Annales scientifiques de l'É.N.S.

H. Padé

Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 3-93 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__S3_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA

REPRÉSENTATION APPROCHÉE D'UNE FONCTION

PAR

DES FRACTIONS RATIONNELLES,

PAR M. H. PADÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

INTRODUCTION.

Les différentes formes analytiques que l'on a appris peu à peu à donner aux fonctions ont acquis une importance toujours plus grande, à mesure qu'on les a reconnues capables de mettre en évidence des propriétés nouvelles. C'est ainsi que les séries entières primitivement considérées comme de simples formules d'approximation sont devenues la base de l'étude des points singuliers, ainsi encore qu'on a trouvé dans les produits de facteurs linéaires, qui ne semblaient propres qu'à mettre en évidence les zéros des fonctions, un moyen de faire ressortir la périodicité; et de même pour les séries de fractions simples, les séries trigonométriques, les intégrales définies, etc.

Il est cependant une forme analytique qui semble être restée en dehors de ce progrès, celle de fraction continue. Il y a plus d'un siècle qu'Euler a donné le premier exemple du développement d'une fonction en fraction continue, plus d'un siècle aussi que Lagrange a établi, sur des exemples particuliers, la propriété fondamentale des réduites; et bien que la question de la convergence ait dû infailliblement se poser à Gauss comme à Jacobi, il a fallu attendre jusqu'à Riemann pour en avoir le premier exemple. Le cas de la fraction de Gauss qu'il a traité, comme les beaux résultats acquis récemment par Halphen, donnent les seuls exemples obtenus jusqu'ici de fractions continues algébriques représentant des fonctions uniformes affectées de coupures. On ne saurait dire qu'ils constituent une théorie des fractions continues algébriques comme il existe une théorie des séries entières; peut-être, pour en apercevoir l'origine, fallait-il prendre les choses de beaucoup plus terre à terre que ne le pouvaient faire ces illustres maîtres.

Bien loin, en effet, d'en être déjà à rechercher quelles sont les propriétés analytiques que peut mettre en évidence le développement en fraction continue d'une fonction, il nous paraît que cette expression, *le développement en fraction continue d'une fonction*, ne laisse pas que d'être restée jusqu'ici fort obscure.

Les fractions continues, tout comme les séries, se divisent en deux grandes catégories suivant que les éléments sont des constantes ou qu'ils sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables; ces dernières seules doivent être comprises sous le nom de *fractions continues algébriques*. Parmi les séries dont les termes sont des fonctions d'une variable, les séries procédant suivant les puissances entières et positives de cette variable forment un groupe très spécial, quoique le plus important et le premier étudié, et cette expression *le développement en série entière d'une fonction* a, comme on le démontre, un sens parfaitement précis. Or quand, sortant des exemples particuliers, on se propose d'étudier en général les fractions continues algébriques, on éprouve quelque embarras pour fixer le groupe de fractions continues que l'on veut considérer; les exemples de développement que l'on connaît, en nombre restreint pour chaque fonction et différent d'une fonction à l'autre, présentent une telle diversité que l'on a quelque peine à discerner une forme générale, et rien n'apparaît alors comme plus vague que cette expression *le développement d'une fonction en fraction continue algébrique*.

L'objet de notre travail est surtout l'introduction de la forme de fraction continue algébrique qui nous semble devoir jouer un rôle analogue à celui que jouent les séries entières dans la théorie des séries; nous lui avons donné le nom de *fraction continue simple*. Sans nous arrêter à détailler ici les propriétés qui justifient cette introduction, et les conséquences qu'elle comporte, nous indiquerons brièvement l'ordre que nous avons suivi dans notre exposition.

Dans la première Partie, il n'est nullement question de fractions continues; nous y étudions l'ensemble des fractions rationnelles approchées auxquelles donne naissance une série entière; cette série peut être convergente ou divergente; c'est seulement pour faciliter le langage et donner plus de précision aux énoncés que nous l'avons supposée convergente. En réalité, comme on le reconnaîtra plus tard, la série n'est que l'une des fractions continues simples du Tableau de fractions rationnelles approchées que l'on va construire, et il serait aussi bien défini par l'une quelconque des autres fractions continues simples qui lui correspondent, si l'on n'était pas encore dans l'ignorance de leur existence.

La seconde Partie est consacrée à l'introduction des fractions continues simples et à l'étude de celles qui correspondent à un Tableau donné de fractions rationnelles approchées. Nous y avons à peine touché la question de la convergence et nous sommes limité aux propositions les plus générales; nous n'avons même fait qu'indiquer l'une des conséquences les plus remarquables qu'elle semble comporter, à savoir la possibilité de l'introduction dans le calcul des séries entières divergentes; ce sont là, en effet, des sujets difficiles qui demandent à être encore approfondis et nous auraient entraîné hors des limites à donner à ce premier travail.

Nous voudrions avoir réussi à indiquer la véritable voie à suivre pour l'étude des fractions continues algébriques; nous avons été amené à nous occuper de cette question par une parole de M. Hermite, recueillie dans une de ses leçons, et par laquelle il laissait entrevoir les richesses que cachait sans doute encore cette théorie. Puissent ces modestes pages être le principe de la réalisation de la profonde pensée de notre illustre maître.

PREMIÈRE PARTIE.

LES FRACTIONS RATIONNELLES APPROCHÉES D'UNE FONCTION.

I. — Préliminaires.

1. Dans les applications du calcul, il est ordinairement inutile, sinon impossible, d'obtenir le résultat avec une complète exactitude. Le plus souvent, il suffit seulement d'en connaître une valeur approchée telle que l'erreur commise en adoptant cette valeur au lieu du résultat exact soit inférieure à une limite donnée *a priori*. De là résultent des simplifications souvent considérables, puisque l'on peut négliger, dans le cours des calculs, tout ce qui n'altérerait le résultat final que d'une quantité inférieure à la limite de l'erreur avec laquelle l'approximation doit être obtenue.

On conçoit ainsi combien il est important de savoir obtenir des valeurs approchées d'un nombre qui satisfassent à des conditions d'approximation imposées à l'avance. En Arithmétique, c'est le but même de la théorie des fractions décimales. Ces deux propositions sont fondamentales dans cette théorie :

I. Il y a une fraction décimale ayant au plus n chiffres décimaux, et une seule, qui soit approchée d'un nombre donné, par défaut, à $\frac{1}{10^n}$ près;

II. Les approximations obtenues avec les fractions décimales approchées par défaut qui correspondent à des valeurs croissantes de n ne sauraient diminuer; elles conservent la même valeur ou bien elles vont en croissant.

Il est naturellement aussi important de savoir obtenir une fonction qui représente une fonction donnée avec une approximation d'ordre fixé à l'avance. Le développement des fonctions en séries entières offre l'exemple d'une telle recherche; une série entière, quand elle est convergente, est une expression analytique qui met en évidence une suite de polynômes de plus en plus approchés de la fonction qu'elle définit. C'est sous cet unique point de vue que les séries entières ont été considérées par les premiers inventeurs. Newton, dans son Livre *Analysis per æquationes numerorum terminorum infinitas*, voit dans une telle série l'analogue, pour la représentation des fonctions, des fractions décimales employées pour la représentation des nombres. On retrouve ici ces deux propositions semblables à celles déjà rencontrées dans la théorie des fractions décimales:

I. Il y a un polynôme de degré n au plus, et un seul, qui, dans le voisinage de la valeur zéro de x, puisse représenter une fonction avec une erreur infiniment petite d'ordre au moins égal à $n+1$;

II. Les approximations obtenues avec les polynômes approchés qui correspondent à des valeurs croissantes de n ne sauraient diminuer; elles conservent la même valeur ou bien elles vont en croissant.

2. La représentation d'une fonction donnée par un polynôme n'est évidemment qu'un cas particulier de la représentation d'une fonction par une fonction algébrique.

Soit y une fonction de x définie, pour les valeurs de x voisines de zéro, par une série entière. Soient, d'autre part, P, Q, ..., S, T, $\alpha+1$ polynômes en x dont les degrés ne dépassent pas respectivement les nombres p, q, ..., s, t, et dont les coefficients sont indéterminés. Développons la fonction

$$Py^{\alpha}+Qy^{\alpha-1}+\ldots+Sy+T$$

suivant les puissances croissantes de x; les coefficients du développement sont des fonctions linéaires homogènes des coefficients des polynômes P, Q, ..., T. Le nombre de ces derniers coefficients est

$$p+1+q+1+\ldots+t+1=p+q+\ldots+t+\alpha+1.$$

Si l'on égale à zéro les

$$p+q+\ldots+t+\alpha$$

premiers coefficients du développement, on obtient un système d'équations qui déterminent, en général, les rapports des coefficients des polynômes P, Q, ..., T, et l'on a

$$Py^{\alpha}+Qy^{\alpha-1}+\ldots+Sy+T=(x^{p+q+\ldots+t+\alpha}),$$

où $(x^{p+q+\dots+t+\alpha})$ représente un infiniment petit dont l'ordre est au moins égal à $p+q+\dots+t+\alpha$.

Considérons maintenant la fonction algébrique Y définie par l'équation

$$PY^\alpha + QY^{\alpha-1} + \dots + SY + T = 0;$$

retranchant membre à membre cette égalité de la précédente, on obtient une égalité de la forme

$$(y - Y)A = (x^{p+q+\dots+t+\alpha}),$$

où A est une fonction de x qui, en général, ne s'annule pas pour $x = 0$. Quand il en est ainsi, on a donc

$$y = Y + (x^{p+q+\dots+t+\alpha}),$$

et l'on voit que la fonction algébrique Y représente la fonction y avec une approximation d'ordre au moins égal à

$$p + q + \dots + t + \alpha.$$

3. Il ne semble pas que jusqu'ici la détermination et l'étude des polynômes P, Q, ..., T aient été faites dans aucun cas particulier; une question tout à fait analogue a cependant été traitée par M. Hermite, à savoir : la détermination des systèmes de polynômes entiers en x

$$U, \quad V, \quad W$$

tels que le développement de l'expression

$$U \sin x + V \cos x + W$$

commence par la plus haute puissance possible de la variable ([1]). L'objet de cette première Partie de notre travail est l'étude du cas simple où la fonction algébrique Y est une fraction rationnelle, où, par suite, $\alpha = 1$; nous avons surtout en vue de rechercher quelles sont, dans ce cas, les deux propositions analogues à celles que nous avons énoncées pour les fractions décimales et pour les polynômes.

([1]) Extrait d'une Lettre de M. Ch. Hermite à M. Paul Gordan (*Journal de Crelle*, t. 76, p. 303).

II. — Le théorème fondamental.

4. Soit y une fonction développable, dans le voisinage de la valeur zéro de la variable x, en une série procédant suivant les puissances entières positives et croissantes de cette variable, et ne s'annulant pas pour $x = 0$:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad a_0 \neq 0.$$

Soit (p, q) un couple de nombres, égaux ou inégaux, pris dans la suite $0, 1, 2, 3, \ldots$. Considérons l'ensemble des fractions rationnelles irréductibles dont le numérateur est au plus de degré p et le dénominateur au plus de degré q. Nous nous proposons de déterminer, parmi les fractions de cet ensemble, celles qui représentent le mieux la fonction dans le voisinage de la valeur zéro de x; c'est-à-dire celles qui, x étant infiniment petit, diffèrent de la fonction d'une quantité dont l'ordre infinitésimal soit supérieur ou au moins égal à celui que l'on obtient en employant une quelconque des autres fractions.

5. Supposons d'abord q différent de zéro, et soit

$$S = l_0 + l_1 x + \ldots + l_q x^q$$

un polynôme de degré q, à coefficients indéterminés. Effectuons le produit de ce polynôme par la série qui représente y; on obtient

$$Sy = \sum_0^\infty {}_i (a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q) x^i,$$

en regardant les lettres a affectées d'indices négatifs comme représentant zéro. Égalons à zéro les coefficients des termes de degrés $p+1$, $p+2, \ldots, p+q$,

$$a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q = 0 \qquad (i = p+1, \ldots, p+q);$$

on a ainsi un système de q équations linéaires homogènes entre les $q+1$ coefficients indéterminés $l_0, \ldots, l_q$. Il est toujours possible de satisfaire à ces équations par un système de valeurs des inconnues tel qu'elles ne soient pas toutes nulles. Si l'un au moins des q déterminants déduits de la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{p+1} & a_p & \ldots & a_{p-q+1} \\ a_{p+2} & a_{p+1} & \ldots & a_{p-q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} & \ldots & a_p \end{array}\right|,$$

par la suppression d'une colonne quelconque, est différent de zéro, toutes les inconnues sont déterminées à un même facteur constant près; si tous les déterminants sont nuls, plusieurs d'entre elles peuvent, au contraire, être prises arbitrairement. Nous ne considérerons jamais comme distinctes, dans tout ce qui suivra, deux solutions où les valeurs des inconnues seraient proportionnelles, et ainsi nous dirons, dans le cas où l'un des déterminants est différent de zéro, que le système admet une seule solution.

Parmi toutes les solutions, adoptons l'une de celles pour lesquelles la suite $l_0, l_1, \ldots, l_q$ commence par un plus grand nombre de zéros que pour toute autre. Le polynôme S est alors divisible par une puissance de x d'exposant au moins égal à celui que l'on obtiendrait en adoptant toute autre solution. Nous appellerons ω_{pq} cet exposant, qui peut évidemment être zéro. Les coefficients $l_0, l_1, \ldots, l_q$ étant ainsi déterminés, on a

$$Sy = R + (x^{p+q+1}),$$

où R est le polynôme

$$\sum_0^p {}_i (a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q) x^i,$$

dont le degré est au plus égal à p, et (x^{p+q+1}) un infiniment petit dont l'ordre est au moins égal à $p+q+1$.

Si q était égal à zéro, S serait une constante l_0; nous prendrons alors pour R le polynôme qui, dans la série Sy, précède le terme en x^{p+1}. Dans tous les cas l'égalité précédente subsiste donc.

Les polynômes R et S ne sont pas nécessairement premiers entre eux; en particulier, si ω_{pq} n'est pas zéro, le polynôme R doit être divisible par $x^{\omega_{pq}}$. Le premier membre de l'équation précédente est, en effet, un infiniment petit d'ordre au moins égal à ω_{pq}, et il doit en être de même du second. Or, ω_{pq} étant au plus égal à q, et par suite étant plus petit que $p+q+1$, $x^{\omega_{pq}}$ doit se trouver en facteur dans le polynôme R. Ce fait se vérifie d'ailleurs immédiatement à l'inspection des coefficients de ce polynôme.

Soient U, V les quotients des polynômes R, S divisés par leur plus grand commun diviseur, on a

$$Vy = U + (x^{p+q+1-\omega_{pq}})$$

ou, comme il y a sûrement dans V un terme constant différent de zéro,

$$y = \frac{U}{V} + (x^{p+q+1-\omega_{pq}}).$$

Nous avons ainsi formé une fraction rationnelle irréductible $\frac{U}{V}$, dont les termes ont des degrés au plus égaux respectivement à $p-\omega_{pq}$, $q-\omega_{pq}$, et qui diffère de la fonction y d'un infiniment petit dont l'ordre est au moins égal à $p+q+1-\omega_{pq}$, assurément supérieur à la somme des degrés des termes de la fraction.

Soit maintenant $\frac{U'}{V'}$ une fraction rationnelle irréductible dont les termes sont des polynômes de degrés respectivement égaux, au plus, à p et q; supposons que la différence $y - \frac{U'}{V'}$ soit un infiniment petit d'ordre au moins égal à $p+q+1-\omega_{pq}$, en sorte que l'on ait

$$y = \frac{U'}{V'} + (x^{p+q+1-\omega_{pq}});$$

retranchées membre à membre, les deux dernières égalités donnent

$$\frac{U'}{V'} - \frac{U}{V} = (x^{p+q+1-\omega_{pq}})$$

ou

$$U'V - V'U = VV'(x^{p+q+1-\omega_{pq}}).$$

Cette égalité fait voir que le premier membre est identiquement nul; car, s'il n'en était pas ainsi, il serait ou une constante, ou un polynôme de degré au plus égal à $p+q-\omega_{pq}$, et ne serait dans aucun cas infiniment petit d'ordre au moins égal à $p+q+1-\omega_{pq}$ comme le second membre. On a donc

$$U'V - V'U = 0$$

et, par suite,

$$\frac{U'}{V'} = \frac{U}{V}.$$

Ces deux fractions, étant irréductibles, sont identiques, et nous pouvons énoncer la proposition suivante qui est fondamentale dans cette théorie :

I. *Parmi toutes les fractions rationnelles irréductibles dont les termes ont des degrés égaux au plus à p pour le numérateur, à q pour le dénominateur, p et q étant deux nombres, égaux ou inégaux, pris dans la suite* $0, 1, 2, 3, \ldots,$ *il y en a une,* $\frac{U}{V}$, *qui fournit une approximation dont l'ordre est supérieur à celui de l'approximation fournie par une quelconque des autres fractions.*

6. Cette proposition est la première de celles que nous avons annoncées dans le n° 3, et elle résout complètement la question du n° 4; mais on peut compléter en quelque sorte l'énoncé précédent au moyen des simples remarques qui suivent.

Le nombre ω_{pq} est au plus égal à q; il est aisé de voir qu'il est aussi au plus égal à p. Si, en effet, ω_{pq} était plus grand que p, comme le polynôme R, ainsi que nous l'avons établi, doit être divisible par $x^{\omega_{pq}}$ et que ce polynôme est au plus de degré p, il serait identiquement nul. Or ceci ne peut avoir lieu, car alors on aurait

$$y = (x^{p+q+1-\omega_{pq}})$$

et la fonction y s'annulerait avec x, tandis que l'hypothèse contraire a été faite. On voit encore que R ne peut être divisible par une puissance de x d'exposant plus grand que ω_{pq}, car on en conclurait encore la nullité de la fonction y pour $x = 0$; ainsi :

Les polynômes U *et* V *ont l'un et l'autre un terme constant différent de zéro ;* ω_{pq} *désignant zéro ou un entier positif au plus égal au plus petit des nombres p et q, les degrés des termes* U, V *ont respectivement pour limite supérieure* $p - \omega_{pq}$, $q - \omega_{pq}$; *l'ordre de l'approximation a pour limite inférieure* $p + q + 1 - \omega_{pq}$.

7. A chaque couple (p, q) de nombres de la suite $0, 1, 2, 3, \ldots$ correspond *une fraction rationnelle approchée* pour la fonction y; ces fractions forment donc un ensemble (E) complètement défini et se présentent comme les termes d'une suite à double entrée; nous les écrirons dans les cases d'un Tableau analogue à celui de la multiplication, illimité à droite et en bas; les fractions d'une même file horizontale correspondront à une même valeur de q, celles d'une même file verticale à une même valeur de p. Dans la première file horizontale figurent ainsi les polynômes approchés successifs déduits de la série qui représente y.

Nous donnons ici trois exemples de tels Tableaux présentant chacun des particularités diverses. Chaque case renferme, outre la fraction qui lui correspond, deux nombres dont le premier est la limite inférieure $p+q+1-\omega_{pq}$ de l'ordre de l'approximation, et l'autre cet ordre lui-même.

$$y = \frac{1 + x - x^3}{1 - x^3} = 1 + x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + x^{16} + \dots$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1 1, 1	$1+x$ 2, 4	$1+x$ 3, 4	$1+x$ 4, 4	$1+x+x^4$ 5, 7	$1+x+x^4$ 6, 7	$1+x+x^4$ 7, 7	$1+x+x^4+x^7$ 8, 10
1	$\frac{1}{1-x}$ 2, 2	$1+x$ 3, 4	$1+x$ 3, 4	$1+x$ 4, 4	$1+x+x^4$ 6, 7	$1+x+x^4$ 6, 7	$1+x+x^4$ 7, 7	$1+x+x^4+x^7$ 9, 10
2	$\frac{1}{1-x+x^2}$ 3, 3	$1+x$ 4, 4	$1+x$ 4, 4	$1+x$ 4, 4	$1+x+x^4$ 7, 7	$1+x+x^4$ 7, 7	$1+x+x^4$ 7, 7	$1+x+x^4+x^7$ 10, 10
3	$\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$ 4, 5	$\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$ 5, 5	$\frac{1+x+x^2}{1+x^2-x^3}$ 6, 6	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 7, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 8, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 9, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 10, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 11, ∞
4	$\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$ 5, 5	$\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$ 5, 5	$\frac{1+2x+x^2}{1+x-x^4}$ 7, 7	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 8, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 8, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 9, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 10, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 11, ∞
5	$\frac{1}{1-x+x^2-x^3+x^5}$ 6, 6	$\frac{1+2x}{1+x-x^2+x^3-2x^4+x^5}$ 7, 7	$\frac{1+2x+2x^2}{1+x+x^2-x^3-x^5}$ 8, 8	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 9, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 9, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 9, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 10, ∞	$\frac{1+x-x^3}{1-x^3}$ 11, ∞

0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{1}$ 1, 2	$\frac{1}{1}$ 2, 2	$\frac{3-x^2}{3}$ 3, 4	$\frac{3-x^2}{3}$ 4, 4	$\frac{15-5x^2+3x^4}{15}$ 5, 6	$\frac{15-5x^2+3x^4}{15}$ 6, 6
$\frac{1}{1}$ 2, 2	$\frac{1}{1}$ 2, 2	$\frac{3-x^2}{3}$ 4, 4	$\frac{3-x^2}{3}$ 4, 4	$\frac{15-5x^2+3x^4}{15}$ 6, 6	$\frac{15-5x^2+3x^2}{15}$ 6, 6
$\frac{3}{3+x^2}$ 3, 4	$\frac{3}{3+x^2}$ 4, 4	$\frac{15+4x^2}{15+9x^2}$ 5, 6	$\frac{15+4x^2}{15+9x^2}$ 6, 6	$\frac{105+40x^2-4x^4}{105+75x^2}$ 7, 8	$\frac{105+40x^2-4x^4}{105+75x^2}$ 8, 8
$\frac{3}{3+x^2}$ 4, 4	$\frac{3}{3+x^2}$ 4, 4	$\frac{15+4x^2}{15+9x^2}$ 6, 6	$\frac{15+4x^2}{15+9x^2}$ 6, 6	$\frac{105+40x^2-4x^4}{105+75x^2}$ 8, 8	$\frac{105+40x^2-4x^4}{105+75x^2}$ 8, 8
$\frac{45}{45+15x^2-4x^4}$ 5, 6	$\frac{45}{45+15x^2-4x^4}$ 6, 6	$\frac{105+55x^2}{105+90x^2+9x^4}$ 7, 8	$\frac{105+55x^2}{105+90x^2+9x^4}$ 8, 8	$\frac{945+735x^2+64x^4}{945+1050x^2+225x^4}$ 9, 10	$\frac{945+735x^2+64x^4}{945+1050x^2+225x^4}$ 10, 10
$\frac{45}{45+15x^2-4x^4}$ 6, 6	$\frac{45}{45+15x^2-4x^4}$ 6, 6	$\frac{105+55x^2}{105+90x^2+9x^4}$ 8, 8	$\frac{105+55x^2}{105+90x^2+9x^4}$ 8, 8	$\frac{945+735x^2+64x^4}{945+1050x^2+225x^4}$ 10, 10	$\frac{945+735x^2+64x^4}{945+1050x^2+225x^4}$ 10, 10

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{1}$ 1, 1	$\frac{1+x}{1}$ 2, 2	$\frac{2+2x+x^2}{2}$ 3, 3	$\frac{6+6x+3x^2+x^3}{6}$ 4, 4	$\frac{24+24x+12x^2+4x^3+x^4}{24}$ 5, 5
1	$\frac{1}{1-x}$ 2, 2	$\frac{2+x}{2-x}$ 3, 3	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$ 4, 4	$\frac{24+18x+6x^2+x^3}{24-6x}$ 5, 5	$\frac{120+96x+36x^2+8x^3+x^4}{120-24x}$ 6, 6
2	$\frac{2}{2-2x+x^2}$ 3, 3	$\frac{6+2x}{6-4x+x^2}$ 4, 4	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$ 5, 5	$\frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$ 6, 6	$\frac{360+240x+72x^2+12x^3+x^4}{360-120x+12x^2}$ 7, 7
3	$\frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$ 4, 4	$\frac{24+6x}{24-18x+6x^2-x^3}$ 5, 5	$\frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$ 6, 6	$\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$ 7, 7	$\frac{840+480x+120x^2+16x^3+x^4}{840-360x+60x^2-4x^3}$ 8, 8
4	$\frac{24}{24-24x+12x^2-4x^3+x^4}$ 5, 5	$\frac{120+24x}{120-96x+36x^2-8x^3+x^4}$ 6, 6	$\frac{360+120x+12x^2}{360-240x+72x^2-12x^3+x^4}$ 7, 7	$\frac{840+360x+60x^2+4x^3}{840-480x+120x^2-16x^3+x^4}$ 8, 8	$\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}$ 9, 9

8. Voici quelques expressions que nous emploierons quelquefois, dans ce qui suit, pour abréger le langage.

Étant donné un couple (p, q), nous appellerons *rectangle relatif au couple* (p, q) le rectangle qui a pour cases aux sommets (o, o), (o, p), (o, q), (p, q). Si l'on prolonge les files p et q au delà de ce rectangle, la fraction (p, q), les fractions de ces prolongements et celles du champ illimité qu'ils comprennent, constituent les fractions du *champ complémentaire relatif au couple* (p, q). Deux cases ou deux carrés seront dits *contigus* dès que leurs contours ont au moins un point commun.

