SUR LA LACUNARITÉ DES PUISSANCES DE η

par JEAN-PIERRE SERRE

To Robert Rankin for his 70*th birthday*

Introduction. La fonction η de Dedekind est définie par

$$\eta(z)=q^{1/24}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)=q^{1/24}(1-q-q^2+q^5+\ldots), \tag{1}$$

où $q=e^{2\pi iz}$, $\operatorname{Im}(z)>0$. C'est une forme modulaire parabolique de poids 1/2. Si r est un entier, la puissance r-ième de η s'écrit:

$$\eta^r(z)=q^{r/24}\sum_{n=0}^{\infty}p_r(n)q^n, \tag{2}$$

où les coefficients $p_r(n)$ sone définis par l'identité

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^r=\sum_{n=0}^{\infty}p_r(n)q^n. \tag{3}$$

De nombreux auteurs se sont intéressés aux $p_r(n)$, et en particulier à leur annulation ([**1**], [**5**], [**6**], [**8**], [**10**], [**11**], [**13**], [**14**], [**16**]). Il se trouve en effet que, pour certaines valeurs de l'exposant r, *presque tous* les $p_r(n)$ sont 0: l'ensemble des n tels que $p_r(n)\neq 0$ est de densité nulle; on dit alors que la série η^r est *lacunaire*. C'est le cas pour $r=1,3$ comme le montrent les identités d'Euler et Jacobi ([**4**], chap. XIX):

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)&=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{(3n^2+n)/2}\\&=1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}-\ldots\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^3&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{(n^2+n)/2}\\&=1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-11q^{15}+13q^{21}-\ldots\end{aligned} \tag{5}$$

On ne connaît pas d'autres valeurs *impaires* de r pour lesquelles η^r soit lacunaire au sens ci-dessus; des calculs sur ordinateur rendent probable qu'il n'y en a pas (cf. n° 3.2 ci-après). Lorsque r est *pair*, par contre, il peut se faire que η^r soit lacunaire; c'est le cas pour $r=2,4,6,8$ d'après Ramanujan [**13**]; c'est aussi le cas pour $r=10$, 14 et 26 ([**5**], [**10**], [**14**]). Je me propose de montrer que ces cas sont les seuls:

THÉORÈME 1. *Supposons r pair* >0. *La fonction η^r est lacunaire si et seulement si r est égal à* 2, 4, 6, 8, 10, 14 *ou* 26.

La démonstration fait l'objet du §1. Elle repose sur le th. 17 de [**19**], lui-même conséquence de l'existence, prouvée par Deligne, des représentations l-adiques attachées aux formes paraboliques de poids entier.

Glasgow Math. J. **27** (1985) 203–221.

Le §2 est consacré aux exposants exceptionnels $r = 2, 4, 6, 8, 10, 14$ et 26: il donne une décomposition de η^r en termes de *formes de type CM*, associées à des caractères de Hecke de $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, et précise dans quels cas on a $p_r(n) = 0$.

Le §3 contient divers compléments, notamment sur la "lacunarité mod m" des η^r.

J'ai beaucoup bénéficié d'une correspondance avec Oliver Atkin, Henri Cohen et Victor Kac sur les sujets abordés ici; je les en remercie vivement.

1. Démonstration du théorème 1. Dans ce §, on suppose que r est pair > 0 et n'appartient pas à l'ensemble $\{2, 4, 6, 8, 10, 14, 26\}$. Il s'agit de montrer que η^r *n'est pas lacunaire.*

On pose $k = r/2$; c'est le *poids* de η^r.

1.1. *Les formes* f^k. Il est commode de changer de variable en remplaçant q par q^{12}, de sorte que les exposants de q dans $\eta^r = \eta^{2k}$ deviennent entiers. Cela amène à poser (cf. [**19**], n° 7.8):

$$\begin{aligned} f(z) = \eta^2(12z) &= q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{12m})^2 \\ &= q - 2q^{13} - q^{25} + 2q^{37} + q^{49} + 2q^{61} - 2q^{73} - 2q^{97} - 2q^{109} + q^{121} + \dots \end{aligned} \tag{6}$$

La fonction f est une forme parabolique de type $(1, \varepsilon)$ sur $\Gamma_0(N)$, où $N = 12^2 = 2^4 3^2$, et où ε est le caractère de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ défini par

$$\varepsilon(n) = (-1)^{(n-1)/2} \quad \text{si} \quad (N, n) = 1. \tag{7}$$

Il en résulte que la forme

$$f^k(z) = \eta^r(12z) = q^k \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n) q^{12n}, \tag{8}$$

est de type (k, ε^k); avec les notations de [**19**], n° 7.6, on a

$$f^k \in S(N, k, \varepsilon^k). \tag{9}$$

Notons $S_{\mathrm{cm}}(N, k, \varepsilon^k)$ (cf. [**19**], p. 181) le sous-espace de $S(N, k, \varepsilon^k)$ engendré par les *formes de type CM*, au sens de Ribet [**15**]. Si $\varphi \in S(N, k, \varepsilon^k)$, on sait ([**19**], th. 17) que φ *est lacunaire si et seulement si* φ *appartient à* $S_{\mathrm{cm}}(N, k, \varepsilon^k)$. Le th. 1 équivaut donc au suivant:

Théorème 1′. *On a* $f^k \notin S_{\mathrm{cm}}(N, k, \varepsilon^k)$ *si* $k \neq 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13$.

Le th. 1′ résulte lui-même de la comparaison des deux lemmes suivants, qui seront démontrés aux n$^{\text{os}}$ 1.2 et 1.3:

Lemme 1. *Si* $\varphi \in S_{\mathrm{cm}}(N, k, \varepsilon^k)$, $k \geq 2$, *on a* $\varphi \mid T_p = 0$ *pour tout nombre premier* p *tel que* $p \equiv -1 \pmod{12}$.

(On note $\varphi \mid T_p$ le transformé de φ par l'opérateur de Hecke T_p, cf. [**19**], n° 7.1.)

Lemme 2. *On a* $f^k \mid T_{11} \neq 0$ *si* $k \neq 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13$.

1.2. *Démonstration du lemme* 1. Rappelons d'abord comment on construit une base de $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$, pour $k \geqslant 2$, au moyen de corps quadratiques imaginaires et de caractères de Hecke ("Grössencharakteren"):

Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique imaginaire de discriminant d; on a $d < 0$; soit O_K l'anneau des entiers de K. On note ε_K le caractère quadratique associé à K; le conducteur de ε_K est $|d|$; on a $\varepsilon_K(p) = \left(\frac{d}{p}\right)$ si p est premier et ne divise pas $2\,|d|$.

