  $D\bar{\nu}$ . Or, la diffusion de  $\nu_n$  est une mesure absolument continue par rapport à  $\nu_n$  dont la densité s'exprime par la formule

$$\frac{dD\nu_n(x)}{d\nu_n(x)} = \int_{\Gamma} (\text{Jac}_n g^{-1})(x) d\mu(g) = \int_{\Gamma} (\text{Jac}_n g)(x) d\mu(g).$$

Par la concavité de la fonction logarithme nous avons

$$\frac{dD\nu_{n_i}(x)}{d\nu_{n_i}(x)} \geq \exp\left(\int_{\Gamma} \log(\text{Jac}_{n_i} g)(x) d\mu(g)\right) \geq \exp\left(-\frac{1}{n_i}\right),$$

c'est-à-dire  $D\nu_{n_i} \geq \exp(-1/n_i)\nu_{n_i}$ . À la limite nous obtenons  $D\bar{\nu} \geq \bar{\nu}$ , et puisque  $\bar{\nu}$  et  $D\bar{\nu}$  sont des mesures de probabilité, elles sont égales;  $\bar{\nu}$  est donc harmonique.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que  $\bar{\nu}$  est invariante par n'importe quel élément de  $\Gamma$ . Pour cela, donnons nous un intervalle  $I$  tel que  $\bar{\nu}(I) > 0$ , et considérons les fonctions  $\psi_{n,I}: \Gamma \rightarrow ]0, 1]$  définies par  $\psi_{n,I}(g) = \nu_n(g(I))$ . Les inégalités suivantes montrent que le laplacien de  $\log \psi_{n,I}$  est minoré par  $-1/n$  en l'élément neutre  $e$  de  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} (\Delta \log \psi_{n,I})(e) &= \int_{\Gamma} \log \frac{\nu_n(g(I))}{\nu_n(I)} d\mu(g) \\ &= \int_{\Gamma} \log \left( \int_I (\text{Jac}_n g)(x) \frac{d\nu_n(x)}{\nu_n(I)} \right) d\mu(g) \\ &\geq \int_{\Gamma} \int_I \log((\text{Jac}_n g)(x)) \frac{d\nu_n(x)}{\nu_n(I)} d\mu(g) \\ &= \int_I \int_{\Gamma} \log((\text{Jac}_n g)(x)) d\mu(g) \frac{d\nu_n(x)}{\nu_n(I)} \\ &\geq -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout intervalle  $I$  vérifiant  $\bar{\nu}(I) > 0$ . Par conséquent, et à cause des relations

$$\psi_{n,I}(gf) = \psi_{n,f(I)}(g),$$

le laplacien de  $\log \psi_{n,I}$  est partout minoré par  $-1/n$ . Donc, si l'on désigne par  $\psi_I$  la limite simple de la suite des  $\psi_{n,I}$ , c'est-à-dire  $\psi_I(g) = \bar{\nu}(g(I))$ , alors la fonction  $\log \psi_I$  est surharmonique, dans le sens que son laplacien est positif. Par ailleurs, puisque  $\mu$  est symétrique,  $\psi_I$  est harmonique. Par conséquent, pour tout  $f \in \Gamma$  nous avons partout égalité dans les inégalités suivantes :

$$(\log \psi_I)(f) \leq \int_{\Gamma} (\log \psi_I)(gf) d\mu(g) \leq \log \int_{\Gamma} \psi_I(gf) d\mu(g) = (\log \psi_I)(f).$$

La fonction  $\psi_I$  est donc constante. Or, comme l'intervalle  $I$  vérifiant  $\bar{\nu}(I) > 0$  est arbitraire, nous en déduisons que la mesure  $\bar{\nu}$  est invariante par tous les éléments de  $\Gamma$ . La proposition 5.9 est démontrée.

### Bibliographie

- [1] ANTONOV, V. A., Modeling of processes of cyclic evolution type. Synchronization by a random signal. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.*, 1984:2 (1984), 67–76 (en russe).
- [2] BAXENDALE, P. H., Lyapunov exponents and relative entropy for a stochastic flow of diffeomorphisms. *Probab. Theory Related Fields*, 81 (1989), 521–554.
- [3] BOHL, P., Über die Hinsichtlich der Unabhängigen und Abhängigen Variablen Periodische Differentialgleichung Erster Ordnung. *Acta Math.*, 40 (1916), 321–336.