III. — La solution principale.

9. La seconde des propositions annoncées dans le n° 3, celle qui fait connaître comment varie l'ordre de l'approximation quand on considère les différents couples de nombres (p, q), est d'une nature plus cachée que la première; pour y parvenir, nous devons tout d'abord établir quelques propriétés de la solution des équations en l que nous avons fait intervenir dans la démonstration de cette première proposition.

On démontre aisément que, étant donné un système de q équations linéaires, homogènes, à $q+1$ inconnues, il n'y a qu'une solution jouissant de cette propriété de comporter autant de zéros que possible au début de la suite des inconnues rangées dans un ordre arbitrairement déterminé. Or, parmi toutes les solutions du système d'équations en l, nous avons adopté l'une de celles pour lesquelles la suite l_0, $l_1, \ldots, l_q$ commence par un plus grand nombre de zéros que pour toute autre; c'est donc une solution parfaitement déterminée du système que nous avons adoptée; nous la nommerons la *solution principale* de ce système.

10. Elle peut être obtenue de plusieurs manières; nous en indiquerons deux.

D'abord, et cette méthode est applicable pour des équations quelconques, on l'obtient en adjoignant au système proposé autant des équations

$$l_0 = 0, \qquad l_1 = 0, \qquad l_2 = 0, \qquad \ldots,$$

à partir de la première, qu'il est nécessaire pour que le système ainsi obtenu admette une seule solution; cette solution est la solution principale du système proposé. On voit que, si ce système laisse $h+1$ inconnues arbitraires, il y a au moins, quand on adopte la solution principale, h inconnues nulles au début de la suite $l_0, l_1, \ldots, l_q$ des inconnues; le nombre ω_{pq} est ainsi au moins égal à h.

Une seconde méthode, applicable seulement aux équations linéaires qui ont la forme spéciale que possède le système d'équations en l, repose sur les considérations suivantes; de ces considérations vont même résulter la démonstration de l'existence de la solution principale et l'une de ses propriétés caractéristiques les plus importantes.

11. Soient $l'_0, l'_1, \ldots, l'_q$ une solution quelconque du système d'équations en l, et ω'_{pq} le nombre de zéros qui figurent au début de cette suite; on a nécessairement $\omega'_{pq} \leqq \omega_{pq}$ et par suite,

$$p+q+1-\omega'_{pq} \geqq p+q+1-\omega_{pq}.$$

A cette solution correspondent des polynômes R′, S′ analogues aux polynômes R, S, et une fraction rationnelle irréductible $\frac{U'}{V'}$ pour laquelle on a

$$y = \frac{U'}{V'} + (x^{p+q+1-\omega'_{pq}}).$$

De cette égalité et de l'inégalité qui précède résulte l'identité des fractions $\frac{U'}{V'}$ et $\frac{U}{V}$, et, par suite, celle des polynômes U′ et U d'une part, V′ et V d'autre part. Ainsi les polynômes R′ et S′ qui correspondent à une solution quelconque des équations en l sont les produits des polynômes premiers entre eux U et V, par un même polynôme P. Réciproquement, si en multipliant U et V par un même polynôme P, tel toutefois que les degrés des produits PU, PV ne dépassent pas respectivement les nombres p et q, on a

$$PVy = PU + (x^{p+q+1});$$

ceci montre que les coefficients du polynôme PV constituent une solution du système d'équations en l; autrement dit, les polynômes

$R' = PU$, $S' = PV$ s'obtiennent pour une certaine solution de ce système.

On obtiendra donc une solution $l_0, l_1, \ldots, l_q$ comportant à son début un plus grand nombre de zéros que toute autre, si l'on prend pour le polynôme P la plus haute puissance de x possible. Il est ainsi établi d'abord qu'il n'y a qu'une solution de cette nature; ensuite qu'elle s'obtient en adoptant une solution quelconque des équations en l, formant les polynômes R', S' correspondants, les quotients U, V de ces polynômes par leur plus grand commun diviseur, et enfin multipliant U, V par la plus haute puissance possible, $x^{\omega_{pq}}$, de x telle que les degrés des produits $x^{\omega_{pq}}U$, $x^{\omega_{pq}}V$ soient au plus égaux respectivement aux nombres p, q; les coefficients du polynôme $x^{\omega_{pq}}V$ constituent la solution principale.

On voit ainsi que :

Les polynômes $R = x^{\omega_{pq}}U$, $S = x^{\omega_{pq}}V$, *qui correspondent à la solution principale, ne peuvent avoir de facteur commun autre qu'une certaine puissance de x, et le degré de l'un d'eux est assurément égal à celui des deux nombres p et q qui lui correspond. Réciproquement, si les polynômes* R', S' *qui correspondent à une solution* $l'_0, l'_1, \ldots, l'_q$ *des équations en l jouissent de ces propriétés, cette solution est la solution principale.*

12. Nous avons appelé $l'_0, l'_1, \ldots, l'_q$ une solution quelconque des équations en l, et ω'_{pq} le nombre de zéros qui figurent au début de cette suite de valeurs; les degrés des polynômes U et V, quotients des polynômes R' et S' par leur plus grand commun diviseur, ayant respectivement pour limites supérieures les nombres $p - \omega'_{pq}$, $q - \omega'_{pq}$, seront représentés par

$$p - \omega'_{pq} - \varkappa'_{pq}, \quad q - \omega'_{pq} - \lambda'_{pq},$$

en sorte que $\varkappa'_{pq}$, λ'_{pq} sont des entiers positifs ou zéro. L'ordre de l'approximation fournie par la fraction $\frac{U}{V}$, qui a pour limite inférieure la quantité $p + q + 1 - \omega'_{pq}$, sera représenté par

$$p + q + \psi'_{pq} - \omega'_{pq},$$

en sorte que ψ'_{pq} est un entier positif qui peut être infini.

Ces quatre nombres

$$\omega'_{pq}, \quad \psi'_{pq}, \quad \varkappa'_{pq}, \quad \lambda'_{pq}$$

sont ce que nous appellerons les *singularités relatives à la solution* l'_0, $l'_1, \ldots, l'_q$.

Pour la solution principale $l_0, l_1, \ldots, l_q$, ces singularités seront représentées respectivement par $\omega_{pq}, \psi_{pq}, \varkappa_{pq}, \lambda_{pq}$; en outre, pour abréger, nous poserons ordinairement

$$p+q+1-\omega_{pq}=\xi_{pq}, \qquad p+q+\psi_{pq}-\omega_{pq}=\eta_{pq};$$

ces nombres ξ_{pq}, η_{pq} sont ceux qui figurent, au-dessous de chaque fraction, dans les cases des Tableaux précédemment donnés comme exemples.

13. Il résulte de la proposition du n° 11 que l'un au moins des nombres $\varkappa_{pq}, \lambda_{pq}$ est nul; d'ailleurs les équations en l présentent dans leurs coefficients un ordre tel que l'on doit se demander s'il n'y a pas encore quelque autre des quatre singularités $\omega_{pq}, \psi_{pq}, \varkappa_{pq}, \lambda_{pq}$, qui soit toujours nulle, ou si quelque relation ne lie pas ces quantités entre elles; il n'en est rien comme on va voir.

Donnons-nous, arbitrairement, deux suites de quantités

$$l'_0, l'_1, \ldots, l'_q, \qquad k'_0, k'_1, \ldots, k'_p,$$

avec cette seule condition qu'elles comportent autant de zéros l'une que l'autre à leurs débuts. Soit ω'_{pq} ce nombre de zéros communs, au plus égal à la fois à p et à q; on a

$$l'_0=l'_1=\ldots=l'_{\omega'_{pq}-1}=k'_0=k'_1=\ldots=k'_{\omega'_{pq}-1}=0.$$

Considérons alors les équations en a

$$a_j l'_0+a_{j-1}l'_1+\ldots+a_{j-q}l'_q=k'_j, \qquad (j=0,1,2,\ldots,p),$$
$$a_i l'_0+a_{i-1}l'_1+\ldots+a_{i-q}l'_q=0, \qquad (i=p+1, p+2, \ldots, p+q),$$

où les lettres a affectées d'indices négatifs sont regardées comme représentant zéro. Les équations qui correspondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, \omega'_{pq}-1$ de j sont identiquement satisfaites; il est facile de déterminer les quantités a de telle sorte que les autres le soient également. La quantité $l'_{\omega'_{pq}}$ étant différente de zéro ainsi que $k'_{\omega'_{pq}}$, la première équation donne pour a_0 une valeur différente de zéro, la seconde détermine ensuite a_1, puis la troisième a_2, etc., enfin la dernière $a_{p+q-\omega'_{pq}}$.

Ceci posé, considérons une série convergente quelconque ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de x et dont les $p+q+1-\omega'_{pq}$ premiers coefficients soient $a_0, a_1, \ldots, a_{p+q-\omega'_{pq}}$. Les polynômes R′ et S′

$$R' = k'_0 + k'_1 x + \ldots + k'_p x^p, \qquad S' = l'_0 + l'_1 x + \ldots + l'_q x^q$$

s'obtiennent quand, cherchant la fraction rationnelle approchée de la fonction qui correspond au couple (p, q), on adopte $l'_0, l'_1, \ldots, l'_q$ pour solution des équations en l. On voit que ω'_{pq}, $\varkappa'_{pq}$, λ'_{pq} ont déjà telles valeurs qu'il nous a plu leur donner. Développons maintenant $\frac{R'}{S'}$ en série entière; il suffit de prendre pour le $(p+q-\omega'_{pq}+1)^{\text{ième}}$, le $(p+q-\omega'_{pq}+2)^{\text{ième}}$, etc. coefficient de la série, les coefficients de même rang dans le développement de $\frac{R'}{S'}$ pour que ψ'_{pq} prenne également telle valeur qu'il nous plaira.

Si l'un des deux nombres $\varkappa'_{pq}$, λ'_{pq} est pris égal à zéro, la solution $l'_0, l'_1, \ldots, l'_q$ étant alors la solution principale du système d'équations en l, la proposition que nous avions en vue est établie.

14. Supposons l'ordre $p+q+\psi'_{pq}-\omega'_{pq}$ de l'approximation fournie par la fraction $\frac{U}{V}$ fini et retranchons-en la somme des degrés des termes de cette fraction, on obtient

$$\begin{aligned}(p+q+\psi'_{pq}-\omega'_{pq}) &- (p-\omega'_{pq}-\varkappa'_{pq}) \\ &- (q-\omega'_{pq}-\lambda'_{pq}) = \omega'_{pq}+\psi'_{pq}+\varkappa'_{pq}+\lambda'_{pq}.\end{aligned}$$

Ainsi *la somme des quatre singularités qui sont relatives à une solution des équations en l ne dépend pas du choix de cette solution;* en outre, il est évident que, si la fraction $\frac{U}{V}$ correspond dans le Tableau à plusieurs couples (p, q), ce qui donne autant de systèmes d'équations en l différents les uns des autres, *cette somme des singularités est la même quel que soit le système considéré et la solution que l'on adopte de ce système.*

Nous allons bientôt retrouver ce nombre remarquable, avec une signification importante, en étudiant la distribution, dans le Tableau, des fractions de l'ensemble (E) égales à la fraction $\frac{U}{V}$.

15. Il ne nous reste plus à établir que deux propriétés simples et de même nature de la solution principale.

Les équations en l relatives à deux cases voisines d'une même file horizontale sont

$$\left.\begin{aligned} a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q &= 0, \\ a_{i+1} l_0 + a_i l_1 + \ldots + a_{i-q+1} l_q &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (i = p+1, \ldots, p+q).$$

Supposons que, dans la solution principale du premier système, on ait $l_q = 0$, et soit $m_0, m_1, \ldots, m_{q-1}$, 0 cette solution principale; elle donne lieu aux identités

$$a_i m_0 + a_{i-1} m_1 + \ldots + a_{i-q+1} m_{q-1} = 0, \qquad (i = p+1, \ldots, p+q),$$

et il est évident que les valeurs $m_0, m_1, \ldots, m_{q-1}$ constituent la solution principale du système d'équations déduit du premier quand on y supprime tous les termes en l_q; les identités précédentes établissent dès lors que les valeurs 0, $m_0, m_1, \ldots, m_{q-1}$ constituent la solution principale du second système d'équations. Ainsi :

Quand, dans une solution principale, la dernière inconnue a la valeur zéro, il suffit de faire passer ce zéro en tête de la suite des valeurs des inconnues pour obtenir la solution principale relative à la case contiguë de droite.

Il est de toute évidence que les fractions approchées qui correspondent à ces deux cases sont les mêmes et que par suite les approximations qu'elles fournissent sont de même ordre; par conséquent

$$\eta_{p+1,q} = \eta_{p,q}.$$

On a, en outre,

$$\omega_{p+1,q} = \omega_{pq} + 1,$$

d'où

$$(p+1) + q + 1 - \omega_{p+1,q} = p + q + 1 - \omega_{pq}$$

ou

$$\xi_{p+1,q} = \xi_{pq}.$$

16. Considérons, en second lieu, deux cases contiguës d'une même file verticale; les systèmes d'équations correspondants sont

$$a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q \quad = 0, \qquad (i = \quad p+1, \ldots, p+q)$$
$$a_{i+1} l_0 + a_i l_1 + a_{i-1} l_2 + \ldots + a_{i-q} l_{q+1} = 0, \qquad (i = p, p+1, \ldots, p+q).$$

Soit $m_0, m_1, \ldots, m_q$ la solution principale du premier système, et supposons que, pour cette solution principale, le coefficient k_p du terme en x^p dans le numérateur soit nul; alors on a le système d'identités

$$a_i m_0 + a_{i-1} m_1 + \ldots + a_{i-q} m_q = 0, \qquad (i = p, p+1, \ldots, p+q),$$

dont la première exprime que k_p est nul, et ces identités montrent que le système de valeurs $0, m_0, m_1, \ldots, m_q$ est la solution principale du second système d'équations.

Le coefficient de rang j dans le premier numérateur et celui de rang $j+1$ dans le second sont respectivement

$$a_j m_0 + a_{j-1} m_1 + \ldots + a_{j-q} m_q,$$
$$a_{j+1} 0 + a_j m_0 + a_{j-1} m_1 + \ldots + a_{j-q} m_q,$$

et sont égaux; si donc $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}, 0$ est la première suite de coefficients, la seconde est $0, k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}$. Ainsi :

Quand, pour une solution principale, la suite $k_0, k_1, \ldots, k_p$ des coefficients du numérateur comporte un zéro en dernier lieu, il suffit de le faire passer en tête pour obtenir la suite relative au numérateur qui figure dans la case inférieure.

Les fractions correspondantes aux deux cases sont évidemment les mêmes et l'on a encore

$$\eta_{p,q+1} = \eta_{pq}, \qquad \xi_{p,q+1} = \xi_{pq}.$$

IV. — La distribution des fractions.

17. Nous sommes maintenant en mesure de rechercher quelle disposition prennent dans le Tableau les différentes fractions de l'ensemble (E). Cette recherche aura pour point de départ le théorème suivant :

Dès qu'une fraction rationnelle irréductible diffère de la fonction y d'un *infiniment petit dont l'ordre est supérieur à la somme des degrés de ses termes, elle fait partie de l'ensemble* (E).

Soient, en effet, $\frac{\Pi}{\Phi}$ cette fraction irréductible et $m+1$ l'ordre de l'approximation qu'elle fournit, et qui, par hypothèse, est supérieur à la somme des degrés de ses termes, m pouvant d'ailleurs être infini. Supposons qu'il y ait deux nombres p et q qui soient au moins égaux respectivement à chacun de ces degrés et tels, en outre, que la limite inférieure de l'ordre de l'approximation fournie par la fraction $\frac{U}{V}$ de l'ensemble (E) qui correspond au couple (p, q), c'est-à-dire ξ_{pq}, ne dépasse pas $m+1$; on a alors, d'une part,

$$y = \frac{U}{V} + (x^{\xi_{pq}})$$

et, d'autre part,

$$y = \frac{\Pi}{\Phi} + (x^{m+1}) = \frac{\Pi}{\Phi} + (x^{\xi_{pq}}),$$

et l'on déduit de là l'identité des fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{\Pi}{\Phi}$.

L'hypothèse de l'énoncé assure l'existence des nombres p et q. Soient, en effet, ϖ, φ les degrés des polynômes Π, Φ; l'hypothèse s'exprime par l'inégalité

$$\varpi + \varphi \leqq m;$$

nous poserons

$$\varpi + \varphi + m' = m,$$

m' étant ainsi un nombre de la suite $0, 1, 2, \ldots$. Les nombres p et q doivent satisfaire aux trois inégalités

$$p \geqq \varpi, \qquad q \geqq \varphi, \qquad p + q + 1 - \omega_{pq} \leqq m + 1.$$

Si l'on désigne par p', q' deux nombres de la suite $0, 1, 2, \ldots$ et que l'on pose

$$p = \varpi + p', \qquad q = \varphi + q',$$

les deux premières inégalités étant satisfaites, il ne reste à remplir que la troisième qui devient

$$p' + q' \leqq \omega_{pq} + m',$$

et il est manifeste qu'il est toujours possible d'y satisfaire.

18. Le résultat de cette démonstration peut encore être énoncé comme il suit:

Pour que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ *corresponde, dans l'ensemble* (E), *au couple* (p, q), *il faut et il suffit :*

1° *Que chacun des nombres* p, q *soit au moins égal à celui des degrés* ϖ, φ *qui lui correspond ;*

2° *Que la quantité* $\xi_{pq} = p + q + 1 - \omega_{pq}$ *ne dépasse pas l'ordre de l'approximation fournie par la fraction* $\frac{\Pi}{\Phi}$.

19. La fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ correspond, en particulier, à tous les couples $(\varpi + p', \varphi + q')$ où p', q' satisfont à l'inégalité

$$p' + q' \leqq m'.$$

Supposons, en premier lieu, $m' = 0$. Cette inégalité n'est vérifiée alors que pour $p' = q' = 0$, et l'on obtient ainsi le couple (ϖ, φ). Il est aisé d'établir que la fraction ne correspond à aucun autre couple; on a, en effet (n° 14), pour un couple (p, q) auquel cette fraction correspond,

$$\omega_{pq} + \psi_{pq} + \varkappa_{pq} + \lambda_{pq} = (m + 1) - \varpi - \varphi = m' + 1;$$

m' étant ici égal à zéro, et ψ_{pq} étant au moins égal à un, on voit que l'égalité entraîne les suivantes :

$$\psi_{pq} = 1, \qquad \omega_{pq} = \varkappa_{pq} = \lambda_{pq} = 0,$$

et l'on en déduit

$$p = \varpi + \varkappa_{pq} + \omega_{pq} = \varpi, \qquad q = \varphi + \lambda_{pq} + \omega_{pq} = \varphi,$$

en sorte que (ϖ, φ) est bien le seul couple auquel corresponde la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$.

Supposons, en second lieu, m, et par suite m', infini. Alors p' et q' peuvent prendre des valeurs quelconques de la suite $0, 1, 2, \ldots$. Il en résulte que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ figure dans toutes les cases du champ complémentaire relatif au couple (ϖ, φ), et ne figure dans aucune autre, la première des deux conditions auxquelles doit satisfaire le couple (p, q) pour que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ lui corresponde n'étant satisfaite pour aucune de ces autres cases.

20. Il reste à examiner le cas où m' a une valeur finie différente de zéro. Il y a alors nécessairement des valeurs de p', q' autres que zéro, pour lesquelles l'inégalité est vérifiée, et, par suite, la fraction correspond sûrement à plusieurs couples. On voit bien aisément qu'elle figure dans toutes les cases du Tableau, au nombre de $\frac{(m'+1)(m'+2)}{2}$, qui sont contenues dans un triangle rectangle isoscèle A ayant pour files limites la file verticale ϖ, la file horizontale φ et une file en diagonale allant de droite à gauche en descendant. Nous savons d'autre part que la fraction ne peut figurer que dans le champ complémentaire relatif à la case (ϖ, φ); mais il peut encore y avoir d'autres cases où la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ figure, à cause de l'existence du nombre ω_{pq}; pour celles-là on aura

$$p'+q'>m', \qquad p'+q'\leqq m'+\omega_{pq};$$

il s'agit de les déterminer; les propriétés de la solution principale nous en donnent le moyen.