Soit c un caractère de Hecke de K d'exposant $k-1$ et de conducteur $\mathfrak{f}_c$, où $\mathfrak{f}_c$ est un idéal non nul de O_K. Par définition, c est un homomorphisme

$$c : I(\mathfrak{f}_c) \to \mathbf{C}^*,$$

où $I(\mathfrak{f}_c)$ désigne le groupe des idéaux fractionnaires de K premiers à $\mathfrak{f}_c$. On a de plus:

$$c(\alpha O_K) = \alpha^{k-1} \quad \text{si} \quad \alpha \in K^* \quad \text{et} \quad \alpha \equiv 1 \bmod^{\times} \mathfrak{f}_c. \tag{10}$$

A c est attaché un caractère de Dirichlet ω_c, défini par:

$$\omega_c(n) = c(nO_K)/n^{k-1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z} \quad \text{premier à} \quad \mathfrak{f}_c. \tag{11}$$

Considérons la série

$$\varphi_{K,c}(z) = \sum_{\mathfrak{a}} c(\mathfrak{a})q^{N(\mathfrak{a})} \qquad (q = e^{2\pi i z}, \operatorname{Im}(z) > 0), \tag{12}$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux de O_K premiers à $\mathfrak{f}_c$, et $N(\mathfrak{a})$ désigne la norme de $\mathfrak{a}$. On sait ([**15**], p. 35–36 et [**20**], p. 138) que $\varphi_{K,c}$ est une forme parabolique primitive ("newform", au sens de [**7**]) de type $(k, \varepsilon_K\omega_c)$ sur le groupe $\Gamma_0(|d|\,.\,N(f_c))$. De plus, des couples (K, c) distincts donnent des formes $\varphi_{K,c}$ distinctes (ceci ne subsiste plus pour $k = 1$, comme l'avait remarqué Hecke à propos de η^2, cf. [**18**], §7.3).

Si δ est un entier $\geqslant 1$, notons $\varphi_{K,c,\delta}$ la forme définie par:

$$\varphi_{K,c,\delta}(z) = \varphi_{K,c}(\delta z) = \sum_{\mathfrak{a}} c(\mathfrak{a})q^{\delta.N(\mathfrak{a})}. \tag{13}$$

Pour que $\varphi_{K,c,\delta}$ appartienne à l'espace $S(N, k, \varepsilon^k)$ qui nous intéresse, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

$$\delta\,.\,|d|\,.\,N(\mathfrak{f}_c) \quad \text{divise } N; \tag{14.1}$$

$$\varepsilon_K\omega_c = \varepsilon^k. \tag{14.2}$$

(Il y a un abus de notation dans (14.2): l'égalité doit avoir lieu entre les caractères *primitifs* correspondants, i.e. on doit avoir $\varepsilon_K(p)\omega_c(p) = \varepsilon(p)^k$ pour tout p premier $\neq 2, 3$.)

Par définition (cf. [**15**], *loc. cit.*, ainsi que [**19**], p. 181), $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$ *est le sous-espace de* $S(N, k, \varepsilon^k)$ *engendré par les* $\varphi_{K,c,\delta}$ *pour les triplets* (K, c, δ) *satisfaisant aux conditions* (14.1) *et* (14.2).

Or ces conditions sont très restrictives. Tout d'abord (14.1) entraîne que $|d|$ divise $N = 2^4 3^2$. Cela ne laisse que les possibilités:

$$d = -3, -4, -8, -24,$$

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

qui correspondent aux corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$. En fait:

a) *Le cas* $d=-8$ (i.e. $K=\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$) *est impossible*

Supposons $d=-8$. Vu (14.2), on a $\omega_c=\varepsilon_K$ ou $\varepsilon_K\,.\,\varepsilon$, suivant la parité de k; cela entraîne que le conducteur m_c de ω_c est égal à 8. Soit d'autre part q_c le générateur positif de $\mathfrak{f}_c \cap \mathbf{Z}$. Il résulte de (10) et (11) que $\omega_c(n)=1$ si $n\equiv 1 \pmod{q_c}$, d'où le fait que 8 divise q_c. Si $\mathfrak{p}$ désigne l'idéal premier $\sqrt{-2}.\ O_K$, il en résulte que la valuation $\mathfrak{p}$-adique de $\mathfrak{f}_c$ est $\geqslant 5$, et $N(\mathfrak{f}_c)$ est divisible par 2^5, ce qui contredit (14.1) puisque $N=2^4 3^2$.

b) *Le cas* $d=-24$ (i.e. $K=\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$) *est impossible*

Le raisonnement est le même: l'hypothèse $d=-24$ entraîne que le conducteur m_c de ω_c est égal à 24, et l'on en déduit comme ci-dessus que $N(\mathfrak{f}_c)$ est divisible par 2^5, ce qui contredit la condition (14.1).

Les seules possibilités sont donc $d=-3$ et $d=-4$, qui correspondent aux corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Mais, si p est un nombre premier tel que $p\equiv -1 \pmod{12}$, p est *inerte* dans chacun de ces corps, et cela entraîne (cf. [**15**], p. 35):

$$\varphi_{K,c,\delta} \mid T_p = 0.$$

D'où le lemme 1, puisque les $\varphi_{K,c,\delta}$ engendrent $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$.

Remarque. Le lemme 1 admet une réciproque: si $\varphi \in S(N, k, \varepsilon^k)$ est tel que $\varphi \mid T_p=0$ pour tout $p\equiv -1 \pmod{12}$, alors φ appartient à $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$; en fait, il suffit même que l'on ait $\varphi \mid T_p=0$ pour un ensemble de p de densite >0 (cela résulte de [**19**], cor. 2 au th. 15).

1.3. *Démonstration du lemme* 2. Il s'agit de montrer que $f^k \mid T_{11}\neq 0$ si k est un entier >0 n'appartenant pas à l'ensemble $\{1,2,3,4,5,7,13\}$. Aux notations près, ce fait est démontré dans [**10**]. Je rappelle la démonstration:

D'après (8), on a

$$f^k=\sum_n p_r(n)q^{k+12n}, \quad \text{avec } r=2k. \tag{15}$$

Comme $\varepsilon^k(11)=(-1)^k$, on en déduit:

$$f^k \mid T_{11}=\sum_n p_r(n)q^{(k+12n)/11}+(-1)^k 11^{k-1}\sum_n p_r(n)q^{11(k+12n)}, \tag{16}$$

où la première sommation porte sur les entiers $n\geqslant 0$ tels que $k+12n$ soit divisible par 11, i.e. $n\equiv -k \pmod{11}$. Notons m le plus petit de ces entiers; on a

$$0\leqslant m\leqslant 10 \quad \text{et} \quad m\equiv -k \pmod{11}. \tag{17}$$

La formule (16) entraîne:

$$f^k \mid T_{11}=p_r(m)q^{(k+12m)/11}+\dots \tag{18}$$

où les termes non écrits ont des exposants $>(k+12m)/11$; en effet les exposants des termes de la seconde somme sont $\geqslant 11k$ et l'on a $11k>(k+12m)/11$ pour $k>1$, comme on le voit facilement.

Pour démontrer que $f^k \mid T_{11}$ est $\neq 0$, il suffit donc de prouver que $p_r(m) \neq 0$. C'est l'objet du lemme suivant:

LEMME 3. *Si* $0 \leq m \leq 10$, *et si* $k \equiv -m \pmod{11}$, *on a*

$$p_{2k}(m) \neq 0 \quad pour \quad k \neq 2, 3, 4, 5, 7, 13. \tag{19}$$

La méthode suivie par Newman [**10**] pour prouver ce lemme consiste à *expliciter* les onze polynômes $r \mapsto p_r(m)$, pour $m = 0, \ldots, 10$:

$$\begin{aligned}
&p_r(0) = 1\\
&p_r(1) = -r\\
&p_r(2) = r(r-3)/2\\
&p_r(3) = -r(r-1)(r-8)/3!\\
&p_r(4) = r(r-1)(r-3)(r-14)/4!\\
&p_r(5) = -r(r-3)(r-6)(r^2-21r+8)/5!\\
&p_r(6) = r(r-1)(r-10)(r^3-34r^2+181r-144)/6!\\
&p_r(7) = -r(r-2)(r-3)(r-8)(r^3-50r^2+529r-120)/71!\\
&p_r(8) = r(r-1)(r-3)(r-6)(r^4-74r^3+1571r^2-9994r+4200)/8!\\
&p_r(9) = -r(r-1)(r-3)(r-4)(r-14)(r-26)(r^3-60r^2+491r-120)/9!\\
&p_r(10) = r(r-1)(r^8-134r^7+6496r^6-147854r^5+1709659r^4-10035116r^3\\
&\qquad +28014804r^2-29758896r+6531840)/10!.
\end{aligned}$$

Or un calcul numérique standard montre que les facteurs:

$$\begin{aligned}
&r^2-21r+8,\\
&r^3-34r^2+181r-144,\\
&r^3-50r^2+529r-120,\\
&r^4-74r^3+1571r^2-9994r+4200,\\
&r^3-60r^2+491r-120,\\
&r^8-134r^7+6496r^6-\ldots+6531840,
\end{aligned}$$

n'ont *aucune racine dans* **Z**. D'où le lemme 3, et du coup le th. 1.