- [4] BOWEN, R., A horseshoe with positive measure. *Invent. Math.*, 29 (1975), 203–204.
- [5] CANDEL, A., The harmonic measures of Lucy Garnett. *Adv. Math.*, 176 (2003), 187–247.
- [6] CANDEL, A. & CONLON, L., *Foliations*. I, II. Graduate Studies in Mathematics, 23, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, 2003.
- [7] CANTWELL, J. & CONLON, L., Endsets of exceptional leaves; a theorem of G. Duminy, dans *Foliations: Geometry and Dynamics* (Warsaw, 2000), p. 225–261. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.
- [8] CHAPERON, M., Invariant manifolds revisited. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 236 (2002), 428–446 (en russe); traduction anglaise dans *Proc. Steklov Inst. Math.* 236 (2002), 415–433.
- [9] CHOQUET, G. & DENY, J., Sur l'équation de convolution  $\mu = \mu * \sigma$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 250 (1960), 799–801.
- [10] DENJOY, A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures Appl.*, 11 (1932), 333–375.
- [11] DEROIN, B., Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 38 (2005), 57–75.
- [12] DEROIN, B. & KLEPTSYN, V., Random conformal dynamical systems. À paraître dans *Geom. Funct. Anal.* [arXiv:math/0506204](https://arxiv.org/abs/math/0506204).
- [13] ELIASBERG, Y. M. & THURSTON, W. P., *Confoliations*. University Lecture Series, 13. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [14] FARB, B. & FRANKS, J., Groups of homeomorphisms of one-manifolds. III. Nilpotent subgroups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23 (2003), 1467–1484.
- [15] FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. I, II. Wiley, New York, 1968, 1971.
- [16] FURMAN, A., Random walks on groups and random transformations, dans *Handbook of Dynamical Systems*, Vol. 1A, p. 931–1014. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [17] FURSTENBERG, H., Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces, dans *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Proc. Sympos. Pure Math., 26, p. 193–229. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
- [18] GARNETT, L., Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. *J. Funct. Anal.*, 51 (1983), 285–311.
- [19] GHYS, É., Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 24 (1993), 137–178.
- [20] — Sur l'uniformisation des laminations paraboliques, dans *Integrable Systems and Foliations/Feuilletages et Systèmes Intégrables* (Montpellier, 1995), Progr. Math., 145, p. 73–91. Birkhäuser, Boston, MA, 1997.
- [21] — Groups acting on the circle. *Enseign. Math.*, 47 (2001), 329–407.
- [22] GHYS, É., LANGEVIN, R. & WALCZAK, P., Entropie géométrique des feuilletages. *Acta Math.*, 160 (1988), 105–142.
- [23] GHYS, É. & TSUBOI, T., Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38:1 (1988), 215–244.
- [24] HARRISON, J., Unsmoothable diffeomorphisms on higher dimensional manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 73 (1979), 249–255.
- [25] — Dynamics of Ahlfors quasi-circles. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 99 (1989), 113–122.
- [26] HECTOR, G., Architecture des feuilletages de classe  $C^2$ , dans *Third Schnepfenried Geometry Conference*, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982), Astérisque, 107, p. 243–258. Soc. Math. France, Paris, 1983.
- [27] HERMAN, M.-R., Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (1979), 5–233.

- [28] HURDER, S., Ergodic theory of foliations and a theorem of Sacksteder, dans *Dynamical systems* (College Park, MD, 1986–87), Lecture Notes in Math., 1342, p. 291–328. Springer, Berlin–Heidelberg, 1988.
- [29] — Exceptional minimal sets of  $C^{1+\alpha}$ -group actions on the circle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 11 (1991), 455–467.
- [30] — Entropy and dynamics of  $C^1$  foliations. Prépublication, 2000.
- [31] — Dynamics of expansive group actions on the circle. À paraître dans *Geom. Dedicata*.
- [32] HURDER, S. & KATOK, A., Differentiability, rigidity and Godbillon–Vey classes for Anosov flows. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (1990), 5–61 (1991).
- [33] HURDER, S. & LANGEVIN, R., Dynamics and the Godbillon–Vey class of  $C^1$  foliations. À paraître dans *J. Differential Geom.*
- [34] INABA, T. & TSUCHIYA, N., Expansive foliations. *Hokkaido Math. J.*, 21 (1992), 39–49.
- [35] KAIMANOVICH, V. A., The Poisson boundary of polycyclic groups, dans *Probability Measures on Groups and Related Structures*, XI (Oberwolfach, 1994), p. 182–195. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
- [36] — The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math.*, 152 (2000), 659–692.
- [37] KATOK, A. & HASSELBLATT, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [38] KATOK, A. & MEZHIROV, A., Entropy and growth of expanding periodic orbits for one-dimensional maps. *Fund. Math.*, 157 (1998), 245–254.
- [39] KIFER, Y., *Ergodic Theory of Random Transformations*. Progress in Probability and Statistics, 10. Birkhäuser, Boston, MA, 1986.
- [40] KLEPESYN, V. A. & NAL'SKIĬ, M. B., Convergence of orbits in random dynamical systems on a circle. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 38 (2004), 36–54, 95–96 (en russe) ; traduction anglaise dans *Funct. Anal. Appl.* 38 (2004), 267–282.
- [41] KOPELL, N., Commuting diffeomorphisms, dans *Global Analysis* (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, p. 165–184. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.
- [42] KRA, B., The conjugating map for commutative groups of circle diffeomorphisms. *Israel J. Math.*, 93 (1996), 303–316.
- [43] MALLIAVIN, P., The canonic diffusion above the diffeomorphism group of the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329 (1999), 325–329.
- [44] MALLIAVIN, M.-P. & MALLIAVIN, P., An infinitesimally quasi-invariant measure on the group of diffeomorphisms of the circle, dans *Special Functions* (Okayama, 1990), ICM-90 Satell. Conf. Proc., p. 234–244. Springer, Tokyo, 1991.
- [45] MAÑÉ, R., Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 100 (1985), 495–524.
- [46] MARGULIS, G., Free subgroups of the homeomorphism group of the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331 (2000), 669–674.
- [47] — *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 17. Springer, Berlin–Heidelberg, 1991.
- [48] MORIYOSHI, H., The Euler and Godbillon–Vey forms and symplectic structures on  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)/\text{SO}(2)$ , dans *Symplectic Geometry and Quantization* (Sanda and Yokohama, 1993), Contemp. Math., 179, p. 193–203. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [49] MOSER, J., On commuting circle mappings and simultaneous Diophantine approximations. *Math. Z.*, 205 (1990), 105–121.

