BULLETIN DE LA S. M. F.

HAÏM BRÉZIS
G. STAMPACCHIA

Sur la régularité de la solution d’inéquations elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 153-180
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__153_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 153 à 180.

SUR LA RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION D'INÉQUATIONS ELLIPTIQUES

PAR

HAÏM R. BREZIS
[Paris]

ET

GUIDO STAMPACCHIA
[Pise].

On considère le problème suivant : Chercher $u \in \mathbf{K}$, convexe fermé, donné dans un espace de Hilbert H vérifiant

$$(1) \qquad (f - Au, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{K},$$

où A est un opérateur coercif sur H et $f \in H$. L'existence et l'unicité ont été démontrées par J.-L. LIONS et G. STAMPACCHIA [12] dans le cas où A est linéaire.

Ce résultat a été généralisé par P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA [6], et indépendamment par F. BROWDER [4] à des opérateurs non linéaires de type monotone.

H. LEWY [9], H. LEWY et G. STAMPACCHIA [10] ont étudié en détail les propriétés de la solution de l'inéquation (1) associée au convexe $\mathbf{K}$ des fonctions définies dans un domaine Ω de $\mathbf{R}^N$,

$$\mathbf{K} = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \psi \text{ sur } E \}$$

(E, sous-ensemble de Ω; ψ, fonction donnée).

En particulier, on obtient que, sous certaines hypothèses, $u \in H^{2,p}(\Omega)$ lorsque A est un opérateur elliptique linéaire du deuxième ordre, $E = \Omega$, $f = 0$ et $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$ avec $p > N$.

Le but de ce travail est de prouver la régularité de la solution de l'inéquation (1) pour une classe assez générale de convexes $\mathbf{K}$ et d'opérateurs A non nécessairement linéaires. Le principe de la démonstration est semblable à celui utilisé par H. BREZIS [3] dans la résolution d'inéquations d'évolution.

A l'aide des applications de dualité, on ramène le problème de la régularité dans les espaces L^p, pour des inéquations, au problème analogue pour des *équations*. L'hypothèse qui joue un rôle essentiel est que l'on peut construire des opérateurs non linéaires, approximant l'identité, qui laissent le convexe $\mathbf{K}$ invariant.

Comme on le verra dans la suite, cette méthode donne un résultat optimal dans les cas étudiés.

On notera que la régularité de la solution d'une inéquation est de nature différente suivant les convexes considérés.

Au § I, on démontre un théorème abstrait de régularité pour l'inéquation (1).

On applique ensuite, au § II, ce théorème au cas où

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\quad v \geqq \psi \text{ sur } \Omega \}.$$

On retrouve ainsi, sous des hypothèses un peu plus générales, un résultat de H. LEWY et G. STAMPACCHIA [10].

Au § III, on étudie la régularité de la solution de l'inéquation (1) associée au convexe

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ |\operatorname{grad} v| \leqq 1 \text{ sur } \Omega \}$$

qui intervient dans le problème de la torsion élastoplastique d'une barre (*cf.* ANNIN [2], H. LANCHON et C. DUVAULT [8], T. W. TING [19]).

Au § IV, on considère d'autres situations qui n'entrent pas dans le cadre précédent.

Par exemple, le convexe

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_3 = \{ v \in H^1(\Omega);\ v \geqq 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

pour lequel J.-L. LIONS [11] a obtenu un théorème de régularité.

On montre enfin que si

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_4 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ \| v \|_{L^2(\Omega)} \leqq 1 \},$$

alors la régularité de la solution de l'inéquation (1) est analogue à celle d'une *équation linéaire*.

Plus généralement, on considère le convexe

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_5 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ \| v \|_{L^p(\Omega)} \leqq 1 \}.$$

L'étude de la régularité de la solution de l'inéquation (1), associée à $\mathbf{K}_5$, se ramène à celle de la régularité de la solution de l'équation non linéaire

$$Au + \lambda\, |u|^{p-2} u = f,$$

où λ est constante $\geqq 0$.

§ I. Un théorème abstrait de régularité.

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES. — Soient V un espace de Banach réflexif, et V' son dual. On désigne par $\| \quad \|_V$ (resp. $\| \quad \|^*_{V'}$) la norme de V (resp. V') et par $(\ , \ )$ le produit scalaire dans la dualité entre V et V'.

Soit A un opérateur de V dans V', non linéaire, monotone, hémicontinu (1).

Soit $\mathbf{K}$ un sous-ensemble, convexe fermé de V.

On sait (*cf.* F. BROWDER [4] ou P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA [6]) que si $\mathbf{K}$ est borné, alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in \mathbf{K}$ tel que

$$(f - Au, v - u) \leq 0, \qquad \forall v \in \mathbf{K}. \tag{I.1}$$

On se propose de montrer que, sous certaines hypothèses, Au est aussi « régulier » que f pour un choix convenable de cet espace.

Pour cela, on introduit un espace de Banach réflexif W de norme $\| \quad \|_W$.

On suppose que W est inclus avec injection continue, dans V', et que W est dense dans V'.

Il en résulte qu'il existe une injection continue i de V dans W' telle que $i(V)$ soit dense dans W' et

$$(i(v), w)_{W, W'} = (v, w)_{V, V'}, \quad \forall v \in V, \quad \forall w \in W.$$

Dans la suite, on identifie V à un sous-espace de W', inclus avec injection continue et dense dans W'. On désigne alors, par la même notation $(\ , \ )$, le produit scalaire dans les dualités entre V, V' et W', W.

Soit $\| \quad \|^*_{W'}$ la norme duale de $\| \quad \|_W$ sur W'.

Soit φ une fonction numérique définie et continue sur $[0, +\infty[$, strictement croissante, telle que $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{r \to +\infty} \varphi(r) = +\infty$.

On suppose que W et W' sont strictement convexes; ceci assure l'existence de l'application de dualité J de W dans W' associée à φ (*cf.* F. BROWDER [5]).

On sait que J est défini par les relations

$$(Jw, w) = \varphi(\| w \|_W) \| w \|_W, \quad \forall w \in W,$$
$$\| Jw \|^*_{W'} = \varphi(\| w \|_W),$$

J est monotone hémicontinu et bijectif de W sur W'. J^{-1} est monotone hémicontinu de W' sur W et vérifie

$$(J^{-1} w', w') = \varphi^{-1}(\| w' \|^*_{W'}) \| w' \|^*_{W'}, \quad \forall w' \in W',$$
$$\| J^{-1} w' \|_W = \varphi^{-1}(\| w' \|^*_{W'}).$$

(1) On rappelle que A est dit monotone hémicontinu si, pour tout couple $u, v \in V$, $(Au - Av, u - v) \geq 0$ et si l'application $t \in [0, 1] \to (A((1-t)u + tv), u - v)$ est continue.

DÉFINITION. — Soit $u \in \mathbf{K}$; on dit que le triplet $\{u, \mathbf{K}, A\}$ est *J-compatible* si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux applications

$$B_\varepsilon : \quad V \to W,$$
$$C_\varepsilon : \quad V \to W',$$

vérifiant

$$\| B_\varepsilon v \|_W \leq C_1, \qquad \| C_\varepsilon v \|^*_{W'} \leq C_2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall v \in \mathbf{K}$$

(C_1, C_2, constantes indépendantes de ε et v) telles que l'équation

$$(\mathrm{I}.2) \qquad u_\varepsilon + \varepsilon J(Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon) = u + \varepsilon C_\varepsilon u_\varepsilon$$

admette une solution $u_\varepsilon \in \mathbf{K}$ avec $Au_\varepsilon \in W$.

Remarquons que l'équation (I.2) a un sens dans W' puisque u_ε, $u \in V \subset W'$ et $J(Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon)$, $C_\varepsilon u_\varepsilon \in W'$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME I.1. — *Soient* $\mathbf{K}$ *un convexe fermé borné de* V, $f \in W$, *et* $u \in \mathbf{K}$ *une solution de l'inéquation* (I.1). *Si le triplet* $\{u, \mathbf{K}, A\}$ *est J-compatible, alors* $Au \in W$.

On utilisera, dans la démonstration du théorème I.1, le lemme suivant :

LEMME I.2. — *Soit* u_i *un filtre sur* V *tel que* $\lim u_i = u$ *dans* V *faible et* $\lim (Au_i, u_i - u) = 0$, *alors* $\lim Au_i = Au$ *dans* V' *faible.*

Le lemme I.2 se déduit d'un résultat de H. BREZIS ([3], proposition 6). Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons la démonstration. Soient $v \in V$, $t \in]0, 1]$ et $w = (1 - t) u + tv$.