REMARQUE. Le cas du polynôme $r^8-134r^7+\ldots$, qui intervient pour $m=10$, nécessite l'emploi d'une calculatrice de poche (ou d'un ordinateur), ce qui est un peu désagréable. En fait, ce cas peut se traiter sans calcul:

Vu l'énoncé du lemme 3, il suffit de prouver que $p_r(10) \neq 0$ lorsque $r = 2k$ avec $k \equiv -10 \pmod{11}$, d'où $r \equiv 2 \pmod{11}$. Or le polynôme $r \mapsto p_r(10)$ est à coefficients 11-entiers; il est donc constant (mod 11) sur toute classe modulo 11, et l'on a

$$p_r(10) \equiv p_2(10) \pmod{11}.$$

Mais il est immédiat que $p_2(10) = 1$ (cela résulte, par exemple, de la détermination explicite de $p_2(n)$, cf. n° 2.1). On a donc

$$p_r(10) \equiv 1 \pmod{11},$$

ce qui montre bien que $p_r(10)$ est non nul pour les valeurs de r considérées.

La même méthode s'applique aux autres valeurs de m, à condition de diviser le polynôme $r \mapsto p_r(m)$ par des facteurs linéaires convenables. Je laisse au lecteur le détail des calculs, et je me borne à énoncer les congruences obtenues pour $m = 5, 6, 7, 8, 9$:

$$\begin{array}{ll}
p_r(5) \equiv 1 \pmod{11} & \text{si} \quad r \equiv 1 \pmod{11} \\
p_r(6)/(r-10) \equiv 10 \pmod{11} & \text{si} \quad r \equiv 10 \pmod{11} \\
p_r(7)/(r-8) \equiv 5 \pmod{11} & \text{si} \quad r \equiv 8 \pmod{11} \\
p_r(8)/(r-6) \equiv 1 \pmod{11} & \text{si} \quad r \equiv 6 \pmod{11} \\
p_r(9)/(r-4)(r-26) \equiv 9 \pmod{11} & \text{si} \quad r \equiv 4 \pmod{11}.
\end{array}$$

2. Les fonctions η^r, pour $r = 2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$. Pour chacune de ces valeurs de r, on sait ([**5**], [**14**]) que η^r est lacunaire, donc décomposable en combinaison linéaire de formes de type *CM*, associées à des caractères de Hecke de $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ ou $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, cf. n° 1.2.

Le but de ce § est d'expliciter ces decompositions, et d'en déduire dans quels cas on a $p_r(n) = 0$.

Les n$^{\text{os}}$ 2.1, 2.2, ..., 2.7 contiennent les formules relatives à $\eta^2, \eta^4, \ldots, \eta^{26}$. Les démonstrations ont été concentrées au n° 2.8; comme elles ne présentent pas de difficultés, je me suis borné à les esquisser. Les résultats obtenus ne sont d'ailleurs pas essentiellement nouveaux:

les cas $r = 2, 4, 6, 8$ se trouvent déjà dans Ramanujan [**13**] (voir aussi [**8**], [**16**]);

les cas $r = 10, 14, 26$ ont été traités par Atkin il y a près de vingt ans (non publié—mais voir Dyson [**3**], p. 637 et p. 651);

les cas $r = 6, 8, 10, 14$ peuvent se déduire de la formule de Macdonald [**9**], appliquée à une algèbre de Lie semi-simple de dimension r et de rang 2, de type $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2.

2.1. *Le cas* $r = 2$. La fonction

$$\eta^2(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_2(n) q^{1+12n} = q - 2q^{13} - q^{25} + 2q^{37} + q^{49} + 2q^{61} + \ldots$$

déjà considérée au n° 1.1, est une forme parabolique primitive de type $(1, \varepsilon)$ sur le groupe $\Gamma_0(2^4 3^2)$. Elle correspond (par la correspondance établie dans [**2**]) à une représentation galoisienne diédrale

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}_2(\mathbf{C}), \quad \text{où} \quad E = \mathbf{Q}(i, \sqrt[4]{12}),$$

décrite dans [**18**], p. 242–244. Avec les notations du n° 1.2, on a

$$\eta^2(12z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{20}$$

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

où $K=\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et où c est l'un des deux caractères de Hecke de K, d'ordre 4, qui correspondent à l'extension cyclique E/K (pour une description explicite de ces caractères, voir n° 2.5, où ils sont notés s_+ et s_-). Il y a d'ailleurs des expressions analogues de $\eta^2(12z)$ au moyen de caractères de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ ou de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, cf. [**18**], *loc. cit.*

De cette description de $\eta^2(12z)$ résulte (cf. [**19**], p. 186):

$$p_2(n)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l}\textit{il existe un nombre premier } p\not\equiv 1 \pmod{12}\\ \textit{dont l'exposant dans } 1+12n \textit{ est impair.}\end{array}$$

EXEMPLE. Les valeurs de $n\leqslant 40$ pour lesquelles $p_2(n)=0$ sont:

n	7	11	12	17	18	21	22	25	32	37	39
$1+12n$	5.17	7.19	5.29	5.41	7.31	11.23	5.53	7.43	5.7.11	5.89	7.67

2.2. *Le cas* $r=4$. Il est commode de considérer, non pas $\eta^4(12z)$ (qui est une "oldform"), mais plutôt:

$$\eta^4(6z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_4(n)q^{1+6n}=q-4q^7+2q^{13}+8q^{19}-5q^{25}-4q^{31}+\dots,$$

qui est une forme parabolique primitive de poids 2 sur $\Gamma_0(2^2 3^2)$, de type *CM*. Avec les notations du n° 1.2, on a

$$\eta^4(6z)=\varphi_{K,c}(z), \tag{21}$$

où $K=\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et où c est le caractère de Hecke de K, d'exposant 1 et de conducteur $\mathfrak{f}_c=2\sqrt{-3}$. O_K, défini de la manière suivante:

si $\mathfrak{a}$ est un idéal de O_K premier à $\mathfrak{f}_c$, on a $c(\mathfrak{a})=\alpha$, où α est l'unique générateur de $\mathfrak{a}$ tel que $\alpha\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_c}$.