21. Considérons les cases qui figurent dans la première colonne verticale du triangle dont il vient d'être question. Pour celles-ci, on a

$$p'=0, \qquad q'\leqq m';$$

il y en a ainsi $m'+1$, correspondant aux couples

$$(\varpi, \varphi), \quad (\varpi, \varphi+1), \quad \ldots, \quad (\varpi, \varphi+h), \quad \ldots, \quad (\varpi, \varphi+m'-1), \quad (\varpi, \varphi+m').$$

Considérons, en particulier, le couple $(\varpi, \varphi+h)$. Le numérateur de la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ qui lui correspond est de degré ϖ. Il résulte de là, d'abord que $\omega_{\varpi,\varphi+h}$ est nul, et que, en outre, les coefficients $l_0, l_1, \ldots, l_{\varphi+h}$ du polynôme Φ constituent la solution principale qui correspond au couple considéré; c'est là, en effet, une solution des équations en l qui donne deux polynômes Π, Φ, sans facteurs communs et dont l'un d'eux, Π, atteint celui ϖ des deux nombres ϖ, $\varphi + h$ qui lui correspond, propriétés qui (n° 11) caractérisent la solution principale. Maintenant, puisque le dénominateur Φ est seulement de degré φ, on voit que dans la solution principale on a

$$l_\varphi \neq 0, \qquad l_{\varphi+1} = l_{\varphi+2} = \ldots = l_{\varphi+h-1} = l_{\varphi+h} = 0,$$

et par suite

$$\lambda_{\varpi,\varphi+h} = h.$$

Quant à la limite inférieure de l'ordre de l'approximation, elle est

$$\varpi + (\varphi + h) + 1 - \omega_{\varpi,\varphi+h} = \varpi + \varphi + 1 + h,$$

supérieure de h unités à celle qui correspond au couple (ϖ, φ).

Ceci posé, il résulte des propriétés de la solution principale (n° 15) que, pour les couples $(\varpi, \varphi + h)$, $(\varpi + 1, \varphi + h)$, $(\varpi + 2, \varphi + h)$, ... $(\varpi + h, \varphi + h)$, les solutions principales sont respectivement

$$\begin{array}{llllllll}
l_0, & l_1, & l_2, & \ldots, & \ldots, & .., & \ldots, & l_{\varphi+h}, \\
l_{\varphi+h}, & l_0, & l_1, & \ldots, & \ldots, & .., & \ldots, & l_{\varphi+h-1}, \\
l_{\varphi+h-1}, & l_{\varphi+h}, & l_0, & \ldots, & \ldots, & .., & \ldots, & l_{\varphi+h-2}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & ., & \ldots, & \ldots, & .., & \ldots, & \ldots\ldots, \\
l_{\varphi+1}, & l_{\varphi+2}, & ., & \ldots, & l_{\varphi+h}, & l_0, & \ldots, & l_\varphi;
\end{array}$$

à tous ces couples correspondent la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ et la même limite inférieure de l'approximation; les suites ω, $\varkappa$, λ correspondantes sont d'ailleurs

$$\begin{array}{cccccc}
0, & 1, & 2, & \ldots, & h-1, & h, \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, \\
h, & h-1, & h-2, & \ldots, & 1, & 0.
\end{array}$$

Quant au nombre ψ, il peut s'obtenir par cette condition que la somme $\varkappa + \lambda + \omega + \psi$ est constante et égale à $m + 1 - \varpi - \varphi$.

En donnant au nombre h les valeurs $1, 2, \ldots, m'$, on voit que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ figure dans toutes les cases d'un triangle rectangle isoscèle B ayant pour cases aux sommets (ϖ, φ), $(\varpi, \varphi + m')$, $(\varpi + m', \varphi + m')$, et nous connaissons complètement pour chacune de ces cases la valeur des nombres ω, ψ, $\varkappa$, λ. Remarquons enfin que, pour chacune des cases de la file inférieure du triangle, la limite inférieure de l'ordre de l'approximation est

$$\varpi + q + 1 + m' = m + 1,$$

et égale à l'ordre même de l'approximation.

22. Considérons maintenant les cases qui figurent dans la première file horizontale du triangle A; pour celles-ci, on a

$$q' = 0, \qquad p' \leqq m',$$

et elles correspondent, par suite, aux $m' + 1$ couples

$$(\varpi, \varphi), \quad (\varpi + 1, \varphi), \quad \ldots, \quad (\varpi + k, \varphi), \quad \ldots, \quad (\varpi + m' - 1, \varphi), \quad (\varpi + m', \varphi).$$

Considérons, en particulier, le couple $(\varpi + k, \varphi)$; comme dans le cas précédent, on établit que $\omega_{\varpi+k,\varphi}$ est nul, que $\varkappa_{\varpi+k,\varphi}$ est égal à k, et que la limite inférieure de l'ordre de l'approximation est $\varpi + \varphi + 1 + k$. Si l'on se reporte aux propriétés de la solution principale (n° 16), on en conclut que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ se trouve dans les cases

$$(\varpi + k, \varphi), \quad (\varpi + k, \varphi + 1), \quad (\varpi + k, \varphi + 2), \quad \ldots, \quad (\varpi + k, \varphi + k),$$

et que les nombres ω, $\varkappa$, λ, correspondant à ces cases, forment les suites

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k, \\ k, & k-1, & k-2, & \ldots, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0. \end{array}$$

La fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ figure alors dans toutes les cases d'un triangle rectangle isoscèle B' ayant pour cases aux sommets (ϖ, φ), $(\varpi + m', \varphi)$, $(\varpi + m', \varphi + m')$; la nature des singularités est connue pour chacune des cases de ce triangle, et la limite inférieure de l'ordre de l'approximation pour les cases de sa dernière file verticale est $m + 1$, ordre même de l'approximation.

23. La réunion des triangles B et B' constitue un carré, dans toutes les cases duquel figure ainsi la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$; le côté de ce carré comporte $m' + 1 = (m + 1) - \varpi - \varphi$ cases, c'est-à-dire un nombre de

cases égal à la différence entre l'ordre de l'approximation fournie par la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ et la somme des degrés de ses termes (n° 14). Les cases extrêmes d'une file diagonale sont (ϖ, φ), $(\varpi + m', \varphi + m')$; si l'on considère une case de cette file, aux cases du carré qui appartiennent aux files verticale et horizontale limitées à cette case, correspond une même limite inférieure de l'ordre de l'approximation; cette limite inférieure croît d'une unité quand on passe d'une case de la diagonale à la suivante, et varie ainsi de $\varpi + \varphi + 1$ à $\varpi + \varphi + 1 + m' = m + 1$.

24. Il nous reste à établir que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ ne figure pas dans d'autres cases du Tableau que celles de ce carré; nous avons déjà remarqué qu'elle ne peut se trouver que dans les cases du champ complémentaire relatif à la case (ϖ, φ); la démonstration va résulter de cette proposition auxiliaire importante :

Si la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ *figure dans une case* (p_2, q_2) *du champ complémentaire relatif au couple* (ϖ, φ), *elle figure dans toutes les cases qui appartiennent à la fois à ce champ complémentaire et au rectangle relatif au couple* (p_2, q_2).

Soit (p_1, q_1) l'une de ces cases, on a

$$\varpi \leqq p_1 \leqq p_2, \qquad \varphi \leqq q_1 \leqq q_2.$$

Puisque, par hypothèse, $\frac{\Pi}{\Phi}$ figure dans la case (p_2, q_2), le nombre $\xi_{p_2 q_2}$ est au plus égal à $m + 1 = \eta_{\varpi,\varphi}$, et, par suite, l'une au moins des inégalités

$$\eta_{\varpi,\varphi} \leqq \xi_{p_1 q_1}, \qquad \eta_{p_1 q_1} \geqq \xi_{p_2 q_2}$$

est assurément vérifiée. Que l'une ou l'autre de ces inégalités soit vérifiée, il résulte immédiatement du théorème du n° 18 que $\frac{\Pi}{\Phi}$ correspond au couple (p_1, q_1).

25. Cette proposition nous eut évidemment permis de supprimer la démonstration du n° 22 et partant celle du n° 16; nous ne les avons

conservées que pour la symétrie de la méthode et pour étudier complètement les singularités. Voici comment on en déduit l'impossibilité pour la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ de se retrouver dans des cases du Tableau autres que celles du carré déterminé précédemment.

Supposons qu'elle figure dans une case autre que celles du carré; comme la fraction figure alors nécessairement dans toutes les cases du rectangle commun au rectangle relatif à la case considérée et au champ complémentaire relatif au couple (ϖ, φ), cette fraction figure dans la file horizontale φ ou dans la file verticale ϖ, et cela dans des cases autres que celles du carré. Or, il n'en peut être ainsi, car, quand on passe sur ces files d'une case où figure $\frac{\Pi}{\Phi}$ à la case suivante où figure aussi cette fraction, la limite inférieure de l'ordre de l'approximation croît d'une unité; mais, pour les dernières cases de ces files qui appartiennent au carré, cette limite inférieure est égale à l'ordre même de l'approximation, et, par suite, $\frac{\Pi}{\Phi}$ ne peut figurer ni dans l'une ni dans l'autre des cases suivantes.

26. Nous pouvons maintenant énoncer cette proposition qui résume les résultats de notre étude sur la distribution, dans le Tableau, des fractions de l'ensemble (E) :

Chacune des fractions distinctes qui font partie de l'ensemble (E) *figure dans toutes les cases d'un carré dont le côté comporte un nombre de cases égal à la différence entre l'ordre de l'approximation fournie par la fraction et la somme des degrés de ses termes; elle ne figure dans aucune autre case du Tableau.*

27. Cette proposition est au fond la seconde de celles que nous avons annoncées au n° 3, mais nous parviendrons à une forme qui montre mieux que nous sommes bien en possession de la généralisation cherchée, au moyen de la conception géométrique fort simple suivante, dont la grande importance apparaîtra d'ailleurs dans la seconde Partie de notre travail.

Imaginons un second Tableau, calqué sur le premier, mais où ne soient tracés que les côtés du premier Tableau communs aux cases où figurent deux fractions distinctes. Au centre de chacun des carrés de différentes grandeurs ainsi obtenus sera écrite la fraction correspondante, en sorte qu'il n'y a, dans le nouveau Tableau, que des fractions distinctes.

Les centres des différents carrés sont tous situés sur des ensembles de droites parallèles équidistantes. Considérons celui de ces ensembles dont les droites sont perpendiculaires à la diagonale principale du Tableau. Si deux centres figurent sur une même droite, nous dirons des fractions correspondantes qu'elles sont *également avancées* dans le Tableau; si deux centres sont sur deux droites différentes, nous dirons de la fraction qui correspond au centre situé sur celle des deux droites qui est la plus éloignée du sommet du Tableau, qu'elle est *plus avancée* dans le Tableau que l'autre fraction.

A cette définition géométrique correspond cette propriété analytique que, si, partant de celle des droites de l'ensemble qui est la plus voisine du sommet du Tableau avec le n° 1, on numérote les droites successives 2, 3, 4, ..., le numéro de chaque droite est l'ordre de l'approximation de toutes les fractions du Tableau correspondant à des centres situés sur elle. L'ordre de l'approximation fournie par la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ est, en effet, égal à $m+1$, ou, suivant nos notations,

$$\varpi + \varphi + m' + 1.$$

Or pour obtenir le numéro de l'une des droites, il suffit de considérer l'une quelconque des cases (p, q) qu'elle traverse dans le Tableau primitif et de former le nombre $p+q+1$; la droite sur laquelle se trouve la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ traversant, par définition, les cases $(\varpi + m', \varphi)$, $(\varpi, \varphi + m')$ du carré où figure cette fraction, le numéro de cette droite est bien $\varpi + \varphi + m' + 1$.

28. Avec ces conventions, notre proposition peut alors être énoncée ainsi :

II. *Si deux fractions de l'ensemble* (E) *sont également avancées dans le Tableau des fractions distinctes, elles donnent la même approximation; quand on passe d'une fraction du Tableau à une autre plus avancée, l'approximation va en croissant.*

29. Cette proposition donne lieu à une remarque intéressante, et dont on verra plus loin l'importance.

Soit $\frac{\Pi_1}{\Phi_1}$ l'une quelconque des fractions qui, dans le Tableau des fractions distinctes relatif à la fonction y, sont au plus aussi avancées que la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$. Désignons par $\eta_{\varpi_1\varphi_1}$ l'ordre de l'approximation qu'elle fournit; on a

$$\eta_{\varpi_1\varphi_1} \leqq \eta_{\varpi\varphi},$$

et, par suite, des égalités

$$y = \frac{\Pi}{\Phi} + (x^{\eta_{\varpi\varphi}}), \qquad y = \frac{\Pi_1}{\Phi_1} + (x^{\eta_{\varpi_1\varphi_1}}),$$

on conclut celle-ci

$$\frac{\Pi}{\Phi} = \frac{\Pi_1}{\Phi_1} + (x^{\eta_{\varpi_1\varphi_1}}).$$

Elle montre que, au cas où $\frac{\Pi_1}{\Phi_1}$ est moins avancée que $\frac{\Pi}{\Phi}$, c'est-à-dire au cas où $\eta_{\varpi_1\varphi_1}$ est plus petit que $\eta_{\varpi\varphi}$, la fraction $\frac{\Pi_1}{\Phi_1}$ est l'une des fractions du Tableau des fractions distinctes relatif à la fonction $\frac{\Pi}{\Phi}$, et elle figure dans ce Tableau exactement comme dans le Tableau relatif à la fonction y; si $\eta_{\varpi_1\varphi_1}$ est égal à $\eta_{\varpi\varphi}$, la fraction $\frac{\Pi_1}{\Phi_1}$ est encore sûrement une fraction du Tableau relatif à la fonction $\frac{\Pi}{\Phi}$, mais il peut alors arriver qu'elle soit dans ce Tableau plus avancée que dans le Tableau relatif à la fonction y, tout en restant sur la même parallèle à la diagonale principale du Tableau.

Ainsi, la connaissance de la fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ du Tableau relatif à la fonction y entraîne la connaissance de toutes les fractions de ce Tableau qui sont moins avancées que $\frac{\Pi}{\Phi}$, et l'on en conclut que :

Un Tableau de fractions rationnelles approchées est entièrement défini par la connaissance d'une suite illimitée de fractions de plus en plus avancées de ce Tableau.

V. — Les singularités.

30. Nous dirons d'une fraction de l'ensemble (E) qu'elle est *normale* si elle ne fait partie qu'une seule fois de cet ensemble; dans le cas contraire, elle sera dite *anormale*.

Il résulte de l'étude faite antérieurement que, si p, q sont respectivement les degrés du numérateur et du dénominateur d'une fraction normale, le seul couple auquel cette fraction corresponde est le couple (p, q), et l'ordre de l'approximation qu'elle fournit est égal à $p+q+1$; on a alors

$$\psi_{pq}=1, \qquad \omega_{pq}=0, \qquad \varkappa_{pq}=0, \qquad \lambda_{pq}=0.$$

Réciproquement, ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes pour que la fraction qui correspond au couple (p, q) soit normale. Nous allons rechercher à quelles relations entre les coefficients de la série qui représente y elles correspondent.

31. Désignons par Δ_{pq} le déterminant d'ordre $q+1$,

$$\begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & \dots & a_{p+1-q} \\ a_{p+2} & a_{p+1} & \dots & a_{p+2-q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{p+1+q} & a_{p+q} & \dots & a_{p+1} \end{vmatrix};$$

les coefficients qui figurent dans les q premières lignes sont ceux des équations en l relatives au couple (p, q).

Si le nombre ψ_{pq} est plus grand que un, c'est que la solution principale satisfait à l'équation

$$a_{p+1+q}\,l_0+a_{p+q}\,l_1+\ldots+a_{p+1}\,l_q=0,$$

et alors le déterminant Δ_{pq} est nul. Réciproquement, si $\Delta_{pq}=0$, toute solution des équations en l satisfait aussi à l'équation précédente, et, par suite, ψ_{pq} est plus grand que un.

Si le nombre ω_{pq} est plus grand que zéro, c'est que, dans la solution principale, l_0 est nulle; il faut pour cela que le déterminant $\Delta_{p-1,q-1}$ soit nul. Réciproquement, si ce déterminant est nul, les équations admettent une solution où l_0 est nulle; la première au moins des inconnues dans la solution principale a la valeur zéro, et par suite ω_{pq} est plus grand que zéro.

Si le nombre $\varkappa_{pq}$ est plus grand que zéro, c'est que, pour la solution principale des équations en l, on a aussi

$$a_p l_0 + a_{p-1} l_1 + \ldots + a_{p-q} l_q = 0,$$

et l'on voit qu'alors le déterminant $\Delta_{p-1,q}$ est nul. Réciproquement, si ce déterminant est nul, toute solution des équations en l satisfait à l'équation précédente, et par suite $\varkappa_{pq}$ est plus grand que zéro.

Il reste à examiner le nombre λ_{pq}. S'il est plus grand que zéro, on a $l_q = 0$ dans la solution principale, et, par suite, le déterminant $\Delta_{p,q-1}$ est nul; mais ici la réciproque n'est pas vraie; ce déterminant peut être nul sans que, dans la solution principale, l_q soit nulle, sans que par conséquent λ_{pq} soit plus grand que zéro. Il n'en reste pas moins vrai que la fraction est encore anormale, puisqu'il y a une solution des équations en l où l_q est nulle et que, par suite, le dénominateur de la fraction n'est pas de degré q; si, dans la solution principale, l_q est différente de zéro, c'est que l'une des trois autres singularités se présente.

La fraction qui correspond au couple (p, q) conduit ainsi à la considération des quatre déterminants $\Delta_{p,q}$, $\Delta_{p-1,q-1}$, $\Delta_{p,q-1}$, $\Delta_{p-1,q}$; pour une fraction située dans la première file horizontale ou verticale du Tableau, deux seulement de ces symboles ont un sens; un seul a un sens si l'on considère la fraction qui est au sommet du Tableau. On s'assure immédiatement que ces symboles dénués de sens peuvent être considérés comme des quantités différentes de zéro quelconques, les singularités auxquelles ils correspondent ne pouvant alors sûrement se présenter. On peut donc, en toute généralité, dire que, si la fraction qui correspond au couple (p, q) est anormale, l'un au moins des quatre déterminants considérés est nul, et réciproquement, si l'un des quatre déterminants est nul, la fraction est anormale; donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fraction qui correspond au couple (p, q) soit normale est que chacun des déterminants

$$\Delta_{pq}, \quad \Delta_{p-1,q-1}, \quad \Delta_{p,q-1}, \quad \Delta_{p-1,q}$$

soit différent de zéro.

De cette proposition se conclut immédiatement cette autre :

Pour que le Tableau soit uniquement composé de fractions normales, il faut et il suffit que tous les déterminants

$$\Delta_{pq}, \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

soient différents de zéro.

32. Un même déterminant se retrouve dans l'étude des singularités de quatre couples différents; ainsi Δ_{pq} sera à considérer pour les quatre couples

$$(p, q), \quad (p+1, q+1), \quad (p, q+1), \quad (p+1, q).$$

Supposons nul ce déterminant Δ_{pq} et voyons quels caractères présentent les quatre fractions correspondant à ces quatre couples.

Nous écrirons ainsi les équations en l qui correspondent à chacun d'eux :

$$\begin{array}{llll}
(\mathrm{I}) & a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q = 0, & i = p+1, \quad \ldots, & p+q; \\
(\mathrm{II}) & a_{i+1} l_0 + a_i l_1 + \ldots + a_{i-q} l_{q+1} = 0, & i = p+1, \quad \ldots, & p+q+1; \\
(\mathrm{III}) & a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q-1} l_{q+1} = 0, & i = p+1, \quad \ldots, & p+q+1; \\
(\mathrm{IV}) & a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + \ldots + a_{i-q} l_q = 0, & i = p+2, \quad \ldots, & p+q+1.
\end{array}$$

Soit $m_0, m_1, \ldots, m_q$ la solution principale du système (I); elle donne lieu au système d'identités

$$(\mathrm{A}) \quad a_i m_0 + a_{i-1} m_1 + \ldots + a_{i-q} m_q = 0, \qquad i = p+1, \quad \ldots, \quad p+q+1,$$

dont la dernière est une conséquence de l'hypothèse $\Delta_{pq} = 0$.

Si, dans le groupe (II), on substitue aux inconnues les valeurs 0, m_0, m_1, $\ldots$, m_q, on obtient les identités (A); on les obtient encore en substituant, dans le groupe (III), aux inconnues les valeurs m_0, m_1, $\ldots$, m_q, 0, et encore, sauf la première, en substituant, dans le groupe (IV), aux inconnues, $m_0, m_1, \ldots, m_q$; on conclut de là que les fractions qui correspondent aux quatre couples sont égales.

33. C'est là évidemment un cas particulier du théorème du n° 26; lors même qu'on a reconnu que pour les couples (p, q), $(p+1, q+1)$

les fractions sont les mêmes, on peut affirmer, en raison du théorème du n° 24, que cette même fraction correspond aussi aux couples $(p, q+1)$ et $(p+1, q)$. Mais il est possible d'aller plus loin et d'obtenir à nouveau le théorème du n° 26. De ce que $0, m_0, m_1, \ldots, m_q$ est la solution principale du système II, on conclut en effet

$$\omega_{p+1,q+1} = \omega_{p,q} + 1,$$

et, par suite,

$$\varkappa_{p+1,q+1} = \varkappa_{pq}, \qquad \lambda_{p+1,q+1} = \lambda_{p,q},$$

et enfin, en appliquant la proposition du n° 14,

$$\psi_{p+1,q+1} = \psi_{pq} - 1.$$

Cette égalité montre que, si ψ_{pq} est au moins égal à trois, $\psi_{p+1,q+1}$ est plus grand que un, et, par suite, la même fraction qui figure dans les cases (p, q) et $(p+1, q+1)$ se retrouve dans la case $(p+2, q+2)$; si ψ_{pq} est au moins égal à quatre, la fraction se retrouve en outre dans la case $(p+3, q+3)$, et ainsi de suite. Si donc, revenant aux notations déjà employées (n° 17), on a une fraction $\frac{\Pi}{\Phi}$ pour laquelle

$$\varpi + \varphi + m' = m,$$

comme alors

$$\psi_{\varpi,\varphi} = m' + 1,$$

la fraction figurera dans les cases

$$(\varpi, \varphi), \quad (\varpi+1, \varphi+1), \quad (\varpi+2, \varphi+2), \quad \ldots, \quad (\varpi+m', \varphi+m'),$$

et, par la proposition du n° 24, la démonstration du théorème s'achève aisément. Cette méthode est, comme on voit, peut-être un peu plus simple que celle-là même que nous avons employée; elle ne fait pas connaître aussi complètement la variation des singularités.

34. Des différentes propositions qui précèdent, on conclut aisément que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une même fraction corresponde aux couples (p, q) et $(p+1, q+1)$ est que le déterminant Δ_{pq} soit nul.

Pour qu'une même fraction figure dans toutes les cases d'un carré donné, *a priori*, et ayant pour cases aux sommets les cases

$$(\varpi, \varphi), \quad (\varpi + m', \varphi), \quad (\varpi, \varphi + m'), \quad (\varpi + m', \varphi + m'),$$

il faut et il suffit, en vertu du théorème du n° 24, qu'elle figure dans toutes les cases en diagonale

$$(\varpi, \varphi), \quad (\varpi + 1, \varphi + 1), \quad (\varpi + 2, \varphi + 2), \quad \ldots, \quad (\varpi + m', \varphi + m');$$

et, pour cela, il faut et il suffit que tous les déterminants

$$\Delta_{\varpi,\varphi}, \quad \Delta_{\varpi+1,\varphi+1} \quad \ldots, \quad \Delta_{\varpi+m'-1,\varphi+m'-1}$$

soient nuls.

