Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires.

ROGER TEMAM

Résumé. - *Le travail est résumé dans l'introduction.*

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude de l'approximation de la solution de problèmes d'évolution par des méthodes de décomposition des opérateurs.

Soient H un espace de Hilbert et $A(t)$, $t \in [0, T]$, une famille d'opérateurs linéaires, non bornés dans H de domaine $D(A(t))$. Nous considérons ici des problèmes d'évolution du type suivant (formulations très imprécises pour l'instant):

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{Pour } f \text{ et } u_0 \text{ donnés, trouver une fonction } u \text{ vérifiant} \\ u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ou aussi

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Pour } f,\ u_0 \text{ et } u_1 \text{ donnés, trouver une fonction } u \text{ vérifiant} \\ u''(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad t \in [0, T] \\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 \end{cases}$$

Dans les applications, $A(t)$ est en général un opérateur différentiel dans un ouvert Ω de R^n et son domaine $D(A(t))$ est fixé par des conditions aux limites appropriées. Les problèmes (1) et (2) sont alors des problèmes mixtes au sens de Hadamard.

Les méthodes d'approximation que nous étudions supposent que $A(t)$ admet une décomposition «naturelle» de la forme

$$(3) \qquad A(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t),$$

les $A_i(t)$ étant également des opérateurs non bornés dans H de domaine $D(A_i(t))$. Ces méthodes permettent alors de ramener l'approximation de (1) (resp. (2)) à la résolution ou à l'approximation de problèmes analogues avec les $A_i(t)$ (*problèmes plus simples si la décomposition* (3) *est bien choisie*).

Différentes méthodes d'approximation de ce type (voisines les unes des autres) ont été proposées et étudiées: ce sont les méthodes de Pas Fractionnaires étudiées en particulier par DENIDOV, G. I. MARCHOUK, A. A. SAMARSKII et N. N. YANENKO, et les méthodes de Directions Alternées dûes entre autres à J. DOUGLAS Jr., J. E. GUNN, D. W. PEACEMAN et H. H. RACHFORD.

Bien que couramment utilisées dans les applications numériques, ces méthodes ne reposaient le plus souvent que sur des démonstrations formelles ou assez particulières. Nous avonz ici résolu les problèmes de la *stabilité et de la convergence des méthodes de Pas Fractonnaires,* pour des problèmes linéaires assez géneraux et pour certaines classes de problèmes non linéaires.

Les problèmes du premier et du deuxième ordre en t sont étudiés par des méthodes quelque peu différentes (bien que ces derniers se réduisent formellement aux premiers). Dans le cas, par exemple, des équations du premier ordre, les approximations que nous étudions sont les suivantes:

1°). Approximations semi-discrètes.

L'intervalle $(0, T)$ est divisé en N intervalles de longueur k; k est destiné à tendre vers 0.

On définit m fonctions approchées $u_{1k}, \dots, u_{mk}$: moyennant des hypothèses convenables sur $A_1(t)$, on définit la restriction de u_{1k} à l'intervalle $(0, k)$ comme «la solution» de

$$u'_{1k}(t) + A_1(t)u_{1k}(t) = 0, \qquad u_{1k}(0) = u_0 \tag{4}$$

($f = 0$ pour fixer les idées).

On définit ensuite successivement les restrictions des fonctions $u_{2k}, \dots, u_{mk}$ à l'intervalle $(0, k)$ comme solutions de

$$u'_{ik}(t) + A_i(t)u_{ik}(t) = 0, \qquad u_{ik}(0) = u_{(i-1)k}(k). \tag{5}$$

On opère ensuite de même sur l'intervalle $(k, 2k)$ avec u_0 remplacé par $u_{mk}(k)$, puis successivement sur les autres intervalles $(rk, (r+1)k)$, $r = 2, \dots, N-1$.

2°). Approximations discrètes.

Les principes sont les mêmes que précédemment mais les équations aux dérivées partielles (4)-(5) sont remplacées par des équations aux différences finies.

Pour cela, nous introduisons comme en [28] une famille d'espaces de Hilbert V_h de dimension finie et dépendant d'un paramètre h destiné comme k à tendre vers 0 (k est le pas en la variable de temps, h est le pas en les variables d'espace). Nous remplaçons $\frac{d}{dt}$ par un quotient différentiel et les $A_i(t)$ par des opérateurs (de différences finies) $A_{i,hk}(rk)$ opérant dans V_h ($i = 1, \ldots, m$, $r = 0, \ldots, N$).

Les fonctions approchées $u_{i,hk}$ sont alors définies comme suit:

$$
(6) \qquad \begin{cases} u_{i,hk}(rk) = u_h^{r+\frac{i}{m}} (\in V_h), \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[\\ r = 0, \ldots, N-1, \qquad i = 1, \ldots, m \end{cases}
$$

où

$$
(7) \qquad u_h^0 = r_h u_0 = \text{« une approximation » de } u_0,
$$

puis $u_h^0, \ldots, u_h^{r+\frac{i-1}{m}}$ étant connus, $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ est la solution de

$$
(8) \qquad \frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right) + A_{i,hk}(rk) u_h^{r+\frac{i}{m}} = 0.
$$

3°). Autres méthodes d'approximation.

Lorsque cela nous semble présenter un intérêt pour le type d'équations considérées, nous indiquons également d'autres procédés d'approximation avec discrétisation en les variables d'espace et, en ce qui concerne la variable de temps, une des situations suivantes:

— il n'y a pas de discrétisation pour cette variable, les problèmes approchés étant alors des systèmes différentiels du type suivant:

$$
(9) \qquad \frac{d}{dt} u_{i,hk}(t) + A_{i,hk}(rk) \cdot u_{i,hk}(t) = 0
$$

— pour certains i on a des équations discrétisées en t telles que (8), et pour les autres i on a des équations non discrétisées en t, telles que (9) (approximations de type mêlé).

Pour chaque type d'approximation, après avoir défini de manière précise les fonctions « approchées » u_{ik} ou resp. $u_{i,hk}$, nous étudions le comportement de ces fonctions lorsque k tend vers 0 (resp. lorsque k et h tendent vers 0):

a) Nous établissons par des *méthodes d'énergie* des estimations a priori indépendantes de k (resp. k et h) pour les fonctions approchées. Dans le cas des approximations discrètes ces estimations résolvent le problème de la stabilité numérique.

b) Utilisant en particulier les estimations à priori précédentes, nous passons à la limite dans les équation approchées ($k \to 0$, ou resp. k et $h \to 0$) et nous démontrons la convergence des fonctions approchées vers la solution u du problème (1); pour chaque i ($i = 1, \ldots, m$) u_{ik} (resp. $u_{i,hk}$) converge vers u dans un espace convenable.

Le Chapitre I traite ainsi d'équations linéaires du premier ordre en t:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t),$$

$A(t)$ opérateur linéaire elliptique.

Le chapitre II est consacré à certaines équations non linéaires du premier ordre en t:

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t),$$

$A(t)$ opérateur linéaire elliptique, $B(t)$ opérateur non linéaire monotone.

Le chapitre III est consacré aux équations du deuxième ordre en t linéaires ou non linéaires:

$$u''(t) + A(t)u(t) = f(t),$$

ou

$$u''(t) + A(t)u(t) + B(t)u'(t) = f(t),$$

$A(t)$ opérateur linéaire elliptique, $B(t)$ opérateur non linéaire monotone.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans trois Notes aux Comptes-Rendus [36].

Des résultats qui recoupent ceux du Chapitre I ont été obtenus par Samarski [30-32] utilisant aussi des méthodes d'énergie et par Denidov, Yanenko et Trotter, [7] [39] [41], utilisant des méthodes différentes des nôtres, liées en particulier à la théorie des semi-groupes. La convergence des méthodes de directions alternées et des resultats complétant les nôtres sont dûs à Lieutaud [12].

Les méthodes utilisées ici ont été appliquées par Lions-Temam [22-23] aux inéquations variationnelles et seront appliquées ultérieurement à d'autres types de problèmes, équations de Navier-Stokes, équations du type de Schroedinger.

Je n'ai pu mener à bien ce travail que grâce aux encouragements et à l'aide constante de M. LIONS. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma très respectueuse reconnaissance.

Je remercie M. SCHWARTZ d'avoir bien voulu accepter la présidence du Jury, Madame LELONG et M. BROUSSE de bien vouloir y participer.

Je tiens à remercier également M. MARCHOUK dont les conférences faites à l'Université de Paris ont été le point de départ de ce travail.

Ma reconnaissance va enfin à M. CABANNES et M. GERMAIN qui, par leurs conseils et leurs enseignements, ont contribué à assurer ma formation scientifique.

CHAPITRE I

EQUATIONS D'EVOLUTION LINEAIRES DU 1er ORDRE

Introduction.

Dans ce chapitre nous étudions l'approximation de la solution d'équations

$$u'(t) + A(t) + u(t) = f(t)$$

où $A(t)$ est un opérateur linéaire de type elliptique,

Les n° 1 *à* 9 *concernent les approximations semi-discrètes, et les* n° 10 *à* 21 *les approximations discrètes.*

Au n° 1 nous formulons de manière précise le problème exact dont nous cherchons à approcher la solution. Au n° 2, après avoir formulé des hypothèses convenables, nous «construisons» les solutions approchées semi-discrètes. Aux n° 4 à 7, nous établissons des estimations à priori pour les solutions approchées et démontrons le théorème essentiel de convergence.

Des exemples sont traités aux n° 3 et 8; le n° 9 donne quelques compléments sur les approximations semi-discrètes.

Au n° 10 nous formulons les hypothèses de discrétisation et celles-ci sont explicitées ensuite sur les exemples (n° 11). Nous définissons les solutions approchées discrètes (n° 12), nous établissons des estimations à priori sur ces solutions approchées (nº 13 et 14), nous donnons enfin un théorème général de convergence faible (nº 15 à 17) et un théorème de convergence forte (nº 18). Ces résultats sont appliqués, au nº 19, aux exemples précédents.

Aux nº 20 et 21 nous donnons des compléments: approximation par des systèmes différentiels, remarque sur l'approximation des problèmes elliptiques linéaires.

§ 1. - Approximations semi-discrètes.

1. - Rappels. Le problème exact.

Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de J. L. LIONS [14] [16], sur la théorie des équations d'évolution linéaires du premier ordre.

Nous considérons deux espaces hilbertiens complexes [1] V et H, V inclus dans H avec une injection continue, V dense dans H. Nous noterons $((u, v))$ et $\|u\|$ (resp. (f, g) et $|f|$) le produit scalaire et la norme dans V (resp. H).

Nous identifions H à son anti-dual; V' désignant l'anti-dual de V, nous avons alors les inclusions

$$V \subset H \subset V'. \tag{1-i}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Soit $T > 0$ fini; pour chaque $t \in [0, T]$ nous nous donnons une forme $a(t; u, v)$, sesquilinéaire continue sur V, et nous faisons les hypothèses suivantes:

$$t \to a(t; u, v) \quad \text{est une fonction mesurable,} \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{1-ii}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe une constante } M \text{ telle que} \\ |a(t; u, v)| \leq M \|u\| \, \|v\| \\ \text{pour tout } u, v \in V \text{ et pour presque tout } t \in [0, T]. \end{array}\right. \tag{1-iii}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe une constante } \alpha > 0 \text{ telle que} \\ \mathcal{R}e\, a(t; u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \\ \text{pour tout } u \in V \text{ et pour presque tout } t \in [0, T]. \end{array}\right. \tag{1-iv}$$

---

(1) Tout ce qui suit reste variable dans le cas réel, à condition de supprimer les «$\mathcal{R}e$» et de remplacer «anti-dual» par «dual», «sesquilnéaire» par «bilinéaire».

Pour $u \in V$ et pour presque tout t,

$$v \mapsto a(t;\ u,\ v)$$

est une forme anti-linéaire continue sur V, notée $A(t)u$:

$$< A(t)u,\ v > = a(t;\ u,\ v) \qquad \forall\ v \in V.$$

$< ; >$ produit scalaire dans l'anti-dualité, entre V' et V.

Pour presque tout t, $u \to A(t) \cdot u$ est une application linéaire de V dans V'; on montre que c'est un isomorphisme.

Si X est un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$, a et b deux nombres réels, $L_p(a, b;\ X)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable sur $[a,\ b]$ à valeurs dans X (avec la norme usuelle). Les espaces $L_p(0,\ T;\ X)$ intervenant souvent, nous noterons pour simplifier

$$L_p(0,\ T;\ X) = L_p(X).$$

Nous rappelons [33] que si $g(\cdot) \in L_p(a,\ b;\ X)$, la dérivée $g' = \dfrac{dg}{dt}$ est définie dans l'espace des distributions vectorielles sur $]a,\ b[$ à valeurs dans X.

Considérons alors le problème suivant:

PROBLÈME 1.

Pour $u_0 \in H$ et $f \in L_2(H)$ donnés, trouver une fonction u vérifiant

$$u \in L_2(V) \tag{1.1}$$

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad t \in]0,\ T[\tag{1.2}$$

$$u(0) = u_0 \tag{1.3}$$

REMARQUE 1.1.

En raison de (1-ii) et (1-iii) l'application linéaire $u(\cdot) \to A(\cdot)\,u(\cdot)$ est continue de $L_2(V)$ dans $L_2(V')$. Donc, si u vérifie (1.1) et (1.2), alors

$$u' \in L_2(V') \tag{1.4}$$

On démontre (cf. LIONS [13]), qu'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, toute fonction vérifiant (1.1) et (1.4) est continue de $[0,\ T]$ dans H.

Cette remarque donne en particulier un sens à (1.3).

Le théorème suivant est classique:

THÉORÈME 1.1.

Sous les hypothèses (1-i) *à* (1-iv), *le problème* 1 *possède une solution* u *unique,*

La fonction u *est continue de* $[0, T] \to H$ *et vérifie, pour tout* $t \in [0, T]$, *l'égalité d'énergie suivante*:

$$(1.5) \qquad |u(t)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_0^t a(s;\ u(s),\ u(s))ds = $$
$$= |u(0)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_0^t (f(s),\ u(s))ds.$$

Nous nous intéressons dans ce chapitre, à l'approximation de cette fonction u.

REMARQUE 1.2.

Le théorème 1.1 est encore valable si, au lieu de (1-iv), nous avons

$$(1.6) \qquad \mathcal{R}e\, a(t;\ u,\ u) + \lambda\, |u|^2 \quad \geq \alpha \| u \|^2, \qquad \alpha > 0, \qquad \lambda \geq 0.$$

Il est bien connu qu'en posant $u(t) = \exp(\lambda t) \cdot w(t)$, nous ramenons le problème 1 à un problème analogue pour w, mais ave l'hypothèse (1-iv) vérifiée.