Soit $L(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_4(n)(1+6n)^{-s}$ la série de Dirichlet associée à $\eta^4(6z)$. D'après (21), $L(s)$ se décompose en produit eulérien

$$L(s)=\prod_{p\neq 2,3} L_p(s), \tag{22}$$

avec:

$$L_p(s)=1/(1+p^{1-2s}) \quad \text{si} \quad p\equiv -1 \pmod 3, \quad p\neq 2, \tag{23}$$

$$L_p(s)=1/(1-c(\mathfrak{p})p^{-s})(1-c(\bar{\mathfrak{p}})p^{-s}) \quad \text{si} \quad p\equiv 1 \pmod 3, \tag{24}$$

où $\mathfrak{p}$ et $\bar{\mathfrak{p}}$ désignent les idéaux premiers de O_K qui divisent p.

Si l'on pose $T=p^{-s}$, les formules (23) et (24) se récrivent:

$$L_p(s)=1-pT^2+p^2T^4-p^3T^6+\dots \tag{23'}$$

$$L_p(s)=1+x_1T+x_2T^2+\dots, \tag{24'}$$

avec

$$x_n = c(\mathfrak{p})^n + c(\mathfrak{p})^{n-1}c(\bar{\mathfrak{p}}) + \ldots + c(\bar{\mathfrak{p}})^n.$$

Comme $c(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{p}$ et $c(\bar{\mathfrak{p}}) \notin \mathfrak{p}$, on a $x_n \notin \mathfrak{p}$, et en particulier $x_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 0$. On déduit de là que le m-ième coefficient de $L(s)$ est $\neq 0$ si et seulement si m est premier à 6, et si pour tout $p \equiv -1 \pmod 3$, l'exposant de p dans m est pair. En d'autres termes:

$$p_4(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod 3 \\ \textit{dont l'exposant dans } 1+6n \textit{ est impair.} \end{array}$$

Exemple. Valeurs de $n \leqslant 50$ pour lesquelles $p_4(n) = 0$:

n	9	14	19	24	31	34	39	42	44	49
$1+6n$	5.11	5.17	5.23	5.29	11.17	5.41	5.47	11.23	5.53	5.59

2.3. *Le cas* $r = 6$. Ce cas est analogue au cas $r = 4$.

La fonction

$$\eta^6(4z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_6(n) q^{1+4n} = q - 6q^5 + 9q^9 + 10q^{13} - 30q^{17} + \ldots$$

est une forme parabolique primitive de poids 3 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4)$. C'est une forme de type *CM*. On a:

$$\eta^6(4z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{25}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et où c est le caractère de Hecke de K, d'exposant 2 et de conducteur $\mathfrak{f}_c = 2 \,.\, O_K$, défini de la manière suivante:

si $\mathfrak{a}$ est un idéal de O_K premier à $\mathfrak{f}_c$, on a $c(\mathfrak{a}) = \alpha^2$, où α est l'un quelconque des deux générateurs de $\mathfrak{a}$ tels que $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_c}$.

On déduit de (25), par le même argument que pour $r = 4$:

$$p_6(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod 4 \\ \textit{dont l'exposant dans } 1+4n \textit{ est impair.} \end{array}$$

Exemple. Valeurs de $n \leqslant 40$ pour lesquelles $p_6(n) = 0$:

n	5	8	14	17	19	23	26	32	33	35	40
$1+4n$	3.7	3.11	3.19	3.23	7.11	3.31	3.5.7	3.43	7.19	3.47	7.23

2.4. *Le cas* $r = 8$. Ce cas est analogue aux cas $r = 4$ et $r = 6$.

La fonction

$$\eta^8(3z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_8(n) q^{1+3n} = q - 8q^4 + 20q^7 - 70q^{13} + 64q^{16} + \ldots$$

est une forme parabolique primitive de poids 4 sur $\Gamma_0(3^2)$, de type *CM*. On a

$$\eta^8(3z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{26}$$

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et où c est le caractère de Hecke de K, d'exposant 3 et de conducteur $\mathfrak{f}_c = \sqrt{-3}\,.\,O_K$, défini de la manière suivante:

si $\mathfrak{a}$ est un idéal de O_K premier à $\mathfrak{f}_c$, on a $c(\mathfrak{a}) = \alpha^3$, où α est l'un quelconque des trois générateurs de $\mathfrak{a}$ tels que $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_c}$.

On en déduit:

$$p_8(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod 3 \\ \textit{dont l'exposant dans } 1+3n \textit{ est impair.} \end{array}$$

EXEMPLE. Valeurs de $n \leqslant 30$ pour lesquelles $p_8(n) = 0$:

n	3	7	11	13	15	18	19	23	27	28	29
$1+3n$	2.5	2.11	2.17	$2^3.5$	2.23	5.11	2.29	2.5.7	2.41	5.17	$2^3.11$

2.5. *Le cas* $r = 10$. La fonction

$$\eta^{10}(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{10}(n) q^{5+12n} = q^5 - 10q^{17} + 35q^{29} - 30q^{41} + \dots$$

est une forme parabolique de poids 5 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4 3^2)$. Ce n'est pas une forme primitive (elle ne commence pas par "q"), mais c'est une combinaison linéaire de *deux* formes primitives de type *CM*:

$$\eta^{10}(12z) = \tfrac{1}{96}(\varphi_{K,c_+}(z) - \varphi_{K,c_-}(z)), \tag{27}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, et où c_+ et c_- sont deux caractères de Hecke de K, d'exposant 4 et de conducteur $\mathfrak{f} = 6\,.\,O_K$, qui seront explicités ci-dessous.

On a

$$\varphi_{K,c_\pm} = q \pm 48q^5 + 238q^{13} \mp 480q^{17} + 1679q^{25} + \dots \tag{28}$$

et

$$\varphi_{K,c_\pm}(z/12) = E_4\eta^2 \pm 48\eta^{10}, \tag{29}$$

où $E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$ est la série d'Eisenstein normalisée de poids 4 et de niveau 1.

Explicitons les caractères c_+ et c_-:

$$\text{Notons } s_\pm : (O_K/6\,.\,O_K)^* \to \{1, i, -1, -i\}$$

les homomorphismes caractérisés par

$$s_\pm(\alpha) = (-1)^a (\pm i)^b \quad \text{si} \quad \begin{cases} \alpha \equiv i^a \pmod{2\,.\,O_K}, & a \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \\ \alpha \equiv (1-i)^b \pmod{3\,.\,O_K}, & b \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de O_K premier à $\mathfrak{f} = 6\,.\,O_K$, on pose alors

$$c_\pm(\mathfrak{a}) = s_\pm(\alpha)\alpha^4,$$

où α est l'un quelconque des quatre générateurs de $\mathfrak{a}$.

Si m est un entier tel que $m \equiv 5 \pmod{12}$, le m – ième coefficient de $\eta^{10}(12z)$ est égal à celui de φ_{K,c_+}, divisé par 48. On en déduit, par le même raisonnement qu'au n° 2.2:

$$p_{10}(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod 4 \\ \textit{dont l'exposant dans } 5+12n \textit{ est impair.} \end{array}$$

Exemple. Valeurs de $n \leqslant 50$ pour lesquelles $p_{10}(n) = 0$:

n	6	13	17	27	28	34	36	39	41	48
$5+12n$	7.11	7.23	11.19	7.47	11.31	7.59	19.23	11.43	7.71	7.83

2.6. *Le cas* $r = 14$. Ce cas est analogue au cas $r = 10$.
La fonction

$$\eta^{14}(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{14}(n) q^{7+12n} = q^7 - 14q^{19} + 77q^{31} - 182q^{43} + \dots$$

est une forme parabolique de poids 7 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4 3^2)$. C'est une combinaison linéaire de *deux* formes primitives de type *CM*:

$$\eta^{14}(12z) = \frac{1}{720\sqrt{-3}} (\varphi_{K,c_+}(z) - \varphi_{K,c_-}(z)), \tag{30}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, et où c_+ et c_- sont deux caractères de Hecke de K, d'exposant 6 et de conducteur $\mathfrak{f} = 4\sqrt{-3} \,.\, O_K$, qui seront explicités ci-dessous.

