

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

NORBERT A'CAMPO

## Sur la première partie du seizième problème de Hilbert

*Séminaire N. Bourbaki*, 1980, exp. n° 537, p. 208-227

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1978-1979\\_\\_21\\_\\_208\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__208_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA PREMIÈRE PARTIE DU SEIZIÈME PROBLÈME DE HILBERT

par Norbert A'CAMPO

§ 1.

Les composantes connexes d'une courbe algébrique lisse dans le plan projectif réel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sont homéomorphes au cercle  $S^1$ .

En 1876, HARNACK a publié son

THÉORÈME 1.- a) Une courbe algébrique lisse de degré  $d$  dans le plan  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  a au plus  $M_d = 1/2(d - 1)(d - 2) + 1$  composantes connexes.

b) Pour tout degré  $d$  il existe de telles courbes ayant  $M_d$  composantes connexes.

Harnack déduisait la partie a) du théorème de Bezout et pour la partie b) il construisait une courbe de degré  $d$  ayant  $M_d$  composantes connexes pour tout  $d$ . A. HURWITZ et F. KLEIN ont donné une démonstration de la partie a) qui est au fond celle que nous allons voir plus loin.

En 1891, D. HILBERT posa le problème : quelles sont à isotopie près les positions relatives possibles des composantes d'une courbe algébrique lisse de degré  $d$  dans le plan  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $d = 1, 2, 3, \dots$ . Cette question pour les courbes (et plus généralement pour les surfaces dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , dont Hilbert a mentionné explicitement le cas des surfaces de degré 4) est devenue en 1900 la première partie de ce qu'on appelle maintenant le seizième problème de Hilbert.

A isotopie près il existe deux plongements du cercle dans le plan  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  : le cercle plongé sépare le plan en deux composantes dont l'une est homéomorphe à un disque et dont l'autre est homéomorphe à une bande de Möbius, ou le cercle plongé ne sépare pas. Un cercle qui sépare est appelé un ovale et le disque qu'il borde, son intérieur. Un cercle qui ne sépare pas est isotope à une droite, on l'appelle pseudo-droite. Une courbe lisse de degré pair est une union d'ovales, une courbe lisse de degré impair est une union d'une pseudo-droite et d'ovales.

Examinons quelles sont les configurations possibles en degré  $d$ ,  $1 \leq d \leq 5$ . Soit  $C_d$  une courbe lisse de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  :

$d = 1$ ,  $M_d = 1$ ,  $C_d$  est une droite ;

$d = 2$ ,  $M_d = 1$ ,  $C_d = \emptyset$  ou  $C_d$  est formé d'un ovale ;

$d = 3$ ,  $M_d = 2$ ,  $C_d$  est une pseudo-droite ou  $C_d$  est l'union d'une pseudo-droite et d'un ovale ;

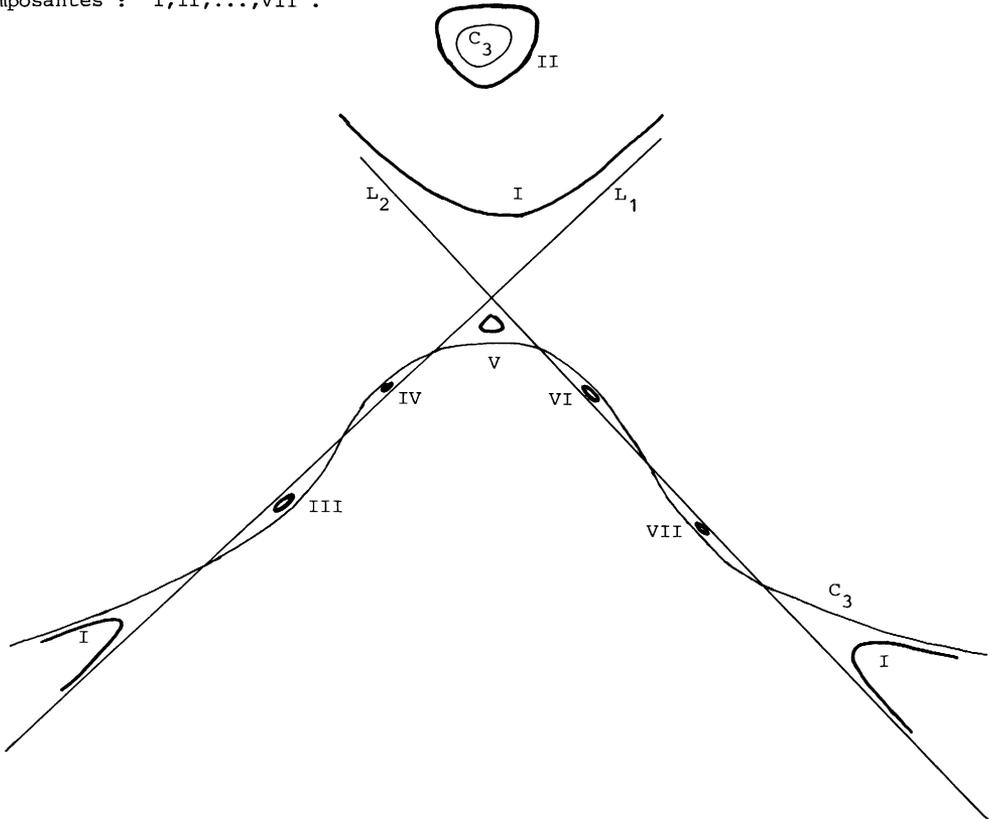
$d = 4$ ,  $M_d = 4$ ,  $C_d$  est l'union de  $i$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , ovales, plongés de sorte qu'aucun ovale ne contient un autre dans son intérieur, sauf lorsque  $i = 2$  où un plongement "emboîté" est aussi possible.

En effet les autres plongements ne sont pas possibles d'après

le théorème de Bezout. Par exemple la configuration  ne s'obtient qu'en degré  $d \geq 6$ .

$d = 5$ ,  $M_d = 7$ ,  $C_d$  est une union d'une pseudo-droite et de  $k$ ,  $0 \leq k \leq 6$ , ovales. Lorsque  $k \neq 2$  le plongement est sans emboîtement, pour  $k = 2$  un plongement avec emboîtement est aussi possible.

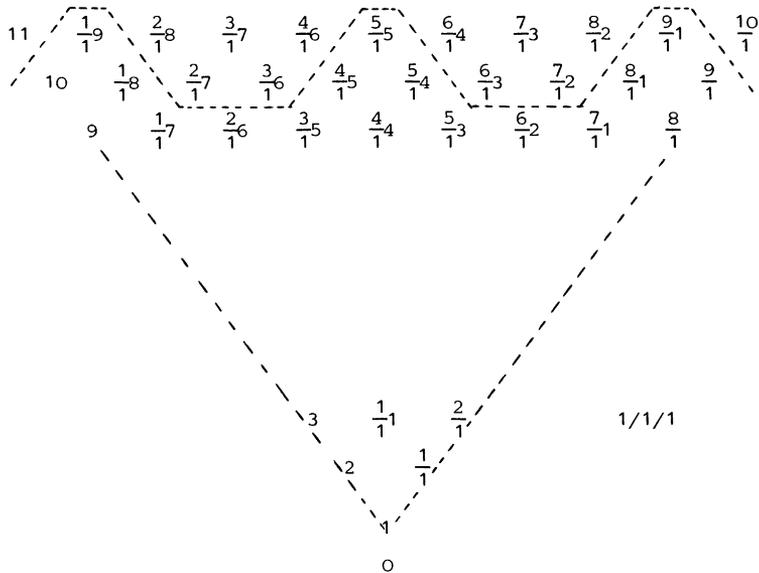
Voici comment obtenir une courbe lisse de degré 5 ayant 7 composantes : soit  $C_3$  une cubique à deux composantes, soient  $L_1$  et  $L_2$  deux droites voisines à deux tangentes aux points d'inflexion de  $C_3$  telles que  $L_i$  coupe  $C_3$  en trois points. Alors la courbe  $C_3 \cdot L_1 \cdot L_2 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  petit et de signe bien choisi, a 7 composantes : I, II, ..., VII.