De cette proposition résulte la possibilité de former une fonction y telle que les fractions rationnelles approchées aient, dans le Tableau correspondant, telle disposition donnée, *a priori*, que l'on voudra, dès qu'elle satisfait au théorème général du n° 26; nous ne discuterons pas davantage ici cette question.

35. Le déterminant Δ_{pq} appartient à une classe de déterminants qui se rencontrent fréquemment : ce sont des déterminants où toutes les files d'éléments parallèles à l'une des diagonales sont formées chacune d'éléments égaux. M. Kronecker (1), en quelques pages où l'on trouvera aussi les points les plus importants de la Bibliographie (2) relative à ces déterminants, a montré à quelle question générale se rattachent toutes celles où de semblables déterminants ont été rencontrés.

(1) *Auszug aus einem Briefe des Herrn Kronecker an E. Schering* (*Gött. Nachrichten*, p. 271-279; 1881).

(2) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. 15; 1835; t. 30; 1845. — CAYLEY, *Journal de Liouville*, t. XI; 1846. — JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, t. 48; 1854.

SECONDE PARTIE.

LES FRACTIONS CONTINUES SIMPLES.

I. — Préliminaires.

36. Cette seconde Partie est consacrée à l'étude des rapports qui existent entre la théorie de l'approximation par des fractions rationnelles et la théorie des fractions continues, rapports qui ont été, en premier lieu, remarqués par Lagrange.

La première tentative faite pour représenter par une fraction continue une fonction d'une variable est due à Euler (¹); jusqu'à lui, les fractions continues étaient entièrement demeurées dans le domaine de la Théorie des nombres. Le problème qu'il se propose et résout est d'obtenir une fraction continue telle que ses réduites successives soient respectivement les polynômes obtenus en limitant une série à ses différents termes successifs. Il considère, en particulier, le cas d'une série procédant suivant les puissances entières positives et croissantes d'une variable x; la fraction continue qu'il obtient a alors la forme

$$\frac{1}{a+\mathcal{A}},$$

où a désigne une constante, et $\mathcal{A}$ une fraction continue où tous les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré, et tous les dénominateurs des binômes du premier degré. Il n'y avait évidemment pas lieu de rechercher l'ordre de l'approximation fournie par les diverses réduites, et la nature même du problème qu'il s'était proposé conduisait Euler à la seule des fractions continues correspondant à la fonction qui pût lui cacher la véritable nature de ces expressions.

Après Euler, Lambert (²) doit être cité comme ayant donné un déve-

---

(¹) EULER, *Introductio in Analysin Infinitorum*, t. I, §§ 368-373.

(²) LAMBERT, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, t. II, 1re Partie (*Verwandlung der Brücke*); 1770. On trouve encore (§ 22) dans ce Mémoire loppement en fraction continue de quelques fonctions. On sait la belle application qu'il en a faite pour démontrer l'incommensurabilité de e et de π; mais, restant étroitement attaché à la Théorie des nombres, il ne fait absolument aucune remarque sur la nature des réduites de ses fractions. Celles-ci, obtenues d'ailleurs par la méthode fort pénible des divisions successives, se présentent avec des éléments fractionnaires; Lagrange les devait bientôt retrouver sous la forme la plus convenable pour nous.

L'éminent géomètre a consacré à la théorie des fractions continues deux Mémoires. Le premier, ajouté en Note à l'Algèbre d'Euler, a trait aux fractions continues simples qui se sont offertes tout d'abord en Arithmétique; c'est assurément une de ses plus belles œuvres didactiques. Le second Mémoire [1] seul se rapporte à ce qui nous occupe ici. Il y est exposé une méthode générale qui permet d'obtenir un développement en fraction continue de l'intégrale d'une équation différentielle quelconque à une seule variable indépendante, puis la méthode est appliquée à quelques exemples particuliers. La forme des développements obtenus doit particulièrement être remarquée. Le premier d'entre eux est relatif à $(1+x)^m$, d'où ceux de $\log(1+x)$ et e^x se déduisent comme cas limites, et l'on a

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{\mathfrak{B}}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{x}{2}}{\mathfrak{B}'}}, \qquad e^x = 1 + \frac{x}{\mathfrak{B}''},$$

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ désignant des fractions continues où tous les numérateurs partiels sont des monômes du premier degré, et tous les dénominateurs partiels l'unité. Appliquant ensuite à ces différents développements une transformation fort simple, ils s'obtiennent chacun sous deux

---

cette remarque que la série au moyen de laquelle la fraction continue a été obtenue peut être divergente et la fraction convergente; elle est énoncée sous cette forme : « Wir haben demnach hierdurch ein Mittel den Werth unendlicher Reihen auch für diejenigen Fälle zu finden, wo die Reihen selbst divergirend werden. »

(1) *Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral* (*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin,* année 1776. — *Œuvres de Lagrange,* t. IV, p. 301-332).

formes nouvelles :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{\frac{m(m-1)}{1.2}x^2}{\mathfrak{S}}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{\frac{x}{2}}{\mathfrak{S}'}, \qquad e^x = 1 + x + \frac{\frac{x^2}{1.2}}{\mathfrak{S}''},$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{\mathfrak{S}_1}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{x^2}{1.2}}{\mathfrak{S}'_1}}, \qquad e^x = 1 + \frac{x}{[\mathfrak{S}]};$$

$\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'_1$, $\mathfrak{S}''$ et $[\mathfrak{S}]$ désignent des fractions continues où tous les numérateurs partiels sont des monômes du second degré; les dénominateurs partiels sont des binômes du premier degré, sauf pour $[\mathfrak{S}]$ où ils sont tous égaux à un.

Après avoir encore donné les développements de tang x, de arc tang x et quelques autres, qui, pour la forme générale, ne diffèrent pas des précédents, l'illustre géomètre cherche (n° 19) à réduire ces fractions en fractions ordinaires, « ce qui donnera lieu, dit-il, à des conséquences importantes sur la nature de ces mêmes fractions ». Ces conséquences sont que le développement en série entière de chacune des réduites coïncide avec celui de la fonction, « jusqu'à la puissance de x inclusivement qui est la somme des deux plus hautes puissances de x dans le numérateur et dans le dénominateur ». C'est sur cette conclusion, qui établit complètement le lien entre les deux théories, que se termine le Mémoire.

Depuis Lagrange, d'autres développements de fonctions particulières ont été obtenus, parmi lesquels il faut citer le développement célèbre de Gauss, relatif au quotient de deux séries hypergéométriques; mais aucun type de fraction, différent de ceux que nous avons cités, n'a été présenté. Tous les développements auxquels on a eu affaire, dans le cas, qui seul nous occupe, de x infiniment petit, appartiennent à l'un des types précédents, ou s'y ramènent de suite en prenant pour variable une puissance entière de x.

37. Quelle est donc leur nature?

On observe tout d'abord que chacun d'eux offre de singulières irrégularités à son début.

Si l'on s'en tient à la partie régulière, on trouve quatre formes différentes que nous avons désignées respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $[\mathcal{C}]$, à savoir :

$$\mathcal{A} = 1 + ax + \cfrac{\alpha x}{1 + bx + \cfrac{\beta x}{1 + cx + \cfrac{\gamma x}{1 + \ldots}}}, \qquad \mathcal{B} = 1 + \cfrac{\alpha x}{1 + \cfrac{\beta x}{1 + \cfrac{\gamma x}{1 + \ldots}}},$$

$$\mathcal{C} = 1 + ax + \cfrac{\alpha x^2}{1 + bx + \cfrac{\beta x^2}{1 + cx + \cfrac{\gamma x^2}{1 + \ldots}}}, \qquad [\mathcal{C}] = 1 + \cfrac{\alpha x^2}{1 + \cfrac{\beta x^2}{1 + \cfrac{\gamma x^2}{1 + \ldots}}},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots$ désignant des constantes.

Sont-ce donc là effectivement les seules formes qu'il y ait lieu de considérer, et, pour une fonction quelconque, peuvent-elles toutes quatre être obtenues? Peut-on, par exemple, trouver pour $\frac{\log(1+x)}{x}$ un développement ayant la forme $[\mathcal{C}]$? Aujourd'hui encore, la forme $\mathcal{A}$ d'Euler n'est pas considérée comme pouvant donner des fonctions rationnelles véritables approchées d'une fonction; dans son exposition de la théorie des fractions continues, Heine ne la mentionne pas : il ne considère comme générale que la forme $\mathcal{B}$ (¹), et les formes $\mathcal{C}$ et $[\mathcal{C}]$ ne s'y rencontrent que dans des cas particuliers.

En second lieu, pour une fonction donnée, combien y a-t-il de fractions ayant une forme donnée; pour $\frac{\log(1+x)}{x}$, par exemple, nous avons mentionné deux fractions ayant la forme $\mathcal{C}$; en existe-t-il encore d'autres ayant la même forme?

Telles sont les plus importantes des questions qui se posent immédiatement.

38. Dans ce qui suit, nous allons montrer :

Que les irrégularités qui s'observent aux débuts des développements donnés sont, en réalité, soumises à une loi fort simple;

(¹) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 266 et suiv.; 1878. — A vrai dire, dans l'unique forme que l'auteur considère comme générale, les numérateurs partiels sont des fonctions entières et les dénominateurs partiels sont égaux à l'unité (§ 66); mais, le cas spécial où cette forme se réduit à la forme $\mathcal{B}$ mis à part, il serait peut-être fort difficile de citer un seul exemple d'une fraction continue de cette forme.

Que, dans le cas général, trois types de fractions régulières, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et trois seulement, sont à considérer;

Que la forme $[\mathcal{C}]$ n'est qu'un cas d'exception et doit être regardée comme rentrant dans le type général $\mathcal{C}$, un développement de cette forme $[\mathcal{C}]$ étant ainsi, en général, impossible à obtenir; c'est l'exemple le plus simple de fractions continues régulières exceptionnelles, en nombre illimité, offrant des types entièrement nouveaux;

Que, dans le cas général, il existe une infinité de développements de chacune des formes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et aucun des autres formes, la forme $\mathcal{A}$ d'Euler donnant comme les autres des fractions rationnelles approchées véritables, et non pas seulement de simples polynômes.

Enfin, tous ces résultats seront obtenus comme cas particuliers de la méthode générale à employer pour obtenir, pour une fonction entièrement quelconque, tous les développements en fraction continue, non plus régulière, mais assujettie seulement à être ce que nous appellerons *simple*. Nous entendons par là une fraction où les numérateurs partiels sont des monômes de degré entier positif, et les dénominateurs partiels des polynômes également de degré quelconque, ayant un terme constant différent de zéro. L'étude de la convergence de ces fractions nous conduira à quelques résultats intéressants.

II. — Sur la définition des fractions continues; fractions continues simples et régulières.

39. A l'exemple de quelques auteurs, nous introduirons pour l'écriture d'une fraction continue, les nouveaux symboles $\dot{+}$ et $\dot{-}$ définis par les formules

$$\frac{a}{b}\dot{+}c=\frac{a}{b+c},\qquad \frac{a}{b}\dot{-}c=\frac{a}{b-c}.$$

Pour la régularité des notations et du langage, nous devons distinguer deux formes de fractions continues, à savoir :

$$a_1+\frac{\alpha_2}{a_2}\dot{+}\frac{\alpha_3}{a_3}\dot{+}\frac{\alpha_4}{a_4}\dot{+}\ldots, \tag{I}$$

$$\frac{\alpha_1}{a_1}\dot{+}\frac{\alpha_2}{a_2}\dot{+}\frac{\alpha_3}{a_3}\dot{+}\ldots \tag{II}$$

Nous les dirons être respectivement de la *première* et de la *deuxième forme*. Nous nous exprimerons, quand il n'y aura pas lieu de distinguer celle des deux formes dont il s'agit, comme si nous ne parlions que de l'une d'entre elles; mais les formules, si elles ne sont pas identiques pour l'un et l'autre cas, seront écrites pour chacun d'eux; celles qui se rapportent à la première forme étant désignées par (I), celles qui se rapportent à la deuxième forme par (II).

Nous appellerons *fractions continues partielles* de la fraction continue les fractions continues limitées

$$\text{(I)} \qquad a_1, \quad a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}, \quad a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3}, \quad \ldots,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\alpha_1}{a_1}, \quad \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2}, \quad \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3}, \quad \ldots.$$

Si, par un calcul purement formel, nous réduisons chacune d'elles à la forme d'un quotient de deux polynômes entiers relativement aux lettres α et a, elles deviennent respectivement les fractions

$$\frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \frac{U_3}{V_3}, \quad \ldots,$$

que l'on nomme les *réduites* de la fraction continue. La réduite $\frac{U_i}{V_i}$ correspond à la fraction continue partielle terminée par le quotient incomplet a_i.

La règle dite *loi de formation des réduites* s'exprime par les formules

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} &= U_i, \\ \alpha_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} &= V_i, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots),$$

qui permettent de former successivement les polynômes des suites U_1, U_2, U_3, ..., V_1, V_2, V_3, ..., en partant des deux premiers de chacune d'elles,

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{aligned} U_1 &= a_1, & U_2 &= a_1 a_2 + \alpha_2, \\ V_1 &= 1, & V_2 &= a_2; \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1, & U_2 &= \alpha_1 a_2, \\ V_1 &= a_1, & V_2 &= a_1 a_2 + \alpha_2. \end{aligned}\right.$$

De ces formules se déduit la suivante :

$$\text{(I)} \qquad U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i = (-1)^i \quad \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{i+1},$$
$$\text{(II)} \qquad U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i = (-1)^{i+1} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1},$$

applicable pour toutes les valeurs entières positives de i, et celle-ci :

$$\text{(I)} \quad \frac{U_q}{V_q} - \frac{U_p}{V_p} = + \frac{(-1)^{p+1} \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + \frac{(-1)^{p+2} \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{p+2}}{V_{p+1} V_{p+2}} + \ldots + \frac{(-1)^q \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_q}{V_{q-1} V_q},$$
$$\text{(II)} \quad \frac{U_q}{V_q} - \frac{U_p}{V_p} = - \frac{(-1)^{p+1} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}}{V_p V_{p+1}} - \frac{(-1)^{p+2} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+2}}{V_{p+1} V_{p+2}} - \ldots - \frac{(-1)^q \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q}{V_{q-1} V_q},$$

applicable pour toutes les valeurs entières positives de p et q, q étant plus grand que p.

40. Une fraction continue limitée est une expression algébrique élémentaire; pour un système de valeurs des lettres α et a, elle a une valeur numérique ou est dénuée de sens suivant que les opérations indiquées sont possibles ou ne le sont pas. Si elle a une valeur numérique, la dernière réduite calculée par la loi de formation des réduites a aussi une valeur numérique, et ces deux valeurs numériques sont égales; mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, la dernière réduite de la fraction

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1}$$

est égale à zéro, tandis que cette fraction est dénuée de sens.

C'est donc faire une convention arbitraire que de compléter la définition de la valeur d'une fraction continue limitée, en la considérant comme toujours égale à la valeur de sa dernière réduite. Ce complément de définition se justifie par la considération de fractions où les quantités α et a sont des fonctions de variables $x, y, z, \ldots.$ Soit x_0, $y_0, z_0, \ldots$ un système de valeurs de ces variables pour lequel la fraction n'ait pas de sens, mais tel que pour chacun des points d'un certain champ de $x_0, y_0, z_0, \ldots$ elle en ait un. Pour ces points, la fraction continue est égale à sa dernière réduite. Si, dans ce champ, cette réduite est continue, sa valeur au point $x_0, y_0, z_0, \ldots$ est la limite de ses valeurs successives quand $x, y, z, \ldots$ tendent respectivement vers

$x_0, y_0, z_0, \ldots$ sans sortir du champ considéré. Attribuer, par conséquent, en $x_0, y_0, z_0, \ldots$, à la fraction continue, la valeur que prend en ce point la réduite, c'est compléter la définition de manière à obtenir une fonction continue.

De même, si l'on s'en tient à l'analogie avec les séries, on doit définir la valeur d'une fraction continue illimitée comme la limite, supposée d'ailleurs exister, de la suite formée par les valeurs de ses fractions partielles successives. Si cette suite a une limite, la suite formée par les réduites en a une également, et les deux limites sont égales. Mais la suite des réduites peut être convergente sans que l'autre le soit. Par exemple, la suite des fractions partielles de la fraction continue

$$1 - \frac{1}{1} \dotplus \frac{1}{1} \dotminus \frac{1}{1} \dotplus \frac{1}{1} \dotminus \frac{1}{1} \dotplus \ldots$$

est divergente puisque celles de ces fractions qui sont terminées par les quotients incomplets de rang $4, 6, 8, \ldots$ n'ont aucun sens. La suite des réduites, au contraire, est convergente.

Des formules

$$\left.\begin{array}{lll} U_1 = 1, & U_2 = 0, & (-1)^{i-1} U_{i-2} + U_{i-1} = U_i, \\ V_1 = 1, & V_2 = 1, & (-1)^{i-1} V_{i-2} + V_{i-1} = V_i, \end{array}\right\} \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots),$$

on déduit, en effet, pour i impair,

$$U_{i-2} = U_{i+1}, \qquad V_{i-2} = V_{i+1},$$

en sorte que, pour établir la convergence, il suffit de le faire pour la suite formée par les réduites de rang impair. Or, pour i impair, on a, en vertu des formules précédentes,

$$\left.\begin{array}{l} U_{i-4} + U_{i-2} = U_i, \\ V_{i-4} + V_{i-2} = V_i, \end{array}\right\} \qquad (i = 5, 7, 9, \ldots).$$

Ces réduites de rang impair sont donc celles de la fraction continue

$$1 - \frac{1}{2} \dotplus \frac{1}{1} \dotplus \frac{1}{1} \dotplus \frac{1}{1} \dotplus \ldots,$$

et forment, comme on sait, une suite convergente.

Ici encore, il est facile de montrer, en supposant les éléments de la fraction continue fonctions de variables $x, y, z, \ldots$, l'avantage qu'il y a à compléter la définition en considérant la fraction continue comme toujours égale à la limite, supposée exister, de la suite des réduites. Supposons que, pour les valeurs $x_0, y_0, z_0, \ldots$ des variables, une infinité de fractions partielles soient dénuées de sens, tandis que, au contraire, pour tous les autres points d'un certain champ de x_0, y_0, $z_0, \ldots$ toutes celles d'entre elles dont le rang surpasse un nombre déterminé en aient un; si, dans ce domaine, la suite des réduites est uniformément convergente, et si toutes les réduites, à partir d'un rang déterminé, sont des fonctions continues de $x, y, z, \ldots$, la limite de cette suite est également une fonction continue de ces variables. Donc, attribuer en $x_0, y_0, z_0, \ldots$ à la fraction continue, pour valeur numérique, la limite de la suite des réduites, c'est encore compléter la définition de manière à obtenir une fonction continue.

Nous avons affaire, dans ce qui suit, à des fractions continues où les quantités α et a sont des fonctions d'une variable x; nous adopterons donc, comme définition de la valeur de la fraction, celle qui résulte de la considération de la suite des réduites. Les fractions continues partielles ne jouent plus dès lors aucun rôle, et une fraction continue n'est plus à considérer que comme un algorithme commode pour figurer une loi de formation de deux suites de polynômes.

41. Si les éléments d'une fraction continue sont des polynômes entiers en x, ses réduites sont des fractions rationnelles, irréductibles ou égales à certaines fractions rationnelles irréductibles.

Réciproquement, étant donnée une suite de fractions rationnelles irréductibles

$$\frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \frac{U_3}{V_3}, \quad \ldots,$$

telles que les expressions

$$U_1, \quad V_1, \quad U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

soient différentes de zéro, on peut toujours former une fraction continue ayant pour éléments des polynômes entiers en x et dont les réduites successives soient respectivement égales à ces fractions. Il résulte, en effet, des formules du n° 39 que, étant données les deux suites de quantités

$$U_1,\quad U_2,\quad U_3,\quad \ldots;\qquad V_1,\quad V_2,\quad V_3,\quad \ldots,$$

il y a, si V_1 est égale à 1, une fraction continue de la première forme, et une seule, telle que ces suites soient celles formées respectivement par les numérateurs et par les dénominateurs des réduites successives; les éléments de cette fraction sont donnés par les formules suivantes, où V_1 doit être supposé égal à l'unité :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{lll} a_1 = \dfrac{U_1}{V_1}, & \alpha_2 = -\dfrac{U_1 V_2 - U_2 V_1}{V_1}, & \alpha_i = -\dfrac{U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}}, \\ & a_2 = V_2, & a_i = \dfrac{U_{i-2} V_i - U_i V_{i-2}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}}, \end{array}\right\} \quad (i = 3, 4, 5, \ldots)$$

De même, les deux suites données déterminent une fraction continue de la seconde forme et une seule; ses éléments sont donnés par les formules

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = U_1, & \alpha_2 = \dfrac{U_1 V_2 - U_2 V_1}{U_1}, & \alpha_i = -\dfrac{U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}}, \\ a_1 = V_1, & a_2 = \dfrac{U_2}{U_1}, & a_i = \dfrac{U_{i-2} V_i - U_i V_{i-2}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}}, \end{array}\right\} \quad (i = 3, 4, 5, \ldots)$$

On voit que, en général, les éléments de ces fractions continues sont des fractions rationnelles. Mais on peut évidemment, sans altérer la valeur des réduites, multiplier les éléments de la fraction continue par des polynômes tels qu'on la transforme en une autre où tous les éléments soient des polynômes entiers en x. Le numérateur et le dénominateur d'une réduite quelconque sont encore des polynômes entiers en x, mais qui ne sont plus nécessairement premiers entre eux. Les réduites de cette nouvelle fraction continue sont respectivement égales aux fractions rationnelles irréductibles données.

Le problème de la recherche d'une fraction continue, dont les éléments soient des polynômes entiers en x et dont les réduites soient égales à des fractions rationnelles irréductibles données, admet ainsi une infinité de solutions. Mais, parmi ces fractions continues, nous allons ne considérer qu'un groupe important formé par celles que nous nommerons les *fractions continues simples*, et pour lesquelles le problème ne peut plus admettre qu'une seule solution.

42. Une fraction continue sera dite *simple* si les numérateurs partiels sont des monômes entiers en x dont le coefficient et le degré sont différents de zéro, sauf pour α_1 qui doit être une constante différente de zéro, et si, en outre, les dénominateurs partiels sont des polynômes entiers en x ayant un terme constant différent de zéro.

De cette définition découlent immédiatement deux conséquences qui sont le fondement de toutes les propriétés des fractions continues simples.

La première est que tous les numérateurs et dénominateurs des réduites d'une fraction continue simple ont un terme constant différent de zéro. Les quantités α_i s'annulent, en effet, sauf α_1, pour $x = 0$, tandis que les quantités a_i se réduisent chacune à une constante différente de zéro; on voit alors, par les formules qui expriment la loi de formation des réduites (n° 39), que, si U_{i-1} et V_{i-1} ont chacun un terme constant différent de zéro, U_i et V_i en ont également un. Or les polynômes U_1, V_1, U_2, V_2 en ont chacun un, donc aussi les polynômes U_i et V_i.