On a

$$\varphi_{K,c_\pm} = q \pm 360\sqrt{-3}q^7 - 560q^{13} \mp 5040\sqrt{-3}q^{19} + \dots \tag{31}$$

et

$$\varphi_{K,c_\pm}(z/12) = E_6\eta^2 \pm 360\sqrt{-3}\eta^{14}, \tag{32}$$

où $E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$ est la série d'Eisenstein normalisée de poids 6 et de niveau 1.

Explicitons c_+ et c_-:

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de O_K premier à $\mathfrak{f}$, soit α l'unique générateur de $\mathfrak{a}$ qui s'écrit $\alpha = x + y\sqrt{-3}$, avec $x, y \in \mathbf{Z}$, $x + y \equiv 1 \pmod 2$ et $x \equiv 1 \pmod 3$; on a alors

$$c_+(\mathfrak{a}) = (-1)^{(x-y-1)/2}\alpha^6 \quad \text{et} \quad c_-(\mathfrak{a}) = (-1)^{(x+y-1)/2}\alpha^6. \tag{33}$$

On en déduit, comme au n° 2.5:

$$p_{14}(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod 3 \\ \textit{dont l'exposant dans } 7+12n \textit{ est impair.} \end{array}$$

Exemple. Valeurs de $n \leqslant 40$ pour lesquelles $p_{14}(n) = 0$:

n	4	9	15	19	24	26	29	32	34	37
$7+12n$	5.11	5.23	11.17	5.47	5.59	11.29	5.71	17.23	5.83	11.41

2.7. *Le cas* $r=26$

La fonction

$$\eta^{26}(12z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{26}(n)q^{13+12n}=q^{13}-26q^{25}+299q^{37}-1950q^{49}+\ldots$$

est une forme parabolique de poids 13 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4 3^2)$. C'est une combinaison linéaire de *quatre* formes primitives de type *CM*:

$$\eta^{26}(12z)=\frac{1}{32617728}(\varphi_{K',c'_+}+\varphi_{K',c'_-}-\varphi_{K'',c''_+}-\varphi_{K'',c''_-}), \tag{34}$$

où $K'=\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, $K''=\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, et où c'_+ et c'_- (resp. c''_+ et c''_-) sont deux caractères de Hecke de K' (resp. de K''), d'exposant 12 et de conducteur $\mathfrak{f}'=4\sqrt{-3}\,.\,O_{K'}$ (resp. $\mathfrak{f}''=6\,.\,O_{K''}$) qui seront explicités ci-dessous.

On a

$$\varphi_{K',c'_\pm}=q\mp 102960\sqrt{-3}q^7+9397582q^{13}\pm 53333280\sqrt{-3}q^{19}+\ldots \tag{35}$$

$$\varphi_{K'',c''_\pm}=q\pm 20592q^5-6911282q^{13}\pm 9678240q^{17}+\ldots \tag{36}$$

et

$$\varphi_{K',c'_\pm}(z/12)=E_6^2\eta^2+9398592\eta^{26}\mp 102960\sqrt{-3}E_6\eta^{14} \tag{37}$$

$$\varphi_{K'',c''_\pm}(z/12)=E_6^2\eta^2-6910272\eta^{26}\pm 20592E_8\eta^{10}, \tag{38}$$

où E_6 (resp. E_8) est la série d'Eisenstein normalisée de poids 6 (resp. de poids 8) et de niveau 1.

Explicitons les caractères $c'_\pm$ et $c''_\pm$:

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $O_{K'}$ premier à $\mathfrak{f}'$, et si α est un générateur quelconque de $\mathfrak{a}$, on a $c'_\pm(\mathfrak{a})=\alpha^6 c_\pm(\mathfrak{a})$, où $c_\pm$ est le caractère de Hecke de K' défini au n° 2.6.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $O_{K''}$ premier à $\mathfrak{f}''$, on a $c''_\pm(\mathfrak{a})=c_\pm(\mathfrak{a})^3$, où $c_\pm$ est le caractère de Hecke de K'' défini au n° 2.5.

Il résulte de (34) que $p_{26}(n)$ *est égal à* 0 dans chacun des deux cas suivants:

Il existe un nombre premier $p\equiv -1 \pmod 4$ *dont l'exposant dans* $13+12n$ *est impair, et il existe un nombre premier* $p'\equiv -1 \pmod 3$ *dont l'exposant dans* $13+12n$ *est impair.* (39_1)

(Noter que p' peut être égal à p.)

En effet, dans ce cas, les coefficients de q^{13+12n} dans les quatre séries $\varphi_{K',c'_\pm}$ et $\varphi_{K'',c''_\pm}$ sont nuls.

$13+12n$ *est un carré, et tous ses facteurs premiers* p *sont tels que* $p\equiv -1 \pmod{12}$. (39_2)

En effet, dans ce cas, les coefficients de q^{13+12n} dans les quatre séries $\varphi_{K',c'_\pm}$ et $\varphi_{K'',c''_\pm}$ sont égaux à $(13+12n)^6$.

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

J'ignore s'il existe d'autres cas que (39_1) et (39_2) où $p_{26}(n)$ est égal à 0; d'après une table que j'ai consultée, il n'y en a pas pour $n \leqslant 1500$.

EXEMPLE. Valeurs de $n \leqslant 80$ pour lesquelles $p_{26}(n)=0$:

n	9	20	31	42	43	53	64	66	75
$13+12n$	11^2	11.23	5.7.11	11.47	23^2	11.59	11.71	5.7.23	11.83

Noter les cas $n=9$ et $n=43$ qui sont du type (39_2).

QUESTION. Est-il possible d'obtenir la décomposition (34) de η^{26} par une variante de la formule de Macdonald (cf. [**3**], [**9**])? On pense naturellement à F_4, qui est de dimension $52=2\times 26$, et possède des formes "tordues" de rang 2 (groupes de Ree).

2.8. *Indications sur les démonstrations.* Je me borne aux cas de η^{10}, η^{14} et η^{26}, les autres étant bien connus, cf. [**8**], [**13**], [**16**], [**18**].

On commence par écrire η^r comme combinaison linéaire de fonctions propres pour les T_p (p premier $\neq 2, 3$), suivant une méthode exposée par Rankin ([**14**], §8):

Si k est un entier $\geqslant 1$, premier à 6, notons V_k l'espace vectoriel de base les produits $E_a\eta^{2b}$, où E_a est la série d'Eisenstein normalisée de poids a et de niveau 1, et où les entiers a et b sont assujettis aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} a \text{ est pair}, \geqslant 0, \text{ et différent de } 2, \\ b \geqslant 1, (b, 6)=1, \\ 2a+b=k. \end{cases}$$

Le couple $a=0, b=k$ donne η^{2k}.

L'espace V_k peut être caractérisé en termes de formes paraboliques "à multiplicateur" sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, cf. Rankin, *loc. cit.* Cette caractérisation montre que V_k est stable par les T_p. On peut donc exprimer η^{2k} comme *combinaison linéaire de fonctions propres appartenant à* V_k. Cela donne:

(i) *Le cas de* η^{10}.