Le théorème 1.1 est aussi valable si, au lieu de $f \in L_2(H)$ nous avons $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_1(H)$, $f_2 \in L_2(V')$. Nous n'envisagerons pas ce cas ici, mais il entre dans le cadre du chapitre II.

2. - Problème approché semi-discret.

Nous introduisons m espaces de Hilbert $V_1, \dots, V_m$ [normes $\| u \|_i$, produits scalaires $((u,\ v))_i$] tels que

$$(2\text{-i}) \qquad V \subset V_i \subset H, \qquad i = 1, \dots, m,$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Puisque H est identifié à son anti-dual, nous avons

$$(2\text{-ii}) \qquad V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V', \qquad i = 1, \dots, m,$$

V_i' désignant l'anti-dual de V_i

Nous supposons également que

$$(2\text{-iii}) \qquad V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i .$$

Avec (2-i) et (2-iii) nous voyons que V est un espace de Banach [2] pour les normes

$$\| u \| \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \| u \|_i ,$$

et que la première norme définit une topologie plus fine que la seconde. Nous en concluons grâce au théorème du graphe fermé, que ces deux normes sont équivalentes.

Pour $i = 1, \ldots, m$, soit $a_i(t; u, v)$, $t \in [0, T]$, une famille de formes sesquilinéaires continues sur V_i, qui vérifient des propriétés analogues à (1-ii)-(1-iv), c'est-à-dire:

$$\text{(2-iv)} \qquad t \mapsto a_i(t; u, v) \quad \text{est mesurable}, \qquad \forall\, u, v \in V_i ,$$

$$\text{(2-v)} \qquad \begin{cases} | a_i(t; u, v) | \leq M_i \| u \|_i \| v \|_i \\ \forall\, u, v \in V_i , \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \end{cases}$$

$$\text{(2-vi)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e\, a_i(t; u, u) \geq \alpha_i \| u \|_i^2 \\ \forall\, u \in V_i , \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \qquad \alpha_i > 0, \end{cases}$$

et qui vérifient en outre:

$$\text{(2-vii)} \qquad \begin{cases} a(t; u, v) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t; u, v), \\ \forall\, u, v \in V, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Pour $u \in V_i$, pour presque tout $t \in [0, T]$, $v \mapsto a_i(t; u, v)$ est une forme anti-linéaire continue sur V_i, notée $A_i(t)u$; $u \mapsto A_i(t)u$ est un isomorphisme

---

[2] Si $X_1, \ldots, X_r$ sont des espaces de Banach inclus dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$, avec injections continues, alors $\bigcap_{i=1}^{r} X_i$ est un espace de Banach pour la norme $\sum_{i=1}^{r} \| u \|_{X_i}$, $\sum_{i=1}^{r} X_i$ est un espace de Banach pour la norme $\operatorname{Inf} \sum_{i=1}^{r} \| u_i \|_{X_i}$, l'infinimum étant pris pour toutes les décompositions $u = \sum_{i=1}^{r} u_i$, $u_i \in X_i$.

de V_i sur V_i'. D'après (2-vii):

(2-viii) $$A(t)u = \sum_{i=1}^{m} A_i(t)u, \qquad \forall\, u \in V, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T].$$

Nous nous donnons enfin une décomposition arbitraire de f de la forme

(2-ix) $$f = \sum_{i=1}^{m} f_i, \qquad f_i \in L_2(H)\ ({}^3).$$

Les fonctions approchées.

Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini, et $k = T/(N+1)$.

En utilisant la décomposition (2-viii) de $A(t)$ et la décomposition (2-ix) de f (4), nous allons, pour chaque k fixé, définir m solutions «approchées» du problème 1.

Les fonctions u_{ik} sont détérminées alternativement: nous définissons successivemeut pour $i = 1, \ldots, m$, les valeurs de la fonction u_{ik} sur l'intervalle $[0, k-0]$, puis successivement dans le même ordre sur chaque intervalle $[rk+0, (r+1)k-0]$, $r = 0, \ldots, N$.

Pour chaque i et pour chaque r, la restriction de u_{ik} à $[rk+0, (r+1)k-0]$ (restriction encore notée u_{ik}) est définie comme la solution du problème suivant

(2.1) $$\begin{cases} u_{ik} \in L_2(rk, (r+1)k;\ V_i) \\ u_{ik}'(t) + A_i(t)u_{ik}(t) = f(t), \qquad t \in]rk, (r+1)k[\\ u_{ik}(rk+0) \ \text{donné dans} \ H. \end{cases}$$

Le problème (2.1) est identique au problème 1 à condition de remplacer l'intervalle $[0, T]$ par l'intervalle $[rk, (r+1)k]$, V par V_i, $A(t)$ par $A_i(t)$, f par f_i et u_0 par l'élément donné de H. L'existence et l'unicité d'une solution pour (2.1) résultent donc simplement du théorème 1.1 [compte tenu des hypothèses (2-iv) à 2-vi) sur les $A_i(t)$].

Il reste à préciser les conditions initiales dans (2.1). D'après le théorème 1.1, la fonction u_{ik} vérifiant (2.1) est continue de $[rk+0, (r+1)k-0] \to H$ (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle). Si u_{ik} vérifie (2.1), on peut donc définir sans ambiguité

$$u_{ik}((r+1)k-0) \in H.$$

(3) On peut prendre simplement $f_1 = f$, $f_i = 0$, $i = 2, \ldots, m$.

(4) C'est bien sûr la décomposition de $A(t)$ qui est essentielle.

Les conditions initiales *successives* aux points rk sont alors les suivantes:

$$(2.2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \textit{Pour } r=0 & \textit{Pour } r=1, \dots, N \\ u_{1k}(0) = u_0 & u_{1k}(rk+0) = u_{mk}(rk-0) \\ u_{2k}(0) = u_{1k}(k-0) & u_{2k}(rk+0) = u_{1k}((r+1)k-0) \\ \vdots & \vdots \\ u_{mk}(0) = u_{(m-1)k}(k-0) & u_{mk}(rk+0) = u_{(m-1)k}((r+1)k-0) \end{array}\right.$$

Notons qu'aux points rk, $u_{ik}(rk-0)$ et $u_{ik}(rk+0)$ sont en général différents. Les fonctions u_{ik} ainsi définies sont seulement continues par morceaux de $[0, T]$ dans H, les discontinuités étant situées aux points rk. Pour fixer les idées, nous poserons

$$(2.3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_{ik}(rk) = u_{ik}(rk+0) \quad \left(\text{noté} \quad u_k^{r+\frac{i-1}{m}}\right) \\ r=0, \dots, N, \qquad i=1, \dots, m, \end{array}\right.$$

ce qui rend les fonctions u_{ik} continues à droite dans H.

En résumé, nous avons démontré la

PROPOSITION 2.1.

Sous les hypothèses (1-i) *à* (1-iv) *et* (2-i) *à* (2-ix), *pour chaque k fixé, il existe m fonctions u_{ik} définies de manière unique par*

$$(2.4)\qquad u_{ik} \in L_2(V_i), \qquad i=1, \dots, m$$

$$(2.5)\qquad \left\{\begin{array}{l} u'_{ik}(t) + A_i(t)u_{ik}(t) = f_i(t), \qquad t \in]rk, (r+1)k[, \\ r=0, \dots, N, \qquad i=1, \dots, m \end{array}\right.$$

et les conditions initiales successives (2.2).

REMARQUE 2.1.

En raison de (2.5), nous avons

$$(2.6)\qquad \left\{\begin{array}{l} u'_{ik} \in L_2(rk, (r+1)k;\ V'_i) \\ r=0, \dots, N, \qquad i=1, \dots, m. \end{array}\right.$$

Considérées sur $[0, T]$, les dérivées u'_{ik} sont des mesures à valeurs dans V'_i et nous avons

$$u'_{ik} + A_i u_{ik} = f_i + \sum_{i=1}^{N} \left(u_k^{r+\frac{i-1}{m}} - u_k^{r-1+\frac{i}{m}} \right) \delta_{(rk)}, \tag{2.7}$$

$\delta_{(rk)}$ distribution de Dirac au point rk.

REMARQUE 2.2.

Dans des cas assez particuliers, les fonctions u_{ik} donnent une résolution exacte aux pointes rk:

$$u_k^r = u(rk), \qquad r = 0, \dots, N+1$$

Cela sera précisé dans la section 9.1.

REMARQUE 2.3.

Nous indiquerons dans la section 9.2 un procédé d'approximation voisin qui fournit une fonction approchée continue de $[0, T]$ dans H.

Avant d'aborder l'étude du passage à la limite $k \to 0$, nous donnons des exemples pour lesquels les hypothèses (1-i) à (1-iv) et (2-i) à (2-ix) sont vérifiées.

3. - Exemples.

3.1. - EXEMPLE 1: *Problème du second ordre en x avec conditions aux limites de Neumann.*

Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ. Nous ferons en temps utile des hypothèses de régularité pour Γ.

Nous prenons pour H l'espace $L_2(\Omega)$ et pour V l'espace de Sobolev d'ordre 1 [34]:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L_2(\Omega),\ D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega),\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Ces espaces sont munis des produits scalaires hilbertiens habituels:

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

$$((u, v)) = (u, v) + \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v).$$

Nous prenons $m = n$ et, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$V_i = H(D_i;\ \Omega) = \{\, u \mid u \in L_2(\Omega),\ D_i u \in L_2(\Omega) \,\}.$$

On vérifie sans peine que V_i est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$((u,\ v))_i = (u,\ v) + (D_i u,\ D_i v)$$

Les hypothèses (1-i) et (2-i) à (2-iii) se vérifient sans difficulté. On montre en appendice (Théorème 1.1.), moyenant une hypothèse de régularité sur Ω, que V est dense dans V_i (cette propriété n'est d'ailleurs pas indispensable).

Soient $a_i(x,\ t)$, $c_i(x,\ t)$, $i = 1, \ldots, n$, $c(x,\ t)$, des fonctions appartenant à $L_\infty(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times]0,\ T[$, et vérifiant

$$\mathcal{R}e\, a_i(x,\ t) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T$$

$$\mathcal{R}e\, c_i(x,\ t) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T$$

$$c(x,\ t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x,\ t).$$

Nous posons

$$a(t;\ u,\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x,\ t)\, D_i u(x)\, D_i \overline{v(x)}\, dx + \int_\Omega c(x,\ t)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx \tag{3.1}$$

$$a_i(t;\ u,\ v) = \int_\Omega a_i(x,\ t)\, D_i u(x)\, D_i \overline{v(x)}\, dx + \int_\Omega c_i(x,\ t)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx \tag{3.2}$$

La vérification des hypothèses (1-ii) à (1-iv) et (2-iv) à (2-viii) est immédiate; (2-v) et (2-vi) ont lieu en particulier avec:

$$M_i = \max\,\{\, |\, a_i(x,\ t)\, |_{L_\infty(Q_T)},\ |\, c_i(x,\ t)\, |_{L_\infty(Q_T)} \,\} \tag{3.3}$$

$$\alpha_i = \min\,\{\, \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \mathcal{R}e\, a_i(x,\ t),\ \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \mathcal{R}e\, c_i(x,\ t) \,\} \tag{3.4}$$

Problème exact.

Soit $u_0 = u_0(x)$ donné dans $L_2(\Omega)$ et $f = f(x,\ t)$ donné dans $L_2(Q_T)$. La solution $u = u(x,\ t)$ du problème 1 est une solution faible du problème suivant:

$$u \in L_\infty(L_2(\Omega)) \cap L_2(H^1(\Omega)) \tag{3.5}$$

$$u'(x,\ t) - \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x,\ t)\, D_i u(x,\ t)] + \tag{3.6}$$

$$+\, c(x,\ t)\, u(x,\ t) = f(x,\ t) \quad \text{dans} \quad Q_T = \Omega \times]0,\ T[$$

(3.7) $$u(x,\ 0) = u_0(x) \quad \text{(condition initiale)}$$

(3.8) $$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T = \Gamma x]0,\ T[$$

où

(3.9) $$\frac{\partial}{\partial \nu_{A(t)}} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\ t) \cos(\nu,\ x_i) D_i .$$

La condition aux limites (3.8) est formelle mais avec des hypothèses de régularité sur la frontière Γ et sur les fonctions $a_i(x,\ t)$, cette condition anx limites peut être justifiée par les méthodes de LIONS-MAGENES [20].

Probléme approchè.

Les fonctions approchées $u_{ik} = u_{ik}(x,\ t)$ vérifient:

(3.10) $$u_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)), \qquad D_i u_{ik} \in L_2(Q_T)$$

(3.11) $$u'_{ik}(x,\ t) - D_i[a_i(x,\ t) D_i u_{ik}(x,\ t)] + c_i(x,\ t) u_{ik}(x,\ t) = f_i(x,\ t)$$
$$\text{dans} \quad \Omega \times]rk,\ (r+1)k[, \qquad r = 0,\ \ldots,\ N,$$

les conditions initiales successives (2.2) et les conditions aux limites (formelles):

(3.12) $$a_i(x,\ t) \cos(\nu,\ x_i) D_i u_{ik}(x,\ t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T .$$

REMARQUE 3.1.

Soient $b_i(x,\ t)$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, des fonctions appartenant à $L_\infty(Q_T)$. Avec les mêmes espaces que précédémment el les mêmes fonctions $a_i(x,\ t)$, $c_i(x,\ t)$, $c(x,\ t)$, nous pouvons prendre:

$$a(t;\ u,\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x,\ t) D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x,\ t) D_i u(x) \overline{v(x)} dx + \int_\Omega c(x,\ t) u(x) \overline{v(x)} dx$$

$$a_i(t;\ u,\ v) = \int_\Omega a_i(x,\ t) D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx +$$
$$+ \int_\Omega b_i(x,\ t) D_i u(x) \overline{v(x)} dx + \int_\Omega c(x,\ t) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Dans ce cas, il faudra que les minimums (essentiels) de $\mathcal{Re}\, c(x,\ t)$ et $\mathcal{Re}\, c_i(x,\ t)$ soient assez grands pour que les conditions de coercivité (1-iv) et (2-vi) soient réalisées. La remarque 1.2 est applicable à cet exemple.

3.2. - EXEMPLE 2: *Problème d'ordre* 2μ en x $(\mu \geq 1)$, *avec conditions aux limites de Dirichlet.*

Comme précédemment, Ω désigne un ouvert borné de R^n, et nous prenons $H = L_2(\Omega)$.