On a $(Au_i - Aw, u_i - w) \geq 0$, c'est-à-dire

$$-(Au_i, u_i - u) + (A(u - tu + tv), u_i - u + tu - tv) \leq t(Au_i, u - v).$$

On obtient donc en passant à la limite :

$$t(A(u - tu + tv), u - v) \leq t \liminf (Au_i, u - v).$$

En divisant par t et en passant à la limite quand $t \to 0$, il vient

$$(Au, u - v) \leq \liminf (Au_i, u - v), \quad \forall v \in V$$

et par conséquent,

$$\lim (Au_i, z) = (Au, z), \quad \forall z \in V.$$

Démonstration du théorème I.1. — Le triplet $\{u, \mathbf{K}, A\}$ étant J-compatible, il existe $u_\varepsilon \in \mathbf{K}$ vérifiant

$$(\mathrm{I}.3) \qquad u_\varepsilon + \varepsilon J(Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon) = u + \varepsilon C_\varepsilon u_\varepsilon \qquad \text{avec} \quad Au_\varepsilon \in W.$$

D'autre part, on a

$$(f - Au_\varepsilon,\ u_\varepsilon - u) \leqq 0 \tag{I.4}$$

(puisque A est monotone et $u_\varepsilon \in \mathbf{K}$).

Il résulte de (I.3) et (I.4) que

$$(f - Au_\varepsilon,\ C_\varepsilon u_\varepsilon - J(Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon)) \leqq 0. \tag{I.5}$$

En posant $\xi_\varepsilon = Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon$, (I.5) s'écrit

$$(f + B_\varepsilon u_\varepsilon - \xi_\varepsilon,\ C_\varepsilon u_\varepsilon - J\xi_\varepsilon) \leqq 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi(\| \xi_\varepsilon \|_W) \| \xi_\varepsilon \|_W - \varphi(\| \xi_\varepsilon \|_W) \| f + B_\varepsilon u_\varepsilon \|_W \leqq C_2 (\| \xi_\varepsilon \|_W + \| f + B_\varepsilon u_\varepsilon \|_W).$$

D'où

$$\varphi(\| \xi_\varepsilon \|_W) \left(1 - \frac{\| f + B_\varepsilon u_\varepsilon \|_W}{\| \xi_\varepsilon \|_W} \right) \leqq C_2 \left(1 + \frac{\| f + B_\varepsilon u_\varepsilon \|_W}{\| \xi_\varepsilon \|_W} \right). \tag{I.6}$$

On déduit de (I.6) que

(I.7) ξ_ε, et donc Au_ε, demeurent dans un borné de W [puisque $\lim\limits_{r \to +\infty} \varphi(r) = +\infty$].

D'après (I.3), on a

$$\| u_\varepsilon - u \|_{W'}^{*} \leqq \varepsilon \varphi(\| \xi_\varepsilon \|_W) + \varepsilon C_2. \tag{I.8}$$

Par suite, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u$ dans W' fort.

Mais u_ε appartient à $\mathbf{K}$, qui est un convexe faiblement compact de V. Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u \quad \text{dans } V \text{ faible} \tag{I.9}$$

(on utilise ici le fait que V est inclus dans W' avec injection continue).

Enfin, $|(Au_\varepsilon,\ u_\varepsilon - u)| \leqq \| Au_\varepsilon \|_W \| u_\varepsilon - u \|_{W'}^{*}$ et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (Au_\varepsilon,\ u_\varepsilon - u) = 0. \tag{I.10}$$

D'après le lemme I.2, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Au_\varepsilon = Au \quad \text{dans } V' \text{ faible} \tag{I.11}$$

et par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Au_\varepsilon = Au \quad \text{dans } W \text{ faible}$$

puisque Au_ε demeure dans un borné de W, espace de Banach réflexif, et que Au_ε converge vers Au dans V' faible. (On utilise ici l'hypothèse que W est inclus, avec injection continue dans V'.)

On a donc $Au \in W$.

On peut remarquer que, dans la deuxième partie de la démonstration, on a prouvé le résultat suivant qui est, en effet, un corollaire du lemme I.2.

COROLLAIRE I.2'. — *Si $u_\varepsilon \to u$ dans W' fort, si u_ε est borné dans* V *et si Au_ε est borné dans W, alors $u \in$ V et $Au \in$ W.*

L'hypothèse « **K** borné » peut être affaiblie et remplacée par une hypothèse de coercivité sur l'opérateur A.

Plus précisément, on suppose qu'il existe $v_0 \in \mathbf{K}$ tel que

$$\lim_{\substack{\|v\|_V \to +\infty \\ v \in \mathbf{K}}} \frac{(Av, v - v_0)}{\|v\|_V} = +\infty. \tag{I.12}$$

On sait (*cf.* F. BROWDER [4] ou P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA [6]) que, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in \mathbf{K}$ solution de l'inéquation

$$(f - Au, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{K}. \tag{I.13}$$

On a alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE I.3. — *On fait l'hypothèse* (I.12); *soient $f \in W$, et $u \in \mathbf{K}$ une solution de l'inéquation* (I.13).

On suppose que le triplet $\{u, \mathbf{K}, A\}$ est J-compatible. Alors $Au \in W$.

Démonstration. — On prouve, en reportant u_ε dans l'inéquation (I.13), que l'on obtient, comme dans la démonstration du théorème I.1 :

$$\|Au_\varepsilon\|_W \text{ demeure borné}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u \quad \text{dans } W' \text{ fort}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u) = 0.$$

On déduit alors de l'hypothèse (I.12) que u_ε demeure dans un borné de V.

Soit enfin $R = \max\{\sup \|u_\varepsilon\|_V, \|u\|_V\}$ et soit $\mathbf{K}^R = \{v \in \mathbf{K}; \|v\|_V \leq R\}$.

$\mathbf{K}^R$ est un convexe fermé borné de V et le triplet $\{u, \mathbf{K}^R, A\}$ est J-compatible.

Le théorème I.1 montre alors que $Au \in W$.

REMARQUE I.4. — On peut obtenir une estimation de $\|Au\|_W$ en fonction de $\|f\|_W$, C_1, C_2.

En effet, soit σ la solution de l'équation

$$\varphi(\sigma) = C_2 \frac{\sigma + \|f\|_W + C_1}{\sigma - \|f\|_W - C_1}$$

(une telle solution existe et est unique d'après les propriétés de φ).

En suivant la démonstration du théorème I.1, il est aisé de montrer que

$$\|Au\|_W \leq \max\{\|f\| + 2C_1, \sigma + C_1\}.$$

En particulier, si $C_1 = C_2 = 0$, on a $\sigma = 0$ et $\|Au\|_W \leq \|f\|_W$; si $C_1 = 0$ et $f = 0$, on a $\|Au\|_W \leq \varphi^{-1}(C_2)$.

Remarque I.5. — Sous certaines hypothèses, il est clair que l'équation (I.3) admet une solution $u_\varepsilon \in V$ avec $Au_\varepsilon \in W$.

Il suffit alors de montrer que cette solution u_ε appartient à K pour en déduire la J-compatibilité.

Par exemple, lorsque l'opérateur $A + B_\varepsilon$ est monotone hémicontinu et coercif et que C_ε est une application constante $C_\varepsilon v = C_\varepsilon$, alors l'équation (I.3) admet une solution $u_\varepsilon \in V$ avec $Au_\varepsilon \in W$. En effet, l'équation (I.3) s'écrit aussi

$$Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon + J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} - C_\varepsilon\right) = 0. \tag{I.14}$$

Or l'opérateur $v \to Av + B_\varepsilon v + J^{-1}\left(\dfrac{v - u}{\varepsilon} - C_\varepsilon\right)$ est monotone hémicontinu et coercif de V dans V'. On en déduit (*cf.* F. Browder [4] ou P. Hartman et G. Stampacchia [6]) que l'équation (I.14) admet une solution $u_\varepsilon \in V$, et de plus $Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon \in W$, donc $Au_\varepsilon \in W$.

Remarque I.6. — Les résultats précédents s'étendent à une situation plus générale où l'on n'a pas nécessairement $W \subset V'$.

On suppose seulement qu'il existe un espace localement convexe séparé D et des injections continues de W dans D et de V' dans D. Ceci permet d'introduire les espaces $W + V'$ et $W \cap V'$; ce dernier est supposé dense dans W et dans V'.

Par dualité, on peut aussi considérer les espaces $W' \cap V$ et $W' + V$.

Dans ce cadre, le théorème I.1 et le corollaire I.3 restent inchangés.

Remarque I.7. — On obtient des résultats analogues si l'on remplace les espaces V et V' par un couple E, F d'espaces en dualité, comme dans H. Brezis [3].

§ II. Application au convexe

$$\mathbf{K}_1 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\quad v \geqq \psi \quad \text{sur} \quad \Omega \}.$$

Notations. — Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne.

On désigne par $C^m(\Omega)$ [resp. $C^m(\overline{\Omega})$] l'espace des fonctions admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m, continues dans Ω (resp. $\overline{\Omega}$).