On a $k=5$; l'espace V_k a pour base les deux formes:

$$\eta^{10}=q^{5/12}+\dots$$
$$E_4\eta^2=q^{1/12}+238q^{13/12}+1679q^{25/12}+\dots$$

De ces développements, on déduit l'action de l'opérateur T_5:

$$T_5\begin{cases} \eta^{10}\mapsto E_4\eta^2 \\ E_4\eta^2 \mapsto (1679+5^4)\eta^{10}=48^2\eta^{10}. \end{cases}$$

On en conclut que les formes

$$h_\pm=E_4\eta^2\pm 48\eta^{10}=q^{1/12}\pm 48q^{5/12}+238q^{13/12}+\dots$$

sont fonctions propres des T_p (cf. [**8**], p. 27), et cela fournit la décomposition cherchée:

$$\eta^{10}=\tfrac{1}{96}(h_+-h_-).$$

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

Il reste à voir que $h_+(12z)$ est égale à la forme φ_{K,c_+} du n° 2.5 (et de même pour h_-). Pour cela, on remarque que $h_+(12z)$ est annulée par les T_p si $p \equiv -1 \pmod 4$, donc est une forme de type *CM* relativement au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Avec les notations du n° 1.2, cela signifie que l'on a

$$h_+(12z) = \sum_{\delta} \lambda_\delta \varphi_{K,c,\delta} \qquad (\lambda_\delta \in \mathbf{C}),$$

où c est un caractère de Hecke de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, d'exposant 4 et de conducteur $\mathfrak{f}$ tel que $4N(\mathfrak{f})$ divise 144, i.e. $N(\mathfrak{f})$ divise 36, et où δ parcourt les diviseurs positifs de $36/N(\mathfrak{f})$. De plus c satisfait à la condition (14.2), qui s'écrit ici $\omega_c = 1$. Il est facile de dresser la liste des caractères c satisfaisant à ces conditions. On trouve qu'il y en a quatre: c_0, c_1, c_2, c_3 qui peuvent s'écrire (avec les notations du n° 2.5):

$$c_j(\mathfrak{a}) = s_+(\alpha)^j \alpha^4 \qquad (j = 0, 1, 2, 3),$$

pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de O_K premier à $6 \,.\, O_K$, α désignant un générateur quelconque de $\mathfrak{a}$. Leurs conducteurs sont respectivement $O_K, 6 \,.\, O_K, 3 \,.\, O_K, 6 \,.\, O_K$. La forme $\varphi_{K,c_j,\delta}$ est fonction propre de T_5, avec pour valeur propre:

$$\lambda_j = c(\mathfrak{p}) + c(\bar{\mathfrak{p}}), \quad \text{où} \quad \mathfrak{p} = (2+i) \,.\, O_K, \qquad \bar{\mathfrak{p}} = (2-i) \,.\, O_K.$$

D'où:

$$\lambda_j = (-i)^j (2+i)^4 + i^j (2-i)^4,$$

i.e.

$$\lambda_0 = -14, \qquad \lambda_1 = 48, \qquad \lambda_2 = 14, \qquad \lambda_3 = -48.$$

Comme $h_+ \mid T_5 = 48 h_+$ par construction, on voit que la seule possibilité pour c est $c = c_1$ (i.e. $c = c_+$, avec les notations du n° 2.5). Or le conducteur de c_1 est $6 \,.\, O_K$, qui a pour norme 36. Comme δ divise $36/N(\mathfrak{f})$, la seule valeur possible de δ est $\delta = 1$, d'où $\lambda_\delta = 1$ et $h_+ = \varphi_{K,c_+}$; de même, h_- est égal à φ_{K,c_-}; cela achève la vérification des formules du n° 2.5.

(ii) *Le cas de* η^{14}.

On a $k = 7$; l'espace V_k a pour base les deux formes η^{14} et $E_6\eta^2$; l'action de T_7 est donnée par:

$$T_7 \begin{cases} \eta^{14} \mapsto E_6\eta^2 \\ E_6\eta^2 \mapsto -3 \times 360^2 \eta^{14}. \end{cases}$$

On en conclut que les formes $h_\pm = E_6\eta^2 \pm 360\sqrt{-3}\,\eta^{14}$ sont fonctions propres des T_p, cf. [**8**], p. 28. De plus, ces formes sont annulées par les T_p pour $p \equiv -1 \pmod 3$. Le même argument que ci-dessus montre alors que les $h_\pm(12z)$ coïncident avec les $\varphi_{K,c_\pm}$ du n° 2.6.

(iii) *Le cas de* η^{26}.

On a $k = 13$; l'espace V_k a pour base les quatre formes:

$$\eta^{26}, \qquad E_6^2\eta^2, \qquad E_8\eta^{10} \quad \text{et} \quad E_6\eta^{14}.$$

Les opérateurs T_5 et T_7 dont donnés par:

$$T_5\begin{cases} \eta^{26}\mapsto -26E_8\eta^{10} \\ E_6^2\eta^2\mapsto 244363392E_8\eta^{10} \\ E_8\eta^{10}\mapsto E_6^2\eta^2-6910272\eta^{26} \\ E_6\eta^{14}\mapsto 0 \end{cases} \qquad T_7\begin{cases} \eta^{26}\mapsto -1950E_6\eta^{14} \\ E_6^2\eta^2\mapsto -13475030400E_6\eta^{14} \\ E_8\eta^{10}\mapsto 0 \\ E_6\eta^{14}\mapsto E_6^2\eta^2+9398592\eta^{26}. \end{cases}$$

On déduit de là les quatre fonctions propres:

$$E_6^2\eta^2+9398592\eta^{26}\mp 102960\sqrt{-3}E_6\eta^{14}$$

et

$$E_6^2\eta^2-6910272\eta^{26}\pm 20592E_8\eta^{10}.$$

Les deux premières (resp. les deux dernières) sont annulées par les T_p si $p\equiv -1 \pmod 3$ (resp. si $p\equiv -1 \pmod 4$). On en conclut qu'elles sont de type *CM* relativement au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$). On détermine les caractères correspondants par la méthode utilisée pour η^{14} (resp. pour η^{10}), et l'on obtient ainsi les formules du n° 2.7.

3. Compléments

3.1. *Evaluations asymptotiques.* Soit $r\in\mathbf{Z}$. Si x est un entier $\geqslant 1$, posons:

$$M_r(x) = \text{nombre des entiers} \quad n<x \quad \text{tels que} \quad p_r(n)\neq 0. \tag{40}$$

Dire que η^r est lacunaire signifie que $M_r(x)=o(x)$ pour $x\to\infty$. Lorsque r est pair >0, le th. 1 affirme que cela se produit si et seulement si $r=2, 4, 6, 8, 10, 14$ ou 26. Ce résultat peut être précisé de la manière suivante:

THÉORÈME 2. (i) *Il existe une constante $c_2>0$ telle que:*

$$M_2(x)\sim c_2x/(\log x)^{3/4} \quad \textit{pour} \quad x\to\infty.$$

(ii) *Pour $r=4, 6, 8, 10, 14$, il existe une constante $c_r>0$ telle que:*

$$M_r(x)\sim c_rx/(\log x)^{1/2} \quad \textit{pour} \quad x\to\infty.$$

(iii) *Il existe deux constantes c'_{26} et c''_{26}, avec $0<c'_{26}<c''_{26}$, telles que:*

$$c'_{26}x/(\log x)^{1/2}\leqslant M_{26}(x)\leqslant c''_{26}x/(\log x)^{1/2} \quad \textit{pour} \quad x\geqslant 2.$$

(iv) *Si r est pair >0, et distinct de $2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$, il existe une constante $c_r>0$ telle que:*

$$M_r(x)\geqslant c_rx \quad \textit{pour} \quad x\geqslant 1.$$

L'assertion (i) est démontrée dans [**19**], n° 7.8, qui donne également la valeur de la constante c_2:

$$\begin{aligned} c_2 &= 2^{7/4}3^{-3/4}\pi^{3/2}\Gamma(1/4)^{-1}(\log(2+\sqrt{3}))^{1/4}\prod_{p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 12)}(1-p^{-2})^{1/2} \\ &= 2{,}4185\ldots \end{aligned}$$

(On a $c_2=12\alpha$, avec les notations de [**19**], *loc. cit.*, prop. 19.)