Si $j = (j_1, \ldots, j_n)$ est un multi-entier, nous notons

$$D^j = D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n}; \qquad |j| = j_1 + \ldots + j_n .$$

Soit

$$H(D^j;\ \Omega) = \{ u \mid u \in L_2(\Omega),\ D^j u \in L_2(\Omega) \}$$

$$H^\mu(\Omega) = \{ u \mid u \in L_2(\Omega),\ D^j u \in L_2(\Omega), \qquad |j| \leq \mu \}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour les produits scalaires respectifs

$$((u,\ v))_j = (u,\ v) + (D^j u,\ D^j v)$$

$$((u,\ v)) = \sum_{|j| \leq \mu} (D^j u,\ D^j v)$$

Nous posons

$$V = H_0^\mu(\Omega) = \text{adhérence de} \quad \mathfrak{D}(\Omega) \quad \text{dans} \quad H^\mu(\Omega);\ \mathfrak{D}(\Omega) = \text{espace}$$

des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

Nous prenons m égal au nombre de multi-entiers j tels que $|j| = \mu$. Dans cet exemple $m \neq n$ (si $\mu \geq 2$).

Nous remplaçons l'indice i, $1 \leq i \leq m$, par le multi-entier j, $|j| = \mu$. Pour chacun de ces multi-entiers j, soit

$$V_j = H_0(D^j;\ \Omega) = \text{adhérence de} \quad \mathfrak{D}(\Omega) \quad \text{dans} \quad H(D^j;\ \Omega).$$

Les hypothèses (1-i), (2-i) et (2-ii) sont faciles à vérifier. Pour vérifier (2-iii), notons que si $u \in V_j$, alors Ω étant borné, et en raison de l'inégalité de Poincaré:

$$D^q u \in L_2(\Omega) \quad \text{pour} \quad q \leq j\ (^5).$$

En outre, si $q \leq j$ et $q + i \leq j$ (5), alors:

$$D^q u \in H_0(D_i;\ \Omega).$$

(5) Si q et j sont des multi-entiers, $q \leq j$ signifie $q_1 \leq j_1, \ldots, q_n \leq j_n$. Si q est un multi-entier et i un entier, $1 \leq i \leq n$, $q + i$ désigne le multi-entier $q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + 1, q_{i+1}, \ldots, q_n$.

Dans ces conditions si $u \in \bigcap_{|j|=\mu} V_j$, il est clair que $D_q u \in \bigcap_{i=1}^{n} H_0(D_i;\ \Omega)$ pour $|q| \leq \mu - 1$.

Nous démontrons dans le lemme 3.1 ci-après que

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_0(D_i;\ \Omega) = H_0^1(\Omega), \tag{3.13}$$

en sorte que $D^q u \in H_0^1(\Omega)$ pour $|q| \leq \mu - 1$; cela prouve avec [15] que $u \in H_0^\mu(\Omega)$. L'hypothèse (2-iii) en résulte.

Soient $a_j(x, t)$, $|j| = \mu$, m fonctions appartenant à $L_\infty(Q_T)$ avec $\mathcal{R}e\, a_j(x, t) \geq \geq \eta > 0$ p.p. dans Q_T; soient $c(x, t)$, $c_j(x, t)$, $|j| = \mu$, des fonctions de $L_\infty(Q_T)$ avec

$$c(x, t) = \sum_{|j|=\mu} c_j(x, t);\ \mathcal{R}e\, c_j(x, t) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T.$$

Nous posons alors

$$a(t;\ u, v) = \sum_{|j|=\mu} \int_\Omega a_j(x, t) D^j u(x) D^j \overline{v(x)} dx + \int_\Omega c(x, t) u(x) \overline{v(x)} dx \tag{3.14}$$

$$a_j(t;\ u, v) = \int_\Omega a_j(x, t) D^j u(x) D^j \overline{v(x)} dx + \int_\Omega c_j(x, t) u(x) \overline{v(x)} dx. \tag{3.15}$$

Les hypothèses (1-ii) à (1-iv) et (2-iv) à (2-viii) sont vérifiées; pour (2-v) et (2-vi) nous avons

$$M_j = \text{Max} \{ |a_j(x, t)|_{L_\infty(Q_T)},\ |c_j(x, t)|_{L_\infty(Q_T)} \}, \tag{3.16}$$

$$\alpha_j = \text{Min} \{ \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \mathcal{R}e\, a_j(x, t),\ \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \mathcal{R}e\, c_j(x, t) \}. \tag{3.17}$$

Problème exact.

La solution $u = u(x, t)$ du problème 1 vérifie:

$$u \in L_\infty(L_2(\Omega)) \cap L_2(H_0^\mu(\Omega)) \tag{3.18}$$

$$u'(x,\ t)+\sum_{|j|=\mu}(-1)^{|j|}D^j[a_j(x,\ t)D^ju(x,\ t)]+ \\ +c(x,\ t)u(x,\ t)=f(x,\ t)\quad \text{dans}\quad Q_T \tag{3.19}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x) \tag{3.20}$$

$$D^ju(x,\ t)=0\quad \text{sur}\quad \Sigma_T,\quad \text{pour}\quad |j|\leq \mu-1. \tag{3.21}$$

(La condition aux limites (3-21) a un sens si Ω est assez régulier [15]).

REMARQUE 3.2.

Avec $c(x,\ t)=1$, $a_j(x,\ t)=\complement_\mu^{j_1}\ldots\complement_\mu^{j_n}$ (produit de coefficients du binôme), l'équation (3.19) n'est autre que

$$u'(x,\ t)+(-1)^\mu\Delta^\mu u(x,\ t)+u(x,\ t)=f(x,\ t). \tag{3.19'}$$

Problème approché.

Les fonctions $u_{jk}=u_{jk}(x,\ t)$ vérifient

$$u_{jk}\in L_\infty(L_2(\Omega))\cap L_2(H_0(D^j;\ \Omega)) \tag{3.22}$$

$$u'_{jk}(x,\ t)+(-1)^{|j|}D^j[a_j(x,\ t)D^ju_{jk}(x,\ t)]+ \\ +c_j(x,\ t)u_{jk}(x,\ t)=f_j(x,\ t) \tag{3.23}$$

dans $\Omega\times]rk,\ (r+1)k[$, $r=0,\ \ldots,\ N$,

$$D^qu(x,\ t)\cos(\nu,\ x_i)=0\quad \text{sur}\quad \Sigma_T, \tag{3.24}$$

pour q et i vérifiant $q+i\leq j$, et les conditions initiales successives (2.2).

(La condition aux limites (3.24) a un sens si Ω est assez régulier; cf. Appendice, th. 2.2).

Pour terminer, démontrons (3.13):

LEMME 3.1.

$$\bigcap_{i=1}^m H_0(D_i;\ \Omega)=H_0^1(\Omega) \tag{3.13}$$

Démonstration.

Nous allons démontrer que $\bigcap_{i=1}^n H_0(D_i;\ \Omega)\subset H_0^1(\Omega)$, l'inclusion inverse étant évidente.

Pour toute fonction g définie dans Ω, soit $\tilde g$ la fonction égale à g dans Ω et à 0 dans $\complement\,\Omega$.

Si $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, la fonction $\tilde{\varphi}$ appartient à $\mathfrak{D}(R^n)$ et

$$\| \tilde{\varphi} \|_{H(D_i;\, R^n)} = \| \varphi \|_{H_0(D_i;\, \Omega)}$$

Par conséquent, l'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H_0(D_i;\, \Omega) \to H(D_i;\, R^n)$ et, si $u \in H_0(D_i;\, \Omega)$ l'image de u dans cette application n'est autre que $\tilde{u}$.

Si maintenant $u \in \bigcap_{i=1}^{n} H_0(D_i;\, \Omega)$, alors $\tilde{u} \in \bigcap_{i=1}^{m} H(D_i;\, R^n) = H^1(R^n)$. La fonction $\tilde{u}$ appartient à $H^1(R^n)$ et est nulle dans $\complement\Omega$; on sait alors [15] que la restriction de $\tilde{u}$ à Ω, c'est-à-dire u, appartient à $H_0^1(\Omega)$.

3.3. - EXEMPLE 3: *Un système d'équations linéaires.*

Soit encore Ω un ouvert borné de R^n. Nous considérons ici des fonctions réelles et nous posons $H = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, ces espaces étant munis de leur structure hilbertienne d'espaces produits:

$$(\vec{f}, \vec{g}) = (f_1, g_1)_{L_2(\Omega)} + (f_2, g_2)_{L_2(\Omega)}, \; \vec{f} = (f_1, f_2), \vec{g} = (g_1, g_2)$$

$$((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v}) + \sum_{i=1}^{n} (D_i\vec{u}, D_i\vec{v}).$$

Nous posons

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = ((\vec{u}, \vec{v})) - (u_1, v_2) + (u_2, v_1).$$

Nous prenons $m = n + 1$ et, pour $i = 1, \ldots, n$, $V_i = H_0(D_i;\, \Omega) \times H_0(D_i;\, \Omega)$ (structure d'espace hilbertien produit), et pour $i = n + 1$, $V_i = H$; soit

$$a_i(\vec{u}, \vec{v}) = (D_i\vec{u}, D_i\vec{v}) + \frac{1}{n+1} (\vec{u}, \vec{v}), \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$a_i(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{n+1} (\vec{u}, \vec{v}) - (u_1, v_2) + (u_2, v_1), \qquad i = n + 1.$$

La vérification des hypothèses (1-i) à (1-iv) et (2-i) à (2-viii) est immédiate ou se fait comme dans les exemples précédents.

Problème exact.

Soient $\vec{u}_0$ et $\vec{f}$ donnés respectivement dans $L_2(\Omega)^2$ et $L_2(Q_T)^2$. La solution $\vec{u}$ du problème 1, vérifie:

$$\vec{u} \in L_\infty(L_2(\Omega)^2) \cap L_2(H_0^1(\Omega)^2) \tag{3.25}$$

$$(3.26)\qquad \begin{cases} u_1'(x,\ t) - \Delta u_1(x,\ t) + u_1(x,\ t) - u_2(x,\ t) = f_1(x,\ t) \\ u_2'(x,\ t) - \Delta u_2(x,\ t) + u_2(x,\ t) + u_1(x,\ t) = f_2(x,\ t) \\ \text{dans} \quad Q_T = \Omega \times]0,\ T[\end{cases}$$

$$(3.27)\qquad \vec{u}(x,\ 0) = \vec{u}_0(x)$$

$$(3.28)\qquad \vec{u}(x,\ t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T = \Gamma \times]0,\ T[.$$

Problème approché.

Les fonctions approchées $\vec{u}_{ik}$ vérifient les conditions initiales successives (2.2) et,

pour $i = 1,\ \ldots,\ n,$

$$(3.29)\qquad \vec{u}_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)), \qquad D_i\vec{u}_{ik} \in L_2(Q_T)^2$$

$$(3.30)\qquad \begin{cases} u_{1,ik}'(x,\ t) - D_i^2 u_{1,ik}(x,\ t) + \dfrac{1}{n+1} u_{1,ik}(x,\ t) = f_{1,i}(x,\ t) \\ u_{2,ik}'(x,\ t) - D_i^2 u_{2,ik}(x,\ t) + \dfrac{1}{n+1} u_{2,ik}(x,\ t) = f_{2,i}(x,\ t) \\ \text{dans} \quad Q_T \end{cases}$$

$$(3.31)\qquad \vec{u}_{ik}(x,\ t)\cos(\nu,\ x_i) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T\,;$$

pour $i = n + 1,$

$$(3.32)\qquad \vec{u}_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)^2)$$

$$(3.33)\qquad \begin{cases} u_{1,ik}'(x,\ t) + \dfrac{1}{n+1} u_{1,ik}(x,\ t) - u_{2,ik}(x,\ t) = f_{1,i}(x,\ t) \\ u_{2,ik}'(x,\ t) + \dfrac{1}{n+1} u_{2,ik}(x,\ t) + u_{1,ik}(x,\ t) = f_{2,i}(x,\ t) \\ \text{dans} \quad Q_T\,. \end{cases}$$

REMARQUE 3.3.

Dans les équations (3.30), *les composantes* $u_{1,ik}$ *et* $u_{2,ik}$ *de* u_{ik} *sont découplées.* Les composantes de u_{ik} ne sont couplées que pour $i = n + 1$, dans les équations (3.33).

Les équations (3.33) *sont des équations différentielles ordinaires où la variable* x *apparait seulement comme un paramètre;* l'intégration explicite de ces équations est immédiate.

4. - **Estimations a priori.**

PROPOSITION 4.1.

Lorsque $k \to 0$, *chaque fonction* u_{ik} *demeure dans un ensemble borné de* $L_2(V_1) \cap L_\infty(H)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Démonstration.

Le problème (2.1) étant du même type que le problème 1, les fonctions u_{ik} vérifient des égalités d'énergie analogues à (1.5):

$$
(4.1) \qquad |u_{ik}(t)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{t} a_i(s;\, u_{ik}(s),\, u_{ik}(s))ds = \left| u_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{t} (f_i(s),\, u_{ik}(s))ds,
$$

pour $t \in [rk + 0,\ (r+1)k - 0]$.

Nous avons

$$
2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{t} (f_i(s),\, u_{ik}(s))ds \leq 2 \int_{rk}^{t} |f_i(s)|\ |u_{ik}(s)|\, ds \leq
$$

$$
\leq 2c_1 \int_{rk}^{t} |f_i(s)|\ \|u_{ik}(s)\|_i\, ds \leq \alpha_i \int_{rk}^{t} \|u_{ik}(s)\|_i^2\, ds + \frac{c_1^2}{\alpha_i} \int_{rk}^{t} |f_i(s)|^2\, ds,
$$

où c_1 est une constante supérieure ou égale aux normes des injections de V_i dans H $(i = 1, \ldots, m)$.

Cette dernière inégalité et l'hypothèse (3-iv) nous permettent d'écrire

$$
(4.2) \qquad |u_{ik}(t)|^2 + \alpha_i \int_{rk}^{t} \|u_{ik}(s)\|_i^2\, ds \leq \left| u_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + \frac{c_1^2}{\alpha_i} \int_{rk}^{t} |f_i(s)|^2\, ds, \qquad t \in [rk + 0,\ (r+1)k - 0],
$$

ce qui donne pour $t = (r+1)\,k - 0$:

$$
(4.3) \qquad \left| u_k^{r+\frac{i}{m}} \right|^2 + \alpha_i \int_{rk}^{(r+1)k} \|u_{ik}(s)\|_i^2\, ds \leq \left| u_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + \frac{c_1^2}{\alpha_i} \int_{rk}^{(r+1)k} |f_i(s)|^2\, ds.
$$

Ajoutons membre à membre toutes les inégalités (4.3) pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$; nous obtenons:

$$| u_k^{N+1} |^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_0^T \| u_{ik}(s) \|_i^2 \, ds \leq$$
$$\leq | u_0 |^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_1^2}{\alpha_i} \int_0^T | f_i(s) |^2 \, ds.$$

Puisque $\alpha_i > 0$, nous en déduisons que les fonctions u_{ik} sont majorées indépendamment de k dans $L_2(V_i)$.