- [50] NAG, S. & SULLIVAN, D., Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the  $H^{1/2}$  space on the circle. *Osaka J. Math.*, 32 (1995), 1–34.
- [51] NAVAS, A., Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 35 (2002), 749–758.
- [52] — Groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 35 (2004), 13–50.
- [53] — Quelques groupes moyennables de difféomorphismes de l'intervalle. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 10 (2004), 219–244.
- [54] — Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations. *Enseign. Math.*, 50 (2004), 29–68.
- [55] — Quelques nouveaux phénomènes de rang 1 pour les groupes de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helv.*, 80 (2005), 355–375.
- [56] — Reduction of cocycles and groups of diffeomorphisms of the circle. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 13 (2006), 193–205.
- [57] — *Grupos de Difeomorfismos del Círculo*. Monografías del IMCA, Lima, Perú, 2006. À paraître dans *Ensaio Mat. (Soc. Brasil. Mat.)*. [arXiv:math/0607481](https://arxiv.org/abs/math/0607481).
- [58] — Growth of groups and diffeomorphisms of the interval. À paraître dans *Geom. Funct. Anal.* [arXiv:math/0508353](https://arxiv.org/abs/math/0508353).
- [59] NORTON, A., An area approach to wandering domains for smooth surface endomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 11 (1991), 181–187.
- [60] PIXTON, D., Nonsmoothable, unstable group actions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229 (1977), 259–268.
- [61] PLANTE, J. F., Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. of Math.*, 102 (1975), 327–361.
- [62] PLANTE, J. F. & THURSTON, W. P., Polynomial growth in holonomy groups of foliations. *Comment. Math. Helv.*, 51 (1976), 567–584.
- [63] PLISS, V. A., On a conjecture of Smale. *Differ. Uravn.*, 8 (1972), 268–282 (en russe).
- [64] SACKSTEDER, R., Foliations and pseudogroups. *Amer. J. Math.*, 87 (1965), 79–102.
- [65] SCHWARTZ, A. J., A generalization of a Poincaré–Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 453–458, 753.
- [66] SERGERAERT, F., Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité. *Invent. Math.*, 39 (1977), 253–275.
- [67] SHUB, M. & SULLIVAN, D., Expanding endomorphisms of the circle revisited. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5 (1985), 285–289.
- [68] STERNBERG, S., Local  $C^n$  transformations of the real line. *Duke Math. J.*, 24 (1957), 97–102.
- [69] SULLIVAN, D., Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, 36 (1976), 225–255.
- [70] THURSTON, W. P., A generalization of the Reeb stability theorem. *Topology*, 13 (1974), 347–352.
- [71] TSUBOI, T., On the foliated products of class  $C^1$ . *Ann. of Math.*, 130 (1989), 227–271.
- [72] — On the Hurder–Katok extension of the Godbillon–Vey invariant. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37 (1990), 255–262.
- [73] — Area functionals and Godbillon–Vey cocycles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42 (1992), 421–447.
- [74] — Homological and dynamical study on certain groups of Lipschitz homeomorphisms of the circle. *J. Math. Soc. Japan*, 47 (1995), 1–30.
- [75] WEIL, A., *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Actual. Sci. Ind., 869. Hermann, Paris, 1940.

- [76] WOESS, W., Fixed sets and free subgroups of groups acting on metric spaces. *Math. Z.*, 214 (1993), 425–439.
- [77] YOCCOZ, J.-C., Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. Petits diviseurs en dimension 1. *Astérisque*, 231 (1995), 89–242.

BERTRAND DEROIN  
Laboratoire de Mathématiques  
Université Paris-Sud  
Bât. 425  
FR-91405 Orsay Cedex  
France  
Bertrand.Deroin@math.u-psud.fr

VICTOR KLEPSTYN  
Université de Genève  
2-4 rue du Lièvre  
Case postale 64  
CH-1211 Genève 4  
Suisse  
Victor.Kleptsyn@math.unige.ch

ANDRÉS NAVAS  
Universidad de Santiago de Chile  
Alameda 3363  
Santiago  
Chile  
andnavas@uchile.cl

*Reçu le 7 juin 2005*

*Révisé le 2 mars 2007*