L'assertion (ii), pour $r=4, 6, 8$, résulte de la prop. 18 de [**19**], n° 7.5, puisque η^r est alors (à un changement de variable près) une forme primitive de type *CM*, cf. §2. Les cas $r=10$ et $r=14$ se traitent de manière analogue, mais un peu plus compliquée, en utilisant la "méthode de Landau", cf. [**17**]; je laisse au lecteur les détails de la démonstration.

Les assertions (iii) et (iv) résultent du th. 17 de [**19**], combiné au th. 1′ du §2.

REMARQUES. 1) J'ignore si (ii) s'étend au cas $r=26$; cela me paraît probable.

2) Les constantes c_r de (ii) peuvent être calculées explicitement, tout comme c_2.

3) Pour $r=4, 6, 8, 10, 14, 26$, la lacunarité de η^r provient du facteur $1/(\log x)^{1/2}$ qui tend lentement vers 0 quand $x \to \infty$. Cette lenteur est très frappante quand on examine les tables donnant $p_r(n)$. Ainsi, pour $r=26$, et pour n voisin de 10^3, il y a encore environ 80% des valeurs de n pour lesquelles $p_{26}(n) \neq 0$; pour que cette proportion s'abaisse à 50%, il faudrait sans doute que n soit de l'ordre de 10^7 ou 10^8, et pour qu'elle tombe en-dessous de 1%, que n soit de l'ordre de 10^{10000}. Il s'agit donc d'une lacunarité très peu marquée, bien moindre que dans les cas $r=1$ et $r=3$, où $M_r(x)$ est de l'ordre de grandeur de $\sqrt{x}$.

3.2. *Données numériques.* On trouve dans [**11**] des tables donnant $p_r(n)$ pour $1 \leqslant r \leqslant 16$ et $n \leqslant 400$. Des calculs beaucoup plus étendus ont été faits ensuite par O. Atkin, et, plus récemment, par H. Cohen (non publiés). D'après ce qu'ils m'ont communiqué, la situation est la suivante:

a) *r pair* >0.

Lorsque r est pair >0, et distinct de $2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$, *on ne connaît aucune valeur de* $n \geqslant 0$ *pour laquelle* $p_r(n)$ *soit* 0. Il semble raisonnable de conjecturer qu'il n'en existe pas. Cette conjecture (faite pour la première fois par Atkin, semble-t-il) généralise la conjecture de Lehmer [**6**], relative au cas $r=24$, suivant laquelle la fonction de Ramanujan $\tau(n)=p_{24}(n-1)$ est $\neq 0$ pour $n \geqslant 1$ (cf. n° 3.3 ci-dessous).

b) *r impair* $\geqslant 5$.

Lorsque $r=5, 7, 15$, on connaît des valeurs de n pour lesquelles $p_r(n)=0$:

$r=5$, $n=1560, 1802, 1838, 2318, 2690, \ldots$ (Atkin, Cohen);

$r=7$, $n=28017$ (Atkin);

$r=15$, $n=53$ (Newman [**11**]).

Dans chacun de ces cas, η^r est fonction propre des opérateurs de Hecke $T(p^2)$ ([**8**], [**10**]), de sorte que toute valeur de n pour laquelle $p_r(n)=0$ en fournit une infinité d'autres.

Il serait intéressant d'étudier ces zéros du point de vue de la théorie de Shimura [**21**], complétée par Waldspurger [**23**]. Leur nombre paraît suffisamment faible pour que l'on puisse conjecturer que η^r *n'est pas lacunaire pour r impair* $\geqslant 5$, et même que $M_r(x) \sim x$ pour $x \to \infty$.

3.3. *Le cas* $r=24$ (*conjecture de Lehmer*). La conjecture en question dit que $\tau(n)\neq 0$ pour tout $n\geqslant 1$. Dans [**6**], Lehmer demontre que c'est vrai pour $n\leqslant 3.10^6$. On peut pousser sa méthode un peu plus loin:

$$\textit{On a}\quad \tau(n)\neq 0 \quad \textit{pour}\quad 1\leqslant n\leqslant 10^{15}. \tag{41}$$

Ce résultat est énoncé dans [**19**], §7.4, mais la démonstration donnée à cet endroit est incorrecte (à cause d'une congruence mod 7^2, cf. (iii) ci-dessous). Je la reprends, en la corrigeant:

Soit p le plus petit entier strictement positif $\leqslant 10^{15}$ pour lequel $\tau(p)=0$, s'il en existe. C'est un nombre premier ([**6**], th. 2). Les congruences connues sur $\tau(p)$ (cf. [**6**], complété par [**22**]) entraînent:

(i) $p\equiv -1 \pmod{2^{14}3^75^3691}$,

(ii) $\left(\dfrac{p}{23}\right)=-1$,

(iii) $p\equiv -1$, 19 ou 31 $\pmod{7^2}$, i.e. $p^3\equiv -1 \pmod{7^2}$.

(Dans [**19**], *loc. cit.*, les cas $p\equiv 19, 31 \pmod{7^2}$ avaient été oubliés.)

D'après (i), on peut écrire p sous la forme

$$p=hM-1,\quad \text{avec}\quad h\geqslant 1, \tag{42}$$

où

$$M=2^{14}3^75^3691=3094972416000.$$

Comme $M\equiv -1 \pmod{23}$, la condition (ii) se traduit par (ii′) $h+1$ est résidu quadratique $\not\equiv 0$ mod 23, i.e.

$$h\equiv 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 15, 17 \pmod{23}. \tag{43}$$

Comme $M\equiv 17 \pmod{7^2}$, la condition (iii) se traduit par

$$h\equiv 0, 30, 48 \pmod{7^2}. \tag{44}$$

Enfin la condition $p\leqslant 10^{15}$ donne:

$$h<324. \tag{45}$$

Les valeurs de h satisfaisant à (43), (44) et (45) sont

$$h=30, 48, 49, 97, 146, 195, 196, 245, 293.$$

Pour chacune de ces valeurs, on constate que $p=hM-1$ n'est pas premier: il est divisible respectivement par

$$13, 11, 1249, 73, 227, 29, 4789, 131, 19.$$

D'où (41).

Remarque. Dans une conférence à Bonn (juin 1984), N. Kuznetsov a annoncé un théorème général sur la non annulation des séries de Poincaré qui *entraînerait la conjecture de Lehmer*, et rendrait donc inutile les calculs ci-dessus.