$C^{m,\lambda}(\Omega)$ [resp. $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$] est l'espace des fonctions de $C^m(\Omega)$ [resp. $C^m(\overline{\Omega})$] höldériennes d'exposant $\lambda (0 < \lambda \leqq 1)$ sur les compacts de Ω (resp. $\overline{\Omega}$) ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m.

$\mathcal{D}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{D}'(\Omega)$] est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans Ω (resp. distributions sur Ω). $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ est l'espace des mesures sur $\overline{\Omega}$ [dual de $C^0(\overline{\Omega})$].

Soit $1 < \alpha < +\infty$, avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$; $L^\alpha(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de puissance $\alpha^{\text{ième}}$ sommable, muni de sa norme usuelle $\| \quad \|_\alpha$:

$$H^{m,\alpha}(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \frac{\partial^r v}{\partial x^r} \in L^\alpha(\Omega),\ |r| \leqq m \right\}$$

muni de sa norme usuelle $\| \quad \|_{m,\alpha}$.

$H_0^{m,\alpha}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^{m,\alpha}(\Omega)$.

Pour simplifier, on pose $H^m(\Omega) = H^{m,2}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) = H_0^{m,2}(\Omega)$. $H_0^{m,\alpha}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif dont le dual est noté $H^{-m,\alpha'}(\Omega)$.

Hypothèses. — Soit $1 < t < +\infty$, avec $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$. Soient $\psi \in H^{1,t}(\Omega)$, $\psi \leqq 0$ sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,t}(\Omega)$ (*cf.* W. Littman, G. Stampacchia et H. Weinberger [13]) et

$$\mathbf{K}_1 = \{ v \in H^{1,t}(\Omega);\ v \geqq \psi \text{ sur } \Omega \} \quad (^2),$$

$\mathbf{K}_1$ est un convexe fermé non vide de $H^{1,t}(\Omega)$ (car $\sup\{\psi, 0\} \in \mathbf{K}_1$).

Définition. — On dit qu'un opérateur A de $H^{1,t}(\Omega)$ dans $H^{-1,t'}(\Omega)$ est T-*monotone*, si, pour tout couple v_1, $v_2 \in H^{1,t}(\Omega)$ tel que $v_1 \leqq v_2$ sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,t}(\Omega)$, on a

$$(A v_1 - A v_2, \sup\{ v_1 - v_2, 0 \}) \geqq 0;$$

ce qui a un sens puisque $\sup\{ v_1 - v_2\ 0 \}$ appartient à $H_0^{1,t}(\Omega)$.

---

(2) La frontière $\partial\Omega$ de Ω étant régulière, il est équivalent de supposer $v \geqq \psi$ p. p. sur Ω ou bien $v \geqq \psi$ au sens de $H^{1,t}(\Omega)$.

Si A est T-monotone de $H^{1,t}(\Omega)$ dans $H^{-1,t'}(\Omega)$, alors la restriction de A à $H_0^{1,t}(\Omega)$ est monotone au sens usuel de $H_0^{1,t}(\Omega)$ dans $H^{-1,t'}(\Omega)$. En effet, soient $v_1, v_2 \in H_0^{1,t}(\Omega)$; on a

$$v_1 - v_2 = \sup\{v_1 - v_2, 0\} - \sup\{v_2 - v_1, 0\}.$$

D'où

$$(A v_1 - A v_2, v_1 - v_2)$$
$$= (A v_1 - A v_2, \sup\{v_1 - v_2, 0\}) + (A v_2 - A v_1, \sup\{v_2 - v_1, 0\}) \geqq 0.$$

Par abus de notation, on écrira

$$(A v_1 - A v_2, \sup\{v_1 - v_2, 0\}) = \int_{[v_1 \geqq v_2]} (A v_1 - A v_2)(v_1 - v_2)\, dx.$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME II.1. — *Soit A un opérateur T-monotone de $H^{1,t}(\Omega)$ dans $H^{-1,t'}(\Omega)$.*

On suppose que la restriction de A à $H_0^{1,t}(\Omega)$ est hémicontinue et vérifie

(II.1) $$\lim_{\substack{\|v\|_{1,t} \to +\infty \\ v \in H_0^{1,t}(\Omega)}} \frac{(A v, v - v_0)}{\|v\|_{1,t}} = +\infty \quad \text{pour tout } v_0 \in \mathbf{K}_1.$$

Soient $f \in L^p(\Omega) \cap H^{-1,t'}(\Omega)$ (3) et $u \in \mathbf{K}_1$, une solution de l'inéquation

(II.2) $$(f - A u, v - u) \leqq 0, \quad \forall v \in \mathbf{K}_1.$$

Si $A\psi \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ et $\sup\{A\psi, 0\} \in L^p(\Omega)$ (4), alors $A u \in L^p(\Omega)$.

Démonstration. — On pose $V = H_0^{1,t}(\Omega)$ muni de la norme $\|\ \|_V = \|\ \|_{1,t}$ et $W = L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\ \|_W = \|\ \|_p$. Pour p suffisamment grand, on a $L^p(\Omega) \subset H^{-1,t'}(\Omega)$, donc $W \subset V'$, et l'on est dans la situation du § I.

Dans le cas général, on applique la remarque I.6 avec $D = \mathcal{D}'(\Omega)$. On considère la fonction $\varphi_p(r) = r^{p-1}$; l'application de dualité J_p de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, associée à φ_p, est

$$J_p v = |v|^{p-2} v \qquad \text{et} \qquad \overset{-1}{J_p} v = J_{p'} v = |v|^{p'-2} v.$$

Pour simplifier les notations, on pose $k = \sup\{A\psi, 0\}$. Soit $u \in \mathbf{K}_1$ une solution de l'inéquation (II.2).

---

(3) $1 < p < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; p est indépendant de t. Mais si $p \geqq \frac{N t'}{N + t'}$, de sorte que $L^p(\Omega) \subset H^{-1,t'}(\Omega)$, alors il suffit de supposer qu'il existe un $v_0 \in \mathbf{K}$ vérifiant (II.1).

(4) $\sup\{A\psi, 0\} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$.

D'après le corollaire I.3, il suffit de prouver que l'équation

(II.3) $$u_\varepsilon + \varepsilon J_p A u_\varepsilon = u + \varepsilon J_p k$$

admet une solution $u_\varepsilon \in \mathbf{K}_1$, avec $A u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$.

L'équation (II.3) admet une solution $u_\varepsilon \in H_0^{1,t}(\Omega)$ avec $A u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$; en effet, elle s'écrit

(II.4) $$A u_\varepsilon + J_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} - J_p k\right) = 0$$

ou encore

(II.5) $$A(v_\varepsilon + u) + J_{p'}\left(\frac{v_\varepsilon}{\varepsilon} - J_p k\right) = 0,$$

après avoir fait le changement d'inconnu $u_\varepsilon - u = v_\varepsilon$.

Il résulte de l'hypothèse (II.1) que l'opérateur

$$v \to A(v + u) + J_{p'}\left(\frac{v}{\varepsilon} - J_p k\right)$$

est monotone, hémicontinu et coercif de $H_0^{1,t}(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ dans $H^{-1,t'}(\Omega) + L^p(\Omega)$.

On en déduit que l'équation (II.4) admet une solution $u_\varepsilon \in H_0^{1,t}(\Omega)$, avec $A u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ et $u_\varepsilon - u \in L^{p'}(\Omega)$.

Montrons maintenant que $u_\varepsilon \geqq \psi$ sur Ω en utilisant la technique des troncatures comme dans [17].

Soit $E = [\psi \geqq u_\varepsilon] = \{ x \in \Omega ;\ \psi(x) \geqq u_\varepsilon(x) \}$. On a

$$u_\varepsilon(x) \leqq \psi(x) \leqq u(x) \quad \text{sur E.}$$

Or $u_\varepsilon - u \in L^{p'}(\Omega)$, et par conséquent les restrictions à E, $(\psi - u_\varepsilon)|_E$ et $(\psi - u)|_E$, des fonctions $\psi - u_\varepsilon$ et $\psi - u$, appartiennent à $L^{p'}(E)$. La fonction z_ε, définie par

$$z_\varepsilon = \sup\{ \psi - u_\varepsilon,\ 0 \} = \begin{cases} \psi - u_\varepsilon & \text{sur } E \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

vérifie $z_\varepsilon \in H_0^{1,t}(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ et $z_\varepsilon \geqq 0$ sur Ω.