Pour les degrés  $d \geq 4$  le théorème de Bezout donne des restrictions pour le plongement des composantes, par exemple on ne peut avoir en degré  $d \geq 4$  une suite de longueur  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  d'ovales emboîtés pour une courbe ayant  $M_d$  composantes. Mais HILBERT a montré

**THÉORÈME 2.-** Pour tout degré  $d$  il existe une courbe ayant  $M_d$  composantes, dont  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$  forment une suite emboîtée d'ovales.

Pour le degré  $d = 6$  il existe d'autres restrictions qui ne découlent pas de façon évidente du théorème de Bezout. On a  $M_6 = 11$  et les plongements tels qu'aucune droite ne peut couper la courbe en plus de 6 points forment un tableau



Dans ce tableau le nombre  $a$ ,  $0 \leq a \leq 11$ , indique une configuration ayant  $a$  ovals sans emboitement, et le symbole  $\frac{k}{l}$  indique une configuration ayant  $k + l + 1$  ovals tels que  $l$  d'entre eux sont sans emboitement à l'extérieur d'un ovale, qui contient dans son intérieur sans emboitement les  $k$  ovals restants. Le symbole  $1/1/1$  indique l'emboitement  de profondeur 2.

THÉORÈME 3 (HARNACK 1876, HILBERT 1891, PETROWSKI 1933, GUDKOV 1971, ARNOL'D 1971, ROHLIN 1971).- Les configurations sous la ligne en pointillés du tableau sont les seules réalisées par une courbe lisse de degré 6 dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Ainsi avec le théorème 3, dû à un effort presque séculaire, la première partie du problème de Hilbert est résolue pour les courbes de degré 6. Pour tout degré  $d \geq 7$  il reste encore beaucoup à faire.

§ 2. Démonstration du théorème de Harnack

Pour la partie a). Pour un polyèdre fini  $Z$  on note

$$b(Z) = \sum_{i \geq 0} \dim H_i(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

le nombre de Betti total avec les coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

PROPOSITION.- Soient  $Y$  une variété différentiable compacte,  $T : Y \rightarrow Y$  une involution différentiable et  $X \subset Y$  les points fixes de  $T$ . Alors on a

- (i)  $b(X) \leq b(Y)$  et  
(ii)  $b(Y) - b(X)$  est un nombre pair.

Preuve. La théorie de Smith donne la suite exacte où tous les groupes d'homologie sont à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

$$\dots \rightarrow H_i(Y/T, X) \oplus H_i(X) \xrightarrow{\alpha_i} H_i(Y) \xrightarrow{\beta_i} H_i(Y/T, X) \xrightarrow{\gamma_i} H_{i-1}(Y/T, X) \oplus H_{i-1}(X) \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \dots$$

Donc on a

$$\begin{aligned} b(Y) &= \sum_{i \geq 0} \dim H_i(Y) = \sum_{i \geq 0} \dim \text{Ker}(\gamma_i) + \sum_{i \geq 0} \dim \text{Coker}(\gamma_{i+1}) \\ &= \dim H_*(X) + 2 \dim \text{Ker}(\gamma_*) \end{aligned}$$

car  $\gamma_* : H_*(Y/T, X) \rightarrow H_*(Y/T, X) \oplus H_*(X)$ . D'où  $b(Y) = b(X) + 2 \dim \text{Ker}(\gamma_*)$  ce qui établit la proposition.

En 1965, R. THOM a donné l'application suivante de cette proposition. Soit  $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  une variété algébrique et  $Y \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sa complexifiée. On suppose que  $Y$  (et donc aussi que  $X$ ) est lisse. La conjugaison complexe  $T : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  fixe  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  et les points fixes de la restriction  $T|_Y$  sont les points de  $X$ . Donc la proposition donne l'inégalité

$$b(X) \leq b(Y).$$

Alors Thom remarque que le nombre  $b(Y)$  est souvent calculable. Par exemple lorsque  $X$  est une hypersurface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  on trouve

$$b(X) \leq b(Y) = 2 + (-1)^{n-1} \left[ n - 1 - \frac{1 - (1-d)^{n+1}}{d} \right]$$

Pour le cas des courbes lisses  $X$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  on trouve donc

$$\text{Card } \pi_0(X) = \frac{1}{2} b(X) \leq \frac{1}{2} (d-1)(d-2) + 1,$$

ce qui termine la preuve de l'inégalité de Harnack (Th. 1, a).

Pour les surfaces lisses  $X$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  on a l'inégalité

$$\text{Card } \pi_0(X) \leq \frac{1}{2} b(X)$$

où l'égalité a lieu si et seulement si les composantes de  $X$  sont homéomorphes à la sphère  $S^2$ . Donc pour une surface lisse  $X$  de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  on trouve

$$\text{Card } \pi_0(X) \leq \frac{1}{2} b(X) \leq \frac{1}{2} b(Y) = 12.$$

Mais on peut montrer qu'une surface lisse de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  a au plus 10 composantes [KHARLAMOV]. Pour les courbes dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  l'inégalité est la meilleure possible, ce que nous allons démontrer maintenant.

Pour la partie b). Soit  $L$  une droite dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Par récurrence sur le degré  $d \geq 2$  on va construire une courbe  $C_d$  de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  telle que

(i)  $C_d$  a  $M_d$  composantes

(ii) l'intersection  $C_d \cap L$  a  $d$  points dans le même ordre circulaire sur  $C_d$  et sur  $L$ .

Pour  $d = 2$  soit  $C_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une conique lisse qui rencontre  $L$  en deux points.

Pour  $d \geq 2$  on suppose à titre d'hypothèse de récurrence que  $C_d$  vérifie les propriétés (i) et (ii). Soient  $A_1, A_2, \dots, A_{d+1}$   $d+1$  points distincts sur  $L$  tels

que les points de l'intersection  $C_d \cap L$  soient dans une composante connexe de

$L - \{A_1, A_{d+1}\}$  et que les points  $A_2, A_3, \dots, A_d$  soient dans l'autre composante

connexe de  $L - \{A_1, A_2\}$ . Soient  $L_1, L_2, \dots, L_{d+1}$   $d+1$  droites distinctes de la

droite  $L$  telles que  $A \in L_i$ ,  $1 \leq i \leq d+1$ . Alors pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , assez voisin de

0 et de signe bien choisi on pose

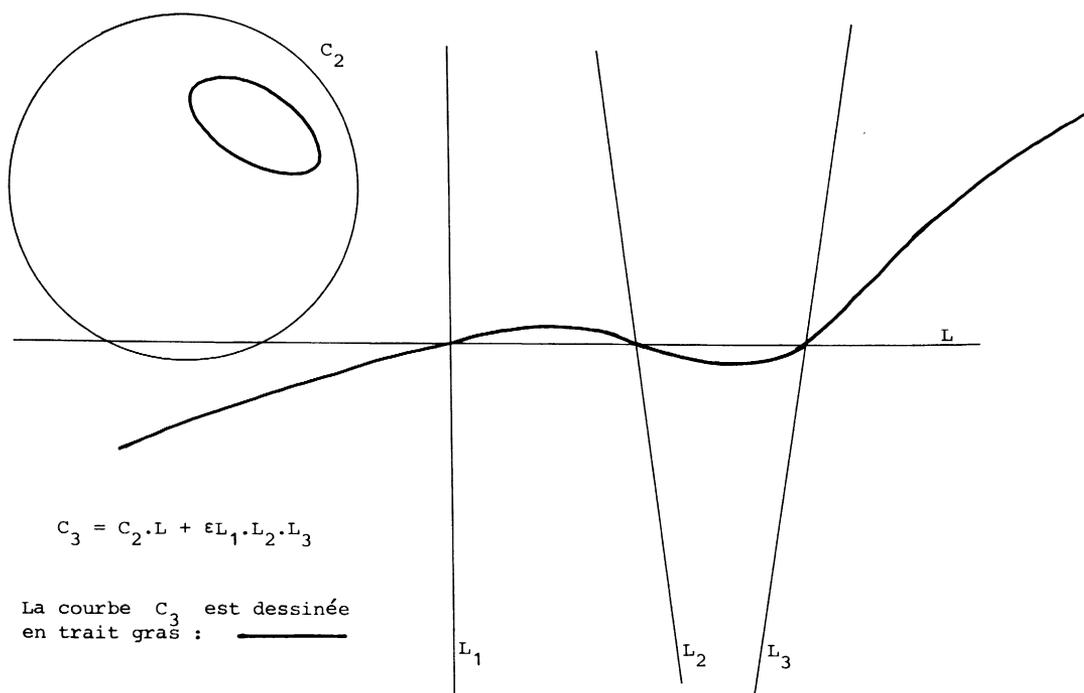
$$C_{d+1} = L \cdot C_d + \varepsilon L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_{d+1},$$