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

3.4. *Lacunarité* mod m *des* η^r. Soit m un entier ≥ 1. On peut s'intéresser (cf. [**1**], [**17**], par exemple) à la lacunarité de la fonction

$$n \mapsto p_r(n) \pmod{m},$$

à valeurs dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Cela amène à poser:

$$M_r(x; m) = \text{nombre des} \quad n \leqslant x \quad \text{tels que} \quad p_r(n) \not\equiv 0 \pmod{m}. \tag{46}$$

Nous dirons que η^r est *lacunaire* (mod m) si $M_r(x; m) = o(x)$ pour $x \to \infty$, i.e. si presque tous les $p_r(n)$ sont divisibles par m.

THÉORÈME 3. *Si r est pair $\geqslant 0$, η^r est lacunaire* (mod m) *quel que soit $m \geqslant 1$.*

Cela résulte du th. 4.7 de [**17**], qui est applicable du fait que η^r est une forme modulaire de poids entier sur un groupe de congruence. On a même un résultat plus précis: il existe un nombre réel $\alpha > 0$ (dépendant de r et de m) tel que

$$M_r(x; m) = O(x/(\log x)^\alpha) \quad \text{pour} \quad x \to \infty. \tag{47}$$

Le cas r impair $\geqslant 5$

Je ne sais pas si le th. 3 s'étend à ce cas. On peut donner divers cas où c'est vrai, par exemple $m = 2$ à cause de la congruence

$$p_r(n) \equiv p_{2r}(2n) \pmod{2},$$

qui permet de se ramener à un poids pair. De façon analogue, la congruence

$$p_5(n) \equiv p_1(n/5) \pmod{5}$$

montre que η^5 est lacunaire (mod 5); de même, η^{15} est lacunaire (mod 5), et η^7 est lacunaire (mod 7). Mais j'ignore, par exemple, si η^5 est lacunaire (mod 3), ou si η^7 est lacunaire (mod 5); les tables existantes sont trop restreintes pour suggérer une conjecture quelconque. Je me borne à signaler le résultat suivant, qui montre en tout cas que "beaucoup" de $p_r(n)$ sont divisibles par m:

Pour tout r impair >0, *et tout* $m \geqslant 1$, *il existe un ensemble* $P_{r,m}$ *de nombres premiers, de densité* >0, *tel que l'on ait* (48)

$$\eta^r \mid T(p^2) \equiv 0 \pmod{m} \quad \textit{pour tout} \quad p \in P_{r,m}.$$

C'est là une propriété générale des opérateurs de Hecke $T(p^2)$, agissant sur les formes de poids demi-entier. [On prouve d'abord l'énoncé analogue pour les T_p agissant sur les formes de poids entier: on utilise pour cela les représentations l-adiques de Deligne (cf. [**2**], lemme 9.6, pour le cas des formes de poids 1). On ramène ensuite les poids demi-entiers aux poids entiers par la théorie de Shimura [**21**].]

Le cas $r < 0$ (*pair ou impair*)

Ce cas est encore moins connu que le précédent. Autant que je sache, la lacunarité (ou non lacunarité) de η^r (mod m) n'a été établie pour *aucun* couple (r, m) avec $r < 0$ et $m \geqslant 2$.

Le cas $r = -1$, $m = 2$ a été étudié numériquement par Parkin et Shanks [**12**]; il semble que $M_{-1}(x; 2)$ soit voisin de $x/2$, ce qui entraînerait que η^{-1} n'est pas lacunaire (mod 2).

Je signale également que, lorsque r est pair <0, on peut parfois utiliser la méthode de [**17**], §5, pour prouver que, si l'on impose à n certaines congruences, presque tous les $p_r(n)$ correspondants sont $0 \pmod m$.

Exemple. Prenons $r=-48$, i.e. $\eta^r=\Delta^{-2}$, et $m=7^\alpha$, avec $\alpha \geqslant 1$; alors presque tous les $p_{-48}(n)$, pour $n \equiv 2, 3, 4, 6 \pmod 7$, sont divisibles par 7^α: cela résulte de ce que la série

$$\sum_{n \equiv 2,3,4,6 \,(\mathrm{mod}\, 7)} p_{-48}(n) q^{n-2}$$

est une forme modulaire 7-adique de poids -24 sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ d'après [**17**], th. 5.4. On notera que cette methode no fournit aucun renseignement sur les $p_{-48}(n)$ pour $n \equiv 0, 1, 5 \pmod 7$, et l'on ne peut rien en conclure sur la lacunarité (ou non lacunarité) de $\eta^{-48} \pmod{7^\alpha}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. J. Costello, Density Problems involving $p_r(n)$, *Math. Comp.* **38** (1982), 633–637.

2. P. Deligne et J-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. E.N.S.* (4) **7** (1974), 507–530.

3. F. J. Dyson, Missed Opportunities, *Bull. A.M.S.* **78** (1972), 635–652.

4. G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3$^{\text{é}}$ edit. (Oxford Univ. Press, 1954).

5. M. I. Knopp et J. Lehner, Gaps in the Fourier Series of Automorphic Forms, *Lect. Notes in Math.* **899** (1981), 360–381.

6. D. H. Lehmer, The Vanishing of Ramanujan's Function $\tau(n)$, *Duke Math. J.* **14** (1947), 429–433.

7. W. Li, Newforms and Functional Equations, *Math. Ann.* **212** (1975), 285–315.

8. J. H. van Lint, *Hecke Operators and Euler Products* (Thèse, Utrecht, 1957).

9. I. G. Macdonald, Affine Root Systems and Dedekind's η-Function, *Invent. Math.* **15** (1972), 91–143.

10. M. Newman, An Identity for the Coefficients of Certain Modular Forms, *J. London Math. Soc.* **30** (1955), 488–493.

11. M. Newman, A Table of the Coefficients of the Powers of $\eta(\tau)$, *Proc. Acad. Amsterdam* **59** (1956), 204–216.

12. T. R. Parkin et D. Shanks, On the Distribution of Parity in the Partition Function, *Math. Comp.* **21** (1967), 466–480.

13. S. Ramanujan, On Certain Arithmetical Functions, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **22** (1916), 159–184 (= *Collected Papers*, n° 18, 136–162).

14. R. Rankin, Hecke Operators on Congruence Subgroups of the Modular Group, *Math. Ann.* **168** (1967), 40–58.

15. K. Ribet, Galois Representations attached to Eigenforms with Nebentypus, *Lect. Notes in Math.* **601** (1977), 17–52.

16. B. Schoeneberg, Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen, *Math. Ann.* **126** (1953), 177–184.

17. J-P. Serre, Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques, *L'Ens. Math.* **22** (1976), 227–260.

18. J-P. Serre, Modular Forms of Weight One and Galois Representations, in *Alg. Number Fields* (A. Fröhlich édit.) (Acad. Press 1977), 193–268.

19. J-P. Serre, Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, *Publ. Math. I.H.E.S.* **54** (1981), 123–201.

https://doi.org/10.1017/S0017089500006194 Published online by Cambridge University Press

20. G. Shimura, Class Fields over Real Quadratic Fields and Hecke Operators, *Ann. of Math.* **95** (1972), 130–190.

21. G. Shimura, On Modular Forms of Half Integral Weight, *Ann. of Math.* **97** (1973), 440–481.

22. H. P. F. Swinnerton-Dyer, On l-adic Representations and Congruences for Coefficients of Modular Forms, *Lect. Notes in Math.* **350** (1973), 1–55.

23. J-L. Waldspurger, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, *J. Math. pures et appl.* **60** (1981), 375–484.

COLLÈGE DE FRANCE
F-75231 PARIS CEDEX 05