Ajoutons ensuite les inégalités (4.3) pour

$$(4.4) \qquad r = 0, \ldots, q, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad r + \frac{i}{m} \leq q + \frac{j}{m}.$$

Il vient

$$\left| u_k^{q+\frac{j}{m}} \right|^2 + \sum_{r,i}{}^* \alpha_i \int_{rk}^{(r+1)k} \| u_{ik}(s) \|_i^2 \, ds \leq$$
$$\leq | u_0 |^2 + \sum_{r,i}{}^* \frac{c_1^2}{\alpha_i} \int_{rk}^{(r+1)k} | f_i(s) |^2 \, ds,$$

où $\sum_{r,i}^*$ désigne la sommation (4.4). Il en résulte que

$$\left| u_k^{q+\frac{j}{m}} \right|^2 \leq | u_0 |^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_1^2}{\alpha_i} \int_0^T | f_i(s) |^2 \, ds,$$

et les $u_k^{q+\frac{j}{m}}$, $q = 0, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, m$, sont donc bornés indépendamment de k dans H. En reportant ce résultat dans (4.2) nous en concluons que les fonctions u_{ik} sont bornées indépendamment de k dans $L_\infty(H)$.

5. - Théorème de convergence.

THÉORÈME 5.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1 *et* 2 [(1-i)-(1-iv), (2-i)-(2-ix)] *et* u *désigne la solution du problème* 1.

Lorsque $k \to 0$, *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_2(V_i) \quad \text{fort et dans} \quad L_\infty(H) \quad \text{faible}^{(6)} \\ u_{ik}(t) \to u(t) \quad \text{dans } H \text{ fort, pour tout} \quad t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

(6) Topologie du dual faible de $L_1(H)$.

La démonstration du théorème 5.1 est donnée dans les n° 6 et 7.

REMARQUE 5.1.

Avec le théorème de Lebesgue et le théorème 5.1 nous voyons que

$$u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_q(H) \quad \text{fort}, \quad \forall\, q \in [1, \infty[, \qquad i = 1, \ldots, m$$

6. - Lemmes.

Les lemmes suivants sont énoncés sous une forme suffisamment générale pour les chapitres ultérieurs.

LEMMA 6.1.

Soient X, X_1, ..., X_m, des espaces de Banach, avec

$$X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i, \tag{6.1}$$

l'injection de X dans X_i étant continue.

Alors, pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$,

$$L_p(X) = \bigcap_{i=1}^{m} L_p(X_i) \tag{6.2}$$

Démonstration

Nous allons montrer que $\bigcap_{i=1}^{m} L_p(X_i) \subset L_p(X)$, l'inclusion inverse étant évidente.

Si $v \in \bigcap_{i=1}^{m} L_p(X_i)$, alors pour presque tout t, $v(t) \in X$ et

$$\| v(t) \|_X = \sum_{i=1}^{m} \| v(t) \|_{X_i}$$

$$\| v(t) \|_X^p \leq c(p) \sum_{i=1}^{m} \| v(t) \|_{X_i}^p$$

$c(p)$ constante ne dépendant que de p.

Il suffit donc de vérifier que la fonction $t \mapsto v(t)$ est mesurable dans X. D'après [2], nous devons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble compact $E \subset [0, T]$, tel que

$$\text{mes}\,([0, T] - E) \leq \varepsilon$$

et que v soit continue de $E \mapsto X$. Or, pour $i = 1, \ldots, m$, il existe un ensemble compact E_i, tel que

$$\text{mes}\,([0, T] - E_i) \leq \frac{\varepsilon}{m},$$

v étant continue de $E_i \to X_i$; on prendra $E = \bigcap_{i=1}^{m} E_i$.

LEMME 6.2.

Soit X un espace de Banach et soit v_k une suite de fonctions appartenant à $L_p(X)$, $p > 1$, telles que

$$v_k \to v \quad \textit{dans} \quad L_p(X) \quad \textit{faible, lorsque} \quad k \to 0. \tag{6.3}$$

Soit $t \in [0, T]$ et t_k une suite qui tend vers t.

Alors, lorsque $k \to 0$

$$\int_0^{t_k} v_k(s)ds \to \int_0^t v(s)ds \quad \textit{dans} \quad X \quad \textit{faible.} \tag{6.4}$$

Démonstration.

Nous devons montrer que, pour tout $w \in X'$,

$$< \int_0^{t_k} v_k(s)ds,\ w > \to < \int_0^t v(s)ds,\ w >.$$

Pour cela, nous écrivons

$$< \int_0^{t_k} v_k(s)ds,\ w > = \int_0^T < v_k(s),\ \psi_{t_k}(s)w > ds$$

où $\psi_\xi(s)$ désigne la fonction caractéristique de $[0,\ \xi]$ $(\xi > 0)$.

On vérifie aisément que $\psi_{t_k}(\cdot)w \to \psi_t(\cdot)w$ dans $L_{p'}(X')$ fort, $1/p + 1/p' = 1$ et le lemme en découle.

LEMME 6.3.

Soient X et Y deux espaces de Banach réflexifs, $X \subset Y$, l'injection de X dans Y étant continue. Soit $\varphi \in Y$ et soit φ_n une suite bornée dans X, telle que

$$\varphi_n \to \varphi \quad \textit{dans} \quad Y \quad \textit{faible, lorsque} \quad n \to \infty. \tag{6.5}$$

Alors $\varphi \in X$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans X faible.

Démonstration.

La suite φ_n est bornée dans X et, X étant réflexif, il existe $\theta \in X$ et une sous-suite $n' \to \infty$, tel que

$$\varphi_{n'} \to \theta \quad \text{dans} \quad X \quad \text{faible.}$$

Puisque l'injection de X dans Y est continue, elle est aussi faiblement continue (BOURBAKI [3]). Dans ces conditions $\varphi_{n'} \to \theta$ dans Y faible et donc $\theta = \varphi$, $\varphi \in X$.

Nous montrerions de la même manière que de toute suite extraite de φ_n, on peut extraire une sous-suite convergeant vers φ dans X faible; donc nécessairement

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{dans } X \text{ faible.}$$

7. - Démonstration de thérorème 5.1.

7.1. - Première partie de la démonstration.

En raison de la proposition 4.1, il existe m fonction w_i et une sous-suite $k' \to 0$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{ik'} \to w_i \quad \text{dans} \quad L_2(V_i) \quad \text{faible et dans} \quad L_\infty(H) \quad \text{faible;} \\ i = 1, \ldots, m. \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Nous avons:

LEMME 7.1.

Les fonctions w_i sont égales p.p. *à une même fonctions w et*

$$w \in L_\infty(H) \cap L_2(V) \tag{7.2}$$

Démonstration.

Pour $t \in [rk, (r+1)k[$, nous avons, par intégration des égalités (2.5):

$$u_{1k}[(r+1)k - 0] - u_{1k}(t) = \int_t^{(r+1)k} [f_1(s) - A_1(s)u_{1k}(s)]ds$$

$$u_{2k}(t) - u_{2k}(rk + 0) = \int_{rk}^{t} [f_2(s) - A_2(s)u_{2k}(s)]ds$$

Ajoutons membre à membre ces égalités; puisque

$$u_{1k}[(r+1)k - 0] = u_{2k}(rk + 0)\left(= u_k^{r+\frac{1}{m}}\right),$$

nous obtenons

$$u_{2k}(t) - u_{1k}(t) = \int_t^{(r+1)k} [f_1(s) - A_1(s)u_{1k}(s)]ds +$$

$$+ \int_{rk}^{t} [f_2(s) - A_2(s)u_{2k}(s)]ds.$$

Nous prenons les normes dans V'; avec l'inégalité de SCHWARZ et (2-v) nous obtenons la majoration:

$$\begin{aligned}(7.3)\qquad & \| u_{2k}(t) - u_{1k}(t) \|_{V'} \leq \\ & \leq c_2 k^{1/2} \{ M_1 \| u_{1k} \|_{L_2(V_1)'} + M_2 \| u_{2k} \|_{L_2(V_2)} + | f_1 |_{L_2(H)} + | f_2 |_{L_2(H)} \}\end{aligned}$$

où c_2 est une constante supérieure ou égale aux normes des injections de H, V'_1, ..., V'_m dans V'.

D'aprés la proposition 4.1, l'expression entre les accolades est bornée indépendamment de k et il résulte alors de (7.3) que $u_{2k} - u_{1k} \to 0$ dans $L_\infty(V')$ fort, lorsque $k \to 0$. Puisque, d'après (7.1), $u_{2k'} - u_{1k'} \to w_2 - w_1$ dans $L_\infty(H)$ faible, nous en concluons que $w_2 = w_1$.

Nous démontrerions de manière identique que $w_2 = w_3$, ..., $w_{m-1} = w_m$. Nous posons

$$w_1 = ... = w_m = w$$

et il est alors clair que $w \in L_\infty(H)$ et, avec le lemme 6.1 que

$$w \in \bigcap_{i=1}^{m} L_2(V_i) = L_2(V).$$

7.2. - *Deuxième partie de la démonstration*: $w(t) = u(t)$ *p.p.*

Par intégration des égalités (2.5), nous pouvons écrire

$$(7.4)\qquad u_k^{q+\frac{j}{m}} - u_k^{q+\frac{j-1}{m}} + \int_{qk}^{(q+1)k} A_j(s) u_{jk}(s) ds = \int_{qk}^{(q+1)k} f_j(s) ds,$$

$q = 0, ..., N$, $j = 1, ..., m$.

Soit $t \in [0, T]$ fixé et $r = E(t/k)$, le plus grand entier inférieur ou égal à t/k; par intégration, (2 5) donne également

$$u_{1k}(t) - u_k^r + \int_{rk}^{t} A_1(s) u_{1k}(s) ds = \int_{rk}^{t} f_1(s) ds.$$

Ajoutant membre à membre cette égalité et les égalités (7.4) pour $q = 0, ..., r-1$, $j = 1, ..., m$, il vient:

$$\begin{aligned}(7.5)\qquad u_{1k}(t) = u_0 + \int_0^t [f_1(s) - A_1(s) u_{1k}(s)] ds + \\ + \sum_{i=2}^{m} \int_0^{rk} [f_i(s) - A_i(s) u_{ik}(s)] ds.\end{aligned}$$

Nous allons passer à la limite dans cette égalité avec la suite k' (t étant fixé).

L'application linéaire $v(\cdot) \to A_i(\cdot)v(\cdot)$ étant continue de $L_2(V_i)$ dans $L_2(V_i')$, est aussi faiblement continue et nous voyons avec (7.1) que

$$A_i(\cdot)u_{ik'}(\cdot) \to A_i(\cdot)w(\cdot) \quad \text{dans} \quad L_2(V_i') \quad \text{faible.}$$

Moyennant le lemme 6.2, nous avons alors:

$$\int_0^t [f_1(s) - A_1(s)u_{1k'}(s)]ds \to \int_0^t [f_1(s) - A_1(s)w(s)]ds,$$

$$\int_0^{rk'} [f_i(s) - A_i(s)u_{ik'}(s)]ds \to \int_0^t [f_i(s) - A_i(s)w(s)]ds,$$

dans V' faible.

Ainsi, lorsque $k' \to 0$, le second membre de (7.5) (et donc aussi le premier) converge dans V' faible, vers une limite $w_*(t)$:

$$w_*(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t [f_i(s) - A_i(s)w(s)]ds.$$

ou, avec (2-viii) et (2-ix)

$$w_*(t) = u_0 + \int_0^t f(s)ds - \int_0^t A(s)w(s)ds. \tag{7.6}$$

Comparons $w_*(t)$ et $w(t)$. Nous venons d'établir que

$$u_{1k'}(t) \to w_*(t) \quad \text{dans } V' \text{ faible, pour tout } t \in [0, T]. \tag{7.7}$$

D'après la proposition 4.1, la fonction $\| u_{ik'}(\cdot)\|_{V'}$ est (essentiellement) bornée sur $[0, T]$ indépendamment de k.

Soit alors $v \in V$ et $\varphi \in \mathcal{C}$ (7), quelconques. D'après les résultats ci-dessus, et le théorème de Lebesgue, nous avons

$$\int_0^T < u_{1k'}(t), v > \varphi(t)dt \to \int_0^T < w_*(t), v > \varphi(t)dt,$$

(7) $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0, T]$, espace des fonction scalaires continues sur $[0, T]$.

et comme $\varphi \otimes v \in L_1(V_1)$, nous avons d'après (4.1) (et $w_i = w$):

$$\int_0^T < u_{1k'}(t),\ v > \varphi(t)dt \to \int_0^T < w(t),\ v > \varphi(t)dt.$$

Donc

$$\int_0^T < w_*(t),\ v > \varphi(t)dt = \int_0^T < w(t),\ v > \varphi(t)dt,$$

$\forall\, v \in V$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}$; puisque $\mathcal{C} \otimes V$ est dense dans $L_1(V)$ (par exemple) nous avons donc $w_* = w$, c'est-à-dire $w_*(t) = w(t)$ p.p.

D'après (7.6), la fonction w_* est continue de $[0,\ T] \to V'$ et $w_*(0) = u_0$. Dérivant (7.6) au sens des distributions vectorielles sur $]0,\ T[$ à valeurs dans V', nous obtenons

$$w'_*(t) + A(t)w_*(t) = f(t), \tag{7.8}$$

en sorte que $w_* = u$.

Les limites étant indépendantes de la suite k' extraite de k, les convergences (7.1) et (7.7) ont lieu pour la suite k toute entière.

Il ne reste plus maintenant qu'à préciser la convergence des fonctions u_{ik} vers u. C'est l'objet du lemme 7.2 et de la section 7.3.

LEMME 7.2

Pour tout $t \in [0,\ T]$, *pour* $i = 1,\ \ldots,\ m$,

$$u_{ik}(t) \to u(t) \quad \text{dans } H \text{ faible, lorsque} \quad k \to 0. \tag{7.9}$$

Démonstration.

Soit $t \in [0,\ T]$ fixé. D'après la proposition 4.1, pour $i = 1,\ \ldots,\ m$, la suite $u_{ik}(t)$ est bornée dans H.