La seconde conséquence est que, pour une fraction continue simple, les quantités $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduisent chacune à un monôme entier en x, ayant un coefficient différent de zéro, et un degré qui croît quand i augmente.

43. De ces propriétés se déduit d'abord l'irréductibilité des réduites d'une fraction continue simple; d'un côté, en effet, les polynômes U_i et V_i ne sont ni l'un, ni l'autre divisibles par x; de l'autre, ils ne peuvent avoir d'autre facteur commun qu'une certaine puissance de x: donc ils sont premiers entre eux.

En second lieu, les réduites d'une fraction continue simple sont toutes différentes entre elles. Cela résulte des deux dernières formules du n° 39; si, en effet, les réduites $\frac{U_p}{V_p}$ et $\frac{U_q}{V_q}$ étaient identiques, le premier membre de l'une ou de l'autre de ces formules serait identiquement nul. Or, en raison de la nature des quantités $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$, le second membre est évidemment le produit d'une certaine puissance de x par une quantité qui, pour $x = 0$, est continue et différente de zéro; pour une valeur de x très voisine de zéro, ce second membre est donc différent de zéro; il n'est pas identiquement nul, et l'impossibilité est manifeste. Ainsi :

Les réduites d'une fraction continue simple sont des fractions rationnelles irréductibles toutes différentes entre elles.

Remarquons encore que la différence $\frac{U_q}{V_q} - \frac{U_p}{V_p}$ est infiniment petite en même temps que x, et que son ordre infinitésimal croît en même temps que l'entier positif p plus petit que q.

44. Il résulte du théorème précédent qu'il ne peut y avoir qu'une seule fraction continue simple, telle que ses réduites successives soient respectivement égales à des fractions rationnelles irréductibles données

$$\frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \frac{U_3}{V_3}, \quad \dots;$$

les suites

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \dots; \qquad V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \dots$$

sont, en effet, celles que doivent alors former respectivement les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives. Mais il est évident qu'une fraction continue simple, soit de la première forme, soit de la seconde forme, ne correspondra à ces deux suites que si les polynômes qui les composent satisfont à certaines conditions. Ces conditions sont faciles à déterminer.

D'après ce qui précède, les polynômes U et V devront avoir chacun un terme constant différent de zéro, et chacune des quantités

$$U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$$

devra se réduire à un monôme entier en x, ayant un coefficient différent de zéro, et un exposant qui croît quand i augmente. De plus, évidemment, les polynômes U_1, U_2, V_1, V_2 devront être tels que les quantités

(I) $$a_1, \quad \alpha_2, \quad a_2,$$

(II) $$\alpha_1, \quad a_1, \quad \alpha_2, \quad a_2$$

prennent respectivement les formes qu'elles sont assujetties à avoir dans une fraction continue simple.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes. Si elles sont remplies, α_i se réduit, en effet, quand i est plus grand que 1, à un monôme entier en x dont le coefficient et le degré sont différents de zéro; mais, en outre, a_i est bien un polynôme entier en x ayant un terme constant différent de zéro, car c'est le quotient du polynôme $U_{i-2}V_i - U_iV_{i-2}$ par le monôme $U_{i-2}V_{i-1} - U_{i-1}V_{i-2}$, et, en vertu de la relation

$$\alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i,$$

il ne s'annule ni ne devient infini pour $x = 0$.

45. Nous sommes convenus de regarder une fraction continue comme convergente, quand la suite de ses réduites est convergente; la limite de cette suite est alors la valeur de la fraction continue (nº 40). Dans le cas où l'on a affaire à une fraction continue simple, il est aisé de pénétrer davantage la nature de cette limite.

Remarquons d'abord que l'on peut toujours supposer, dans les polynômes

$$\text{(I)} \qquad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots,$$

$$\text{(II)} \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots,$$

le terme constant rendu égal à l'unité; dans une fraction continue de la première forme, on rendra aussi le terme constant de a_1 égal à l'unité, en divisant la fraction par une quantité constante convenable. Quand tous les termes constants des polynômes a ont ainsi été rendus égaux à l'unité, ceux des polynômes U et V sont aussi égaux à l'unité; dans ce qui suit, nous supposerons qu'il en est ainsi.

Par la formule

$$\text{(I)} \quad \frac{U_q}{V_q} = \frac{U_p}{V_p} + \frac{(-1)^{p+1}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+1}}{V_pV_{p+1}} + \frac{(-1)^{p+2}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}} + \ldots + \frac{(-1)^q\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_q}{V_{q-1}V_q},$$

$$\text{(II)} \quad \frac{U_q}{V_q} = \frac{U_p}{V_p} - \frac{(-1)^{p+1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}}{V_pV_{p+1}} - \frac{(-1)^{p+2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}} - \ldots - \frac{(-1)^q\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}{V_{q-1}V_q},$$

l'étude de la convergence de la suite des réduites est ramenée à celle de la série illimitée :

$$(S)\begin{cases}(\mathrm{I}) & \dfrac{(-1)^{p+1}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+1}}{V_pV_{p+1}}+\dfrac{(-1)^{p+2}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}}+\dfrac{(-1)^{p+3}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+3}}{V_{p+2}V_{p+3}}+\ldots\\ (\mathrm{II}) & -\dfrac{(-1)^{p+1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}}{V_pV_{p+1}}-\dfrac{(-1)^{p+2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}}-\dfrac{(-1)^{p+3}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+3}}{V_{p+2}V_{p+3}}-\ldots\end{cases}$$

Les numérateurs des termes de cette série sont des monômes entiers dont les exposants vont en croissant quand on passe d'une fraction à la suivante; ce sont des termes consécutifs de la série entière :

$$(S')\begin{cases}(\mathrm{I}) & \alpha_2-\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\ldots+(-1)^n\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n+\ldots,\\ (\mathrm{II}) & -\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\ldots-(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+\ldots.\end{cases}$$

Soit (C) le cercle de convergence de cette série.

Considérons un ensemble (H) de points du plan tels que, pour chacun d'eux et pour toutes les valeurs de l'entier l supérieures à un nombre positif fixe A, on ait

$$n<|V_l|<N,$$

n et N désignant deux nombres positifs fixes. Pour chacun des points de l'ensemble (H), la série (S), où l'on suppose p plus grand que A, et la série (S′) sont convergentes et divergentes en même temps. La fraction continue converge donc en tous les points de l'ensemble (H) qui sont intérieurs au cercle (C), elle diverge en tous les points de cet ensemble qui sont extérieurs au cercle (C). En raison de cette propriété, nous nommerons le cercle (C) *cercle de convergence de la fraction continue simple.*

46. D'après cela, une fraction continue simple ne converge pas nécessairement en tous les points intérieurs à son cercle de convergence; toutefois elle ne saurait être divergente en un tel point que s'il donne lieu à la circonstance suivante : on doit pouvoir, avec des termes de la suite illimitée

$$(1)\qquad |V_1(x)|,\quad |V_2(x)|,\quad |V_3(x)|,\quad \ldots,$$

former une seconde suite, illimitée également,

$$(2)\qquad |V_i(x)|,\quad |V_{i+j}(x)|,\quad |V_{i+j+k}(x)|,\quad \ldots,$$

$i, j, k, \ldots$ étant des entiers positifs, qui ait zéro pour limite.

D'abord, cette circonstance se présente si la suite (1) renferme un nombre illimité de termes nuls; il est évident qu'alors la fraction continue est divergente, puisque ses réduites sont irréductibles. Supposons donc ce cas exclu.

Supprimons de la suite (1) tous les termes nuls, et soit

$$(\varepsilon) \qquad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots$$

une suite illimitée de nombres positifs décroissants, qui ait zéro pour limite. S'il n'y a pas un seul des termes de la suite (1) qui soit plus petit que ε_1, la fraction continue est évidemment convergente; sinon soit $|V_i(x)|$ le premier des termes de la suite (1) plus petit que ε_1. Soit ε'_2 un terme de la suite (ε) qui soit plus petit que $|V_i(x)|$; s'il n'y a pas un seul des termes qui, dans la suite (1), viennent après $|V_i(x)|$, qui soit plus petit que ε'_2, la fraction continue est convergente; sinon soit $|V_{i+j}(x)|$ le premier des termes venant après $|V_i(x)|$ plus petit que ε'_2. Soit ε'_3 un terme de la suite (ε) qui soit plus avancé, dans cette suite, que le terme ε'_2, et qui soit plus petit que $|V_{i+j}(x)|$; on verra de même que la fraction continue est convergente ou bien qu'il existe un terme $|V_{i+j+k}(x)|$ de la suite (1), plus avancé que $|V_{i+j}(x)|$ et plus petit que ε'_3. En continuant ainsi, on voit que l'une ou l'autre de ces deux conclusions s'impose : ou bien la fraction continue est convergente, ou bien l'on peut former avec des termes de la suite (1) une seconde suite illimitée (2) dont les termes soient plus petits respectivement que des termes ε_1, ε'_2, ε'_3, ... de plus en plus éloignés de la suite (ε), et ayant, par conséquent, zéro pour limite; c'est ce que nous voulions démontrer.

La fraction continue n'est pas non plus nécessairement divergente en tous les points extérieurs au cercle de convergence; un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire montre toutefois qu'elle ne saurait être convergente en un tel point que si, avec des termes de la suite (1), on peut former une suite (2) ayant l'infini pour limite.

On a ainsi cette proposition :

Une fraction continue simple est convergente à l'intérieur de son cercle de convergence, sauf, peut-être, en chaque point x tel que, en supprimant *de la suite formée par les valeurs absolues en ce point des dénominateurs des réduites successives un nombre limité ou illimité de termes, on puisse obtenir une suite illimitée ayant zéro pour limite.*

Une fraction continue simple est divergente à l'extérieur de son cercle de convergence, sauf, peut-être, en chaque point x tel que, en procédant comme il vient d'être dit, on puisse obtenir une suite illimitée ayant l'infini pour limite.

47. Supposons que tous les points d'une partie (γ) du plan intérieure au cercle (C) appartiennent à l'ensemble de points (H); dans ce champ (γ) la fraction continue définit une fonction y de x :

$$\text{(I)} \qquad y = \frac{U_p}{V_p} + \frac{(-1)^{p+1}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + \frac{(-1)^{p+2}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}} + \ldots,$$

$$\text{(II)} \qquad y = \frac{U_p}{V_p} - \frac{(-1)^{p+1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}}{V_p V_{p+1}} - \frac{(-1)^{p+2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}} - \ldots.$$

Le polynôme V_p ne s'annule en aucun point du champ (γ), car p est supposé plus grand que A; la série qu'il faut ajouter au premier terme du second membre pour avoir y, et que nous avons appelée S, est uniformément convergente, car ses termes sont, en valeur absolue, plus petits que ceux d'une série convergente à termes positifs, facile à former; en outre, les termes de la série sont des fonctions continues de x. On conclut de là que y est une fonction continue de x dans le champ (γ), contour compris.

Soit x un point quelconque intérieur au champ (γ); considérons un cercle ayant ce point pour centre et un rayon assez petit pour qu'il soit tout entier intérieur au champ. Dans ce cercle, chacun des termes de la série (S) est développable en une série entière convergente, et il s'ensuit que l'on peut obtenir, en prenant pour intermédiaire une série à double entrée absolument convergente, la fonction y sous la forme d'une somme ayant pour premier terme la fraction rationnelle $\frac{U_p}{V_p}$, et pour second terme une série entière convergente. On en conclut que la fonction y a une dérivée au point x; ainsi :

Dans toute partie du plan intérieure au cercle de convergence et dont tous les points appartiennent à l'ensemble de points (H), *la fraction con-*

tinue simple définit une fonction analytique continue uniforme de x. L'existence de la dérivée n'est toutefois pas établie pour les points du contour de la partie considérée du plan.

48. La principale difficulté de l'étude de la convergence d'une fraction continue simple se trouve dans la détermination de l'ensemble de points (H); cette détermination résulte de l'étude du polynôme $V_n(x)$ quand n grandit indéfiniment.

Un cas où il est particulièrement facile de déterminer quels sont ceux des points d'une partie (P) du plan qui appartiennent à l'ensemble (H) est celui où, dans cette partie (P), le polynôme $V_n(x)$ tend uniformément vers une fonction connue; toute partie du plan, appartenant à (P), où le module de cette fonction reste supérieur à un nombre positif fixe, fait alors partie de l'ensemble (H). Si, en particulier, la fonction limite est continue, son module restera supérieur à un nombre positif fixe dans toute partie du plan qui ne contient aucun zéro de la fonction; dans ce cas, tous les points de (P), sauf ceux qui correspondent à des racines de la fonction limite, sont des points de l'ensemble (H). Ces remarques trouveront plus tard leur application.

49. Au point de vue de l'étude de la convergence, on voit combien il y a intérêt à ce que la loi de succession des polynômes $V_1, V_2, V_3, \ldots$ soit simple; et comme cette loi de succession dépend évidemment de celles des éléments de la fraction continue elle-même, on est conduit à distinguer, parmi les fractions continues simples, celles où cette loi de succession offre quelque régularité; une classe qui joue un rôle considérable est formée par celles que nous appellerons *fractions continues régulières* et que nous définirons immédiatement.

Une fraction continue *régulière* est une fraction continue simple dans laquelle, avec exception permise pour les éléments

(I) $$a_1, \quad \alpha_2;$$

(II) $$\alpha_1, \quad a_1, \quad \alpha_2;$$

tous les numérateurs partiels ont le même degré, ainsi que tous les dénominateurs partiels.

Nous serons d'ailleurs amenés, dans certains cas exceptionnels qui seront complètement précisés, à nous écarter un peu de cette définition.

III. — Les fractions continues de l'ensemble (E).

50. Les fractions continues d'Euler et de Lagrange, que nous avons citées dans le n° 36 sont des fractions continues régulières, et, par conséquent, des fractions continues simples. Comme l'a remarqué Lagrange, les réduites de ces fractions font partie de l'ensemble (E) relatif à la fonction qui leur a donné naissance; on est ainsi amené à rechercher comment on doit choisir dans l'ensemble (E) des fractions $\frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \frac{U_3}{V_3}, \ldots,$ pour qu'elles soient les réduites successives d'une fraction continue régulière, et plus généralement, d'une fraction continue simple.

Les réduites d'une fraction continue simple étant toutes différentes entre elles, nous pouvons nous borner à la considération des fractions distinctes de l'ensemble (E), et l'on est ainsi ramené à la conception géométrique du *Tableau des fractions distinctes* telle que nous l'avons exposée dans le n° 27. C'est sur ce Tableau seul que vont porter maintenant nos raisonnements, et comme sa notion repose essentiellement sur le théorème de la distribution des fractions de l'ensemble (E), l'importance de ce théorème et l'unité de notre étude vont se trouver entièrement mises en évidence.

51. Pour arriver à connaître comment doivent être choisies, dans le Tableau des fractions distinctes, des fractions pour qu'elles soient les réduites d'une fraction continue simple, nous examinerons d'abord la nature des expressions de la forme $U_i V_k - U_k V_i$, où $\frac{U_i}{V_i}$ et $\frac{U_k}{V_k}$ désignent deux fractions quelconques de ce Tableau.

Cherchons d'abord quel est le degré de ce polynôme. Soient ϖ_i, ϖ_k, φ_i, φ_k les degrés respectifs des polynômes U_i, U_k, V_i, V_k. Le degré de $U_i V_k$ est $\varpi_i + \varphi_k$, celui de $U_k V_i$ est $\varpi_k + \varphi_i$.

Si les quantités $\varpi_i + \varphi_k$ et $\varpi_k + \varphi_i$ sont inégales, le degré du polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ est égal à la plus grande des deux. Or, de la relation

$$\varpi_i + \varphi_k = \varpi_k + \varphi_i,$$

on déduit

$$\varpi_i - \varphi_i = \varpi_k - \varphi_k.$$

Dans le Tableau, toutes les fractions pour lesquelles $\varpi - \varphi$ a une même valeur sont situées sur une même droite parallèle à la diagonale principale du Tableau. Cette droite est d'autant plus basse que la valeur de $\varpi - \varphi$ est plus petite, en sorte que si celle de ces lignes à laquelle correspond la fraction $\frac{U_i}{V_i}$ est plus élevée que celle à laquelle correspond la fraction $\frac{U_k}{V_k}$, on a

$$\varpi_i - \varphi_i > \varpi_k - \varphi_k,$$

et, par suite,

$$\varpi_i + \varphi_k > \varpi_k + \varphi_i;$$

on en conclut que le degré du polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ est alors égal à $\varpi_i + \varphi_k$.

Si les quantités $\varpi_i + \varphi_k$, $\varpi_k + \varphi_i$ sont égales, le degré du polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ est, en général, égal à cette quantité. Mais, exceptionnellement, il peut être plus petit. Dans le Tableau relatif à la fonction $y = \frac{1 + x - x^3}{1 - x^3}$, par exemple, ce cas exceptionnel s'offre pour les fractions qui correspondent aux couples (0, 1), (2, 3). Dans le Tableau relatif à e^x, deux fractions quelconques de la file principale qui ne sont séparées que par une seule troisième fraction de cette file offrent la même circonstance.

On peut ainsi énoncer cette règle :

Si la ligne parallèle à la diagonale principale sur laquelle est la fraction $\frac{U_i}{V_i}$ est au-dessus de celle sur laquelle est la fraction $\frac{U_k}{V_k}$, le degré du polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ est $\varpi_i + \varphi_k$. La même règle est généralement encore applicable quand les deux lignes coïncident, mais, exceptionnellement, le degré peut alors être plus petit.

Cherchons maintenant le degré du terme de moindre degré dans le polynôme $U_i V_k - U_k V_i$.

Supposons d'abord la fraction $\frac{U_i}{V_i}$ moins avancée dans le Tableau que la fraction $\frac{U_k}{V_k}$; on a alors

$$\eta_{\varpi_i \varphi_i} < \eta_{\varpi_k \varphi_k};$$

mais des relations

$$y = \frac{U_i}{V_i} + (x^{\eta_{\varpi_i \varphi_i}}), \qquad y = \frac{U_k}{V_k} + (x^{\eta_{\varpi_k \varphi_k}}),$$

on déduit

$$U_i V_k - U_k V_i = (x^{\eta_{\varpi_i \varphi_i}}),$$

ce qui montre que le terme de moindre degré du polynôme est de degré $\eta_{\varpi_i \varphi_i}$.

Si les fractions sont également avancées, $\eta_{\varpi_i \varphi_i}$ est égal à $\eta_{\varpi_k \varphi_k}$; le degré est alors encore, en général, égal à cette quantité; mais il peut être aussi, exceptionnellement, plus grand, comme on en a un exemple avec les fractions qui correspondent aux couples (2, 0) et (0, 2) dans le Tableau relatif à e^x.

On arrive ainsi à cette règle :

Si la ligne perpendiculaire à la diagonale principale sur laquelle est la fraction $\frac{U_i}{V_i}$ est avant celle sur laquelle est la fraction $\frac{U_k}{V_k}$, le degré du terme de moindre degré dans le polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ est égal à $\eta_{\varpi_i \varphi_i}$. La même règle est généralement encore applicable quand les deux lignes coïncident, mais, exceptionnellement, le degré peut alors être plus grand.

Ceci posé, supposons que la fraction $\frac{U_k}{V_k}$ ne soit sur aucun des prolongements des diagonales du carré relatif à $\frac{U_i}{V_i}$, et qu'elle soit la plus avancée des deux fractions. Si la droite parallèle à la diagonale principale sur laquelle elle se trouve est au-dessus de celle qui est relative à $\frac{U_i}{V_i}$, les degrés extrêmes du polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ sont $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$ et $\varpi_k + \varphi_i$; si elle est au-dessous, ils sont $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$ et $\varpi_i + \varphi_k$; on a donc nécessairement suivant le cas

$$\varpi_k + \varphi_i \geqq \varpi_i + \varphi_i + m_i + 1, \qquad \varpi_i + \varphi_k \geqq \varpi_i + \varphi_i + m_i + 1.$$

Le polynôme $U_i V_k - U_k V_i$ a, en général, plusieurs termes; pour qu'il soit un monôme, il faut et il suffit que l'on ait, suivant le cas,

$$\varpi_k = \varpi_i + m_i + 1, \qquad \varphi_k = \varphi_i + m_i + 1,$$

ce qui montre qu'un des côtés du carré relatif à $\frac{U_k}{V_k}$ doit avoir au moins une partie commune soit avec le côté vertical de droite, soit avec le côté horizontal inférieur du carré relatif à $\frac{U_i}{V_i}$, c'est-à-dire que le second carré doit être contigu au premier (n° 8).

Reste à examiner le cas où la fraction $\frac{U_k}{V_k}$ est sur le prolongement de l'une ou l'autre des diagonales du carré relatif à $\frac{U_i}{V_i}$.

Supposons-la d'abord sur le prolongement de la diagonale qui est parallèle à la diagonale principale; le degré du terme de degré inférieur du polynôme $U_iV_k - U_kV_i$ est $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$, celui du terme de degré supérieur est au plus égal à $\varpi_i + \varphi_k$. On a donc

$$\varpi_i + \varphi_k \geqq \varpi_i + \varphi_i + m_i + 1.$$

Si φ_k est égal à $\varphi_i + m_i + 1$, le polynôme se réduit sûrement à un monôme, et le carré relatif à $\frac{U_k}{V_k}$ est encore contigu au carré relatif à $\frac{U_i}{V_i}$; mais, si φ_k est plus grand que $\varphi_i + m_i + 1$, l'expression peut être un polynôme ou un monôme, le degré du terme de degré inférieur du polynôme, ou le degré du monôme étant égal à $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$.

Si la fraction est sur le prolongement de l'autre diagonale, on voit, par la même méthode, que le polynôme se réduit à un monôme si le carré relatif à $\frac{U_k}{V_k}$ est contigu à celui qui est relatif à $\frac{U_i}{V_i}$. Si les carrés ne sont pas contigus, l'expression se réduit à un polynôme ou à un monôme; le degré du polynôme ou du monôme est nécessairement plus grand que $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$; il est $\varpi_k + \varphi_i$ ou $\varpi_i + \varphi_k$ suivant que $\frac{U_k}{V_k}$ est sur le prolongement vers le haut, ou sur le prolongement vers le bas de la diagonale.

Nous obtenons ainsi ce théorème, où, par *première diagonale* d'un carré, nous entendons celle des diagonales de ce carré qui est parallèle à la diagonale principale, et par *seconde diagonale* du carré, l'autre diagonale :

Soient $\frac{U_i}{V_i}$ *et* $\frac{U_k}{V_k}$ *deux fractions du Tableau, et supposons que la première n'y soit pas plus avancée que la seconde.*

Si les carrés relatifs aux deux fractions sont contigus, l'expression $U_i V_k - U_k V_i$ *se réduit à un monôme de degré égal à* $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$.