En multipliant l'équation (II.4) par z_ε et en intégrant sur Ω, on obtient

(II.6) $$\int_{[\psi \geqq u_\varepsilon]} \left(A u_\varepsilon + J_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} - J_p k\right)\right).(u_\varepsilon - \psi)\, dx = 0.$$

On écrit

$$\int_{[\psi \geqq u_\varepsilon]} \left(A u_\varepsilon + J_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} - J_p k\right)\right).(u_\varepsilon - \psi)\, dx = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

avec

$$\text{(II.7)} \qquad X_1 = \int_{[\psi \geqq u_\varepsilon]} (A u_\varepsilon - A\psi).(u_\varepsilon - \psi)\, dx \geqq 0$$

puisque A est T-monotone et $\psi \leqq u_\varepsilon$ sur $\partial\Omega$. On a

$$\text{(II.8)} \qquad X_2 = \int_{[\psi \geqq u_\varepsilon]} (A\psi - k).(u_\varepsilon - \psi)\, dx \geqq 0$$

car $-A\psi + k$ est une mesure positive; on utilise aussi le fait que la frontière $\partial\Omega$ de Ω est régulière pour approcher la fonction z_ε par une suite de fonctions $z_\varepsilon^n \geqq 0$ sur Ω telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_\varepsilon^n = z_\varepsilon$ dans $H_0^{1,p'}(\Omega)$ et dans $L^{p'}(\Omega)$.

Il est clair que

$$\text{(II.9)} \qquad X_3 = \int_{[\psi \geqq u_\varepsilon]} \left(k - J_{p'}\left(J_p k + \frac{u-\psi}{\varepsilon}\right)\right).(u_\varepsilon - \psi)\, dx \geqq 0;$$

en effet $k - J_{p'}\left(J_p k + \dfrac{u-\psi}{\varepsilon}\right) \leqq 0$ p. p. sur E $\left(\text{ceci équivaut à } J_p k \leqq J_p k + \dfrac{u-\psi}{\varepsilon} \text{ p. p. sur } E\right)$. Après addition des inégalités (II.7), (II.8) et (II.9), il résulte de (II.6) que

$$\text{(II.10)} \qquad X_4 = \int_{[\psi \geqq u_\varepsilon]} \left(J_{p'}\left(J_p k + \frac{u-\psi}{\varepsilon}\right) - J_{p'}\left(J_p k + \frac{u-u_\varepsilon}{\varepsilon}\right), (u_\varepsilon - \psi)\right) dx \leqq 0.$$

Mais $J_{p'}$ est une application strictement monotone de $L^{p'}(E)$ dans $L^p(E)$, c'est-à-dire que si $g_1,\ g_2 \in L^{p'}(E)$ vérifient

$$\int_E (J_{p'} g_1 - J_{p'} g_2)(g_1 - g_2)\, dx \leqq 0$$

alors $g_1 = g_2$ p. p. sur E.

On conclut, grâce à (II.10), que

$$J_p k + \frac{u-\psi}{\varepsilon} = J_p k + \frac{u - u_\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{p. p. sur } E.$$

Donc $u_\varepsilon = \psi$ p. p. sur E et $u_\varepsilon \geqq \psi$ p. p. sur Ω. Ce qui achève la démonstration du théorème II.1.

Remarque II.2. — En utilisant la remarque I.4, on peut obtenir une estimation de $\| A u \|_p$.

Plus précisément,

$$\| A u \|_p \leq \max \{ \| f \|_p, \sigma_p \},$$

où σ_p est la solution de l'équation

$$\sigma_p^{p-1} = \| \sup \{ A\psi, 0 \} \|_p^{p-1} \frac{\sigma_p + \| f \|_p}{\sigma_p - \| f \|_p}.$$

En particulier, $\| A u \|_p \leq \| \sup \{ A\psi, 0 \} \|_p$ lorsque $f = 0$.

EXEMPLES.

1° *Un exemple linéaire.* — Soient $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$ avec

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N \quad \text{et} \quad \nu > 0.$$

On pose

$$A = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c.$$

On suppose que $c(x) \geq \lambda$, λ suffisamment grand de sorte que A soit coercif sur $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$(A v, v) \geq k \| v \|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad k > 0.$$

COROLLAIRE II.3. — *Soient* $1 < p < +\infty$, $f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ *et* $\psi \in H^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$; *alors la solution* $u \in \mathbf{K}_1$ *de l'inéquation*

$$(f - A u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{K}_1$$

appartient à $H^{2,p}(\Omega)$.

En particulier, si $p > N$, u *appartient à* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *avec* $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$.

Pour démontrer le corollaire II.3, on applique le théorème II.1 [il est clair que A est T-monotone de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et vérifie (II.1)]. On en déduit que $A u \in L^p(\Omega)$. On utilise ensuite les résultats classiques de régularité dans L^p pour les équations linéaires (*cf.* par exemple S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG [1]).

Le corollaire II.3 est semblable au résultat de régularité obtenu par H. LEWY et G. STAMPACCHIA [10]. Toutefois on évite ici l'hypothèse restrictive $p > N$ faite dans [10]. On trouvera dans [10] diverses autres propriétés de la solution u de l'inéquation (II.2), entre autres un contre-exemple simple, montrant qu'en général u n'appartient pas à $C^2(\Omega)$.

2° *Un exemple non linéaire.* — On suppose pour simplifier que Ω est convexe et que la frontière $\partial\Omega$ de Ω est suffisamment régulière.

Soit $1 < t \leq 2$; on pose

$$Av = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(1+\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2\right)^{\frac{t-2}{2}} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right),$$

A est un opérateur T-monotone de $H^{1,t}(\Omega)$ dans $H^{-1,t'}(\Omega)$ dont la restriction à $H_0^{1,t}$ est hémicontinue et vérifie (II.1).

COROLLAIRE II.4. — *Soient $f \in L^\infty(\Omega)$, $\psi \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ et $u \in \mathbf{K}_1$, la solution de l'inéquation*

$$(f - Au, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{K}_1.$$

Alors on a $Au \in L^\infty(\Omega)$, et en particulier $u \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ pour tout $0 < \lambda < 1$.

Démonstration. — Le théorème II.1 montre que $Au \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p < +\infty$.

De plus la remarque II.2 donne une estimation de $\| Au \|_p$. On a $\| Au \|_p \leq \max\{\| f \|_p, \sigma_p\}$ où σ_p est la solution de l'équation

$$\sigma_p^{p-1} = \| A\psi \|_{L^p}^{p-1} \frac{\sigma_p + \| f \|_p}{\sigma_p - \| f \|_p}.$$

Il est clair que $\| f \|_p$ et $\| A\psi \|_p$ sont majorés par une constante indépendante de p, puisque $f \in L^\infty(\Omega)$ et $A\psi \in L^\infty(\Omega)$. Il en est de même pour σ_p et donc pour $\| Au \|_p$. Par suite, $Au \in L^\infty(\Omega)$.

On utilise ensuite un théorème de régularité pour les équations non linéaires (par exemple, P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA [6], théorème 14.3, p. 309).

On en déduit que $u \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ pour tout $0 < \lambda < 1$. De plus, les estimations dans $H^{2,p}(\Omega)$ pour les équations linéaires (*cf.* S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG [1]) et l'artifice de Korn permettent de montrer que $u \in H^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.

REMARQUE II.5. — Cette méthode s'étend à tous les opérateurs non linéaires pour lesquels on connaît un théorème de régularité sur u, sachant que $Au \in L^\infty(\Omega)$ (*cf.* par exemple O. LADYŽENSKAJA et N. URAL'CEVA [7], C. MORREY [14]).

REMARQUE II.6. — On obtient un résultat analogue au théorème II.1. Si l'on considère le convexe

$$\mathbf{K} = \{ v \in H_0^{1,t}(\Omega);\ \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ sur } \Omega \},$$

où

$$\psi_1,\ \psi_2 \in H^{1,t}(\Omega), \qquad \psi_1 \leq \psi_2 \quad \text{sur } \Omega$$

et

$$\psi_1 \leq 0 \leq \psi_2 \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad (cf.\ \text{G. STAMPACCHIA [18]}).$$

§ III. Application au convexe

$$\mathbf{K}_2 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ |\operatorname{grad} v| \leqq 1\ p.\,p.\quad \text{sur}\,\Omega \}.$$

III.1. Cas où le domaine Ω est convexe.

HYPOTHÈSES. — Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, un ouvert borné, convexe, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne.

Soit

$$\mathbf{K}_2 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ |\operatorname{grad} v| \leqq 1 \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

$\mathbf{K}_2$ est l'ensemble des fonctions lipschitziennes de rapport $\leqq 1$, définies sur Ω et nulles sur $\partial\Omega$.

Soient $a_i(P)$, $1 \leqq i \leqq N$, $P = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbf{R}^N$, N fonctions, $a_i(P) \in C^1(\mathbf{R}^N)$.