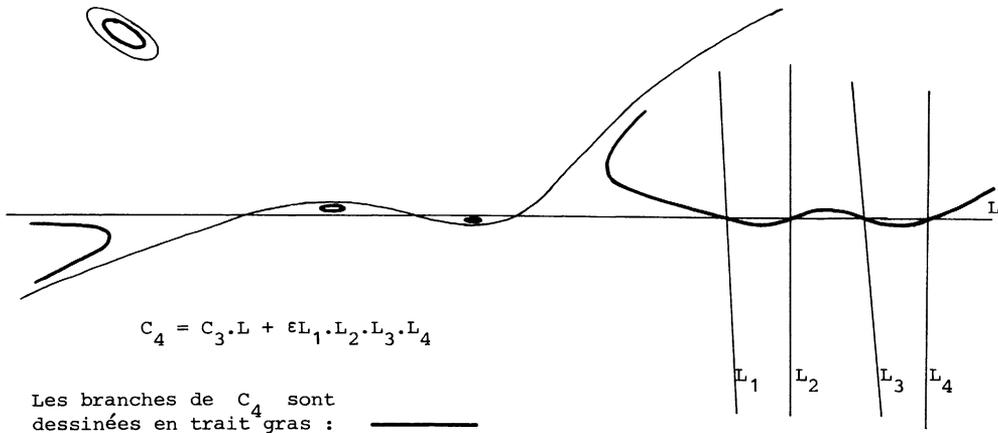
qui est une courbe de degré  $d+1$  vérifiant les propriétés (i) et (ii). En effet

une composante de  $C_{d+1}$  passe par les points  $A_1, A_2, \dots, A_{d+1}$ , et  $C_{d+1}$  a  $d-1$

composantes de plus que la courbe  $C_d$ . Donc  $C_{d+1}$  a  $M_d + (d-1) = M_{d+1}$  composantes.

Les figures illustrent ce pas de récurrence pour  $d = 2$  et  $d = 3$ .