D'après (7.7) et une remarque ci-dessus, $u_{1k}(t) \to w_*(t) = u(t)$ dans V' faible. Pour $i = 1$, (7.9) résulte alors du lemme 6.3.

Pour $i \geq 2$, nous remarquons que $u_{1k}(t) \to u(t)$ dans V' faible, car $u_{1k}(t) \to u(t)$ dans V' faible et que $u_{jk}(t) - u_{(j-1)k}(t) \to 0$ dans V' fort, $j = 2,\ \ldots,\ m$ (cf. démonstration du lemme 7.1). Le résultat découle encore du lemme 6.3.

7.3. - *Troisième partie de la démonstration*: *Résultats de convergence forte.*

Nous utilisons pour démontrer ces résultats de convergence forte, une variante d'une méthode classique: pour t et i fixés, $t \in [0,\ T]$, $1 \leq i \leq m$, nous démontrons qu'une expression $X_{ik}(t)$ convenable tend vers 0 avec k. Cette expression $X_{ik}(t)$ [dont le choix est déterminé par les égalités d'énergie vérifiées par les fonctions approchées, cf. (7.13)] est la suivante:

$$X_{ik}(t) = |u(t) - u_{ik}(t)|^2 + \\ + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u_{jk}(s) - u(s),\ u_{jk}(s)),\ u_{jk}(s) - u(s))ds \tag{7.10}$$

où

$$\begin{cases} t_{ij} = (r+1)k \quad \text{pour} \quad j < i, \qquad t_{ii} = t, \qquad t_{ij} = rk \quad \text{pour} \quad j > i \\ r = E(t/k), \quad \text{plus grand entier} \quad \leq t/k \end{cases} \tag{7.11}$$

Nous écrivons $X_{ik}(t)$ sous la forme d'une somme de trois termes:

$$X_{ik}(t) = X_{ik}^1(t) + X_{ik}^2(t) + X_{ik}^3(t)$$

avec

$$X_{ik}^1(t) = |u(t)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u(s),\ u(s))ds,$$

$$X_{ik}^2(t) = -2\,\mathcal{R}e\,(u_{ik}(t),\ u(t)) - \\ - 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} [a_j(s,\ u(s),\ u_{jk}(s)) + a_j(s,\ u_{jk}(s),\ u(s)]ds,$$

$$X_{ik}^3(t) = |u_{ik}(t)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u_{jk}(s),\ u_{jk}(s))ds.$$

Il est clair que

$$\lim X_{ik}^1(t) = X^1(t) = |u(t)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_0^t a(s;\ u(s),\ u(s))ds.$$

Pour $X_{ik}^2(t)$, nous écrivons

$$\int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u(s),\ u_{jk}(s))ds = \int_0^T a_j(s;\ \psi_{t_{ij}}(s)u(s),\ u_{jk}(s))ds,$$

où $\psi_\xi(\cdot)$ désigne la fonction caractéristique de $[0, \xi]$ $(\xi > 0)$. On vérifie aisément que $\psi_{t_{ij}} \cdot u$ tend vers $\psi_t \cdot u$ dans $L_2(V_j)$ fort et puisque $u_{ik} \to u$ dans $L_2(V_j)$ faible:

$$\int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u(s),\ u_{jk}(s))ds \to \\ \to \int_0^T a_j(s;\ \psi_t(s)u(s),\ u(s))ds = \int_0^t a_j(s;\ u(s),\ u(s))ds.$$

Le passage à la limite pour l'intégrale

$$\int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u_{jk}(s),\ u(s))ds$$

se fait de la même manière. D'après le lemme 7.2, $(u_{ik}(t),\ u(t)) \to |\ u(t)\ |^2$ et ainsi:

$$\lim_{k\to 0} X^2_{ik}(t) = X^2(t) = -2X^1(t).$$

Il reste à déterminer la limite de $X^3_{ik}(t)$. Les convergences faibles (7.1) et (7.9) ne sont pas suffisantes pour passer à la limite dans $X^3_{ik}(t)$. Nous allons donner une nouvelle expression de $X^3_{ik}(t)$ utilisant les égalités d'énergie vérifiées par les fonctions u_{ik}.

Pour $t \in [rk.\ (r+1)k[$, nous considérons l'égalité (4.1) et des égalités analogues:

$$\left| u_k^{p+\frac{j}{m}} \right|^2 + 2\ \Re e \int_{pk}^{(p+1)k} a_j(s;\ u_{jk}(s),\ u_{jk}(s))ds = \tag{7.12}$$

$$= \left| u_k^{p+\frac{j-1}{m}} \right|^2 + 2\ \Re e \int_{pk}^{(p+1)k} (f_j(s),\ u_{jk}(s))ds,$$

$$p = 0,\ \dots,\ N, \qquad j = 1,\ \dots,\ m.$$

Sommons membre à membre, l'égalité (4.1) et les égalités (7.12) pour

$$p = 0,\ \dots,\ r, \qquad j = 1,\ \dots,\ m, \qquad p + \frac{j}{m} \leq r + \frac{i-1}{m},$$

Nous obtenons exactement:

$$X^3_{ik}(t) = |\ u_0\ |^2 + 2\ \Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} (f_j\ s),\ u_{jk}(s))ds. \tag{7.13}$$

Le passage à la limite pour $X^3_{ik}(t)$ n'offre plus de difficultés; nous pouvons montrer [avec (2-ix)] que

$$\lim_{k\to 0} X^3_{ik}(t) = X^3(t) = |\ u_0\ |^2 + 2\ \Re e \int_0^t (f(s),\ u(s))ds.$$

Finalement

$$\lim_{k\to 0} X_{ik}(t) = X(t) = |u_0|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^t (f(s),\ u(s))ds -$$

$$- |u(t)|^2 - 2\,\mathcal{R}e\int_0^t a(s;\ u(s),\ u(s))ds,$$

et cette expression $X(t)$ est nulle d'après (1.5).

Puisque

$$0 \leq |u_{ik}(t) - u(t)|^2 \leq X_{ik}(t) \to 0,$$

nous en concluons que $u_{ik}(t) \to u(t)$ dans H fort:

$$u_{ik}(t) \to u(t) \quad \text{dans } H \text{ fort pour tout } \ t \in [0,\ T] \ \text{ et pour } \ i = 1,\ \dots,\ m.$$

Pour terminer, considérons $X_{mk}(T)$:

$$X_{mk}(T) = |u_k^{N+1} - u(T)|^2 +$$

$$+ 2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T a_j(s;\ u_{jk}(s) - u(s),\ u_{jk}(s) - u(s))ds.$$

Avec l'hypothèse (2-vi):

$$0 \leq 2\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^T \| u_{jk}(s) - u(s)\|_j^2 ds \leq X_{mk}(T) \to 0$$

et ainsi

$$u_{jk} \to u \quad \text{dans} \quad L_2(V_j) \quad \text{fort.}$$

Le théorème 5.1 est complètement démontré.

8. - **Exemples** (suite).

Appliqués aux exemples du N° 3, les résultats de convergence précédents donnent respectivement

EXEMPLE 1.

$$\begin{cases} D_i u_{ik} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort} \\ u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega | u_{ik}(x,\ t) - u(x,\ t) |^2 dx \to 0, \qquad \forall\, t \in [0,\ T], \qquad i = 1,\ \dots,\ m. \end{cases}$$

EXEMPLE 2.

$$\begin{cases} D^j u_{jk} \to D^j u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort} \\ u_{jk} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega | u_{jk}(x,\ t) - u(x,\ t) |^2 \, dx \to 0, \qquad \forall\, t \in [0,\ T]; \qquad \forall\, j, | j | = \mu. \end{cases}$$

En raison de l'inégalité de Poincaré, nous avons aussi

$$D^q u_{jk} \to D^q u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort}, \qquad \forall\, q,\ q \leq j.$$

EXEMPLE 3.

$i = 1,\ \dots,\ n + 1,$

$$\begin{cases} \vec{u}_{ik} \to \vec{u} \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)^2) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega | \vec{u}_{ik}(x,\ t) - \vec{u}(x,\ t) |^2 \, dx \to 0, \qquad \forall\, t \in [0,\ T]; \end{cases}$$

$i = 1,\ \dots,\ n,$

$$D_i u_{ik} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L^2(Q_T)^2 \quad \text{fort}.$$

9. - Compléments.

9.1. - *Des cas de résolution exacte* [8].

Nous allons montrer comment, dans des cas assez particuliers, les fonctions u_{ik} sont exactement égales en certains points à la fonction u.

Nous supposons pour simplifier que les opérateurs A et A_i sont indépen-

(8) D'après A. SAMARSKI (30).

dants de t,

$$A(t) = A, \qquad A_i(t) = A_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{9.1}$$

On sait [15] que $-A$ (resp. $-A_i$) est dans ce cas générateur infinitésimal d'un semi-groupe $G(s)$ [resp. $G_i(s)$] de contractions dans H; on sait également que l'on peut exprimer la solution du problème de Cauchy rattaché à l'opérateur A (resp. A_i) à l'aide du semi-groupe $G(s)$ [resp. $G_i(s)$]. Par exemple, pour le problème 1,

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(s)f(s)ds.$$

Supposons (*c'est l'hypothèse essentielle*) que les opérateurs $G_i(s)$, $G_j(t)$ commutent:

$$G_i(s) \cdot G_j(t) = G_j(t) \cdot G_i(s), \qquad 1 \leq i,\ j \leq m, \qquad s \geq 0,\ t \geq 0. \tag{9.2}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$G_m(s) \ldots G_1(s), \qquad s \geq 0,$$

est un semi-groupe de contractions, dont le générateur infinitésimal n'est autre que $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$; en sorte que:

$$G(s) = G_m(s) \ldots G_1(s), \qquad s \geq 0. \tag{9.3}$$

Si, à présent,

$$f = f_1 = \ldots = f_m = 0, \tag{9.4}$$

nous avons

$$u_k^{\frac{1}{m}} = G_1(k) \cdot u_0,\ u_k^{\frac{2}{m}} = G_2(k)u_k^{\frac{1}{m}},\ \ldots,\ u_k^{\frac{m}{m}} = u_k^1 = G_m(k)u_k^{\frac{m-1}{m}},$$

d'où

$$u_k^1 = G_m(k) \ldots G_1(k) \cdot u_0.$$

Si la condition (9.2) est réalisée, nous avons avec (9.3)

$$u_k^1 = G(k) \cdot u_0 = u(k),$$

et de manière identique nous montrerions que

$$u_k^r = u(rk), \qquad r = 0, \ldots, N+1. \tag{9.5}$$

Cela prouve que la fonction u_{1k} est exactement égale à u aux points rk, $r = 0, \dots, N+1$.

Lorsque la condition (9.2) est réalisée mais que f diffère de 0, la propriété (9.5) reste vraie pour une décomposition particulière de f.

Voici enfin, un exemple pour lequel la condition (9.2) est réalisée.

LEMME 9.1.

Dans l'exemple 1, *si* Ω *est un pavé*

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_1, \qquad \Omega_1 =]d_i, e_i[,$$

et si a_i *et* c_i *ne dependent que de* x_i, *alors la condition* (9.2) *est réalisée.*

Il en est de même dans l'exemple 2, *lorsque* $\mu = 1$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{G}_i(s) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega_i), L_2(\Omega_i))$, $s \geq 0$, le semi-groupe engendré par l'opérateur

$$\mathcal{A}_i = - D_i[a_i(x_i)D_i] + c_i(x_i),$$

ayant pour domaine [dans $L_2(\Omega_i)$]:

$$\{ v \mid v \in L_2(\Omega_i),\ D_i^2 v \in L_2(\Omega_i) \ \text{ et } \ (D_i v)(d_i) = (D_i v)(e_i) = 0 \ \text{ pour l'exemple 1,}$$
$$v(d_i) = v(e_i) = 0 \ \text{ pour l'exemple 2} \}.$$

Si $v \in L_2(\Omega)$ est de la forme,

$$v = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n, \qquad v_i \in L_2(\Omega_i), \tag{9 5}$$

on vérifie aisément que

$$G_i(s)v = v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes \mathcal{G}_i(s)v_i \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n .$$

Il est alors clair que

$$G_i(s)G_j(t)v = G_j(t)G_i(s)v, \tag{9.6}$$

pour tout v de la forme (9.5). Pour des raisons de linéarité, il en est encore ainsi pour tout v de la forme

$$\sum_{\text{finie}} v_1 \otimes \dots \otimes v_n, \qquad v_i \in L_2(\Omega_i).$$

Puisque ces sommes finies sont denses dans $H = L_2(\Omega)$, nous en déduisons que (9.6) a lieu pour tout $v \in H$.

9.2. - *Une autre méthode semi-discrète.*

Nous allons maintenant étudier brièvement la convergence d'une méthode d'approximation voisine de celle considérée dans les numéros précédents, et introduite par A. SAMARSKI [30] et N. N. YANENKO [41].

Soit α_{ik} la fonction égale à m sur les intervalles

$$J_k^{ir} = \left[\left(r + \frac{i-1}{m}\right)k,\ \left(r + \frac{i}{m}\right)k\right[, \qquad r = 0, \ldots, N,$$

et à 0 ailleurs

Il existe une fonction v_k unique, continue de $[0, T]$ dans H, qui vérifie

$$\text{(9.7)} \qquad \begin{cases} v_{ik} = \alpha_{ik} v_k \in L_2(V_i) \\ v_k'(t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}(t) A_i(t) v_k(t) = f(t), \qquad t \in]0, T[\\ v_k(0) = u_0 . \end{cases}$$

En effet, par application du théorème 1.1 on détermine successivement les restrictions de v_k aux intervalles $J_k^{i,r}$ (restrictions encore notées v_k) comme les solutions de

$$\begin{cases} v_k \in L_2(J_k^{i,r};\ V_i) \\ v_k'(t) + m A_i(t) v_k(t) = f_i(t), \qquad t \in J_k^{i,r} \\ v_k\left[\left(r + \frac{i-1}{m}\right)k + 0\right] = v_k\left[\left(r + \frac{i-1}{m}\right)k - 0\right] \qquad (\in H, \quad \text{connu}). \end{cases}$$

Nous pouvons établir des estimations à priori semblables à celles de la proposition 5.1; avec les mêmes méthodes que pour le théorème 5.1, nous démontrons le

THÉORÈME 9.1.

Lorsque $k \to 0$

$$\begin{cases} v_{ik} \to u \quad \textit{dans} \quad L_2(V_i) \quad \textit{faible}, \quad i = 1, \ldots, m, \\ v_k \to u \quad \textit{dans} \quad L_2\left(\sum_{i=1}^{m} V_i\right) \quad \textit{faible}. \end{cases}$$

REMARQUE 9.1.