Si les carrés ne sont pas contigus, l'expression est, en général, un polynôme dont le terme de degré inférieur est de degré $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$, *et celui de degré supérieur de degré* $\varpi_k + \varphi_i$ *ou* $\varpi_i + \varphi_k$ *suivant que l'on a* $\varpi_k + \varphi_i \geqq \varpi_i + \varphi_k$ *ou* $\varpi_k + \varphi_i \leqq \varpi_i + \varphi_k$. *Deux cas d'exception seulement peuvent se présenter :* 1° *Quand les premières diagonales des carrés sont sur une même droite ; il peut alors arriver qu'une réduction s'opère entre les termes de degrés supérieurs de l'expression qui les fasse disparaître ; cette réduction peut aller jusqu'à ramener l'expression à un monôme dont le degré sera égal à* $\varpi_i + \varphi_i + m_i + 1$; 2° *Quand les secondes diagonales des carrés sont sur une même droite ; il peut alors arriver qu'une réduction s'opère entre les termes de degrés inférieurs de l'expression qui les fasse disparaître ; cette réduction peut aller jusqu'à ramener l'expression à un monôme dont le degré sera égal à la plus grande des deux quantités* $\varpi_i + \varphi_k$, $\varpi_k + \varphi_i$.

52. Supposons maintenant que, dans notre Tableau, aucune des deux réductions exceptionnelles mentionnées à la fin du théorème ne se présente, et imaginons que les réduites d'une fraction continue simple de la première ou de la deuxième forme soient des fractions de ce Tableau. Soient $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}, \frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}, \frac{U_i}{V_i}$ trois réduites consécutives ; nous connaissons les conditions auxquelles satisfont les quantités (n° 44)

$$U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}, \tag{1}$$

$$U_{i-1} V_i \quad - U_i \quad V_{i-1}. \tag{2}$$

D'abord, de ce que la première se réduit à un monôme, on conclut que les carrés relatifs aux fractions $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ et $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ sont contigus.

En second lieu, on voit immédiatement que la fraction $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ est moins avancée que la fraction $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$, car, s'il n'en était pas ainsi, le degré du monôme (2) ne serait pas plus grand que celui du monôme (1).

Enfin, si la fraction continue est de la première forme, la première réduite est une fraction telle que le carré correspondant a un côté sur le bord supérieur du Tableau; si elle est de la seconde forme, la première réduite est une fraction telle que le carré correspondant a un côté sur le bord latéral du Tableau.

Telles sont les conditions qui règlent la situation dans le Tableau des réduites de la fraction continue.

Réciproquement, soient $\frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \frac{U_3}{V_3}, \cdots$ une suite de fractions prises dans le Tableau et satisfaisant à ces conditions, on peut s'assurer immédiatement que la fraction continue correspondante est simple, si toutefois on prend une fraction continue de la première forme ou de la seconde forme suivant que $\frac{U_1}{V_1}$ est une fraction du bord supérieur ou du bord latéral du Tableau.

Nous avons ainsi ce théorème :

Pour obtenir une suite de fractions du Tableau (E) *supposé sans cas exceptionnels, telles qu'elles soient les réduites successives d'une fraction continue simple, il faut et il suffit qu'elles soient choisies de la façon suivante :*

1° *La première fraction de la suite devra être une fraction du bord du Tableau;*

2° *Les carrés correspondants à deux fractions consécutives quelconques devront toujours être contigus;*

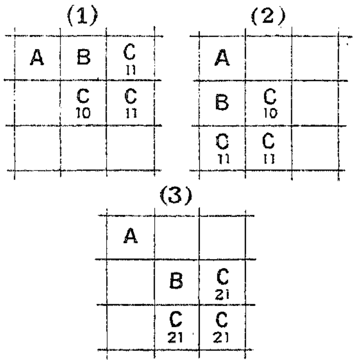
3° *Une fraction quelconque devra toujours être plus avancée dans le Tableau que celle qui la précède.*

Il résulte de ce théorème que si les réduites successives d'une fraction continue simple appartiennent toutes au Tableau (E), elles forment nécessairement une suite de fractions rationnelles de plus en plus approchées de la fonction.

53. Considérons maintenant le cas plus particulier où le Tableau (E) ne se compose que de fractions normales; nous supposons encore,

comme dans ce qui précède, qu'aucun des cas exceptionnels mentionnés à la fin du théorème du n° 51 ne se présente.

Trois fractions consécutives A, B, C, faisant partie d'une suite de fractions correspondant à une fraction continue simple, peuvent offrir neuf dispositions différentes que voici :



Le Tableau (2) est simplement le symétrique du Tableau (1) par rapport à une parallèle à la diagonale principale menée par A. Au-dessous de chaque fraction C figurent deux nombres; ce sont les degrés des éléments α et a de la fraction continue qui correspondent à cette fraction C; on les obtient aisément au moyen des règles que nous avons établies antérieurement, et il est alors immédiat de voir quelles sont les dispositions qui peuvent conduire à des fractions continues régulières (n° 49).

Pour obtenir une telle fraction, il faut, en effet, choisir dans le Tableau les fractions de telle sorte que tous les éléments α aient le même degré, ainsi que tous les éléments a. On voit tout d'abord que trois types réguliers seuls sont possibles, puisque, dans les dispositions précédentes des fractions A, B, C, on ne trouve que trois couples de nombres, à savoir les couples

$$(1,1), \quad (1,0), \quad (2,1).$$

Il est maintenant aisé de voir que tous sont possibles. Considérons d'abord le couple $(2,1)$; il ne se présente que dans le Tableau (3); si donc l'on a une fraction continue régulière où tous les numérateurs partiels soient du second degré et tous les dénominateurs partiels du premier degré, trois réduites consécutives quelconques A, B, C offriront l'une des trois dispositions indiquées dans ce Tableau ; mais B, C et la fraction suivante devront aussi présenter l'une de ces dispositions; donc la fraction C ne peut être que la fraction du Tableau (3) qui est située sur une même droite avec A et B. Ainsi les réduites de la fraction continue sont les fractions successives d'une droite parallèle à la diagonale principale. La réciproque est évidente. Ce type de fraction continue régulière est celui que nous avons appelé antérieurement $\mathcal{C}$, la seconde forme de Lagrange.

On établit absolument de même que au couple (1,0) correspond la première forme de Lagrange, que nous avons nommée $\mathcal{B}$. Ce couple se présente dans les Tableaux (1) et (2). Si l'on considère trois fractions A, B, C_{10} de l'un de ces Tableaux, les deux fractions B, C_{10} devront avoir l'une des dispositions affectées par A et B dans l'un quelconque des mêmes Tableaux. Il est facile d'en conclure que la suite de fractions à adopter pour avoir une fraction continue régulière où tous les numérateurs partiels soient du premier degré et tous les dénominateurs partiels du degré zéro doit être telle que, quand on passe d'une fraction à la suivante, on se déplace parallèlement à l'un des bords du Tableau, si l'on passe encore à la suivante, on se déplace parallèlement à l'autre bord, et ainsi de suite; la forme générale du chemin est ainsi celle d'un escalier à degrés égaux ayant pour direction générale celle de la diagonale principale; les deux premières fractions de la suite doivent appartenir à la première file horizontale ou à la première file verticale. Réciproquement, à une suite de fractions ainsi choisies correspond une fraction régulière de la forme $\mathcal{B}$.

La considération du couple (1,1) montre de même que, pour obtenir une fraction continue régulière ayant tous ses numérateurs partiels et tous ses dénominateurs partiels du premier degré, on doit prendre toutes les fractions d'une droite parallèle à l'un quelconque des bords du Tableau. On a ainsi la forme de fraction continue que nous avons désignée par $\mathcal{A}$. La fraction d'Euler est le cas où l'on prend les fractions de la première file horizontale du Tableau.

Nous pouvons résumer tout ceci en disant :

Dans un Tableau sans cas exceptionnels et composé uniquement de *fractions normales, on peut choisir de trois manières différentes des fractions de façon à obtenir les réduites successives d'une fraction continue régulière; ce sont les seules manières possibles.*

A l'une quelconque de ces manières correspondent une infinité de fractions continues régulières pour toutes lesquelles les éléments α de la partie régulière ont le même degré, ainsi que les éléments a. La différence, au point de vue de la forme, entre deux quelconques de ces fractions, se trouve dans leurs parties irrégulières qui dépendent de la première fraction de chacune des suites, cette première fraction pouvant être, en effet, une fraction quelconque du bord du Tableau.

54. Revenant maintenant à un Tableau entièrement quelconque, voyons quelles modifications il y a à apporter aux résultats précédents.

Reprenons le raisonnement qui nous a servi à obtenir la situation, dans le Tableau, des réduites d'une fraction continue simple. Il repose sur la considération des deux quantités

$$U_{i-2}V_{i-1} - U_{i-1}V_{i-2}, \tag{1}$$

$$U_{i-1}V_{i} - U_{i}V_{i-1}. \tag{2}$$

La quantité (1) étant un monôme, on en conclut que les fractions $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ et $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ offrent, dans le Tableau, l'une des trois dispositions suivantes :

Ou elles sont contiguës;

Ou bien elles ne sont pas contiguës, mais les premières diagonales des carrés correspondants sont sur une même droite et, par une réduction exceptionnelle des termes de degrés supérieurs, l'expression $U_{i-2}V_{i-1} - U_{i-1}V_{i-2}$ est ramenée à un monôme;

Ou bien enfin elles ne sont pas contiguës, mais les secondes diagonales des carrés correspondants sont sur une même droite et, par une réduction exceptionnelle des termes de degrés inférieurs, l'expression $U_{i-2}V_{i-1} - U_{i-1}V_{i-2}$ est ramenée à un monôme.

Ceci posé, nous distinguerons trois cas, suivant que la fraction $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$

est moins avancée, plus avancée, ou aussi avancée, dans le Tableau que la fraction $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$:

1° La fraction $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ est moins avancée que la fraction $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$. C'est la situation de cette fraction $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ qui règle alors le degré du monôme (1); pour que le degré du monôme (2) soit plus grand que lui, il faut et il suffit que la fraction $\frac{U_i}{V_i}$ soit plus avancée que $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$.

2° La fraction $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ est plus avancée que la fraction $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$. C'est alors la situation de la fraction $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ qui règle le degré du monôme (1); pour que le monôme (2) soit de degré plus grand, il faut et il suffit que $\frac{U_i}{V_i}$ soit avancée dans le Tableau comme $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$, et ne lui soit pas contiguë, mais donne lieu, avec elle, à la réduction exceptionnelle par laquelle l'expression (2) est ramenée à un monôme.

3° Les fractions $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ et $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ sont également avancées. Pour que le degré du monôme (2) soit plus grand que celui du monôme (1), il faut alors et il suffit que la fraction $\frac{U_i}{V_i}$ soit avancée dans le Tableau comme chacune des deux autres; de plus, elle doit être plus éloignée de la fraction $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ que cette fraction n'est éloignée de $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$; enfin elle doit donner lieu, avec $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$, à la réduction exceptionnelle par laquelle l'expression (2) est ramenée à un monôme. Le second point s'établit aisément en comparant, dans chacune des six dispositions que peuvent offrir les trois fractions également avancées, les degrés des monômes (1) et (2).

55. Ces résultats nous permettraient d'énoncer maintenant un théorème entièrement analogue à celui du n° 52, mais beaucoup plus compliqué, et dont l'énoncé ne différerait guère de ce qui vient d'être dit. Nous ne le ferons pas et nous nous restreindrons au cas plus particulier auquel on est ramené par la remarque suivante.

Dès que la fraction $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ n'est pas moins avancée, dans le Tableau, que $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$, les fractions $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ et $\frac{U_i}{V_i}$ y sont également avancées et donnent lieu à la réduction exceptionnelle par laquelle l'expression (2) est ramenée à un monôme. Alors cette même circonstance se présente nécessairement pour deux réduites consécutives quelconques de la fraction continue, dont le rang est au moins égal à $i-1$. Mais nous avons établi que toutes les réduites d'une fraction continue simple illimitée sont différentes entre elles, et, d'autre part, le nombre des fractions qui, dans le Tableau, sont également avancées, n'est pas indéfini : donc la fraction continue est nécessairement limitée. Ainsi, si les réduites d'une fraction continue simple illimitée sont des fractions du Tableau, chaque réduite est sûrement plus avancée, dans ce Tableau, que celle qui la précède. C'est ce cas qui va nous occuper maintenant.

Voici alors comment doit être modifié le théorème du n° 52.

Pour obtenir une suite de fractions du Tableau (E) *telles qu'elles soient les réduites successives d'une fraction continue simple illimitée, il faut et il suffit qu'elles soient choisies de la façon suivante :*

1° *La première fraction de la suite devra être une fraction du bord du Tableau ;*

2° *Les carrés correspondants à deux fractions consécutives quelconques* $\frac{U_i}{V_i}$, $\frac{U_{i+1}}{V_{i+1}}$ *devront toujours être contigus; ou bien n'être pas contigus mais avoir leurs premières diagonales sur une même droite, les fractions étant, en outre, telles que* $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ *se réduise à un monôme ;*

3° *Une fraction quelconque devra toujours être plus avancée dans le Tableau que celle qui la précède.*

56. De cette proposition se déduit celle-ci dont nous n'avons encore établi qu'un cas particulier :

Si les réduites successives d'une fraction continue simple illimitée sont toutes des fractions rationnelles approchées d'une fonction, elles forment nécessairement une suite de fractions rationnelles de plus en plus approchées de la fonction.

En admettant qu'il y ait des fractions continues simples dont toutes les réduites soient des fractions rationnelles approchées d'une fonction donnée, cette proposition peut aisément s'établir en rapprochant la remarque qui termine le n° 43 de celle du n° 29. Elle met entièrement en évidence la nature des fractions continues simples en tant que formules d'approximation.

57. Occupons-nous maintenant de la recherche des fractions continues régulières illimitées, en supposant le Tableau composé uniquement de fractions normales.

Trois fractions consécutives A, B, C faisant partie d'une suite de fractions correspondant à une fraction continue simple illimitée peuvent offrir une infinité de dispositions différentes (*voir* ci-contre).

Nous avons encore écrit au-dessous de chaque fraction C les degrés des éléments α et a de la fraction continue qui correspondent à cette fraction C; cependant, à cause des réductions exceptionnelles qui peuvent se produire entre les fractions de notre Tableau, on ne peut fixer, pour certaines situations de la fraction C, que le degré qu'a l'élément a quand il ne se produit pas de réduction; dans ces cas, nous avons écrit ce degré, mais en le faisant suivre d'un signe moins, pour indiquer que le degré de a peut être plus petit.

Les degrés des éléments α sont tous égaux à un dans le premier et le deuxième Tableau, puis à deux, à quatre, à six, à huit, etc., respectivement dans le troisième, le quatrième, le cinquième, le sixième, etc.

Il n'y a maintenant qu'à reprendre le raisonnement déjà fait antérieurement pour obtenir les fractions continues régulières quand, dans le Tableau, ne s'offrait aucune réduction exceptionnelle.

On retrouve d'abord immédiatement, pour les fractions continues régulières où l'élément α est du premier degré, les formes que nous avons appelées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, suivant que les degrés des éléments a sont tous égaux à un ou tous égaux à zéro. Les dispositions des fractions, dans chacun de ces deux cas, sont celles qui ont déjà été décrites.

Pour les fractions continues où tous les éléments α sont du second degré, les choses se modifient. La considération des dispositions figurées dans le Tableau (3) montre d'abord que si les réduites d'une fraction continue régulière illimitée, où tous les éléments α sont du second degré, sont des fractions de l'ensemble (E), ce sont sûrement

(1)

A	B	C_{11}		
	C_{10}	C_{11}		
			C_{12}	
				C_{13}

(2)

A				
B	C_{10}			
C_{11}	C_{11}			
		C_{12}		
			C_{13}	

(3)

A						
	B	C_{21}				
	C_{21}	C_{21-}				
			C_{22}			
				C_{23}		
					C_{24}	
						C_{25}

(4)

A						
		B	C_{42}			
		C_{42}	C_{42}			
				C_{42-}		
					C_{43}	
						C_{44}

(5)

A								
			B	C_{63}				
			C_{63}	C_{63}				
					C_{63}			
						C_{63-}		
							C_{64}	
								C_{65}

etc.

les fractions successives d'une droite parallèle à la diagonale principale. Mais la réciproque n'est pas vraie. Pour une telle suite de fractions, tous les éléments α seront bien du second degré, mais, à cause de réductions éventuelles possibles, on ne peut affirmer que tous les éléments a seront du premier degré; si quelques-uns étaient des constantes, la fraction ne serait pas régulière. Mais elle se retrouverait régulière, et d'un type que nous n'avons pas encore rencontré, s'il arrivait que tous les éléments a fussent des constantes. Nous sommes ainsi en présence de deux types de fractions continues régulières à numérateurs partiels du second degré; dans le premier $\mathfrak{S}$, déjà obtenu, les dénominateurs partiels sont tous du premier degré; dans le second $[\mathfrak{S}]$, ils sont tous des constantes, au moins à partir du dénominateur a_3, et c'est là la légère extension de la définition des fractions continues régulières dont nous avons déjà parlé (n° 49). Les fractions de la diagonale principale du Tableau relatif à e^x donnent naissance à une fraction continue régulière de ce type $[\mathfrak{S}]$; c'est l'une des fractions de Lagrange que nous avons citées.

Passons aux fractions continues régulières où l'élément α est du quatrième degré. Les dispositions figurées dans le Tableau (4) montrent que les réduites d'une fraction continue régulière illimitée de cette nature sont des fractions prises de deux en deux sur une parallèle à la diagonale principale du Tableau (E). A une telle suite de fractions ne correspondra pas, en général, une fraction continue régulière; pour qu'il lui en corresponde une, il faudra tout d'abord que deux fractions consécutives quelconques $\frac{U_i}{V_i}$, $\frac{U_{i+1}}{V_{i+1}}$ de la suite soient telles que la quantité $U_iV_{i+1} - U_{i+1}V_i$ se réduise à un monôme; cela étant, tous les éléments α seront du quatrième degré; il faudra, en second lieu, que tous les éléments a, dont chacun peut être des degrés 2, 1, 0, aient le même degré. Ainsi se présentent trois types de fractions régulières à numérateurs partiels du quatrième degré. Comme exemple, on peut citer les fractions de rang impair de la diagonale principale du Tableau relatif à e^x; la fraction continue correspondante à tous ses numérateurs partiels du quatrième degré, et tous ses dénominateurs partiels du second degré.

Des considérations analogues sont applicables aux fractions régulières où les éléments α sont du sixième degré. Elles correspondent à des fractions du Tableau (E) prises de trois en trois sur une parallèle à la diagonale principale, et conduisent à quatre types nouveaux de fractions continues régulières. On passe ensuite aux fractions continues régulières où les éléments α sont du huitième degré, etc.

58. En résumant ce qui précède, on voit que le nombre des fractions continues régulières illimitées qui peuvent être obtenues au moyen des fractions d'un Tableau (E), uniquement composé de fractions normales, ne peut être fixé en général, et dépend de la nature des fractions du Tableau.

Ces fractions continues peuvent être distinguées en deux classes :

1° Dans la première nous rangerons les fractions continues régulières où tous les numérateurs partiels sont du premier degré. Elle renferme deux types, celui où les dénominateurs partiels sont du premier degré et celui où ils sont des constantes. Le premier est engendré par les fractions d'une file quelconque, soit horizontale, soit verticale du Tableau, le second par une suite de fractions en escalier. Ce sont les seules fractions continues régulières dont l'existence puisse être affirmée *a priori;* on peut, avec les fractions du Tableau (E), obtenir une infinité de fractions continues de chacun des deux types.

2° La deuxième classe renferme les autres fractions continues régulières possibles. Elles se divisent en familles d'après les degrés des numérateurs partiels. Dans la première famille, les numérateurs partiels sont du second degré; elle renferme deux types caractérisés par les degrés des dénominateurs partiels, qui sont égaux à un dans le premier type, à zéro dans le second. Dans la deuxième famille, les numérateurs partiels sont du quatrième degré; elle renferme trois types caractérisés par les degrés des dénominateurs partiels qui sont égaux à deux dans le premier type, à un dans le second, à zéro dans le troisième. Dans la troisième famille, les numérateurs partiels sont du sixième degré, etc. L'une quelconque de ces fractions continues ne peut être engendrée que par une suite de fractions situées sur une parallèle à la diagonale principale; dans une telle file, elles doivent être prises contiguës pour une fraction de la première famille, de deux en deux pour une fraction de la deuxième famille, de trois en trois pour une fraction de la troisième famille, etc. On ne peut affirmer, *a priori*, l'existence d'aucune de ces fractions continues régulières. Au moyen des fractions du Tableau, on peut obtenir un nombre illimité de fractions d'un type déterminé, ou un nombre fini, ou enfin on n'en peut obtenir aucune. Le nombre des conditions qui doivent être remplies pour que l'on puisse obtenir une fraction d'un type déterminé croît quand on passe d'une famille à la suivante, et, dans une même famille, quand on passe d'un type au suivant. Le premier type de la première famille se trouve réalisé sans conditions, c'est-à-dire dans le cas général.

59. Nous avons vu (n° 43) que les réduites successives d'une fraction continue simple représentent, avec une approximation de plus en plus grande, une réduite quelconque de rang plus élevé; il n'en résulte pas qu'elles soient des fractions rationnelles approchées d'une même fonction au sens que nous avons donné jusqu'ici à cette locution; on peut même se convaincre, sur les exemples les plus simples, qu'en général elles ne sont pas de telles fractions.

Considérons une fraction continue simple dont toutes les réduites soient des fractions rationnelles approchées d'un même Tableau. Que cette fraction continue soit convergente ou divergente, comme les réduites sont des fractions de plus en plus avancées du Tableau, celui-ci est entièrement défini par la connaissance de la fraction continue (n° 29). On ne sait rien, *a priori*, sur la convergence ou la divergence des fractions continues simples, en nombre illimité, auxquelles donne naissance ce Tableau; ainsi se conçoit, dans toute sa généralité, un fait dont Laguerre et Halphen [1] ont signalé un cas particulier, à savoir le cas où, à une même fonction, correspondent une série entière divergente et une fraction continue convergente, ou inversement; une série entière n'est, en effet, comme nous l'avons vu, qu'une autre forme de la fraction continue d'Euler.

Supposons que l'une des fractions continues du Tableau converge dans le voisinage de l'origine et définisse une fonction de x holomorphe dans ce voisinage, le Tableau de fractions rationnelles appro-

---

[1] Laguerre, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, 1879. — Halphen, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C, 1885.

chées qui correspond à cette fonction, n'est autre que le Tableau considéré. Il ne semble pas aussi aisé de conclure quand la fraction continue ne converge pas dans le voisinage de l'origine, mais dans une autre partie du plan à l'intérieur de laquelle ne se trouve pas l'origine. Quoi qu'il en soit, ce fait si remarquable qu'une fraction continue divergente, en particulier une série entière divergente peuvent fort bien définir une fonction analytique, semble comporter d'importantes conséquences; on en pourrait tirer, en effet, une justification de l'application des règles ordinaires du calcul des séries entières, dans le cas où celles-ci sont divergentes; mais c'est là un fait que nous ne faisons qu'indiquer et sur lequel nous aurons l'occasion de revenir ailleurs.