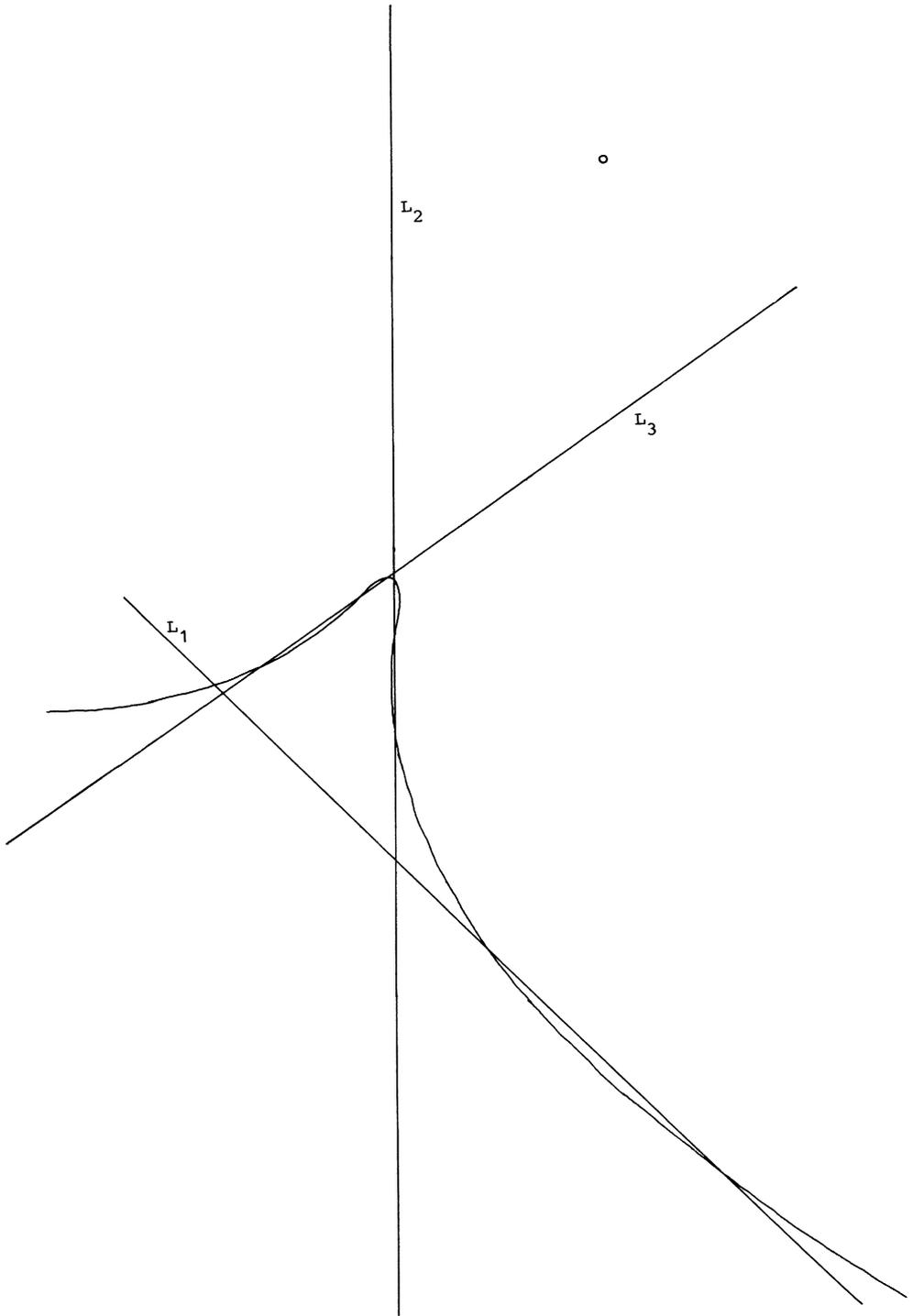




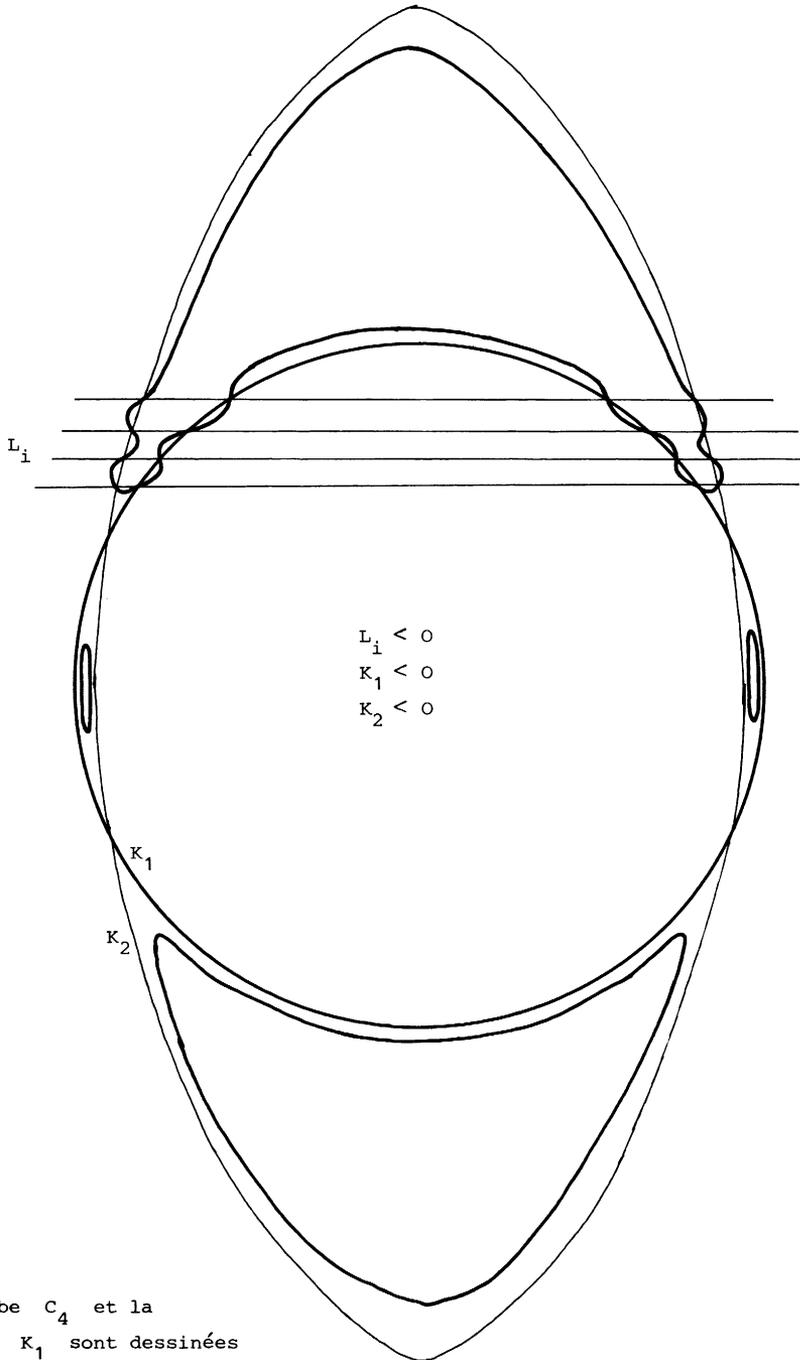
Remarque.- La construction ci-dessus est due à Harnack. Hilbert donne une autre construction qui permet de démontrer le théorème 2 et d'obtenir d'autres configurations.

§ 3. Construction des courbes de type  $\frac{1}{1}^9$ ,  $\frac{5}{1}^5$  et  $\frac{9}{1}^1$  de degré 6

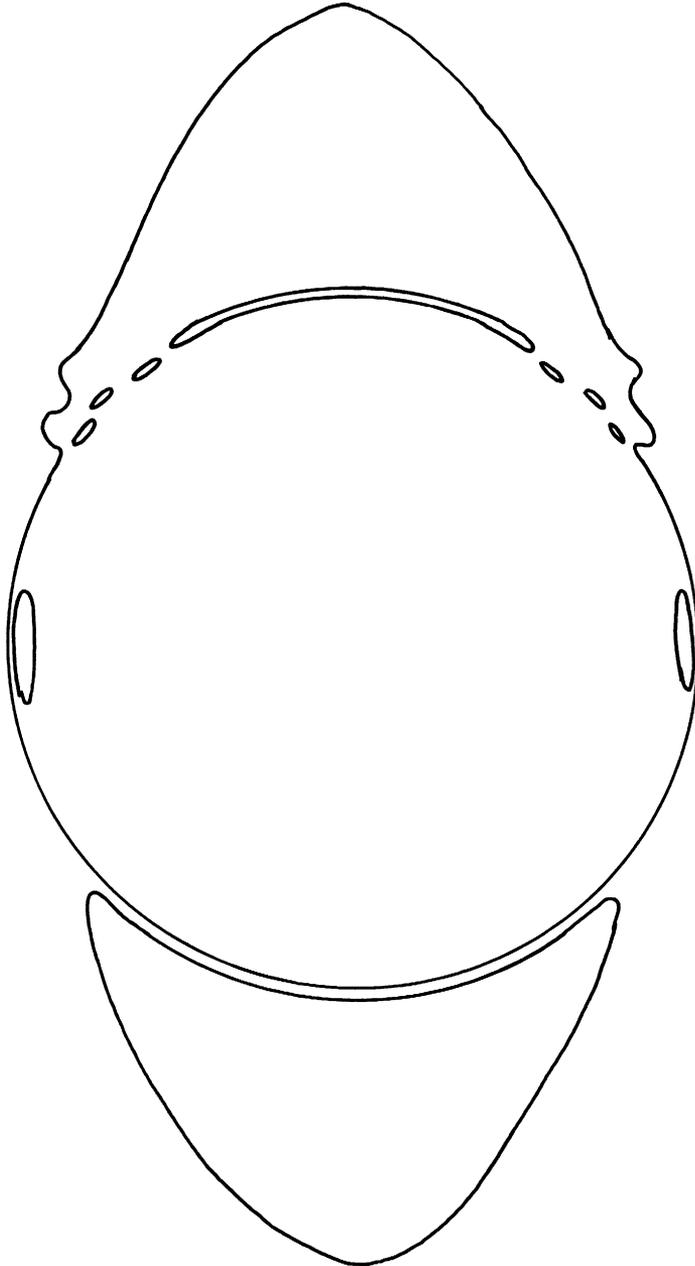
Le type  $\frac{1}{1}^9$ . La construction de Harnack peut donner ce type en degré 6. Mais on l'obtient plus rapidement de la manière suivante : soit  $C_3$  une cubique à deux composantes, soient  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  trois droites voisines aux trois tangentes aux points d'inflexion de  $C_3$ , telles que  $L_i$  coupe  $C_3$  en trois points. Alors la courbe  $C_3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = \epsilon$ ,  $\epsilon$  petit et de signe bien choisi, a 11 ovales et est de type  $\frac{1}{1}^9$ .



Le type  $\frac{9}{1}$ . Ici nous avons l'occasion de voir une construction de Hilbert. Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux coniques,  $L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$  quatre droites comme dans la figure



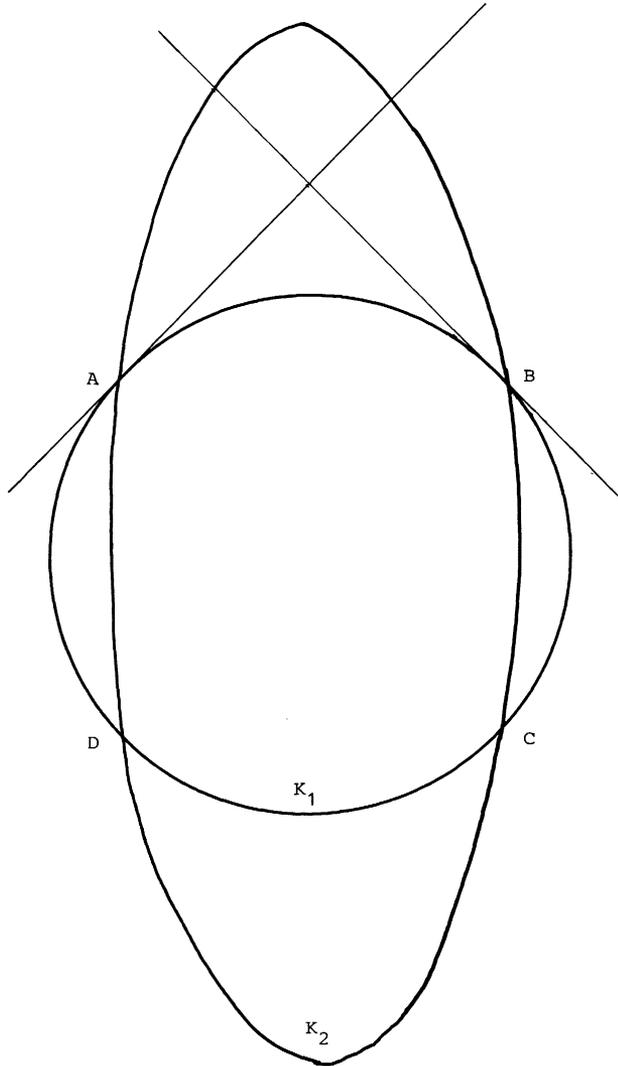
On considère la courbe  $C_4 = K_1 \cdot K_2 + \varepsilon L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4$ ,  $\varepsilon$  petit et  $\varepsilon > 0$ . La courbe  $C_4$  coupe  $K_1$  en 8 points. La courbe  $C_4 \cdot K_1 = \eta$ ,  $\eta$  petit, est de type  $\frac{9}{1}^1$ .