Il est impossible que v_{ik} tende vers u dans $L_2(V_i)$ fort, ni même dans $L_2(H)$ fort. En effet nous avons

$$|v_k|^2_{L_2(H)} = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}|v_{ik}|^2_{L_2(H)}. \tag{9.9}$$

Si il y avait convergence de v_{ik} vers u dans $L_2(H)$ fort, il y aurait aussi convergence de v_k vers u dans $L_2(H)$ fort et (9.9) donnerait à la limite

$$|u|^2_{L_2(H)} = \frac{1}{m}|u|^2_{L_2(H)},$$

ce qui est absurde en général.

Il n'est pas impossible par contre que v_k tende vers u dans $L_2(H)$ fort mais ce résultat n'est pas connu.

Cette méthode d'approximation permet donc d'obtenir une fonction approchée continue de $[0, T] \rightarrow H$ mais conduit à des résultats de convergence moins précis que précédemment; en outre cette méthode ne semble pas applicable aux problèmes non linéaires des chapitres suivants.

§ 2. - Approximations discrètes.

Nous conservons dans cette partie les hypothèses et notations des n° 1 et 2, mais les résultats qui suivent sont totalement indépendants des résultats de la première partie.

10. - Hypothèses de discrétisation.

Nous introduisons, dans ce numéro, différentes notations qui correspondent en pratique, à une discrétisation en les variables d'espace. Le cadre « discret » que nous définissons est analogue à celui proposé par J. CEA [6], et P. A. RAVIART [28] pour l'approximation classique des équations aux dérivées partielles.

10.1. - Nous « agrandissons » l'espace H en introduisant un espace de Hilbert $\tilde{H}$ dont H est un sous-espace hilbertien et dont nous notons encore (f, g) le produit scalaire (9).

Nous nous donnons, pour $i = 1, \ldots, m$, un espace de Hilbert Φ_i (produit

(9) Pour des problèmes avec conditions aux limites Neumann, il faut considérer des fonctions approchées à support un peu plus grand que Ω; on prend alors $H = L_2(\Omega)$, $\tilde{H} = L_2(R^n)$.

scalaire $[u, v]_{\Phi_i}$, norme $[u]_{\Phi_i}$); nous appelons F_i l'espace hilbertien $\tilde{H} \times \Phi_i$, et π_i la projection canonique de F_i sur $\tilde{H}$. Nous supposons qu'il existe un isomorphisme de V_i dans F_i, tel que $\pi_i \bar{\omega}_i$ soit l'identité.

Nous notons $((u, v))_{F_i}$ et $\| u \|_{F_i}$ le produit scalaire et la norme dans F_i. Si $u \in F_i$, nous notons aussi $[u]_{F_i}$ la norme dans Φ_i de la projection de u sur Φ_i; $[u]_{F_i}$ est une semi-norme sur F_i et

$$\text{(10-i)} \qquad \| u \|_{F_i} = (| \pi_i u |^2 + [u]^2_{F_i})^{1/2}.$$

Pour $i = 1, \dots, m$ et pour $t \in [0, T]$, soit $\tilde{a}_i(t; u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur F_i avec

$$\text{(10-ii)} \qquad \begin{cases} \tilde{a}_i(t;\ \bar{\omega}_i u,\ \bar{\omega}_i v) = a_i(t;\ u,\ v) \\ u,\ v \in V_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T] \ ({}^{10}), \end{cases}$$

$$\text{(10-iii)} \qquad t \to \tilde{a}_i(t;\ u,\ v) \quad \text{est mesurable,} \quad \forall\, u,\ v \in F_i,$$

$$\text{(10-iv)} \qquad \begin{cases} | a_i(t;\ u,\ v) | \leq M_i \| u \|_{F_i} \| v \|_{F_i} \\ u,\ v \in F_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T], \end{cases}$$

$$\text{(10-v)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e\, \tilde{a}_i(t,\ u,\ u) \geq \alpha_i \| u \|^2_{F_i} \\ u \in F_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

Il pourra étre utile parfois de préciser (10-iv) et (10-v) de la manière suivante

$$\text{(10-iv}'\text{)} \qquad \begin{cases} | \tilde{a}_i(t;\ u,\ v) | \leq P_i [u]_{F_i} [v]_{F_i} + c_3 \| u \|_{F_i} | \pi_i v | \\ u,\ v \in F_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

$$\text{(10-v}'\text{)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e\, \tilde{a}_i(t;\ u,\ u) \geq \gamma_i [u]^2_{F_i} + c_4 | \pi_i u |^2 \\ u \in F_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T], \end{cases}$$

les c_i, c'_i désignant diverses constantes indépendantes de k et h.

10.2. - Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de paramètres, qui sera en général

$$\mathcal{H} = \{ h \mid h = (h_1,\ \dots,\ h_n),\ 0 < h_i \leq 1 \}.$$

(10) La forme $a_i(t;\ \bar{\omega}_i^{-1} u,\ \bar{\omega}_i^{-1} v)$ est définie sur $\bar{\omega}_i V_i \times \bar{\omega}_i V_i$ et $\tilde{a}_i(t;\ u,\ v)$ en est un prolongement à $F_i \times F_i$.

Pour chaque $h \in \mathcal{H}$, soit

— V_h un espace vectoriel sur c de dimension finie $N(h)$; $N(h)$ peut tendre vers l'infini lorsque $h \to 0$ et il en est ainsi en pratique lorsque V est de dimension infinie.

— r_h une application linéaire de H dans V_h et q_h une application linéaire biunivoque de V_h dans $\tilde{H}$ avec

(10-vi) $$| q_h r_h |_{\mathcal{L}(H, \tilde{H})} \leq c_5$$

— p_{ih}, $i = 1, \ldots, m$, une application linéaire biunivoque de V_h dans F_i, avec $\pi_i p_{ih} = q_h$.

A l'aide de ces applications q_h, p_{ih}, il est possible de munir V_h de différentes structures hilbertiennes:

$$(u_h, v_h)_h = (q_h u_h, q_h v_h)$$

$$((u_h, v_h))_{ih} = ((p_{ih} u_h, p_{ih} v_h))_{F_i}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Nous pouvons également définir les semi-normes:

$$[u_h]_{ih} = [p_{ih} u_h]_{F_i}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Puisque V_h est de dimension finie, il existe une constante $S_i(h)$ pouvant tendre vers $+\infty$ lorsque $h \to 0$, telle que

(10-vii) $$[u_h]_{ih} \leq S_i(h) \, | u_h |_h, \qquad \forall\, u_h \in V_h.$$

Avec (10-i) nous avons aussi

(10-viii) $$\| u_h \|_{ih} \leq T_i(h) \, | u_h |_h, \qquad \forall\, u_h \in V_h, \qquad T_i(h) = [1 + S_i^2(h)]^{1/2}$$

(10-ix) $$| u_h |_h \leq \| u_h \|_{ih}.$$

Hypothèses de Consistance.

Les hypothèses de consistance précisent le lien qui existe, lorsque $h \to 0$, entre certains éléments et leurs analogue discrets.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

(10-x) $$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un sous-espace } \mathcal{V} \text{ dense dans } V, \text{ (éventuellement } V \text{ lui-} \\ \text{même), tel que, pour tout } u \in \mathcal{V}, \text{ lorsque } h \to 0 \\ p_{ih} r_h u \to \tilde{\omega}_i u \quad \text{dans} \quad F_i \quad \text{fort}, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array} \right.$$

(10-xi) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } h' \text{ une suite qui tend vers 0. Soit } \varphi \in L_1(\tilde{H}) \text{ et } \varphi_{h'}, \text{ une suite} \\ \text{d'applications de } [0,\ T] \to V_{h'}, \text{ telle que, lorsque } h' \to 0 \\ q_{h'}\varphi_{h'} \to \varphi \quad \text{dans} \quad L_1(\tilde{H}) \quad \text{faible.} \\ \text{Alors } \varphi \in L_1(H) \text{ (c'est-à-dire } \varphi(t) \in H \text{ p.p.).}\end{array}\right.$

(10-xii) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } h' \text{ une suite qui tend vers 0. Soient } \varphi_{ih'},\ i = 1, \ldots, m, \text{ des} \\ \text{suites d'applications de } [0,\ T] \to V_{h'}, \text{ telles que, lorsque } h' \to 0, \\ \text{pour } i = 1, \ldots, m, \\ q_{h'}\varphi_{ih'} \to \psi \quad \text{dans} \quad L_2(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ p_{ik'}\varphi_{ih'} \to \varphi_i \quad \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{faible.} \\ \text{Alors } \psi = \pi_i\varphi_i \in L_2(V) \text{ et } \varphi_i(t) = \bar{\omega}_i\psi(t), \text{ p.p. } t \in [0,\ T];\ i = 1, \ldots, m.\end{array}\right.$

REMARQUE 10.1.

D'après (10-ix), pour tout $v \in \mathcal{V}$, lorsque $h \to 0$:

$$q_h r_h u = \pi_i p_{ih} r_h u \to \pi_i \bar{\omega}_i u = u \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{fort.}$$

Puisque $\mathcal{V}$ est dense dans H, nous en concluons avec (10-vi) que

(10.1) $\qquad q_h r_h u \to u \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{fort, lorsque} \quad h \to 0, \qquad \forall\, u \in H.$

Il peut être utile parfois d'introduire avec r_h un autre opérateur linéairè $\rho_h \in \mathcal{L}(H,\ \tilde{H})$ tel que

(10-xiii) $\left\{\begin{array}{l} |\, q_h\rho_h\,|_{\mathcal{L}(H,\ \tilde{H})} \leq c_6 \\ q_h\rho_h u \to u \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{fort, lorsque} \quad h \to 0, \qquad \forall\, u \in H.\end{array}\right.$

REMARQUE 10.2.

Notons que (10-ii) et (10-x) impliquent ceci:

(10.2) $\left\{\begin{array}{l} \tilde{a}_i(t;\ p_{ih}r_h u,\ p_{ih}r_h v) \to a_i(t;\ u,\ v), \quad \text{lorsque} \quad h \to 0 \\ \forall\, u,\ v \in \mathcal{V}, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].\end{array}\right.$

REMARQUE 10.3.

Avec (10-xi) on vérifie facilement ceci:

(10.3) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soient } \psi \in \tilde{H} \text{ et } \psi_{h'} \in V_{h'}, \text{ tels que } q_{h'}\psi_{h'} \to \psi \text{ dans } \tilde{H} \text{ faible} \\ \text{lorsque } h' \to 0. \text{ Alors } \psi \in H.\end{array}\right.$

11. - **Exemples** (suite).

Nous allons expliciter les espaces et opérateurs qu'il convient d'associer aux exemples 1, 2 et 3. Au préalable nous rappelons quelques notations de [6] et [28], qui seront utilisées dans la suite.

11.1. - *Notations.*

Pour $h=(h_1, \dots, h_n)$, $h_i>0$, nous appelons:

— $\mathcal{R}_h$ l'ensemble des points de R^n de la forme $(j_1h_1, \dots, j_nh_n)$, j_i entiers de signe quelconque,

— $\vec{h_i}$ le vecteur de R^n de composantes nulles, sauf la ième égale à h_i,

— $\sigma_h(M, 0)$, $M=(\mu_1, \dots, \mu_n)$, le pavé $\prod_{i=1}^n \left]\mu_i-\frac{h_i}{2}, \mu_i+\frac{h_i}{2}\right[$,

— $\sigma_h(M, r)=\bigcup_{|j|\leq r}\sigma_h\left(M+\frac{1}{2}(j_1\vec{h_1}+\dots+j_n\vec{h_n}), 0\right)$, j_i entiers de signe quelconque, $|j|=|j_1|+\dots+|j_n|$,

— w_{hM} la fonction caractéristique du pavé $\sigma_h(M, 0)$

— δ_i l'opérateur de différences finies

$$\delta_i\varphi(x)=\frac{1}{h_i}\left[\varphi\left(x+\frac{\vec{h_i}}{2}\right)-\varphi\left(x-\frac{\vec{h_i}}{2}\right)\right];$$

δ_i opère dans tout espace X de fonctions définies sur $\boldsymbol{R}^n$ et à valeurs dans un espace vectoriel. Sur un tel espace X, il est possible de définir aussi les produits d'opérateurs δ_i et ces produits sont commutatifs. Si $j=(j_1, \dots, j_n)$, nous écrivons

$$\delta^j=\delta_1^{j_1}\dots\delta_n^{j_n}.$$

Si Ω est un ensemble ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, alors nous posons

$$\Omega_h^r=\{M/M\in\mathcal{R}_h,\ \sigma_h(M, r)\cap\Omega\neq\emptyset\}$$

$$\mathring{\Omega}_h^r=\{M/M\in\mathcal{R}_h,\ \sigma_h(M, r)\subset\Omega\}$$

11.2. - EXEMPLE 1 (suite).

Espaces $\tilde{H}$, Φ_i, F_i.

Nous prenons $\tilde{H}=L_2(\boldsymbol{R}^n)$. Nous convenons d'identifier $u\in L_2(\Omega)$ et la fonction $\tilde{u}\in L_2(R^n)$ égale à u dans Ω et à 0 dans $\complement\Omega$; H est alors un sous-espace hilbertien de $\tilde{H}$.

Nous prenons $\Phi_i = L_2(\Omega)$, $F_i = L_2(\boldsymbol{R}^n) \times L_2(\Omega)$, i $= 1, \ldots, n$. Pour $u \in V_i$, nous définissons $\tilde{\omega}_i u = (\tilde{u}, D_i u)$.

Formes $\tilde{a}_i(t;\ u,\ v)$.

Si $u,\ v \in F_i$, $u = (u_0,\ u_1)$, $v = (v_0,\ v_1)$, nous posons

$$\tilde{a}_i(t;\ u,\ v) = \int_\Omega a_i(x,\ t) u_i(x) \overline{v_i(x)} dx + \int_{R^n} d_i(x,\ t) u_0(x) \overline{v_0(x)} dx,$$

où $d_i(x,\ t)$ est égal à $c_i(x,\ t)$ pour $x \in \Omega$ et à α_i pour $x \notin \Omega\,[\mathcal{R}e\, d_i(x,\ t) \geq \alpha_i > 0$ p.p. dans $\boldsymbol{R}^n \times [0,\ T]]$.

Espaces V_h.

L'espace V_h sera l'espace des fonction étagées u_h:

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^1} u_h(M) w_{hM}(x), \qquad u_h(M) \in \boldsymbol{C}.$$

La dimension $N(h)$ de V_h est le nombre de $M \in \Omega_h^1$.