60. Les fractions continues régulières sont, parmi les fractions continues simples auxquelles donne naissance un Tableau de fractions rationnelles approchées, celles dont il sera, en général, le plus facile d'étudier la convergence.

Considérons, en particulier, la fraction continue d'Euler, celle qui est engendrée par la première file horizontale de fractions du Tableau; tous les polynômes V se réduisent à l'unité, en sorte que l'ensemble (H) se compose de tous les points du plan. La fraction continue converge donc en tous les points intérieurs au cercle de convergence (C) et diverge en tous les points extérieurs; ceci est conforme au théorème d'Abel sur les séries entières, car le cercle (C) n'est autre que le cercle de convergence de la série même qui représente la fonction dans le voisinage de l'origine.

Si l'on connaît l'expression générale des fractions continues régulières du Tableau qui composent l'un des types de fractions continues régulières, et l'expression générale des dénominateurs de leurs réduites, l'étude de la convergence pour toutes ces fractions continues revient à celle d'une seule série entière et d'un seul polynôme dont les coefficients sont des fonctions de grands nombres. On voit ainsi que, en général, ces fractions doivent se diviser en groupes de fractions toutes convergentes ou divergentes en même temps. L'étude de la fonction e^x nous donnera bientôt un exemple très simple de ce fait; nous en signalerons ici même un second.

Considérons la fonction

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}+\ldots.$$

Le Tableau relatif à cette fonction ne comprend que des fractions normales; considérons les fractions continues régulières de la seconde forme engendrées par les files horizontales de fractions du Tableau. Pour la file de rang $q+1$, on a, dès que n dépasse $q+1$,

$$\alpha_n = -\frac{(2n-3)^2}{(2n+2q-3)(2n+2q-1)}x, \qquad a_n = 1+\frac{2n-2q-3}{2n+2q-1}x;$$

on en conclut d'abord que le rayon du cercle de convergence (C) est égal à l'unité. D'autre part, l'expression générale du terme de la suite V_1, V_2, ... est, dès que p est au moins égal à $q-1$,

$$\begin{aligned}V_p = 1 - \frac{q}{1}\,\frac{2p+1}{2p+2q+1}x + \frac{q(q-1)}{1.2}\,\frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)}x^2+\ldots\\ +(-1)^q\frac{q(q-1)\ldots 1}{1.2\ldots q}\,\frac{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\ldots(2p+3-2q)}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)\ldots(2p+3)}x^q,\end{aligned}$$

et, dans tout le plan, ce terme tend uniformément vers la fonction continue $(1-x)^q$ quand p grandit indéfiniment. La seule racine de cette fonction est $x=1$, donc l'ensemble (H) se compose de tous les points du plan hormis le point 1. Toutes les fractions continues régulières considérées convergent donc pour tous les points intérieurs au cercle de rayon égal à l'unité ayant son centre à l'origine, et divergent pour tous les points extérieurs; sur le cercle lui-même, l'indécision subsiste.

L'une quelconque de ces fractions continues définissant dans le cercle de convergence une fonction holomorphe (n° 47), cette fonction ne peut différer de

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Nous ne connaissons pas l'expression générale des termes de la suite U_1, U_2, U_3, ... des numérateurs des réduites; on voit que ce polynôme tend, quand p grandit indéfiniment, vers la fonction

$$\frac{(1-x)^q}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},$$

si x est intérieur au cercle de convergence, et n'a aucune limite si x est extérieur à ce cercle.

61. Après avoir étudié avec détail les fractions continues simples auxquelles donnent naissance les fractions du Tableau (E), nous montrerons combien les choses se compliquent dès que l'on tente l'étude de fractions continues un peu plus générales.

Considérons l'ensemble des fractions continues dont les numérateurs partiels sont des monômes entiers en x, à coefficients différents de zéro, et les dénominateurs partiels des polynômes entiers en x, ayant un terme constant différent de zéro. Elles ne diffèrent des fractions continues simples qu'en ce que l'exposant des numérateurs partiels n'y est pas supposé différent de zéro; mais cette simple extension a cependant pour conséquence une modification profonde des propriétés de la fraction continue.

Les quantités $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduisent encore chacune à un monôme ayant un coefficient différent de zéro, mais le degré de ce monôme ne croît plus nécessairement quand i augmente, on sait seulement qu'il ne décroît pas.

On ne peut plus affirmer que les polynômes U_i et V_i aient chacun un terme constant différent de zéro; ils peuvent être divisibles par une même puissance de x, et, par suite, les réduites de la fraction continue ne sont pas nécessairement des fractions rationnelles irréductibles. Cependant le problème de la recherche d'une fraction continue de cette nature, dont les réduites soient égales à des fractions rationnelles irréductibles données, ne saurait encore admettre qu'une solution.

Parmi toutes ces fractions continues, nous allons ne considérer que celles dont les réduites sont irréductibles; elles forment un groupe que, pour abréger, nous représenterons par G. Les fractions continues simples en font évidemment partie; en font aussi partie les fractions continues dont tous les numérateurs partiels sont des constantes : les réduites d'une telle fraction sont, en effet, irréductibles, puisque les quantités $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduisent à des constantes.

Nous nous bornerons au cas où, dans notre Tableau, aucun des deux cas exceptionnels mentionnés à la fin du théorème du n° 51 ne se présente, et, avec toutes ces hypothèses, nous allons rechercher quelles sont les dispositions de fractions du Tableau (E) qui conduisent à des fractions continues du groupe G.

Pour que des fractions rationnelles irréductibles données

$$\frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \frac{U_3}{V_3}, \quad \ldots,$$

dont deux consécutives quelconques sont inégales soient les réduites successives d'une fraction continue du groupe G, il faut et il suffit :

1° Que toutes les quantités $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduisent à un monôme dont le degré croisse ou reste constant quand i augmente.

2° Que chacune des expressions $U_{i-2} V_i - U_i V_{i-2}$ se réduise à un polynôme ayant pour terme de moindre degré un terme dont le degré soit égal à celui du monôme $U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}$.

3° Que U_1, U_2, V_1, V_2 soient tels que les quantités

$$\text{(I)} \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad a_2,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_1, \quad a_1, \quad \alpha_2, \quad a_2$$

prennent respectivement les formes qu'elles sont assujetties à avoir dans une fraction du groupe G.

Supposons maintenant que les réduites d'une fraction du groupe G soient des fractions du Tableau (E). Soient

$$\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}, \quad \frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}, \quad \frac{U_i}{V_i}$$

trois réduites consécutives et considérons les trois quantités

$$(1) \qquad U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2},$$

$$(2) \qquad U_{i-1} V_i \;\; - U_i \;\; V_{i-1},$$

$$(3) \qquad U_{i-2} V_i \;\; - U_i \;\; V_{i-2}.$$

D'abord, les deux premières se réduisent chacune à un monôme;

donc les carrés relatifs à $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ et $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ sont contigus, ainsi que ceux relatifs à $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$ et $\frac{U_i}{V_i}$.

Supposons maintenant que $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ ne soit pas plus avancée que $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$; le degré du monôme (2) devant être au moins égal à celui du monôme (1), $\frac{U_i}{V_i}$ doit nécessairement être aussi avancée que $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$; alors (3) est sûrement un polynôme où le degré du terme de moindre degré est égal à celui du monôme (1).

Si, au contraire, $\frac{U_{i-2}}{V_{i-2}}$ est plus avancée que $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$, on voit, par la considération de l'expression (3), que $\frac{U_i}{V_i}$ doit être rigoureusement aussi avancée que $\frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$, et qu'alors (2) est un monôme dont le degré est égal à celui de (1).

Nous avons ainsi ce théorème :

Pour obtenir une suite de fractions du Tableau (E) *telle que la fraction continue correspondante appartienne au groupe* G, *il faut et il suffit qu'elles soient choisies de la façon suivante :*

1° *La première fraction de la suite devra être une fraction du bord du Tableau;*

2° *Trois fractions consécutives quelconques devront toujours être différentes entre elles;*

3° *Les carrés correspondants à deux fractions consécutives quelconques devront toujours être contigus;*

4° *Si, en passant d'une fraction* A *à la suivante* B, *on ne recule pas dans le Tableau, la fraction suivante* C *devra être au moins aussi avancée que* A, *tandis que, si l'on recule,* B *et* C *devront être également avancées.*

Il résulte de ce théorème que si les réduites successives d'une fraction continue du groupe G appartiennent toutes au Tableau (E), elles ne forment pas nécessairement une suite de fractions de plus en plus avancées dans ce Tableau, et, par conséquent, une suite de fractions rationnelles de plus en plus approchées de la fonction. La seule chose que l'on puisse affirmer, c'est qu'une réduite quelconque C est toujours au moins aussi avancée que la moins avancée des deux réduites précédentes A, B. La droite perpendiculaire à la diagonale principale qui correspond à la moins avancée de ces deux fractions est ainsi une droite telle qu'aucune fraction, à partir de A, ne peut, par rapport à elle, se trouver du même côté que le sommet du Tableau.

Cette seule condition n'empêche pas d'obtenir, dans le Tableau, une suite illimitée de fractions satisfaisant à toutes les conditions imposées par l'énoncé du théorème, et dans laquelle figure plusieurs fois une même fraction. Mais il y a plus; cette suite peut ne renfermer qu'un nombre limité de fractions distinctes.

Soient A, B, ..., I, J, ..., P, Q des fractions successives, au nombre de m, d'une droite perpendiculaire à la diagonale principale; supposons que les fractions A, B soient contiguës, ainsi que les fractions P, Q. Si deux autres fractions consécutives I, J, de la suite, sont contiguës, il y a une troisième fraction, plus avancée que chacune d'elles, qui leur est à la fois contiguë; si les fractions I, J ne sont pas contiguës, cette condition peut ne pas être réalisée; supposons que, pour la suite de fractions considérée, elle soit toujours réalisée. On peut alors adjoindre à cette suite une autre formée de $m-1$ fractions A′, B′, ..., I′, J′, ..., N′, P′, la fraction A′ étant la fraction contiguë à la fois à A et à B, et plus avancée que chacune d'elles; B′, la fraction analogue pour B, C, ... Il est alors aisé de démontrer que l'on peut, avec les seules fractions A, B, ..., P, Q et A′, P′ d'une part, et, éventuellement quelques-unes des fractions B′, ..., N′ d'autre part, former une suite illimitée de fractions satisfaisant aux trois dernières conditions de l'énoncé du théorème; comme il est toujours aisé de raccorder cette suite à une fraction du bord du Tableau, au moyen d'un nombre limité de fractions, le fait énoncé se trouve mis en évidence.

Réciproquement, supposons que la suite illimitée des réduites d'une fraction continue du groupe G ne comporte qu'un nombre limité de fractions distinctes du Tableau, ces fractions distinctes affectent la disposition que nous venons de décrire.

En particulier, on peut obtenir ainsi des fractions continues dont les réduites, à partir d'un certain rang, forment une suite périodique la fraction continue elle-même est d'ailleurs aussi périodique, mais, si A, B, C, ... désignent les premières fractions de la partie périodique de la suite des réduites, la partie périodique de la fraction continue elle-même ne commencera qu'avec les éléments qui correspondent à C.

Ces fractions continues offrent des exemples bien propres à justifier les considérations développées à propos de la définition des fractions continues, en général (n° 40). On peut, en effet, établir que si deux réduites d'une fraction continue sont égales, la fraction partielle qui correspond à la seconde est dénuée de sens ; si donc la suite des réduites est périodique, ou même, sans être périodique, si elle ne se compose que d'un certain nombre fini de quantités distinctes qui se reproduisent dans un ordre quelconque, toutes les fractions partielles, à partir d'un certain rang, sont dénuées de sens ; c'est le cas des fractions que nous venons d'obtenir.

62. Passons maintenant à la recherche des fractions régulières dans un Tableau uniquement composé de fractions normales.

Trois fractions consécutives A, B, C faisant partie d'une suite de fractions correspondant à une fraction continue du groupe G peuvent offrir 31 dispositions différentes que voici :

(1)

		C_{01}
	B	
C_{00}	A	

(3)

		C_{01}
	B	C_{01}
A	C_{00}	C_{01}

(5)

	C_{00}	C_{11}
A	B	C_{11}
C_{10}	C_{10}	C_{11}

(2)

		C_{00}
	B	A
C_{01}		

(4)

		A
	B	C_{00}
C_{01}	C_{01}	C_{01}

(6)

	A	C_{10}
C_{00}	B	C_{10}
C_{11}	C_{11}	C_{11}

(7)

A	C_{10}	C_{21}
C_{10}	B	C_{21}
C_{21}	C_{21}	C_{21}

Les Tableaux de la seconde ligne sont les symétriques des Tableaux correspondants de la première ligne par rapport à une parallèle à la diagonale principale menée par A. On voit que cinq types réguliers sont ici possibles, et correspondront respectivement aux couples de nombres

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,1), \quad (1,0), \quad (2,1).$$

Aux trois derniers couples correspondent les trois fractions continues simples régulières. Il reste à examiner les couples $(0,1)$ et $(0,0)$ dont il n'a pas été donné jusqu'ici d'exemples, et qui présentent cette particularité que les fractions continues régulières correspondantes ne donnent chacune qu'un nombre limité de fractions du Tableau.

On obtient une fraction continue régulière correspondant au couple $(0,1)$ en prenant toutes les fractions d'une droite perpendiculaire à la diagonale principale.

Quant aux fractions continues régulières correspondant au couple $(0, 0)$, elles sont périodiques et ne fournissent chacune que trois fractions du Tableau; ces fractions sont placées aux sommets d'un triangle rectangle isoscèle dont l'hypoténuse est perpendiculaire à la diagonale principale et le sommet de l'angle droit placé, par rapport à cette hypoténuse, du côté opposé à celui où se trouve le sommet du Tableau. L'une des fractions appartient ainsi, soit à la première file horizontale, soit à la première file verticale du Tableau, et les deux autres, alors, à la deuxième file horizontale dans le premier cas, à la deuxième file verticale, dans le second cas.

IV. — Étude de la fonction exponentielle.

63. Nous nous proposons maintenant d'appliquer à la fonction exponentielle les théories qui précèdent.

Voyons d'abord quelle est la nature des fractions qui composent le Tableau relatif à cette fonction. Le déterminant que nous avons appelé Δ_{pq} (n° 31) est ici égal à

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(p+1)!} & \frac{1}{p!} & \cdots & \frac{1}{(p+1-q)!} \\ \frac{1}{(p+2)!} & \frac{1}{(p+1)!} & \cdots & \frac{1}{(p+2-q)!} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{(p+q+1)!} & \frac{1}{(p+q)!} & \cdots & \frac{1}{(p+1)!} \end{vmatrix},$$

où l'on doit supposer $\frac{1}{0!} = 1$ et $\frac{1}{\alpha!} = 0$ pour α négatif. Ce déterminant se calcule aisément au moyen des transformations usuelles, et l'on trouve

$$\Delta_{pq} = \frac{1!\,2!\ldots q!}{(p+1)!\,(p+2)!\ldots(p+q+1)!},$$

quantité essentiellement différente de zéro, quelles que soient les valeurs de p et de q. Ainsi :

Le Tableau relatif à e^x est uniquement composé de fractions normales.

Au surplus, cette proposition va résulter du calcul même de l'expression générale de ces fractions.

64. Avant de faire ce calcul, nous ferons une remarque sur la manière dont se rattachent l'un à l'autre les Tableaux relatifs aux deux fonctions y et $\frac{1}{y}$.

Soit $\frac{U}{V}$ la fraction rationnelle qui, pour la fonction y, correspond au couple (p, q); on a

$$y = \frac{U}{V} + (x^{\eta_{pq}}),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{y} = \frac{V}{U} - \frac{\frac{V}{U}(x^{\eta_{pq}})}{\frac{U}{V} + (x^{\eta_{pq}})}.$$

Comme $\frac{U}{V}$ ne s'annule pas pour $x = 0$, on voit que $\frac{V}{U}$ est la fraction qui, pour la fonction $\frac{1}{y}$, correspond au couple (q, p).

Cette remarque rend compte de la sorte de parallélisme que l'on a pu remarquer entre les propositions des n^{os} 21 et 22, et aussi dans les démonstrations des n^{os} 15 et 16.

Si l'on suppose $y = e^x$, alors $\frac{1}{y} = e^{-x}$. Si $\frac{U(x)}{V(x)}$ est la fraction qui, pour e^x, correspond au couple (p, q), la fraction qui, pour e^{-x}, correspond au couple (q, p) est $\frac{V(x)}{U(x)}$, et, par suite, la fraction qui, pour e^x, correspond à ce couple (q, p) est $\frac{V(-x)}{U(-x)}$. Ainsi les fractions du Tableau relatif à e^x se correspondent deux à deux : si l'on considère l'une quelconque des deux fractions qui correspondent aux couples (p, q) et (q, p), il suffit d'y changer x en $-x$ et d'échanger les termes pour obtenir l'autre; on peut ainsi se borner au calcul d'une partie seulement des fractions du Tableau, par exemple au calcul de celles pour lesquelles on a $p \geqq q$.

65. Cette remarque permet d'obtenir très aisément la fraction qui correspond au couple (p, q), par la résolution directe des équations en l; ce procédé, appliqué par Heine [1] dans un cas fort général, nécessiterait une discussion spéciale plus pénible au cas où p serait plus petit que q.

Une seconde méthode, non moins simple, reposerait sur cette remarque que, la formule

$$Ve^x = U + (x^{\eta_{pq}})$$

donnant

$$(V + V')e^x = U' + (x^{\eta_{pq}-1}),$$

la fraction $\frac{U'}{V+V'}$ est la fraction qui, dans le Tableau, correspond au couple $(p-1, q)$; il est ainsi facile de déduire de la fraction qui correspond au couple (p, q) toutes celles du rectangle relatif à ce couple. Or bien des méthodes différentes ont été données pour obtenir les fractions de la diagonale principale du Tableau : M. Hermite, en différentes occasions, en a fait connaître plusieurs (*voir*, par exemple, le *Cours professé à la Faculté des Sciences*); elles s'obtiennent encore en appliquant à e^x une formule très générale donnée par M. Darboux dans son beau Mémoire sur le développement en série des fonctions d'une variable (*Journal de Liouville*, 1876, p. 296). Supposant connue l'expression générale de ces fractions, on en déduirait aisément, d'après ce qui précède, celle de la fraction qui correspond à un couple quelconque; mais, pour obtenir tous les éléments dont nous avons besoin pour les calculs ultérieurs, nous reprendrons la méthode employée par M. Hermite dans son profond Mémoire *Sur la fonction exponentielle* (Gau-

---

(1) *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2e éd., t. I, p. 273.

thier-Villars) dans une question dont celle qui nous occupe ici n'est qu'un cas fort particulier ; nous nous servirons des notations mêmes de l'illustre géomètre.

66. Soit $F(z)$ un polynôme en z de degré M, et

$$\mathcal{F}(z) = \frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \ldots + \frac{F^{M}(z)}{x^{M+1}},$$

on vérifie immédiatement, en prenant les dérivées des deux membres, la formule

$$\int e^{-zx} F(z)\,dz = - e^{-zx}\mathcal{F}(z).$$

Prenons o et 1 pour limites inférieure et supérieure de l'intégrale, on obtient

$$\Phi(x)e^{x} - \Phi_1(x) = x^{M+1}.e^{x}.\int_0^1 e^{-zx}F(z)\,dz,$$

où

$$\Phi\ (x) = F(0)..x^{M} + F'(0)..x^{M-1} + \ldots + F^{(M)}(0),$$
$$\Phi_1(x) = F(1)..x^{M} + F'(1)..x^{M-1} + \ldots + F^{(M)}(1).$$

Soit maintenant (p, q) le couple pour lequel nous voulons obtenir la fraction rationnelle approchée de e^x; les polynômes $\Phi_1(x)$, $\Phi(x)$ seront les termes U, V de cette fraction si nous pouvons choisir $F(z)$ de telle façon que les degrés des polynômes $\Phi_1(x)$ et $\Phi(x)$ soient égaux au plus respectivement à p et à q, et qu'en outre M soit au moins égal à $p+q$.

La première de ces conditions donne les équations

$$F(1) = 0,\quad F'(1) = 0,\quad \ldots,\quad F^{(M-p-1)}(1) = 0,$$
$$F(0) = 0,\quad F'(0) = 0,\quad \ldots,\quad F^{(M-q-1)}(0) = 0;$$

pour que le polynôme $F(z)$ y satisfasse, il faut et il suffit que l'on ait

$$F(z) = z^{M-q}(z-1)^{M-p}\,G(z),$$

$G(z)$ désignant un polynôme en z dont le degré est manifestement égal à $p+q-M$. Mais M doit être au moins égal à $p+q$: donc, nécessairement,

$$M = p + q,$$

et $G(z)$ se réduit à une constante que nous prendrons égale à l'unité. Si l'on observe que $M - p = q$ et que $M - q = p$, on a, finalement, les formules

$$F(z) = z^p(z-1)^q,$$

$$U = F^{(q+p)}(1) + F^{(q+p-1)}(1)x + \ldots + F^{(q+1)}(1)x^{p-1} + F^{(q)}(1)x^p,$$

$$V = F^{(p+q)}(0) + F^{(p+q-1)}(0)x + \ldots + F^{(p+1)}(0)x^{q-1} + F^{(p)}(0)x^q,$$

$$e^x = \frac{U}{V} + \frac{1}{V}x^{p+q+1}\int_0^1 e^{-x(z-1)}z^p(z-1)^q\,dz.$$

67. Au moyen de ces formules, nous allons maintenant calculer toutes les fractions continues régulières auxquelles le Tableau donne naissance, et d'abord nous nous occuperons des fractions continues de la première classe.

Ces fractions continues sont celles où, dans la partie régulière, les numérateurs partiels α sont du premier degré; elles se divisent en deux types, selon que les dénominateurs partiels sont du premier degré ou du degré zéro.