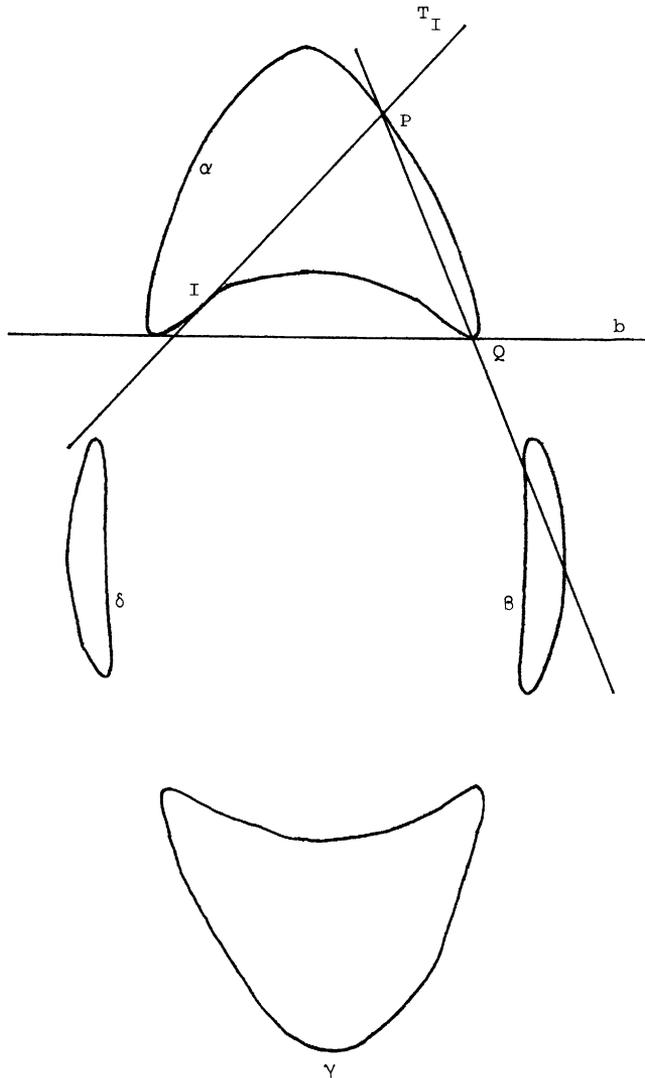
Une variante de cette méthode donne les types  $\frac{2}{1}^6$  et  $\frac{6}{1}^2$ .

Le type  $\frac{5}{1}5$ . Hilbert doutait de l'existence de cette configuration en degré 6, et encore en 1954, D. Gudkov affirme qu'elle n'existe pas. Mais en 1971, GUDKOV en donne la construction ingénieuse suivante :

Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux coniques dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  qui se coupent en 4 points  $A, B, C$  et  $D$  et telles que les tangentes à  $K_1$  aux points  $A$  et  $B$  se coupent à l'intérieur de  $K_2$

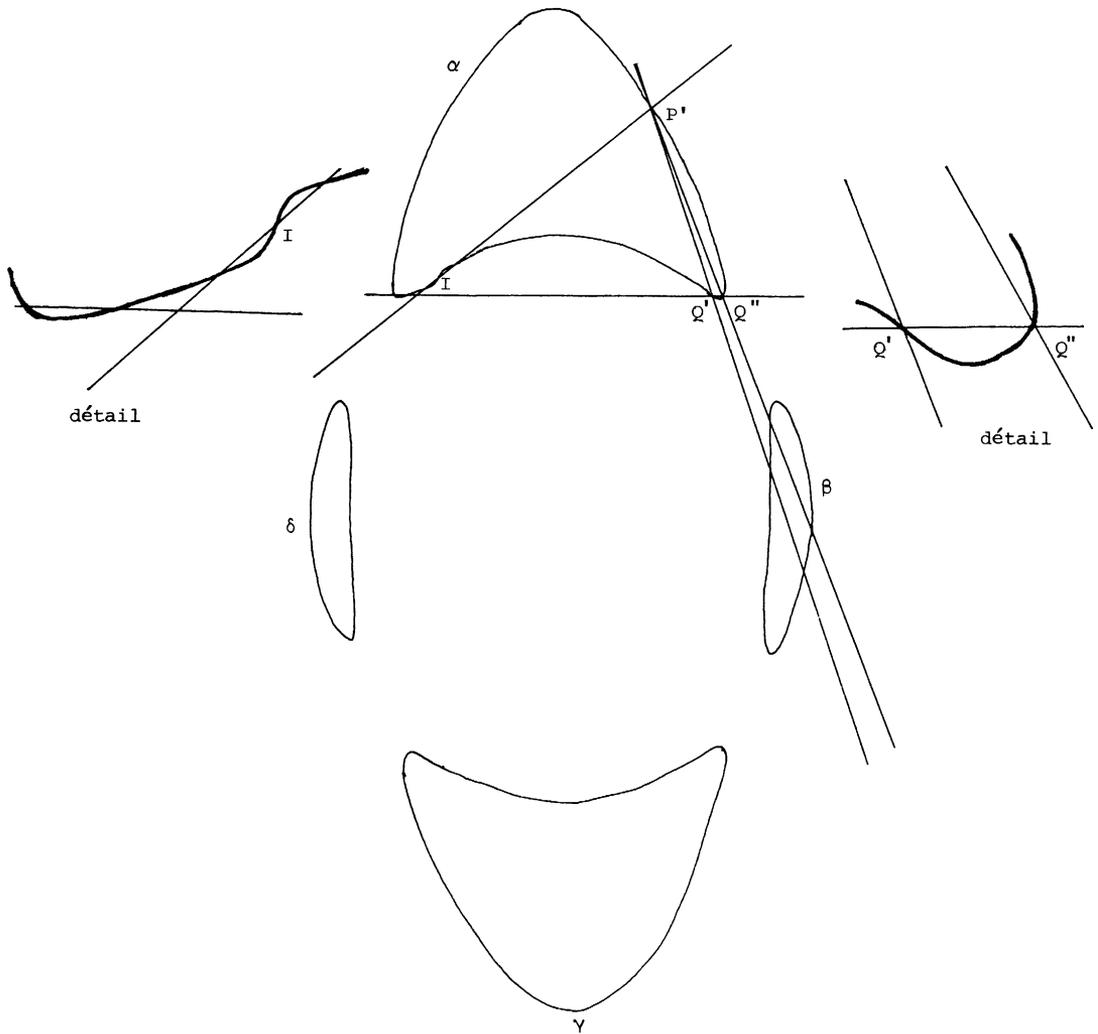


Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  assez petit et de signe tel que  $K_1 \cdot K_2 = \varepsilon$  est une courbe  $C_4$  formée de 4 ovales  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ , où  $\alpha$  est l'ovale qui passe près des points A et B. Près du point A l'ovale  $\alpha$  a un point d'inflexion I et l'ovale  $\alpha$  a une bitangente b, qui passe près des points A et B. Pour un choix suffisamment petit de  $\varepsilon$  on a la figure