Opérateur r_h.

Nous supposons que Ω possède la propriété de 1-prolongement [15]. Il existe alors un opérateur linéaire $\mathcal{P}$ continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ et de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\boldsymbol{R}^n)$. Pour $u \in H$, nous définissons $u_h = r_h u$ en posant:

$$u_h(M) = (h_1,\ \ldots,\ h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M,0)} \mathcal{P} u(x) dx, \qquad \forall\, M \in \Omega_h^1.$$

Opérateurs q_h, p_{ih}.

L'opérateur q_h sera simplement l'identité. Pour p_{ih} nous prenons

$$p_{ih} u_h = (u_h,\ \delta_i u_h \mid_\Omega)$$

où $g\mid_\Omega$ désigne la restriction à Ω d'une fonction h définie dans R^n.

Vérification des hypothèses (10-i) à (10-xii).

Pour (10-vi) et (10-x) nous renvoyons à RAVIART [28]; (10-vii) a lieu avec

$$S_i(h) = \frac{2}{h_i}; \tag{11.1}$$

en effet:

$$[u_h]_{ih}^2 = \int_\Omega |\delta_i u_h(x)|^2 dx \leq \int_{R^n} |\delta_i u_h(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{h_i^2} \int_{R^n} \left(\left| u_h\left(x + \frac{\vec{h}_i}{2}\right) \right|^2 + \left| u_h\left(x - \frac{\vec{h}_i}{2}\right) \right|^2 \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{4}{h_i^2} \int_{R^n} |u_h(x)|^2 dx = \frac{4}{h_i^2} |u_h|_h^2.$$

Les hypothèses (10–iv′) et (10–v′) sont réalisées avec

$$P_i = |a_i(x, t)|_{L_\infty(Q_T)}; \qquad \gamma_i = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \mathcal{R}e\, a_i(x, t). \tag{11.2}$$

A l'exception de (10–xi) et (10–xii), les autres hypothèses sont évidentes.

Hypothèse (10–xi).

Soit $\varphi_{h'} = \varphi_{h'}(x, t)$ une suite qui tend vers $\varphi = \varphi(x, t)$ dans $L_1(L_2(R^n))$ faible ($h' \to 0$). Pour vérifier (10–xi), nous devons montrer que $\varphi(x, t)$ est nulle p.p. dans $\complement\, \Omega \times [0, T]$.

Le support de $\varphi_{h'}(\cdot, t)$ est

$$\bigcup_{M \in \Omega_h^1} \sigma_k(M, 0).$$

Pour tout compact $K \subset \complement\overline{\Omega}$, il existe $h_0 = h_0(K)$, tel que pour $h' \leq h_0(K)$, le support de $\varphi_{h'}(\cdot, t)$ ne rencontre pas K.

Si $\psi = \psi(x)$ est une fonction continue sur R^n, à support compact $K \subset \complement\overline{\Omega}$, et si $\theta = \theta(t)$ est une fonction continue sur $[0, T]$, alors, pour h' assez petit

$$\int_0 \int_{R^n} \varphi_{h'}(x, t) \psi(x) \theta(t) dx dt = 0,$$

et donc à la limite,

$$\int_0^T \int_{R^n} \varphi(x, t) \psi(x) \theta(t) dx dt = 0.$$

Cette égalité vérifiée quelles que soient les fonctions ψ et θ, montre que $\varphi(x, t)$ est nulle p.p. dans $\complement\, \overline{\Omega} \times]0, T[$.

Hypothèse (10-xii).

Supposons que, lorsque $h' \to 0$, pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{cases} q_{h'}\varphi_{ih'} \to \psi & \text{dans} \quad L^2(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ p_{ih'}\varphi_{ih'} \to \varphi_i & \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

Evidemment $\psi = \pi_i \varphi_i$ et φ_i est de la forme $\varphi_i = (\psi, \psi_i)$, $\psi_i \in L_2(\Phi_i) = L_2(R^n \times \times [0, T])$. Les convergences précédentes peuvent être interprétées ainsi

$$\begin{cases} \varphi_{ih'} \to \psi & \text{dans} \quad L_2(R^n \times [0, T]) \quad \text{faible} \\ \delta_i \varphi_{ih'}|_Q \to \psi_i & \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\delta_i \varphi_{ih'}|_{Q_T} \to D_i(\psi|_{Q_T})$ dans $\mathfrak{D}'(Q_T)$, espace des distributions sur $\Omega \times]0, T[$, et donc

$$\psi_i = D_i \psi_0, \qquad \psi_0 = \psi|_{Q_T}.$$

Cela montre que

$$\psi_0 \in L_2(Q_T), \qquad D_i \psi_0 \in L_2(Q_T),$$

et ainsi $\psi_0 \in L_2(H^1(\Omega)) = L_2(V)$.

D'après l'hypothèse (10-xi) déjà vérifiée, ψ est nulle p.p. dans $\complement\bar{\Omega} \times [0, T[$; nous avons bien

$$\bar{\omega}_i \psi_0 = (\tilde{\psi}_0, D_i \psi_0) = (\psi, \psi_i) = \varphi_i$$

et (10-xii) est vérifiée.

11.3. - EXEMPLE 2.

Espaces $\tilde{H}$, Φ_j, F_j.

Nous prenons $\tilde{H} = H = L_2(\Omega)$, $\Phi_j = L_2(\Omega)$, $F_j = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Pour $u \in V_j$, $\bar{\omega}_j u = (u, D^j u)$.

Formes $\tilde{a}_j(t; u, v)$.

Si $u, v \in F_j$, $u = (u_0, u_1)$, $v = (v_0, v_1)$, nous posons

$$\tilde{a}_j(t; u, v) = \int_\Omega [a_j(x, t) u_1(x) \overline{v_1(x)} + c_j(x, t) u_0(x) \overline{v_0(x)}] dx.$$

Espaces V_h.

Avec les notations de la section 11.1, l'espace V_h sera l'espace des fonctions étagées u_h:

$$u_h(x) = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^\mu} u_h(M) w_{hM}(x), \qquad u_h(M) \in \boldsymbol{C}.$$

La dimension $N(h)$ de V_h est le nombre de $M \in \overset{\circ}{\Omega}{}_h^\mu$

Opérateurs r_h, q_h, p_{jh}.

Si $u \in H$, $u_k = r_h u$ est défini par

$$u_h(M) = (h_1, \ldots, h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M, 0)} u(x) dx, \qquad \forall\, M \in \overset{\circ}{\Omega}{}_h^\mu.$$

Par ailleurs, $q_h u_h = u_{h\ \Omega}$ et $p_{jh} u_h = (u_h |_\Omega, \ \delta^j u_h |_\Omega)$.

Vérification des hypothèses (10-i) à (10-xii).

Pour (10-vi) et (10-x) nous renvoyons à [28]; (10-iv′) et (10-v′) ont lieu avec

$$P_j = | a_j(x, t) |_{L_\infty(Q_T)}; \qquad \gamma_j = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \mathcal{R}e\, a_j(x, t). \tag{11.3}$$

Pour (10-vii), nous avons

$$S_j(h) = \frac{\sigma(j)}{h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}}, \tag{11.4}$$

$\sigma(j)$ constante ne dépendant que de j. En effet,

$$[u_h]_{jh}^2 = \int_\Omega | \delta^j u_h(x) |^2 dx;$$

$\delta^j u_h$ est le produit par $h_1^{-j_1} \ldots h_n^{-j_n}$ d'une somme de termes de la forme $u_h\left(x + \frac{1}{2} \nu h\right)$, $\nu h = (\nu_1 h_1, \ldots, \nu_n h_n)$, ν_i entiers de signe quelconque. Soit $\sigma(j)$ le nombre de valeurs possibles de ν; alors:

$$\begin{aligned}
[u_h]_{jh}^2 &\leq (h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n})^{-2} \int_{R^n} \left| \sum_\nu u_h\left(x + \frac{1}{2} \nu h\right) \right|^2 dx \leq \\
&\leq (h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n})^{-2} \sigma(j) \int_{R^n} \left(\sum_\nu \left| u_h\left(x + \frac{1}{2} \nu h\right) \right|^2 \right) dx = \\
&= (h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n})^{-2} \sigma(j) \sum_\nu \int_{R^n} | u_h(x) |^2 dx = \\
&= (h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n})^{-2} \sigma^2(j) \, | u_h |_h^2 .
\end{aligned}$$

L'hypothèse (10-xi) est triviale ici car $H = \tilde{H}$. Excepté (10-xii), les autres hypothèses sont immédiates.

Hypothèse (10-xii).

Supposons que, lorsque $h' \to 0$, pour tout j, $|j| = \mu$:

$$\begin{cases} q_{h'}\varphi_{jh'} \to \psi \quad \text{dans} \quad L_2(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ p_{jh'}\varphi_{jh'} \to \varphi_j \quad \text{dans} \quad L_2(F_j) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

Nous avons évidemment $\psi = \pi_j\varphi_j$ et φ_j est donc de la forme $\varphi_j = (\psi, \psi_j)$, $\psi_j \in L_2(\Phi_j) = L_2(Q_T)$. Les convergences précédentes se traduisent alors ainsi

$$\begin{cases} \varphi_{jh'}|_{Q_T} \to \psi \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{faible} \\ \delta^j\varphi_{jh'}|_{Q_T} \to \psi_j \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

Si g est une fonction définie dans Ω, appelons comme précédemment $\tilde{g}$ la fonction égale à g dans Ω et à 0 dans $\complement\Omega$. Nous avons aussi

$$\begin{cases} \varphi_{jh'} \to \tilde{\psi} \quad \text{dans} \quad L_2(R^n \times [0, T]) \quad \text{faible} \\ \delta^j\varphi_{jh'} \to \tilde{\psi}_j \quad \text{dans} \quad L_2(R^n \times [0, T]) \quad \text{faible;} \end{cases}$$

($\delta^j\varphi_{jh'}$ a son support inclus dans $\Omega \times [0, T]$).

On vérifie aisément que $\delta^j\varphi_{jh'} \to D^j\psi$ dans $\mathcal{D}'(R^n \times]0, T[)$, espace des distributions sur $R^n \times]0, T[$, et alors

$$\tilde{\psi}_j = D^j\tilde{\psi}.$$

Ainsi

$$\tilde{\psi} \in L_2(R^n \times [0, T]), \qquad D^j\tilde{\psi} \in L_2(R^n \times [0, T]), \qquad \forall j, \ |j| = \mu,$$

et cela assure que $\tilde{\psi} \in L_2(H^\mu(R^n))$, [15].

Puisque, pour presque tout t, $\tilde{\psi}(\cdot, t) \in H^\mu(R^n)$ et que cette fonction est nulle hors de Ω, alors [15], $\psi(\cdot, t) = \tilde{\psi}(\cdot, t)|_\Omega \in H_0^\mu(\Omega)$; finalement

$$\psi \in L_2(H_0^\mu(\Omega)) = L_2(V),$$

et nous avons bien

$$\tilde{\omega}_j\psi = (\psi, D^j\psi) = (\psi, \psi_j) = \varphi_j.$$

11.4. - EXEMPLE 3.

Espaces $\tilde{H}$, Φ_i, F_i. *Opérateurs* $\tilde{\omega}_i$.

Nous prenons $\tilde{H} = H = L_2(\Omega)^2$ et *pour* $i = 1, \ldots, n$,

$$\Phi_i = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \qquad F_i = L_2(\Omega)^4;$$

si $\vec{u} \in V_i$, $\bar{\omega}_i \vec{u} = (\vec{u}, D_i \vec{u}) \in F_i$;

pour $i = n + 1$,

$$\Phi_i = \{0\}, \qquad F_i = L_2(\Omega)^2 \times \{0\};$$

si $\vec{u} \in V_i = H$, $\bar{\omega}_i \vec{u} = (\vec{u}, 0) \in F_i$.

Formes $\tilde{a}_i(t; u, v)$

$i = 1, \ldots, n$,

$$\tilde{a}_i(t;\ u,\ v) = \tilde{a}_i(u,\ v) = \int_\Omega \left(\vec{u}_1(x) \cdot \vec{v}_1(x) + \frac{1}{n+1} \vec{u}_0(x) \vec{v}_0(x) \right) dx,$$

$$\forall\, u,\ v \in F_i, \qquad u = (\vec{u}_0, \vec{u}_1), \qquad v = (\vec{v}_0, \vec{v}_1);$$

$i = n + 1$,

$$\tilde{a}_i(t;\ u,\ v) = \tilde{a}_i(u,\ v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{n+1} \vec{u}_0(x) \vec{v}_0(x) - u_{01}(x) v_{02}(x) + u_{02}(x) v_{01}(x) \right) dx,$$

$$\forall\, u,\ v \in F_i, \qquad u = (\vec{u}_0, 0), \qquad v = (\vec{v}_0, 0), \qquad \vec{u}_0 = (u_{01}, u_{02}), \qquad \vec{v}_0 = (v_{01}, v_{02}).$$

Espaces V_h.

Les notations étant celles de la section 11.1, l'espace V_h est l'espace des fonctions étagées $\vec{u}_h$

$$\vec{u}_h(x) = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \vec{u}_h(M) w_{hM}(x), \qquad \vec{u}_h(M) \in R^2.$$

Opérateurs r_h, q_h, p_{ih}

Si $\vec{u} \in H$, $\vec{u}_h = r_h \vec{u}$ est défini par

$$\vec{u}_h(M) = (h_1 \ldots h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M,\, 0)} \vec{u}(x) dx, \qquad \forall\, M \in \mathring{\Omega}_h^1.$$

On pose aussi

$$q_h \vec{u}_h = u_h|_\Omega$$

et,

$$\text{pour} \quad i = 1, \ldots, n, \qquad p_{ih} \vec{u}_h = (\vec{u}_h|_\Omega,\ \delta_i \vec{u}_h|_\Omega)$$

$$\text{pour} \quad i = n + 1, \qquad p_{ih} \vec{u}_h = (\vec{u}_h|_\Omega,\ 0).$$

Vérification des hypothèses (10-i) *à* (10-xii).

Pour (10-vi) et (10-x), cf. [28]; (10-iv′), (10-v′) et (10-vii) ont lieu avec

$$p_i = \gamma_i = 1 \tag{11.5}$$

$$S_i(h) = \frac{2}{h_i}. \tag{11.6}$$

La vérification de (10-xii) se fait exactement comme pour l'exemple 2: les autres hypothèses sont immédiates.

12. - Problème Approché discret.