On suppose que les fonctions a_i vérifient

$$\text{(III.1)} \qquad \sum_{i=1}^{N} (a_i(P) - a_i(P'))\,(p_i - p'_i) \geqq 0, \qquad \forall\, P, P' \in \mathbf{R}^N.$$

Il résulte de l'hypothèse (III.1) que l'opérateur A, défini par

$$Av = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \quad (^5)$$

applique l'espace $H^{1,\infty}(\Omega)$ dans $H^{-1,1}(\Omega)$ (6) et sa restriction à $H_0^{1,\infty}(\Omega)$ est monotone hémicontinue. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME III.1. — *Soit $1 < p \leqq +\infty$; pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe $u \in \mathbf{K}_2$ solution de l'inéquation*

$$\text{(III.2)} \qquad (f - Au,\ v - u) \leqq 0, \qquad \forall\, v \in \mathbf{K}_2.$$

De plus, $Au \in L^p(\Omega)$.

---

(5) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial x_N} \right).$

(6) $H^{1,\infty}(\Omega)$ [resp. $H_0^{1,\infty}(\Omega)$] désigne l'espace des fonctions lipschitziennes sur Ω (resp. nulles sur $\partial\Omega$). $H^{-1,1}(\Omega)$ est l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$T = g_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \qquad \text{où} \quad g_0,\ g \in L^1(\Omega).$$

Les espaces $H_0^{1,\infty}(\Omega)$ et $H^{-1,1}(\Omega)$ sont en dualité.

Démonstration. — L'équation (III.2) admet au moins une solution; en effet, $\mathbf{K}_2$ est un sous-ensemble convexe et faiblement compact de $H_0^{1,\infty}(\Omega)$ muni de la topologie $\sigma(H_0^{1,\infty}(\Omega), H^{-1,1}(\Omega))$. On en déduit (*cf.* H. BREZIS [3], théorème 24) que, pour tout $f \in H^{-1,1}(\Omega)$, il existe $u \in \mathbf{K}_2$ vérifiant (III.2). Pour montrer que $Au \in L^p(\Omega)$, on considère d'abord le cas où $1 < p < +\infty$, et l'on applique la remarque I.7 avec $E = H^{1,\infty}(\Omega)$ $F = H^{-1,1}(\Omega)$ et $W = L^p(\Omega)$.

Il suffit donc de prouver que, pour tout $u \in \mathbf{K}_2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation

$$u_\varepsilon + \varepsilon J_p A u_\varepsilon = u \tag{III.3}$$

admet une solution $u_\varepsilon \in \mathbf{K}_2$ avec $A u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$.

On utilisera dans la démonstration les lemmes suivants.

LEMME III.2 (*lemme de comparaison*). — *Soit $\theta(t)$ une fonction numérique définie, continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.*

Soient $F_1, F_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_1, u_2 \in H^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant

$$Au_1 = \theta(F_1 - u_1), \tag{III.4}$$

$$Au_2 = \theta(F_2 - u_2). \tag{III.5}$$

Alors on a

$$\min\left\{\inf_{\partial\Omega}(u_2 - u_1), \inf_{\Omega}(F_2 - F_1)\right\} \leq u_2 - u_1$$
$$\leq \max\left\{\sup_{\partial\Omega}(u_2 - u_1), \sup_{\Omega}(F_2 - F_1)\right\}.$$

Démonstration du lemme III.2. — D'après (III.4) et (III.5), on a

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left[a_i\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - a_i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx$$
$$= \int_\Omega [\theta(F_2 - u_2) - \theta(F_1 - u_1)]\, \eta\, dx; \quad \forall \eta \in H_0^{1,\infty}(\Omega). \tag{III.6}$$

On pose $T = \max\left\{\sup_{\partial\Omega}(u_2 - u_1), \sup_{\Omega}(F_2 - F_1)\right\}$ et l'on choisit dans (III.6) :

$$\eta = \max\{(u_2 - u_1), T\} - T,$$

$$\eta = \begin{cases} u_2 - u_1 - T & \text{sur l'ensemble } [u_2 - u_1 - T \geq 0], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il vient

$$\int_{[u_2 - u_1 - T \geq 0]} \sum_{i=1}^{N} \left(a_i\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - a_i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) dx$$
$$= \int_{[u_2 - u_1 - T \geq 0]} (\theta(F_2 - u_2) - \theta(F_1 - u_1))(u_2 - u_1 - T)\, dx. \tag{III.7}$$

Il résulte de (III.1) que

$$\int_{[u_2-u_1-T\geq 0]} \sum_{i=1}^{N} \left(a_i\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right) - a_i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) dx \geq 0.$$

D'autre part, on a

$$F_2 - F_1 \leq T \leq u_2 - u_1 \quad \text{p. p. sur } [u_2 - u_1 - T \geq 0]$$

et donc

$$F_2 - u_2 \leq F_1 - u_1 \quad \text{p. p. sur } [u_2 - u_1 - T \geq 0].$$

Par suite,

$$\int_{[u_2-u_1-T\geq 0]} (\theta(F_2 - u_2) - \theta(F_1 - u))(u_2 - u_1 - T)\, dx \leq 0.$$

On déduit de (III.7) que

$$(\theta(F_2 - u_2) - \theta(F_1 - u_1))(u_2 - u_1 - T) = 0 \quad \text{p. p. sur } [u_2 - u_1 - T \geq 0].$$

Comme θ est strictement monotone, on obtient

$$u_2 - u_1 - T \leq 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On démontrerait de même que $u_2 - u_1$ est minoré par $\min\left\{\inf_{\partial\Omega}(u_2 - u_1), \inf_{\Omega}(F_2 - F_1)\right\}$.

REMARQUE III.3. — La conclusion du lemme III.2 est encore valable lorsque les fonctions u_1, u_2 appartiennent seulement à $H^1(\Omega)$ si l'on définit de manière appropriée les expressions $\inf_{\partial\Omega}(u_2 - u_1)$ et $\sup_{\partial\Omega}(u_2 - u_1)$, éventuellement égales à $\pm\infty$ (*cf.* W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA, H. WEINBERGER [13]).

LEMME III.4. — *Soit* $\theta(t)$ *une fonction numérique, définie, continue et strictement croissante sur* $]-\infty, +\infty[$, *vérifiant* $\theta(0) = 0$. *Alors pour tout* $F \in \mathbf{K}_2$, *l'équation*

$$Av = \theta(F - v) \tag{III.8}$$

admet une solution $v \in \mathbf{K}_2$.

Démonstration du lemme III.4. — Montrons d'abord que si l'équation (III.8) admet une solution $v \in H_0^1(\Omega)$, alors v appartient nécessairement à $\mathbf{K}_2$.

En effet, soit $x_0 \in \partial\Omega$; le domaine Ω étant convexe, on peut trouver une fonction affine π telle que

$$\begin{cases} \pi(x_0) = 0, \\ -\pi \leq F \leq \pi \quad \text{sur } \Omega, \\ |\operatorname{grad} \pi| = 1. \end{cases}$$

On a $A\pi = \theta(\pi - \pi)$. On déduit alors de l'équation (III.8) et du lemme III.2 (on utilise la remarque III.3) que $-\pi \leq v \leq \pi$ sur Ω. Par conséquent,

$$|v(x_0) - v(x)| \leq |x_0 - x|, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Soient maintenant $x_1, x_2 \in \Omega$, $h = x_2 - x_1$, $\tau_h\Omega$ le translaté $\Omega - h$ de Ω et $\tau_{-h}v(x) = v(x+h)$, $\tau_{-h}F(x) = F(x+h)$. Dans l'ouvert $\Omega \cap \tau_h\Omega$ on a

$$Av = \theta(F - v),$$
$$A\tau_{-h}v = \theta(\tau_{-h}F - \tau_{-h}v).$$

Le lemme III.2 montre que l'on a, dans $\Omega \cap \tau_h\Omega$,

$$-|h| \leq \min\left\{ \inf_{\partial(\Omega\cap\tau_h\Omega)} (\tau_{-h}v - v), \inf_{\Omega\cap\tau_h\Omega} (\tau_{-h}F - F) \right\}$$
$$\leq \tau_{-h}v - v \leq \max\left\{ \sup_{\partial(\Omega\cap\tau_h\Omega)} (\tau_{-h}v - v), \sup_{\Omega\cap\tau_h\Omega} (\tau_{-h}F - F) \right\} \leq |h|$$

[puisque si $x \in \partial(\Omega\cap\tau_h\Omega)$, l'un des points x ou $x + h$ appartient à $\partial\Omega$]

On en déduit que

$$|v(x_1) - v(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega.$$

Il reste à montrer que l'équation (III.8) admet au moins une solution.

Pour cela, on introduit une fonction $\tilde{\theta}$ définie, continue, strictement monotone et bornée sur $]-\infty, +\infty[$, qui coïncide avec θ sur l'intervalle $[-C, +C]$ où $C > 2 \operatorname{diam}\Omega$.

Soit $\tilde{A}$ un opérateur monotone hémicontinu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ qui coïncide avec A sur $\mathbf{K}_2$ (on peut construire un tel opérateur en posant

$$\tilde{a}_i(P) = \psi(|P|^2)\, a_i(P) + kg'(|P|^2)\, p_i,$$

où ψ et g sont des fonctions de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ avec

$$\psi(t) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 2,$$
$$\psi(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 3,$$

g est une fonction convexe, $g(t) = 0$ pour $0 \leq t \leq 1$ et g est linéaire pour $t \geq 3$; k est une constante suffisamment grande) (7).