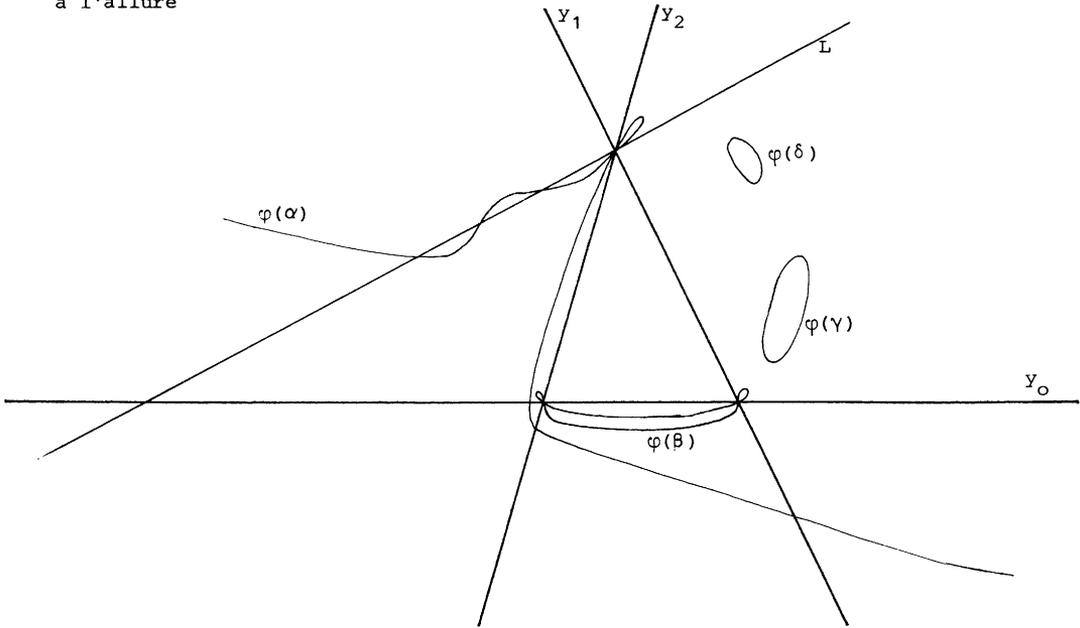


La tangente  $T_I$  à l'ovale  $\alpha$  au point d'inflexion  $I$  recoupe  $\alpha$  en un point  $P$ . La bitangente  $b$  touche  $\alpha$  près du point  $B$  au point  $Q$ . La droite  $PQ$  coupe l'ovale  $\beta$  en deux points.

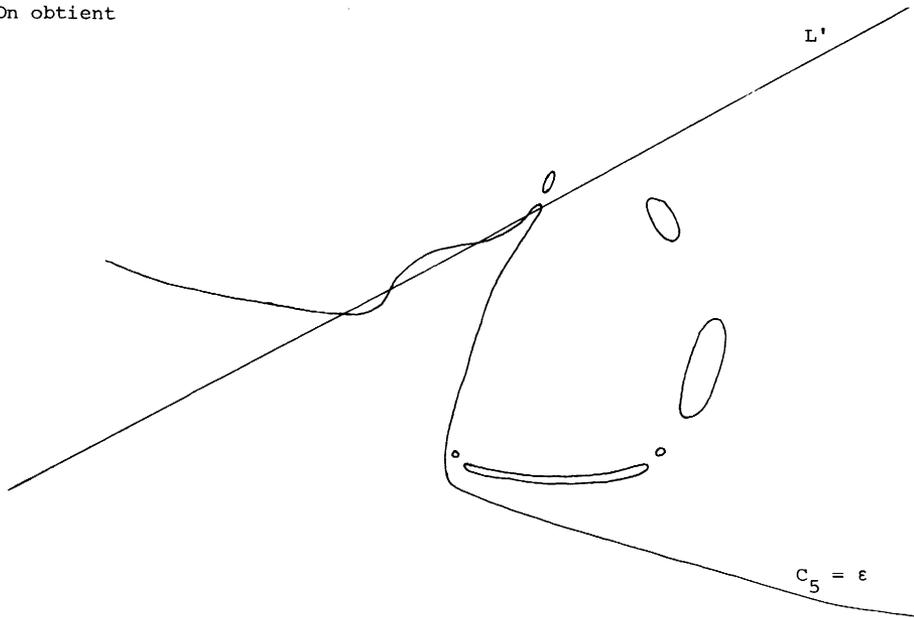
Soit  $P'$  un point sur  $\alpha$ , assez voisin du point  $P$ , et du bon côté, tel que la droite  $P'I$  coupe  $\alpha$  en 4 points. Soient  $Q'$  et  $Q''$  deux points sur  $\alpha$ , près du point  $Q$ , tels que la droite  $Q'Q''$  coupe  $\alpha$  en 4 points. On obtient alors la figure



Soit  $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  la transformation quadratique de Cremona, qui éclate les sommets du triangle  $P'Q'Q''$  en des droites  $y_0, y_1$  et  $y_2$  et qui contracte chacun des côtés du triangle  $P'Q'Q''$ . La courbe  $C_4$  est transformée en la courbe  $C_5 = \varphi(C_4)$  de genre arithmétique 6, donc la transformée est de degré 5. La droite  $P'I$  est transformée en une droite  $L$ . Le dessin des points réels de  $C_5$  a l'allure



Soit  $\bar{C}_5$  la courbe  $C_5 = \varepsilon$  et soit  $L'$  une droite proche de la droite  $L$ . On obtient



La courbe de degré 6,  $\overline{C}_5.L' = \varepsilon$  est de type  $\frac{5}{1}5$ .

Les autres configurations sous la ligne en pointillés dans le tableau des courbes éventuellement possibles en degré 6 s'obtiennent aussi à partir des constructions précédentes.

#### § 4. Les congruences de Gudkov, Arnol'd et Rohlin

Les courbes de degré 6 dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  forment un espace projectif  $\mathbb{P}^{28}(\mathbb{R})$ . Les courbes lisses sont le complémentaire d'une hypersurface  $\Delta$ . Le nombre d'ovales et le type d'isotopie de leur plongement dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est constant dans une composante connexe de  $\mathbb{P}^{28}(\mathbb{R}) - \Delta$ . Après avoir étudié comment les adhérences de certaines composantes de  $\mathbb{P}^{28}(\mathbb{R}) - \Delta$  se rencontrent, GUDKOV obtenait le théorème 3. Cette méthode est très pénible, mais elle a permis à Gudkov de faire la conjecture suivante :

"Soit  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une courbe de degré pair  $d$  ayant  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1$  composantes. Soit  $f$  une équation pour  $C$  telle que  $B_+ = \{x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0\}$  soit orientable. Alors on a la congruence  $\chi(B_+) = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pmod{8}$ ".

En effet les configurations  $\frac{1}{1}9$ ,  $\frac{5}{1}5$  et  $\frac{9}{1}1$  sont les seules qui vérifient cette congruence, en outre les autres exemples connus de courbe de degré pair ayant le nombre maximum de composantes vérifient aussi cette congruence. ARNOL'D a démontré la congruence de Gudkov modulo 4, puis ROHLIN a démontré le

THÉORÈME 4.- La conjecture ci-dessus de Gudkov est vraie.

Voici une recette pour calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(B_+)$  : soit  $p$  (respectivement  $\ell$ ) le nombre d'ovales de  $C$  qui sont à l'intérieur d'un nombre pair (resp. impair) d'ovales de  $C$  ; alors  $\chi(B_+) = p - \ell$ .

Donc pour les configurations  $\frac{1}{1}9$ ,  $\frac{5}{1}5$  et  $\frac{9}{1}1$  on trouve  $\chi(B_+) = 9$ ,  $1$  et  $-7$  trois nombres égaux à  $\left(\frac{6}{2}\right)^2$  modulo 8.