Considérons une fraction du premier type, et soit, pour $i > 2$,

$$\alpha_i = \rho x, \qquad a_i = \sigma + \sigma' x.$$

Pour obtenir une telle fraction, on doit prendre toutes les fractions du Tableau qui sont dans une même file verticale, ou toutes celles qui sont dans une même file horizontale; considérons, par exemple, les fractions de la file horizontale q. Dans l'une ou l'autre des équations

$$\rho x U_{i-2} + (\sigma + \sigma' x)U_{i-1} = U_i, \qquad \rho x V_{i-2} + (\sigma + \sigma' x)V_{i-1} = V_i,$$

remplaçons les polynômes U_{i-2}, U_{i-1}, U_i, ou V_{i-2}, V_{i-1}, V_i par leurs expressions générales déduites des formules du paragraphe précédent en donnant à p successivement les valeurs $i-3$, $i-2$, $i-1$, et identifions; on obtient trois équations du premier degré en ρ, σ, σ', qui donnent

$$\alpha_i = \rho x = -(i-2)x, \qquad a_i = \sigma + \sigma' x = q + i - 1 + x.$$

Dans le cas actuel, la fraction est de la seconde forme; on calcule directement, au moyen des formules du n° 41, les éléments α_1, a_1, α_2, a_2 de la fraction ; on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= q!,\\
a_1 &= q! - (q-1)!\,\frac{q}{1}x + (q-2)!\,\frac{q(q-1)}{1.2}x^2 - \ldots + (-1)^q x^q,\\
\alpha_2 &= (-1)^{q+1}x^{q+1},\\
a_2 &= q+1+x,
\end{aligned}$$

ce qui donne, finalement, la fraction continue

$$\frac{q!}{q! - (q-1)!\,\frac{q}{1}x + \ldots + (-1)^q x^q} \,\dot{-}\, \frac{(-1)^q x^{q+1}}{q+1+x} \,\dot{-}\, \frac{x}{q+2+x} \,\dot{-}\, \frac{2x}{q+3+x} \,\dot{-}\, \frac{3x}{q+4+x} \,\dot{-}\, \ldots$$

ou, en rendant égaux à l'unité tous les termes constants des dénominateurs partiels,

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \ldots + \frac{(-1)^q x^q}{q!}} \,\dot{-}\, \frac{\frac{(-1)^q}{q!}\,\frac{x^{q+1}}{q+1}}{1+\frac{x}{q+1}} \,\dot{-}\, \frac{\frac{x}{(q+1)(q+2)}}{1+\frac{x}{q+2}} \,\dot{-}\, \frac{\frac{2x}{(q+2)(q+3)}}{1+\frac{x}{q+3}} \,\dot{-}\, \frac{\frac{3x}{(q+3)(q+4)}}{1+\frac{x}{q+4}} \,\dot{-}\, \ldots$$

Il est très facile, en raison des propriétés établies dans le n° 64, de déduire de là, sans nouveau calcul, la fraction continue dont les réduites successives sont les fractions d'une même file verticale p du Tableau ; on a alors une fraction continue de la première forme :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^p}{p!} + \frac{\frac{1}{p!}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}}{1-\frac{x}{p+1}} \,\dot{+}\, \frac{\frac{x}{(p+1)(p+2)}}{1-\frac{x}{p+2}} \,\dot{+}\, \frac{\frac{2x}{(p+2)(p+3)}}{1-\frac{x}{p+3}} \,\dot{+}\, \frac{\frac{3x}{(p+3)(p+4)}}{1-\frac{x}{p+4}} \,\dot{+}\, \ldots$$

Si, dans les deux dernières expressions, on donne à q et à p, successivement, les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., on obtient la totalité des fractions de la première classe qui sont du premier type. Un calcul absolument semblable nous donnerait les fractions de la première classe qui sont du second type ; nous ne nous y arrêterons pas et donnerons plus loin, dans le Tableau général, les résultats du calcul.

68. Avant de procéder au calcul des fractions continues régulières

de la deuxième classe, nous devons d'abord rechercher quelles elles sont; pour cela, suivant la théorie générale, il nous faut trouver les couples (p, q), $(p+h, q+h)$, où h est un entier positif, tels que, si $\frac{U_i}{V_i}$ et $\frac{U_{i+1}}{V_{i+1}}$ sont les fractions qui leur correspondent respectivement, l'expression $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduise à un monôme.

Notre point de départ sera les formules (n° 66)

$$V_i\ e^x - U_i\ = x^{p+q+1}\int_0^1 e^{-(z-1)x} z^p (z-1)^q\, dz,$$

$$V_{i+1} e^x - U_{i+1} = x^{p+q+2h+1}\int_0^1 e^{-(z-1)x} z^{p+h} (z-1)^{q+h}\, dz,$$

d'où l'on déduit

$$U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i = x^{p+q+1}\left[V_i x^{2h}\int_0^1 e^{-(z-1)x} z^{p+h}(z-1)^{q+h}\, dz - V_{i+1}\int_0^1 e^{-(z-1)x} z^p (z-1)^q\, dz\right],$$

et nous allons calculer les premiers termes du développement suivant les puissances croissantes de x du second membre. Le premier membre étant, au plus, de degré $p+q+h$, on voit qu'il nous suffit d'obtenir le développement de la seconde intégrale, multipliée par V_{i+1}.

Or, en développant $e^{-(z-1)x}$ suivant les puissances croissantes de x, multipliant chaque terme de la série par $z^p(z-1)^q$ et en se rappelant que

$$\int_0^1 z^p (z-1)^q\, dz = \frac{(-1)^q 1.2.3\ldots q}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)},$$

on obtient, en intégrant terme à terme,

$$\int_0^1 e^{-(z-1)x} z^p (z-1)^q\, dz$$
$$= \frac{(-1)^q 1.2.3\ldots q}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)}\left[1 + \frac{q+1}{p+q+2}\frac{x}{1} + \frac{(q+1)(q+2)}{(p+q+2)(p+q+3)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots\right];$$

d'autre part, on a

$$V_{i+1} = (q+p+2h)! - (q+p+2h-1)!\,\frac{q+h}{1}\,x + (q+p+2h-2)!\,\frac{(q+h)(q+h-1)}{1.2}\,x^2 - \ldots;$$

on en conclut que les trois premiers coefficients du développement de

$U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ sont, à des facteurs différents de zéro près,

$$1, \qquad \frac{q+h}{1} - \frac{q+1}{p+q+2}(q+p+2h),$$

$$(q+h)(q+h-1) - 2\frac{q+1}{p+q+2}(q+p+2h-1)$$
$$+ \frac{(q+1)(q+2)}{(p+q+2)(p+q+3)}(q+p+2h-1)(q+p+2h).$$

Le premier de ces coefficients est, comme nous le savions *a priori*, différent de zéro. Pour que $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduise à un monôme, il faut donc, tout d'abord, que le second s'annule; or on le met immédiatement sous la forme

$$\frac{(p+1)(q+h) - (q+1)(p+h)}{p+q+2};$$

il est nul pour $h = 1$, quels que soient p et q; il n'est nul que pour cette valeur tant que l'on n'a pas $p = q$. Ainsi, pour deux couples tels que (p, q), $(p+1, q+1)$, l'expression $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduit à un monôme. Nous aurons ainsi à calculer les fractions continues simples dont les réduites sont des fractions consécutives prises sur une file parallèle à la diagonale principale; celles de ces fractions qui seront régulières constitueront les fractions de la première famille; elles pourront, d'ailleurs, appartenir à l'un ou à l'autre des deux types que comprend cette famille.

Quand $p = q$, le coefficient précédent s'annule quel que soit h; faisons alors $p = q$ dans le troisième coefficient, il devient simplement

$$\frac{(p+h)(h-2)}{2p+3}$$

et ne s'annule que pour $h = 2$. Ainsi l'expression $U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i$ se réduit encore à un monôme pour tous les couples tels que (p, p), $(p+2, p+2)$. Nous avons donc à calculer les deux fractions continues simples qui ont pour réduites les fractions de la diagonale principale prises de deux en deux à partir de la première; si elles sont régulières, la seconde famille se composera de ces deux fractions qui pourront d'ailleurs appartenir à l'un quelconque des trois types de cette famille. Telles sont les fractions qui nous restent à calculer

TABLEAU

DES

FRACTIONS CONTINUES RÉGULIÈRES RELATIVES A e^x.

I. — Fractions continues régulières de la première classe.

Premier type.

$$(1)\qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+\frac{\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)!}}{1-\dfrac{x}{p+1}}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{x}{(p+1)(p+2)}}{1-\dfrac{x}{p+2}}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{2x}{(p+2)(p+3)}}{1-\dfrac{x}{p+3}}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{3x}{(p+3)(p+4)}}{1-\dfrac{x}{p+4}}\;\dot{+}\ldots\qquad (p=0,1,2,3,\ldots),$$

$$(2)\qquad \frac{1}{1-\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}-\ldots+\dfrac{(-1)^q x^q}{q!}}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{(-1)^{q+1}x^{q+1}}{(q+1)!}}{1+\dfrac{x}{q+1}}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{x}{(q+1)(q+2)}}{1+\dfrac{x}{q+2}}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{2x}{(q+2)(q+3)}}{1+\dfrac{x}{q+3}}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{3x}{(q+3)(q+4)}}{1+\dfrac{x}{q+4}}\;\dot{-}\ldots\qquad (q=0,1,2,3,\ldots).$$

Deuxième type.

$$(3)\qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+\frac{\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)!}}{1}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{(p+1)x}{(p+1)(p+2)}}{1}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{x}{(p+2)(p+3)}}{1}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{(p+2)x}{(p+3)(p+4)}}{1}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{2x}{(p+4)(p+5)}}{1}\;\dot{-}\ldots\qquad (p=0,1,2,3,\ldots),$$

$$(4)\qquad \frac{1}{1-\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}-\ldots+\dfrac{(-1)^q x^q}{q!}}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{(-1)^{q+1}x^{q+1}}{(q+1)!}}{1}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{(q+1)x}{(q+1)(q+2)}}{1}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{x}{(q+2)(q+3)}}{1}\;\dot{+}\;\frac{\dfrac{(q+2)x}{(q+3)(q+4)}}{1}\;\dot{-}\;\frac{\dfrac{2x}{(q+4)(q+5)}}{1}\;\dot{+}\ldots\qquad (q=0,1,2,3,\ldots).$$

II. — Fractions continues régulières de la deuxième classe.

PREMIÈRE FAMILLE.

Premier type.

$$(5)\qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+\frac{\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)!}}{1-\dfrac{px}{p(p+2)}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1(p+1)x^2}{(p+1)(p+2)^2(p+3)}}{1-\dfrac{px}{(p+2)(p+4)}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{2(p+2)x^2}{(p+3)(p+4)^2(p+5)}}{1-\dfrac{px}{(p+4)(p+6)}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{3(p+3)x^2}{(p+5)(p+6)^2(p+7)}}{1-\dfrac{px}{(p+6)(p+8)}}\,\dot{+}\ldots\qquad (p=1,2,3,\ldots),$$

$$(6)\qquad \frac{1}{1-\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}-\ldots+\dfrac{(-1)^q x^q}{q!}}+\frac{\dfrac{(-1)^{q+1}x^{q+1}}{(q+1)!}}{1+\dfrac{qx}{q(q+2)}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1(q+1)x^2}{(q+1)(q+2)^2(q+3)}}{1+\dfrac{qx}{(q+2)(q+4)}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{2(q+2)x^2}{(q+3)(q+4)^2(q+5)}}{1+\dfrac{qx}{(q+4)(q+6)}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{3(q+3)x^2}{(q+5)(q+6)^2(q+7)}}{1+\dfrac{qx}{(q+6)(q+8)}}\,\dot{+}\ldots\qquad (q=1,2,3,\ldots).$$

Deuxième type.

$$(7)\qquad 1+\frac{x}{1-\dfrac{x}{2}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{1.3}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{3.5}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{5.7}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{7.9}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\ldots,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{1}\,\dot{+}\,\frac{-x}{1+\dfrac{x}{2}}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{1.3}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{3.5}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{5.7}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\dfrac{1}{7.9}\dfrac{x^2}{4}}{1}\,\dot{+}\ldots.$$

DEUXIÈME FAMILLE.

Premier type.

$$(9)\qquad 1+\frac{x}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}}\,\dot{-}\,\frac{\dfrac{1}{1.3^2.5}\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{3.7}\dfrac{x^2}{2}}\,\dot{-}\,\frac{\dfrac{1}{5.7^2.9}\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{7.11}\dfrac{x^2}{2}}\,\dot{-}\,\frac{\dfrac{1}{9.11^2.13}\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{11.15}\dfrac{x^2}{2}}\,\dot{-}\ldots,$$

$$(10)\qquad \frac{1}{1}\,\dot{+}\,\frac{-x}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}}\,\dot{-}\,\frac{\dfrac{1}{1.3^2.5}\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{3.7}\dfrac{x^2}{2}}\,\dot{-}\,\frac{\dfrac{1}{5.7^2.9}\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{7.11}\dfrac{x^2}{2}}\,\dot{-}\,\frac{\dfrac{1}{9.11^2.13}\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{11.15}\dfrac{x^2}{2}}\,\dot{-}\ldots.$$

69. Ce calcul s'effectue sans difficultés en suivant la méthode que nous avons déjà indiquée. On trouve qu'il y a une infinité de fractions de la première famille; parmi ces fractions une infinité appartiennent au premier type, à savoir toutes celles qui commencent par une fraction du bord du Tableau autre que celle qui correspond au couple (o, o): deux seulement appartiennent au second type, celles qui commencent par cette fraction. Enfin les deux fractions continues simples, qui seules peuvent être des fractions continues régulières appartenant à la seconde famille, sont effectivement régulières et appartiennent l'une et l'autre au premier type de cette famille.

Nous donnons ci-dessus le Tableau complet des résultats.

70. Quelques-unes seulement de ces fractions continues semblent avoir été obtenues jusqu'ici, et cela par des méthodes très différentes.

Si l'on fait $q = 0$ dans (2), on obtient la fraction continue d'Euler relative à la fonction e^x (n° 36).

La fraction continue donnée par Gauss [1] pour la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est, parmi les fractions continues régulières relatives à cette fonction, celle de la première classe et du second type qui a pour réduite initiale la fraction correspondant au couple (o, o). Comme cas limite de cette fraction continue, il est aisé de déduire celle relative à e^x donnée par la formule (4) quand on fait $q = 0$. La formule se trouve dans le Mémoire même de Gauss; mais on y trouve encore ces relations

$$\begin{aligned} e^x = \lim_{k=\infty} F\left(1, k, 1, \frac{x}{k}\right) &= 1 + \frac{x}{1} \lim_{k=\infty} F\left(1, k, 2, \frac{x}{k}\right) \\ &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \lim_{k=\infty} F\left(1, k, 3, \frac{x}{k}\right) = \ldots, \end{aligned}$$

d'où il eût pu, par la même méthode, déduire immédiatement toutes les fractions continues données par la formule (3).

C'est à Lagrange [2] que sont dues les trois autres fractions continues connues; elles s'obtiennent en faisant $p = 0$ dans (3), $p = 1$

---

[1] *Disquisitiones generales*, etc. (*Œuvres*, t. III, p. 123, §§ 5, 12, 13 et 14).

[2] *Sur l'usage des fractions continues*, etc. (*Œuvres*, t. IV, p. 301, §§ 7-18).

dans (5), et la dernière est la fraction (7) elle-même. C'est au moyen de l'identité

$$\frac{x}{1}+\frac{x'}{a}+r=x-\frac{xx'}{a+x'}+r$$

que le grand géomètre déduit de la première de ces trois fractions les deux autres. On aperçoit immédiatement comment cette identité permet de déduire d'une fraction continue simple dont un dénominateur partiel est égal à l'unité une autre fraction continue également simple, ayant toutes les réduites de la première, sauf une qui se trouve supprimée, à savoir celle qui, dans la première fraction continue, correspond au quotient incomplet qui précède celui qui est égal à l'unité.

Cette simple remarque permet de déduire toutes les fractions continues régulières de la deuxième classe (5), (6), (7), (8), (9), (10) que nous avons obtenues des seules fractions (3) et (4) de la première classe.

Considérons la fraction (3) et par l'application répétée de l'identité de Lagrange faisons disparaître les réduites de rang pair, on obtient la fraction (5); de même de (4) se déduit (6); il suffit de supposer $p=0$ dans (5) et $q=0$ dans (6) pour obtenir les fractions (7) et (8); les dénominateurs partiels de ces fractions étant égaux à l'unité, l'identité devient de nouveau applicable, et, en faisant encore disparaître toutes les réduites de rang pair, on obtient les fractions (9) et (10).

Sur le Tableau des fractions rationnelles approchées de e^x, on aperçoit bien à quoi reviennent ces opérations; la fraction (3), par exemple, a pour réduites une suite de fractions en escalier, celles relatives aux couples

$$(p,0),\quad (p+1,0),\quad (p+1,1),\quad (p+2,1),\quad (p+2,2),\quad (p+3,2),\quad \ldots;$$

supprimer les réduites de rang pair au moyen de l'identité de Lagrange, c'est obtenir la fraction continue qui a pour réduites les fractions correspondant aux couples

$$(p,0),\quad (p+1,1),\quad (p+2,2),\quad (p+3,3),\quad \ldots,$$

c'est-à-dire les fractions d'une file parallèle à la diagonale principale du Tableau; on a ainsi une fraction continue de la deuxième classe et de la première famille. On voit de même que les fractions (9) et (10) ont pour réduites les fractions de la diagonale principale du Tableau prises de deux en deux à partir de la première, et qu'elles sont des fractions de la deuxième famille.

71. La convergence de toutes ces fractions continues régulières s'établit aisément. Le numérateur de la fraction rationnelle approchée de e^x, relative au couple (p, q), est, quand on divise les deux termes de cette fraction (n° 66) par $(p+q)!$,

$$1 + \frac{p}{p+q}\frac{x}{1} + \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ + \frac{p(p-1)\ldots 2.1}{(p+q)(p+q-1)\ldots(q+1)}\frac{x^p}{1.2\ldots p},$$

et il est facile de voir ce que devient ce polynôme dans chacun des trois cas suivants : 1° lorsque, q restant inférieur à un nombre positif fixe A, p grandit indéfiniment; 2° lorsque p et q grandissent indéfiniment, mais de telle sorte que la valeur absolue de la différence $p - q$ reste inférieure à un nombre positif fixe A; 3° lorsque, p restant inférieur à un nombre positif fixe A, q grandit indéfiniment. Le numérateur des réduites successives d'une fraction continue régulière quelconque rentre nécessairement dans l'un ou l'autre de ces trois cas.

Dans le troisième cas, le nombre des termes du polynôme restant fini, et chacun de ces termes, sauf le premier, ayant pour limite zéro, il est évident que le polynôme a une limite égale à ce premier terme, à l'unité par conséquent.

Dans le premier et le second cas, au contraire, le nombre des termes du polynôme grandit indéfiniment; son étude ne présente aucune difficulté et se fait comme celle de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ quand m grandit indéfiniment par des valeurs entières positives.

Observons d'abord que, X désignant un nombre positif supérieur à $|x|$, les modules des termes du polynôme sont au plus égaux aux termes de même rang de la série à termes positifs convergente

$$1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \ldots;$$

si donc, $\frac{\varepsilon}{3}$ étant un nombre positif donné quelconque, on choisit l'entier positif k de telle sorte que la somme de la série

$$\frac{X^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)}+\frac{X^{k+2}}{1.2\ldots(k+2)}+\ldots$$

soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$, la somme r_k des termes du polynôme qui suivent le terme en x^k aura assurément un module inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$; de même aussi les restes $R_k^{(1)}$, $R_k^{(2)}$ des séries

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots,\qquad 1+\frac{\frac{x}{2}}{1}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.2}+\ldots,$$

limitées aux termes en x^k.

Supposons-nous maintenant placé dans le premier cas, celui où p seul grandit indéfiniment. Le terme général du polynôme est

$$\frac{p}{p+q}\,\frac{p-1}{p+q-1}\,\frac{p-2}{p+q-2}\,\frac{p-h+1}{p+q-h+1}\,\frac{x^h}{1.2\ldots h},$$

et l'identité

$$\frac{p-i}{p+q-i}=1-\frac{q}{p+q-i}$$

montre que ce terme général a une limite, égale à

$$\frac{x^h}{1.2\ldots h};$$

on peut donc prendre p suffisamment grand pour que la différence entre la somme s_k des $k+1$ premiers termes du polynôme et la somme $S_k^{(1)}$ des $k+1$ premiers termes du développement de e^x soit et reste plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$; en désignant par P le polynôme, on a alors

$$|e^x-P|=|S_k^{(1)}+R_k^{(1)}-s_k-r_k|\leqq|S_k^{(1)}-s_k|+|R_k^{(1)}|+|r_k|<\varepsilon,$$

ce qui démontre que P a une limite et que cette limite est e^x.

Dans le second cas, l'identité

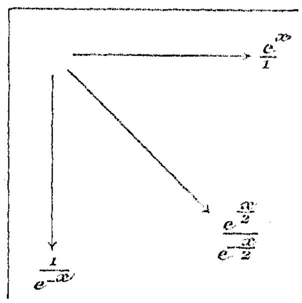
$$\frac{p-i}{p+q-i}=\frac{1}{2}+\frac{p-q-i}{2(p+q-i)}$$

montre que le terme général du polynôme a une limite égale à

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^h}{1.2\ldots h},$$

et le raisonnement se fait comme précédemment, en remplaçant e^x, $S_k^{(1)}$, $R_k^{(1)}$ par $e^{\frac{x}{2}}$, $S_k^{(2)}$, $R_k^{(2)}$. Le polynôme P a alors une limite égale à $e^{\frac{x}{2}}$.

72. Considérons maintenant la fraction continue régulière (1); elle a pour réduites les fractions rationnelles qui, dans le Tableau relatif à e^x, composent la file verticale p; il en résulte que la suite des numérateurs de ces réduites tend vers une limite, l'unité. La suite des dénominateurs se déduit de la suite des numérateurs des fractions qui composent la file horizontale p par le simple changement de x en $-x$ (nº 64); cette suite a donc aussi une limite, e^{-x}. La fraction continue est donc convergente et a pour limite $\frac{1}{e^{-x}} = e^x$.



On verrait de même que la fraction continue (2) est convergente et a pour limite $\frac{e^x}{1} = e^x$; enfin que chacune des autres fractions (3)-(10) est aussi convergente et a pour limite $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}} = e^x$; donc :

Toutes les fractions continues régulières relatives à e^x sont convergentes et ont e^x pour limite.

On aperçoit d'un seul coup d'œil les différentes circonstances que nous venons de rencontrer au moyen de la figure ci-dessus.

Les flèches font connaître la direction dans laquelle les réduites des fractions continues régulières progressent dans le Tableau, et les fractions, les limites vers lesquelles tendent alors le numérateur et le dénominateur de ces réduites.

Nous aurions pu appliquer ici les considérations développées dans les nos 45 et suivants; pour toutes les fractions continues régulières obtenues, le rayon du cercle (C) est infini, et comme le dénominateur des réduites tend toujours uniformément vers une fonction continue qui n'a aucun zéro à distance finie, chaque fraction continue est convergente dans tout le plan et a e^x pour limite. Le Tableau qui précède montre bien comment les fractions continues régulières se partagent en groupes de fractions ayant une convergence de même nature, comme nous l'avons expliqué dans le no 60.

73. Les fractions continues (9) et (10) ont les mêmes réduites; ce sont les plus convergentes des fractions continues régulières relatives à e^x, et même de toutes les fractions continues simples relatives à cette fonction; l'ordre de l'approximation donnée par leurs réduites croît de quatre unités quand on passe d'une réduite à la suivante.

Si l'on suppose $x = 1$, les trois premières réduites sont

$$1, \quad \frac{19}{7}, \quad \frac{2721}{1001};$$

elles sont, comme toutes les autres réduites d'ailleurs, des valeurs approchées de e par défaut, et la troisième représente déjà e avec six décimales exactes

$$\frac{2721}{1001} = 2,7182817\ldots.$$