Pour tout $\nu > 0$, l'équation

$$-\nu\,\Delta v_\nu + \tilde{A}v_\nu = \tilde{\theta}(F - v_\nu)$$

admet une solution $v_\nu \in H_0^1(\Omega)$ [car l'opérateur $v \to -\nu\,\Delta v + \tilde{A}v - \tilde{\theta}(F - v)$ est monotone, hémicontinu et coercif de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$].

---

(7) *Cf.* Appendice.

D'après ce qui précède, $v_\nu \in \mathbf{K}_2$, et en passant à la limite quand $\nu \to 0$, on obtient une solution $v \in \mathbf{K}_2$ de l'équation

$$\tilde{A} v = \tilde{\theta}(F - v).$$

Il résulte enfin des hypothèses sur $\tilde{A}$ et $\tilde{\theta}$ que v est aussi une solution de l'équation (III.8).

Suite de la démonstration du théorème III.1. — Le lemme III.4 appliqué avec

$$\theta(t) = \left|\frac{t}{\varepsilon}\right|^{p'-2} \frac{t}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad F = u$$

montre que l'équation

$$u_\varepsilon + \varepsilon J_p A u_\varepsilon = u$$

admet une solution $u_\varepsilon \in \mathbf{K}_2$, avec $A u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$.

Dans le cas où $p = +\infty$, on utilise l'estimation uniforme en p,

$$\| Au \|_p \leq \| f \|_p, \quad \forall\, 1 < p < +\infty$$

(*cf.* Remarque I.4). Il en découle que $Au \in L^\infty(\Omega)$.

REMARQUE III.5. — Un choix convenable de la fonction θ du lemme III.4 permet d'obtenir des résultats analogues au théorème III.1 dans les espaces de Orlicz.

On suppose maintenant que la frontière $\partial\Omega$ de Ω est suffisamment régulière, et l'on remplace (III.1) par l'hypothèse plus restrictive

$$\sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(P)\,\xi_i \xi_j \geq \mu\, |\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \forall\, P \in \mathbf{R}^N, \qquad |P| \leq 1,$$

(μ désigne une constante > 0).

On a alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE III.6. — *Si* $N < p < +\infty$ *et* $f \in L^p(\Omega)$, *alors la solution* $u \in \mathbf{K}_2$ *de l'inéquation* (III.2) *appartient à* $H^{2,p}(\Omega)$. *En particulier, u appartient à* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *avec* $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$.

Ceci est une conséquence du théorème III.1 et des théorèmes de régularité pour la solution d'équations linéaires à coefficients discontinus et d'équations non linéaires (*cf.* O. LADYZENSKAJA et N. URAL'CEVA [7], C. MORREY [14], et G. STAMPACCHIA [17]).

REMARQUE III.7. — Le résultat de régularité obtenu est le meilleur possible.

Considérons en effet $\Omega =]0, 1[$, $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ et $f = 4$. Il est clair que la solution de l'inéquation (III.2) est définie par

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 < x < \dfrac{1}{4}, \\ -2x^2 + 2x - \dfrac{1}{8} & \text{»} \quad \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4}, \\ 1 - x & \text{»} \quad \dfrac{3}{4} < x < 1, \end{cases}$$

or u n'appartient pas à $H^3(\Omega)$, ni à $C^2(\Omega)$.

Le corollaire III.6 nous donne, en particulier, un résultat de régularité dans le cas où l'opérateur A est linéaire à coefficients constants.

Si l'on se restreint à des opérateurs linéaires, on peut encore obtenir un théorème de régularité lorsque les coefficients de A sont variables et le domaine Ω n'est pas nécessairement convexe.

III.2. **Cas où le domaine Ω est arbitraire et l'opérateur A est linéaire à coefficients variables.**

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment régulière.

Plus précisément, on désigne par $\delta(x)$ la distance d'un point $x \in \overline{\Omega}$ à la frontière $\partial\Omega$, et par

$$\partial\Omega_\eta = \{ x \in \overline{\Omega};\ \delta(x) < \eta \} \qquad (\eta > 0).$$

On suppose qu'il existe un nombre $r > 0$ tel que $\delta \in H^{2,\infty}(\partial\Omega_r)$. Cette hypothèse est en particulier satisfaite si $\partial\Omega$ est de classe C^2.

On considère l'opérateur

$$A = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

avec $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, et

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \qquad \nu > 0.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème III.8. — *Soit $1 < p < +\infty$; pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe une solution $u \in \mathbf{K}_2$ de l'inéquation*

(III.9) $$(f - Au, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{K}_2$$

De plus, $u \in H^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration. — Il est aisé de vérifier que l'opérateur A est pseudo-monotone (*cf.* H. Brezis [3]) de $H_0^{1,\infty}(\Omega)$ dans $H^{-1,1}(\Omega)$; par suite, pour tout $f \in H^{-1,1}(\Omega)$, il existe une solution $u \in \mathbf{K}_2$ de l'inéquation (III.9).

Pour démontrer la régularité de u, on se ramène d'abord au cas où l'opérateur A est *coercif* et de la forme

$$A = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \hat{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda$$

avec un *choix* convenable des fonctions $\hat{b}_i \in L^\infty(\Omega)$ et de la constante $\lambda > 0$, qui sera précisé dans la suite. Cette modification est licite, car les termes $b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \hat{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $(c - \lambda) u$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ (puisque $u \in \mathbf{K}_2$) et peuvent être regroupés avec f.

D'après la remarque I.7, appliquée avec $E = H_0^{1,\infty}(\Omega)$, $F = H^{-1,1}(\Omega)$ et $W = L^p(\Omega)$, il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $u \in \mathbf{K}_2$, l'équation

$$u_\varepsilon + \varepsilon J_p A u_\varepsilon = u \tag{III.10}$$

admet une solution $u_\varepsilon \in \mathbf{K}_2$ avec $A u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$, car, on en déduira que $A u \in L^p(\Omega)$, et donc $u \in H^{2,p}(\Omega)$ (*cf.* par exemple S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg [1]). Il est clair que l'équation

$$A u_\varepsilon + J_{p'} \left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} \right) = 0 \tag{III.11}$$

admet une solution unique $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$. Il reste à montrer que $u_\varepsilon \in \mathbf{K}_2$; on utilisera pour cela les lemmes suivants :

Lemme III.9. — *Il existe une fonction $\beta \in H^{2,\infty}(\Omega)$ qui vérifie*

$$\begin{cases} \beta = \delta & \textit{sur } \partial\Omega_{r/2}, \\ \beta \geq \delta & \textit{sur } \Omega. \end{cases} \tag{III.12}$$

Démonstration du lemme III.9. — On considère une fonction numérique $\chi(t)$, définie pour $0 \leq t \leq \operatorname{diam} \Omega$, de classe C^2, vérifiant

$$\begin{aligned} &\chi(t) = t && \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{2}, \\ &\chi(t) = \operatorname{diam}\Omega && \text{pour} \quad \frac{2r}{3} \leq t \leq \operatorname{diam}\Omega, \\ &\chi(t) \geq t && \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \operatorname{diam}\Omega. \end{aligned}$$

Il est évident qu'une telle fonction existe et que si l'on pose $\beta(x) = \chi(\delta(x))$, alors β appartient à $H^{2,\infty}(\Omega)$ et vérifie (III.12).

LEMME III.10. — *Soit* θ *une fonction numérique définie continue et croissante sur* $]-\infty, +\infty[$, *avec* $\theta \in L^\infty(-\infty, +\infty)$, $\theta' \in L^\infty(-\infty, +\infty)$ *et* $\theta(0) = 0$.

On peut choisir les fonctions $\hat{b}_i$ *et la constante* $\lambda > 0$, *indépendamment de* θ, *de sorte que pour tout* $F \in \mathbf{K}_2$ *l'équation*

$$Av = \theta(F - v) \tag{III.13}$$

admette une solution $v \in \mathbf{K}_2$.

Démonstration du lemme III.10. — L'opérateur $v \mapsto Av - \theta(F - v)$ est monotone, hémicontinu et coercif de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$; par conséquent, l'équation (III.13) admet une solution $v \in H_0^1(\Omega)$. Remarquons que, d'après (III.13), $Av \in L^\infty(\Omega)$, donc $v \in H^{2,t}(\Omega)$ et $\theta(F - v) \in H^{1,t}(\Omega)$ pour tout $1 < t < +\infty$. Par suite, $v \in H^{3,t}(\Omega)$ pour tout $1 < t < +\infty$.

Procédons comme dans la démonstration du lemme III.4 et montrons d'abord que $|\operatorname{grad} v| \leqq 1$ sur $\partial\Omega$.