DÉFINITION.- On appelle  $(M-i)$ -courbe dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une courbe lisse de degré  $d$  ayant  $M_d - i$  composantes.

Le théorème 4 ne concerne que les  $M$ -courbes de degré pair. Pour les  $(M-i)$ -courbes on a

THÉORÈME 5.- Pour une  $(M-1)$ -courbe de degré pair  $d$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{P})$  on a la congruence

$$\chi(B_+) = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pm 1 \pmod{8} \quad [\text{GUDKOV, KRAKHNOV}]$$

Le théorème 3 découle des constructions du § 3 et des théorèmes 4 et 5.

Démonstration des théorèmes 4 et 5 d'après A. MARIN.

Soit  $T : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  la conjugaison complexe. L'espace quotient  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/T$  est homéomorphe à la sphère  $S^4$  [Kuiper]. Soit  $p : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow S^4$  une application quotient. Les points fixes de  $T$  sont le plan projectif réel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{P})$ , qui par  $p$

est plongé dans  $S^4$ .

Soit  $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une courbe lisse de degré pair  $d$ . Sans changer le type d'isotopie du plongement de  $X$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  on peut par une petite déformation se ramener au cas où la complexifiée  $Y \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est aussi lisse. Alors  $T$  conserve  $Y$  et le quotient  $p(Y) \subset S^4$  est une surface à bord plongée dans  $S^4$ . Soit  $B_+ \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  comme dans la conjecture de Gudkov. Alors  $F = p(B_+) \cup p(Y)$  est une surface compacte, sans bord, non nécessairement orientable, plongée dans  $S^4$ . La surface  $F \subset S^4$  est une surface caractéristique pour  $S^4$  au sens de Rohlin : en effet l'inclusion  $i : F \rightarrow S^4$  induit un homomorphisme nul  $i_* : H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  et l'intersection avec  $F$  définit  $H_2(S^4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  un homomorphisme correspondant à la deuxième classe  $w_2$  de Stiefel-Whitney. On peut donc appliquer l'extension, donnée par GUILLOU et MARIN au cas des surfaces caractéristiques non nécessairement orientables de la congruence de ROHLIN :

THÉORÈME (Rohlin, Guillou-Marin). - Soit  $F \subset M$  une surface caractéristique pour la variété close orientée  $M$  de dimension 4. On a la congruence

$$\sigma(M) - F.F = 2\alpha(M, F) \pmod{16},$$

avec les explications suivantes :

- 1)  $\sigma(M)$  désigne la signature de  $M$  ;
- 2)  $F.F$  désigne l'auto-intersection de  $F$  dans  $M$  au sens de WHITNEY. Soit  $S$  une section du filtré normal de  $F$  dans  $M$ , ayant des zéros simples. On pousse un peu  $F$  à l'aide de  $s$ , pour obtenir une surface  $F' \subset M$  et un difféomorphisme  $\sigma : F \rightarrow F'$ . Alors  $F \cap F' = \{x \in F \mid s(x) = 0\} = \{x \in F \mid \sigma(x) = x\}$  est un ensemble fini. Pour  $a \in F \cap F'$  on choisit une orientation locale  $\theta$  près de  $a$  pour  $F$ , par  $\sigma$  on transporte  $\theta$  en une orientation locale  $\sigma(\theta)$  de  $F'$  près de  $a$ . Les orientations  $\theta$  et  $\sigma(\theta)$  déterminent une orientation de  $M$  au point  $a$ . On affecte  $a$  avec le nombre  $\varepsilon(a) = \pm 1$  selon que cette orientation coïncide ou non avec l'orientation de  $M$  au point  $a$ . On pose

$$F.F = \sum_{a \in F \cap F'} \varepsilon(a) \in \mathbb{Z};$$

- 3)  $\alpha(M, F)$  désigne l'invariant de BROWN d'une forme quadratique

$q : H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Expliquons d'abord ce qu'est la forme  $q$ . Pour  $x \in H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , on choisit une courbe simple  $\bar{x}$  qui représente  $x$ . On choisit une surface  $S$  à bord dans  $M$  telle que

(i)  $\partial S = \bar{x}$ ,

(ii)  $S - \partial S$  rencontre  $F$  transversalement,

(iii) pour  $t \in \bar{x}$  l'intersection des espaces tangents  $T_t(F) \cap T_t(S)$  est l'espace tangent  $T_t(\bar{x})$ .

Au dessus du bord  $\partial S$  est défini le fibré normal de  $\bar{x} = \partial S$  dans  $F$ . L'obstruction à prolonger à  $S$  ce fibré en droite en un sous fibré du fibré normal de  $S$  dans  $M$  est un élément  $r \in H^2(S, \partial S; \pi_1(\mathbb{P}^1(F))^t) \simeq \mathbb{Z}$ , les coefficients étant tordus par

l'orientation normale de  $S$ . On pose  $q(x) = r + 2 \cdot \#(S - \partial S) \cap F \pmod 4$ .  
 L'invariant de Brown de  $q$  est le nombre complexe

$$\alpha(q) = \alpha(M, F) = 2^{-1/2 \dim H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \sum_{x \in H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \exp\left[\frac{\pi i q(x)}{2}\right]$$

Alors  $\alpha(q)$  est une racine huitième de l'unité, d'où  $\alpha(q) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  via l'isomorphisme  $\varepsilon : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \{\text{racines huitièmes de } 1\}$ ,  $\varepsilon(1) = e^{\pi i/4}$ . Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons à ROHLIN, GUILLOU-MARIN et MATSUMOTO.

Dans notre cas où  $F = p(B_+) \cup p(Y) \subset S^4 = M$  on trouve  $\sigma(M) = 0$ ,  
 $F.F = \frac{d^2}{2} - 2\chi(B_+)$  et pour  $\alpha(M, F)$  on a

$$\alpha(M, F) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque la courbe } X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \text{ a } M_d \text{ composantes,} \\ \pm 1 & \text{lorsque la courbe } X \text{ a } M_d - 1 \text{ composantes,} \end{cases}$$

d'où les théorèmes 4 et 5. Voici le calcul de  $F.F$  et  $\alpha(M, F)$ .

Soit  $v$  un champ de vecteurs normal à  $Y$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tel que  $v|_X$  est un champ normal à  $X$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sans zéros et que la conjugaison  $T$  conserve  $v$ . Soit  $w$  un champ de vecteurs tangents à  $B_+$ , qui prolonge  $v|_X$ . Alors avec les champs  $v$  et  $iw$  on peut fabriquer un champ normal  $n$  à  $F$  dans  $S^4$ , non nul au voisinage de  $p(X)$ . On a

$$F.F = (F.F)_{S^4} = (F.nF)_{S^4} = (p(Y).np(Y))_{S^4} + (p(B_+).np(B_+))_{S^4}$$

et

$$(p(Y).np(Y))_{S^4} = \frac{1}{2}(Y.vY)_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} = \frac{1}{2}d^2$$

$$(p(B_+).np(B_+))_{S^4} = 2(B_+.iwB_+)_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} = -2\chi(B_+),$$

donc

$$F.F = \frac{d^2}{2} - 2\chi(B_+).$$

Soit  $L \subset H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  le sous-espace engendré par les composantes de la courbe  $X$ . Alors Marin montre la