Soit

$$\mathrm{M} = \max\left\{\sup_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \, \partial x_j}, 0\right\}.$$

On choisit $\hat{b}_i(x) = \mathrm{M} \dfrac{\partial \beta}{\partial x_i}$ et $\lambda > \dfrac{2M}{r}$, tel que l'opérateur

$$A = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_i \hat{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda$$

soit coercif.

On a, d'après (III.13),

$$A(v - \beta) + A\beta = \theta(F - v).$$

Or

$$A\beta = -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \, \partial x_j} + \mathrm{M}\,|\operatorname{grad}\beta|^2 + \lambda\beta \qquad \text{et} \qquad A\beta \geqq 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

En effet, $|\operatorname{grad}\delta| = 1$ p. p. sur Ω, donc $M|\operatorname{grad}\beta|^2 = M$ sur $\partial\Omega_{r/2}$; ceci montre que $A\beta \geqq 0$ sur $\partial\Omega_{r/2}$. Sur l'ensemble $\Omega - \partial\Omega_{r/2}$, on a $\lambda\beta \geqq \lambda\delta \geqq M$, ce qui assure $A\beta \geqq 0$ sur $\Omega - \partial\Omega_{r/2}$.

Il vient

$$A(v - \beta) - \theta(F - v) \leqq 0. \tag{III.14}$$

Le principe du maximum faible [8] (utilisant la technique des troncatures) montre que, $v \leqq \beta$ sur Ω, car si l'on multiplie (III.14) par

---

[8] Si la frontière $\partial\Omega$ de Ω est de classe C^2, de sorte que $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$, alors il suffit d'appliquer le principe du maximum classique.

$\max\{v-\beta, 0\}$, on obtient

$$\lambda_0 \int_{[v \geqq \beta]} |v-\beta|^2 \, dx \leqq \int_{[v \geqq \beta]} \theta(F-v)(v-\beta) \, dx \leqq 0 \qquad \text{avec} \quad \lambda_0 > 0$$

puisque

$$F \leqq \beta \leqq v \quad \text{sur } [v \geqq \beta]$$

et

$$\theta(F-v) \leqq 0 \quad \text{sur } [v \geqq \beta].$$

D'où

$$v \leqq \beta \quad \text{sur } \Omega.$$

On démontre de même que $v \geqq -\beta$ sur Ω et l'on en déduit que

$$|\operatorname{grad} v| \leqq 1 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Pour prouver que $|\operatorname{grad} v| \leqq 1$ sur Ω, on utilise un artifice analogue à celui employé par O. Oleinik [15] en posant

$$\gamma = |\operatorname{grad} v|^2 = \sum_k \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right|^2;$$

γ appartient à $H^{2,t}(\Omega)$ pour tout $1 < t < +\infty$.

Il vient

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 2 \sum_k \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right) = 2 \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + 2 \sum_k a_{ij} \frac{\partial^3 v}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + 2 \sum_k a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \, \partial x_k}.$$

D'autre part, en dérivant l'équation (III.13) par rapport x_k, puis en multipliant par $\dfrac{\partial v}{\partial x_k}$, on obtient

$$\text{(III.15)} \qquad -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^3 v}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_i \hat{b}_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \, \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial \hat{b}_i}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \lambda \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right|^2 = \theta'(F-v)\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) \frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

En sommant les relations (III.15) par rapport k, on a

$$\text{(III.16)} \qquad -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\right)+R+(\lambda-\lambda_1)\gamma$$
$$=\theta'(F-v)\,(\operatorname{grad}F\operatorname{grad}v-|\operatorname{grad}v|^2),$$

où

$$R=\sum_{i,j,k}a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\,\partial x_k}$$
$$+\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)\frac{\partial v}{\partial x_k}$$
$$+\sum_{i,k}\hat{b}_i\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial v}{\partial x_k}+\frac{\partial\hat{b}_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_k}+\lambda_1\sum_k\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2.$$

Il est clair que si λ_1 est suffisamment grand (supérieur à une constante dépendant uniquement des a_{ij} et de leurs dérivées premières ainsi que de β et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2), alors $R\geqq 0$.

On suppose donc $\lambda>\lambda_1$, et, grâce à (III.16), on a

$$\text{(III.17)} \qquad -\frac{1}{2}\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\right)+(\lambda-\lambda_1)\gamma$$
$$\leqq \frac{1}{2}\theta'(F-v)\,(1-\gamma).$$

On sait déjà que $\gamma\leqq 1$ sur $\partial\Omega$. Le principe du maximum faible appliqué à (III.17) montre que $\gamma\leqq 1$ sur Ω; et par conséquent $v\in\mathbf{K}_2$.

Suite de la démonstration du théorème III.8. — On considère une suite $\theta_n(t)$ de fonction numériques définies, continues et croissantes sur $]-\infty,+\infty[$, telles que $\theta_n\in L^\infty(-\infty,+\infty)$, $\theta'_n\in L^\infty(-\infty,+\infty)$ avec $\theta_n(0)=0$, qui convergent uniformément vers $\theta(t)=\left|\frac{t}{\varepsilon}\right|^{p'-2}\frac{t}{\varepsilon}$ sur l'intervalle $[-C,+C]$, $C>2\operatorname{diam}\Omega$.

On choisit $\hat{b}_i$ et λ comme au lemme III.10, et par suite, l'équation

$$A\,u_n=\theta_n(u-u_n)$$

admet une solution $u_n\in\mathbf{K}_2$.

On passe enfin à la limite quand $n\to+\infty$; il est clair que u_n converge vers u_ε solution de l'équation

$$A\,u_\varepsilon+J_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon-u}{\varepsilon}\right)=0.$$

De plus, $u_\varepsilon\in\mathbf{K}_2$, ce qui achève la démonstration du théorème III.8.

§ IV. Autres théorèmes de régularité.

La régularité de la solution d'une inéquation dépend de la nature du convexe. On peut obtenir des situations différentes de celles des paragraphes II et III.

IV.1. — Considérons d'abord le convexe

$$\mathbf{K}_3 = \{ v \in H^1(\Omega);\ v \geqq 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

On sait (*cf.* J.-L. Lions [11]) que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ (9), il existe un $u \in \mathbf{K}_3 \cap H^2(\Omega)$ vérifiant l'inéquation

$$\text{(IV.1)} \qquad \int_\Omega (f + \Delta u - u)(v - u)\, dx \leqq 0, \quad \forall\, v \in \mathbf{K}_3.$$

De plus, la solution de (IV.1) est caractérisée par

$$\text{(IV.2)} \quad \left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega, \\ u \geqq 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \geqq 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\dfrac{\partial}{\partial n} \text{ désigne la dérivée normale extérieure}\right),} \\ u\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

L'exemple suivant, dû à E. Shamir, montre qu'en général u n'appartient pas à $H^{2,4}(\Omega)$ [ni à $H^3(\Omega)$] si $f \in C^1(\overline{\Omega})$ (10).

Soit $\Omega = \{ x, y \in \mathbf{R}^2;\ y > 0 \}$. On pose

$$u(x, y) = \zeta(|z|^2) \operatorname{Re} z^{3/2}, \qquad z = x + iy,$$

où $\zeta(r)$ est une fonction très régulière telle que

$$\begin{array}{lll} 0 \leqq \zeta(r) \leqq 1 & \text{pour} & r \geqq 0, \\ \zeta(r) = 1 & \text{pour} & 0 \leqq r \leqq 1, \\ \zeta(r) = 0 & \text{pour} & r \geqq 2. \end{array}$$

Il est aisé de vérifier que l'on a

$$-\Delta u + u = f \quad \text{sur } \Omega,$$

(9) Ce résultat est énoncé dans [11] lorsque $f \in H^1(\Omega)$, mais la même démonstration reste valable si $f \in L^2(\Omega)$.

(10) La régularité de la solution des problèmes mêlés est étudiée en détail par E. Shamir dans [16].

où f est une fonction de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et à support compact :

$$u \geqq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geqq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{3}{2}\zeta(|z|^2)\,\mathrm{Im}\, z^{1/2}\right)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

D'autre part, u n'appartient pas à $H^{2,4}(\Omega)$, ni à $H^3(\Omega)$.

IV.2. — Par contre, pour certains convexes, autres que des variétés linéaires, on peut obtenir, avec des données régulières, des solutions aussi régulières que l'on désire.

On se bornera ici à un exemple très simple.