**PROPOSITION.-** La forme de Rohlin  $q$  est nulle sur  $L$ .

Preuve : L'espace  $L$  est engendré par les bords de composantes orientables  $B_i$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - B_+$ . Pour  $x = [\partial B_i] \in H_1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  on a

$$q(x) = r + 2 \cdot \#(B_i - \partial B_i) \cap F \pmod 4.$$

car  $B_i$  est une surface vérifiant (i), (ii) et (iii) du point 3 des explications du théorème de Rohlin, Guillou-Marin. On a  $\#(B_i - \partial B_i) \cap F = 0$  et  $r = 4r' \equiv 0 \pmod 4$  où  $r' \in H^2(B_i, \partial B_i; \mathbb{Z})$  est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs au dessus de  $\partial B_i$  normal à  $X$  dans  $Y$  en un champ normal à  $B_i$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Lorsque  $X$  est une  $(M-i)$ -courbe,  $L$  est contenue dans un espace hyperbolique  $H$  dont l'orthogonal est de rang  $i$ . Donc on a

$$\alpha(M, F) = \begin{cases} 0, & X \text{ une } M\text{-courbe,} \\ \pm 1, & X \text{ une } (M-1)\text{-courbe.} \end{cases}$$

§ 5. L'inégalité de Petrowski

Soit  $C_d$  une courbe lisse de degré pair  $d$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{P})$ . Soit  $f = 0$  une équation pour  $C_d$ . On note  $B_{\pm} = \{x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{P}) \mid \pm f(x) \geq 0\}$ . On a

$$\chi(B_+) + \chi(B_-) = \chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{P})) = 1.$$

PETROWSKI (1933) a obtenu le

THÉORÈME 6.- Soit  $C_d$  une courbe lisse de degré pair  $d$ . Alors

$$|2\chi(B_+) - 1| \leq \frac{3d^2}{4} - \frac{3d}{2} + 1.$$

Par exemple pour une courbe lisse de degré 6 on trouve

$$|2\chi(B_+) - 1| \leq 19$$

donc  $-9 \leq \chi(B_+) \leq 10$ ,

ce qui exclut la configuration de  $M_6 = 11$  ovales sans emboitements, et Petrowski a donné la première restriction topologique au plongement des 11 composantes d'une  $M$ -courbe de degré 6, qui ne découlait pas du théorème de Bezout de façon évidente.

Preuve d'Arnol'd dans une présentation de A. Marin : On considère à nouveau l'application quotient  $p : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow S^4$  et la surface  $F = p(Y) \cup p(B_+) \subset S^4$ , où  $Y$  est la courbe complexifiée (lisse) de  $C_d$ . Soit  $M \rightarrow S^4$  le revêtement double ramifié le long de  $F$ . On a

$$\chi(M) = 2 \cdot \chi(S^4) - \chi(F) = 4 - [\chi(p(Y)) + \chi(B_+)] = 4 + \frac{(d-1)(d-2) - 2}{2} - \chi(B_+)$$

La variété  $M$  est simplement connexe, car elle s'obtient aussi comme quotient du revêtement double de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ramifié le long de  $Y$ . Donc le deuxième nombre de Betti de  $M$  est

$$h_2(M) = 2 + \frac{(d-1)(d-2) - 2}{2} - \chi(B_+).$$

La signature équivariante  $\sigma(M, T)$  de la transformation du revêtement  $M \rightarrow S^4$  est d'après le théorème d'Atiyah-Singer

$$\sigma(M, T) = \frac{1}{2}(F \cdot F)_{S^4} = \frac{d^2}{4} - \chi(B_+).$$

De l'inégalité

$$-\sigma(M, T) \leq h_2(M)$$

on déduit

$$2\chi(B_+) - 1 \leq \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{2}d + 1.$$

De la même manière on obtient

$$2\chi(B_-) - 1 \leq \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{2}d + 1,$$

et en combinant les deux inégalités avec

$$\chi(B_+) + \chi(B_-) = \chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{P})) = 1,$$

il vient l'inégalité de Petrowski.

Lorsque la courbe  $C_{d+1}$  de degré pair  $d + 1$  a des singularités on a encore une inégalité avec des termes correcteurs dûs aux singularités (voir MARIN). Pour une courbe  $C_d$  de degré impair  $d$  on peut utiliser cette inégalité pour la courbe  $C_{d+1} = C_d.L$  de degré pair où  $L$  est une droite qui coupe  $C_d$  transversalement. Ainsi on peut obtenir l'inégalité de Petrowski pour les courbes de degré impair.

Remarques. - Cet exposé n'est qu'un faible reflet des travaux sur le seizième problème de Hilbert. Nous conseillons les articles de Gudkov et Wilson pour une plus ample exposition des travaux sur ce problème de Hilbert.

Récemment Arnol'd a donné dans son article : Index of a singular point of a vector field, the Petrowski-Oleinik inequality, and mixed Hodge structures, Funkt. Analiz. i ego Pril. 12, n° 1 (1978), 1-14, une nouvelle preuve des inégalités.

Kharlamov et Utkin ont résolu le problème pour les surfaces de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{P})$ .

Benoît Chevallier a construit par une autre méthode des  $M$ -courbes (thèse de troisième cycle en préparation à l'Université de Paris VII).

Même le cas des courbes de degré  $d \leq 6$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{P})$  n'est pas entièrement compris : par exemple pour terminer citons le problème : Soient  $C_d^{(0)}$  et  $C_d^{(1)}$  deux  $M$ -courbes de même type d'isotopie de plongement dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{P})$ . Existe-t-il un chemin continu  $C_d^{(t)}$  de  $M$ -courbes,  $t \in [0,1]$ , joignant  $C_d^{(0)}$  à  $C_d^{(1)}$  ?

## BIBLIOGRAPHIE

- A. HARNACK - Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, Math. Ann., 10(1876), 189-199.
- A. HURWITZ - Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math. Ann., 39(1891), 1-61.
- F. KLEIN - Riemannsche Flächen, Göttingen, 1892.
- D. HILBERT - Über die reellen Züge algebraischer Curven, Math. Ann., 38(1891), 115-138.
- D. A. GUDKOV - Construction of a new series of M-curves, Dokl. Akad. Nank. S.S.S.R., 200(1971), 1269-1272.
- V. I. ARNOL'D - The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms, Funkt. Analiz. i ego Pril. 5:3(1971), 1-9.
- V. A. ROHLIN - Proof of a conjecture of Gudkov, Funkt. Analiz. i ego Pril., 6:2(1972), 62-64.
- R. THOM - Sur l'homologie des variétés algébriques réelles, Differential and combinatorial topology, (A symposium in honor of Marston Morse), Princeton University Press, 1965, 255-265.
- V. M. KHARLAMOV - The maximum number of components of a surface of degree 4 in  $\mathbb{R}P^3$ , Funkt. Analiz. i ego Pril., 6(1972), 101
- D. A. GUDKOV and A. D. KRAKHOV - Periodicity of the Euler characteristic of real algebraic (M-1) varieties, Funkt. Analiz. i ego Pril., 7:2(1973), 15-19.
- A. MARIN - Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles, Manuscript, Orsay, 1977.
- N. KUIPER - The quotient space of  $\mathbb{C}P^2$  by complex conjugation is the four sphere, Math. Ann., 208(1974), 175-177.
- L. GUILLOU et A. MARIN - Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285 (18 juillet 1977).
- Y. MATSUMOTO - An Elementary Proof of Rohlin's Signature Theorem and its Extension by Guillou and Marin, Séminaire sur les variétés de dimensions 3 et 4, Orsay.
- V. A. ROHLIN - A new result in the theory of 4-dimensional manifolds, Soviet. Math. Doklady, 8(1952), 221-224.
- H. WHITNEY - On the Topology of Differential Manifolds, in Lectures on Topology, Univ. of Michigan Press, 1941, 101-141.

- E. H. BROWN - Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Math., 95(1972), 368-383.
- I. PETROWSKI - Sur la topologie des courbes réelles et algébriques, C.R. Acad. Sc. Paris, (1933), 1270-1272.
- I. PETROWSKI - On the topology of real plane algebraic curves, Ann. of Math., 2 39(1938), 189-209.
- D. A. GUDKOV - The topology of real projective algebraic varieties, Uspekhi Math. Nank. 29:4(1974), 3-79, (en Russe). Russian Math.Surveys, 29:4(1974), 1-79, (en Anglais).
- G. WILSON - Hilbert's sixteenth problem, Topology, Vol. 17 (1978), 53-73.