Soient $A = -\Delta$, opérant de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et

$$\mathbf{K}_4 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ \| v \|_2 \leqq 1 \}.$$

Soient $f \in H^{-1}(\Omega)$, et $u \in \mathbf{K}_4$, la solution de l'inéquation

$$\text{(IV.3)} \qquad (f - A u,\ v - u) \leqq 0, \quad \forall\, v \in \mathbf{K}_4.$$

Il résulte de l'inéquation (IV.3) qu'il existe une constante $\lambda \geqq 0$ telle que

$$\text{(IV.4)} \qquad A u + \lambda u = f.$$

En effet, on a :

— ou bien $\| u \|_2 < 1$ et $A u = f$, donc (IV.4) est vérifié avec $\lambda = 0$;

— ou bien $\| u \|_2 = 1$ et alors

$$(u,\ v - u) \leqq 0, \quad \forall\, v \in \mathbf{K}_4,$$

par suite, il existe $\lambda \geqq 0$ tel que l'équation (IV.4) soit satisfaite.

Les théorèmes classiques de régularité pour les équations linéaires s'appliquent à l'équation (IV.4).

Signalons encore le problème analogue associé au convexe

$$\mathbf{K}_5 = \{ v \in H_0^1(\Omega);\ \| v \|_p \leqq 1 \} \qquad \text{avec} \quad 1 < p < +\infty.$$

Le convexe $\mathbf{K}_5$ est fermé dans $H_0^1(\Omega)$. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe $u \in \mathbf{K}_5$ vérifiant l'inéquation

$$\text{(IV.5)} \qquad (f - A u,\ v - u) \leqq 0, \quad \forall\, v \in \mathbf{K}_5.$$

Le problème (IV.5) s'interprête de la façon suivante. On a

— ou bien $\| u \|_p < 1$ et $A u = f$;

— ou bien $\| u \|_p = 1$ et il existe une constante $\lambda \geqq 0$ telle que

$$Au + \lambda \, | u |^{p-2} u = f.$$

Il est aisé de voir que si $f \in L^p(\Omega)$, alors $u \in H^{2,p}(\Omega)$ et si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in H^{2,t}(\Omega)$ pour tout $1 < t < +\infty$; en particulier, si $p > N$, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ pour $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ [pour tout $0 < \alpha < 1$ si $f \in L^\infty(\Omega)$].

Dans le cas où p est un entier pair, il est possible de démontrer que la solution est assez régulière si f est régulière. Dans les autres cas, la régularité que l'on peut obtenir dépend de p.

Le cas limite $p = +\infty$, c'est-à-dire

$$\mathbf{K}_6 = \{ v \in H_0^1(\Omega) ; \, | v | \leqq 1 \ \text{ p. p. sur } \Omega \}$$

entre dans le cadre de la remarque II.2.

Plus généralement, on pourrait considérer le convexe

$$\left\{ v \in H_0^1(\Omega) ; \ \int_\Omega \varphi(v) \, dx \leqq 1 \right\},$$

où φ est une fonction convexe.

L'équation associée est

$$Au + \lambda \varphi'(u) = f,$$

et la régularité de u dépend de celle de φ.

APPENDICE.

Le procédé employé dans la démonstration du lemme III.4, pour la construction de l'opérateur $\tilde{a}$, peut être généralisé de la façon suivante.

Soient X un espace de Banach et a un opérateur monotone, hémicontinu, borné de X dans X'.

Soit M un opérateur monotone hémicontinu de X dans X' tel que

$$Mu = 0 \qquad \text{si} \quad \| u \| \leqq 1$$

et

$$(Mu - Mv, \, u - v) \geqq \alpha \, \| u - v \|^2, \qquad \alpha > 0,$$

$$\forall \, u, v, \qquad \text{avec} \quad 2 \leqq \| u \|, \qquad \| v \| \leqq 3.$$

Alors il existe un opérateur monotone hémicontinu $\tilde{a}$ de X dans X' et une constante $k \geqq 0$ vérifiant

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u) &= a(u) \qquad \text{si} \quad \| u \| \leqq 1, \\ \tilde{a}(u) &= kMu \qquad \text{si} \quad \| u \| \geqq 3. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit ψ une fonction numérique $\geqq 0$, régulière telle que

$$\psi(r) = 1, \quad \text{si} \quad 0 \leqq r \leqq 2,$$
$$\psi(r) = 0, \quad \text{si} \quad r \geqq 3.$$

On pose

$$\tilde{a}(u) = \psi(\| u \|)\, a(u) + kMu.$$

Il est clair que $\tilde{a}$ est hémicontinu.

Montrons que $\tilde{a}$ est monotone.

1° Si $\| u \|, \| v \| \leqq 2$, on a

$$\tilde{a}(u) = a(u) + kMu,$$
$$\tilde{a}(v) = a(v) + kMv,$$

d'où

$$(\tilde{a}(u) - \tilde{a}(v), u - v) \geqq 0.$$

2° Si $\| u \|, \| v \| \geqq 3$, on a

$$\tilde{a}(u) = kMu, \qquad \tilde{a}(v) = kMv,$$

d'où

$$(\tilde{a}(u) - \tilde{a}(v), u - v) \geqq 0.$$

3° Si $2 \leqq \| u \|, \| v \| \leqq 3$, on a

$$\begin{aligned}(\tilde{a}(u) - \tilde{a}(v), u - v) &= (\psi(\| u \|)\, a(u) - \psi(\| v \|)\, a(v), u - v) \\ &\quad + k(Mu - Mv, u - v) \\ &\geqq \psi(\| u \|)(a(u) - a(v), u - v) \\ &\quad + (\psi(\| u \|) - \psi(\| v \|))(a(v), u - v) \\ &\quad + k\alpha \| u - v \|^2 \\ &\geqq -c \| u - v \|^2 + k\alpha \| u - v \|^2,\end{aligned}$$

où

$$c = \operatorname{Max} \left\{ \sup_{2 \leqq \| v \| \leqq 3} a(v), \sup_{2 \leqq r \leqq 3} \psi'(r) \right\}.$$

Donc $(\tilde{a}(u) - \tilde{a}(v), u - v) \geqq 0$ si k est suffisamment grand.

On achève la démonstration en considérant deux points arbitraires u, v et en appliquant ce qui précède aux extrémités des intervalles déterminés par les boules de rayon 2, 3 sur la droite joignant u, v.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). — Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I., *Comm. pure and appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 623-727.

[2] ANNIN (B. D.). — Existence and uniqueness of the solution of the elastic-plastic torsion problem for a cylindrical bar of oval cross-section, *P. J. of appl. Math. and Mech.*, t. 29, 1965, p. 1038-1047.

[3] BREZIS (Haim R.). — Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 18, 1968 (à paraître).

[4] BROWDER (Felix E.). — Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 71, 1965, p. 780-785.

[5] BROWDER (Felix E.). — On a theorem of Beurling and Livinsgton, *Canadian J. of Math.*, t. 17, 1965, p. 367-372.

[6] HARTMAN (P.) and STAMPACCHIA (G.). — On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Math.*, Uppsala, t. 115, 1966, p. 271-310.

[7] LADYŽENSKAJA (O. A.) et URAL'CEVA (N. N.). — *Équations linéaires et quasi linéaires de type elliptique* [en russe]. — Moskva, 1964.

[8] LANCHON (Hélène) et DUVAUT (Georges). — Sur la solution du problème de la torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, Série A, p. 520-523.

[9] LEWY (Hans). — On a variational problem with inequalities on the boundary, *J. of Math. and Mech.*, t. 17, 1968, p. 861-884.

[10] LEWY (H.) and STAMPACCHIA (G.). — On the regularity of the solution of a variational inequality, *Comm. pure and appl. Math.* (à paraître).

[11] LIONS (Jacques-Louis). — *Équations aux dérivées partielles et calcul des variations.* Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 2e semestre 1967 (multigr.).

[12] LIONS (J.-L.) and STAMPACCHIA (G.). — Variational inequalities, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 20, 1967, p. 493-519.

[13] LITTMAN (W.), STAMPACCHIA (G.) and WEINBERGER (H. F.). — Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 17, 1963, p. 43-77.

[14] MORREY (Charles, Jr). — *Multiple integrals in the calculus of variations.* — Berlin, Springer-Verlag, 1966 /*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 130).

[15] OLEINIK (O. A.). — On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 163, 1965, p. 577-580; traduction : *Soviet Mathematics*, t. 6, 1965, p. 972-976.

[16] SHAMIR (E.). — Regularity of mixed second-order elliptic problems, *Israël math. J.*, vol. 6, 1968, p. 150-168.

[17] STAMPACCHIA (Guido). — Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 15, 1965, p. 189-257.

[18] STAMPACCHIA (Guido). — Regularity of solutions of some variational inequalities, *Proceedings of Symposium on nonlinear functional analysis* (à paraître).

[19] TING (T. W.). — Elastic-plastic Torsion Problem II, *Archive for Rat. Mech and Analysis*, t. 25, 1967, p. 342-366.

(Manuscrit reçu le 10 mai 1968.)

Haïm R. BREZIS,
28, rue Berthollet,
75-Paris, 5e.

Guido STAMPACCHIA,
Istituto Matematico,
Università di Pisa,
Pisa (Italie).