Le paramètre k ayant la même signification qu'au n° 2, nous notons

$$\left\{\begin{array}{l} a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{a}_i(t;\, p_{ih}u_h,\, p_{ih}v_h)dt \\ \forall\, u_h,\ v_h \in V_h \ (^{11}) \end{array}\right.$$

$$f_h^{r+\frac{i}{m}} = \frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k} r_h f_i(t)dt.$$

Soit $\theta \in [0, 1]$ un paramètre réel fixé.

Nous allons construire par récurrence une famille d'élements de V_h, $\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_{\substack{0\le r\le N\\ 1\le i\le m}}$ et nous leur associerons ensuite les fonctions « approchées ».

Nous partons de

$$\boxed{u_h^0 = r_h u_0} \tag{12.3}$$

puis, supposant connus u_h^0, $u_m^{\frac{1}{m}}$, ..., $u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \in V_h$, nous définissons $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ comme l'unique solution dans V_h de

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}},\ v_h\right)_h + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(\theta u_h^{r+\frac{i}{m}} + (1-\theta)u_h^{r+\frac{i-1}{m}},\ v_h\right) = \\ &\quad = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h\right)_h, \qquad \forall\, v_h \in V_h. \end{aligned}} \tag{12.4}$$

(11) Pour éviter l'accumulation des indices, nous notons avec le seul indice h des expressions dépendant du paramètre h ou de h et k.

Il existe un élément $u_h^{r+\frac{i}{m}} \in V_h$ et un seul qui vérifie (12.4): la démonstration de ce point utilisant le lemme de Lax-Milgram, est classique.

REMARQUE 12.1.

Nous pouvons écrire (12-4) sous la forme

$$\frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right) + A_h^{r+\frac{i}{m}} \cdot \left(\theta u_h^{r+\frac{i}{m}} + (1-\theta) u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right) = f_h^{r+\frac{i}{m}} \tag{12.5}$$

où $A_h^{r+\frac{i}{m}} \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ est l'opérateur linéaire défini par

$$\left(A_k^{r+\frac{i}{m}} u_h, v_h\right)_h = a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h), \qquad \forall\, u_h, v_h \in V_h.$$

Pour $\theta \in]0, 1]$ la détermination de $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ se ramène à l'inversion de l'opérateur $I + k\theta A_h^{r+\frac{i}{m}}$, et le schéma aux différences finies (12.4) est implicite. Pour $\theta = 0$, le schéma est explicite.

Les schémas les plus courramment utilisés sont ceux qui correspondent à $\theta = \frac{1}{2}$ ou $\theta = 1$. Afin que nos résultats soient complets, nous faisons une étude systématique de tous les schémas $\theta \in [0, 1]$. Il ressort par ailleurs de nos résultats (cf. n° 19) que l'utilisation des schémas explicites $\theta = 0$, peu usuelle avec une méthode de pas fractionnaires, pourrait être avantageuse.

REMARQUE 12.2.

Dans (12.2) et (12.3), on peut remplacer r_h par tout autre opérateur linéaire ρ_h vérifiant (10-xiii).

Nous posons à présent

$$w_h^{r+\frac{i}{m}} = \theta u_h^{r+\frac{i}{m}} + (1-\theta) u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \tag{12.6}$$

et nous associons à ces éléments $u_h^{r+\frac{i}{m}}$, $w_h^{r+\frac{i}{m}}$, les fonctions approchées u_{ih}, w_{ih}, définies par

$$\begin{cases} u_{ih}(t) = u_h^{r+\frac{i}{m}}, & w_{ih}(t) = w_h^{r+\frac{i}{m}} \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[, \\ r = 0, \ldots, N, & i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{12.7}$$

Dans la suite, comme dans le cas des approximations semi-discrètes, nous nous intéressons aux problèmes suivants:

a). Obtention d'estimations à priori pour les fonctions approchées; cela est identique ici au problème de la stabilité numérique. Nous verrons que l'obtention d'estimations à priori n'est pas automatique; il faudra parfois imposer des conditions à k et h.

b). Etude de la convergence, dans un sens à préciser, de ces fonctions vers la solution du problème 1.

Pour résoudre ces problèmes nous utiliserons simultanément les méthodes de la 1ère partie et celles de RAVIART [28].

13. - Estimations à priori.

Nous considérons l'égalité (12.4) avec v_h remplacé par $w_h^{r+\frac{i}{m}}$. Prenant la partie réelle de cette égalité, nous obtenons

$$(13.1)\qquad \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 - \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + (2\theta - 1) \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + $$
$$+ 2k\, \mathcal{R}e\, a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(w_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = 2k\, \mathcal{R}e\left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h .$$

Il faut distinguer deux cas selon le signe de $(2\theta - 1)$.

LEMME 13.1.

Dans le cas où $2\theta - 1 \geq 0$, *il existe une constante* c_1' *indépendante de* k *et* h, *telle que pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{cases} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq c_1' L, \qquad r = 0, \ldots, N \\ k \sum\limits_{r=0}^{N} \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq c_1' L \end{cases}$$

où

$$L = L(u_0, f_1, \ldots, f_m) = |u_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |f_i(t)|^2\, dt.$$

Démonstration.

Pour $(2\theta - 1) \geq 0$, (13.1) donne en particulier

$$(13.2)\qquad \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 - \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + 2k\, \mathcal{R}e\, a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(w_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_i \leq$$
$$\leq 2k\, \mathcal{R}e\left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h .$$

Avec (10-v) et (12.1), nous avons

$$\mathcal{R}e\, a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(w_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right) \geq \alpha_i \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2. \tag{13.3}$$

Grâce à (10-ix) nous pouvons majorer le second membre de (13.2) de la manière suivante:

$$2k\, \mathcal{R}e\left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h \leq 2k \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \left| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \leq$$

$$\leq 2k \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih} \leq \frac{k}{\alpha_i} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + k\alpha_i \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2.$$

D'où

$$\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + k\alpha_i \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_{ih}^2 + \frac{k}{\alpha_i} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \tag{13.4}$$

$$\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \frac{k}{\alpha_i} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2. \tag{13.5}$$

Ajoutons membre à membre, les inégalités (13.4) pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$. Il vient

$$\left| u_h^{N+1} \right|_h^2 + k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \alpha_i \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq C(k,\ h) \tag{13.6}$$

avec

$$C(k,\ h) = | u_h^0 |_h^2 + k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{\alpha_i} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_{ih}^2. \tag{13.7}$$

Pour q et j fixés, $0 \leq q \leq N$, $1 \leq j \leq m$, nous ajoutons également les inégalités (13.5) pour

$$r = 0, \ldots, q, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad r + \frac{i}{m} \leq q + \frac{j}{m}. \tag{13.8}$$

Il en résulte

$$\left| u_h^{q+\frac{j}{m}} \right|_h^2 \leq | u_h^0 |_h^2 + k \sum_{r,i}^{*} \frac{1}{\alpha_i} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2,$$

où $\sum\limits_{r,i}^{*}$ désigne la sommation (13.8). Cette dernière inégalité donne encore

$$\left| u_h^{q+\frac{j}{m}} \right|_h^2 \leq C(k,\ h), \qquad q = 0, \ldots, N, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{13.9}$$

Le lemme résulte immédiatement de (13.6) et (13.9) si l'on montre que $C(k,\ h)$ admet une majoration de la forme

$$C(k,\ h) \leq c_1' L(u_0,\ f_1,\ \dots,\ f_m).$$

Or, d'après (10-vi) et (12.3)

$$|u_h^0|_h^2 = |q_h r_h u_0|^2 \leq c_5^2 |u_0|^2. \tag{13.10}$$

D'après (10-vi) et (12-2):

$$\left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 = \frac{1}{k^2} \left| q_h r_h \int_{(rk)}^{(r+1)k} f_i(s) ds \right|^2$$

$$\leq \frac{c_5^2}{k^2} \left| \int_{rk}^{(r+1)k} f_i(s) ds \right|^2$$

$$\leq \frac{c_5^2}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} |f_i(s)|^2 ds$$

$$k \sum_{r=0}^{N} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq c_5^2 \int_0^T |f_i(s)|^2 ds. \tag{13.11}$$

Finalement

$$C(k;\ h) \leq c_5^2 \left[|u_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} \int_0^T |f_i(t)|^2 dt \right],$$

et le lemme est démontré.

LEMME 13.2.

Dans le cas où $2\theta - 1 < 0$, s'il existe $\delta > 0$ fixé tel que

$$kS_i^2(h) \leq \frac{2\gamma_i(1-\delta)}{P_i^2(1-2\theta)}, \qquad i = 1,\ \dots,\ m \text{ [12]}, \tag{13.12}$$

alors, pour $k \leq k_0$, k_0 assez petit, nous avons

$$\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq c_2' L, \qquad r = 0,\ \dots,\ N, \qquad i = 1,\ \dots,\ m,$$

$$k \sum_{r=0}^{N} \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq c_2' L, \qquad i = 1,\ \dots,\ m,$$

---

[12] Pour la définition de P_i, γ_i, $S_i(h)$, cf. (10-iv'), (10-v') et (10-vii).

où c'_2 est une constante indépendante de k et h et où

$$L = L(u_0, f_1, \dots, f_m) = |u_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |f_i(t)|^2 \, dt.$$

Démonstration.

Le coefficient de $\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2$, dans (13.1), est à présent négatif et il faut majorer ce terme.

Nous remplaçons pour cela v_h par $u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i+1}{m}}$ dans (12.4); cela donne:

$$(13.13) \qquad \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 =$$
$$= - k a_h^{r+\frac{i}{m}} \left(w_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right) + k \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right)_h .$$

Avec (10-iv'), (10-vii) et (12.1), nous pouvons écrire

$$k \left| a_h^{r+\frac{i}{m}} \left(w_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right) \right| \leq$$
$$\leq k P_i \left[w_h^{r+\frac{i}{m}} \right]_{ih} \left[u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right]_{ih} + k c_3 \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h \leq$$
$$\leq k P_i S_i(h) \left[w_h^{r+\frac{i}{m}} \right]_{ih} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h + k c_3 \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h .$$

Pour $\eta > 0$ quelconque, nous avons

$$2k \left| a_h^{r+\frac{i}{m}} \left(w_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1+2\eta} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + (1+2\eta) k^2 P_i^2 S_i^2(h) \left[w_h^{r+\frac{i}{m}} \right]_{ih}^2 +$$
$$+ \frac{\eta}{1+2\eta} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \left(\frac{1+2\eta}{\eta} \right) k^2 c_3^2 \left\| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 ,$$

et avec (10-i):

$$(13.14) \qquad 2k \left| a_h^{r+\frac{i}{m}} \left(w_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1+\eta}{1+2\eta} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \frac{1+2\eta}{\eta} k^2 c_3^2 \left| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + \rho \left[w_h^{r+\frac{i}{m}} \right]_{ih}^2$$

où

$$(13.15) \qquad \rho = (1+2\eta) k^2 P_i^2 S_i^2(h) + \frac{1+2\eta}{\eta} k^2 c_3^2 .$$

Nous avons aussi

$$(13.16)\qquad 2k\left|\left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}-u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right)_h\right|\leq$$
$$\leq\frac{\eta}{1+2\eta}\left|u_h^{r+\frac{i}{m}}-u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right|_h^2+\frac{1+2\eta}{\eta}k^2\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2.$$

Avec (13.14) et (13.16), (13.13) devient

$$(13.17)\qquad \left|u_h^{r+\frac{i}{m}}-u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right|_h^2\leq\rho\left[w_h^{r+\frac{i}{m}}\right]_{ih}^2+$$
$$+\frac{1+2\eta}{\eta}k^2c_3^2\left|w_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2+\frac{1+2\eta}{\eta}k^2\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2.$$

Par ailleurs, en raison de (10-v′) et (12.1):

$$(13.18)\qquad 2k\,\mathcal{Re}\,a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(w_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right)\geq 2k\gamma_i\left[w_h^{r+\frac{i}{m}}\right]_{ih}^2+2kc_4\left|w_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_{ih}^2$$

et

$$(13.19)\qquad 2k\,\mathcal{Re}\left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h\leq\frac{k}{c_4}\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2+kc_4\left|w_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_{ih}^2.$$

Avec (13.17), (13.18) et (13.19), (13.1) donne

$$(13.20)\qquad \left|u_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2-\left|u_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right|_h^2+[2k\gamma_i-(1-2\theta)\rho]\left[w_h^{r+\frac{i}{m}}\right]_{ih}^2+$$
$$+k\left[c_4-\frac{1}{\eta}(1+2\eta)(1-2\theta)kc_2^3\right]\left|w_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2\leq k\left[\frac{1}{c_4}+k\frac{1+2\eta}{\eta}(1-2\theta)\right]\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2.$$

Cette inégalité est valable pour tout $\eta>0$; si l'hypothèse (13.12) est vérifiée, nous prenons $\eta=\frac{\delta}{2}$.

Nous avons alors

$$2\gamma_i-(1-2\theta)(1+\delta)kP_i^2S_i^2(h)\geq 2\gamma_i\delta^2;$$

d'où

$$2\gamma_i k-(1-2\theta)\rho\geq 2k\gamma_i\delta^2-2\frac{1+\delta}{\delta}k^2c_3^2(1-\theta),$$

et, pour $k\leq k_0$, k_0 assez petit:

$$2\gamma_i k-(1-2\theta)\rho\geq k\gamma_i\delta^2.$$

Si k_0 est suffisamment petit, nous avons aussi

$$c_4 - 2kc_3^2(1-2\theta)\frac{1+\delta}{\delta} \geq \frac{c_4}{2}$$

et (13.20) devient:

$$\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 - \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + k\gamma_i\delta^2 \left[w_h^{r+\frac{i}{m}} \right]_{ih}^2 + \\ + \frac{kc_4}{2} \left| w_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq k\left[\frac{1}{c_4} + 2k_0(1-2\theta)\frac{(1+\delta)}{\delta}\right] \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2. \tag{13.21}$$

L'inégalité (13.21) est tout à fait analogue à l'inégalité (13.4); pour démontrer le lemme il suffit à présent de reprendre la démonstration du lemme 13.1 à partir de (13.4).

14. - Théorèmes de stabilité.

Avec les fonctions u_{ih} et w_{ih}, définies par (12.7), les lemmes 13.1 et 13.2 s'interprètent comme suit:

a) Si $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, pour $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{cases} q_h u_{ih} & \text{est borné dans } L_\infty(\tilde{H}) \text{ indépendamment de } k \text{ et } h \\ p_{ih} w_{ih} & \text{est borné dans } L_2(F_i) \text{ indépendamment de } k \text{ et } h. \end{cases} \tag{14.1}$$

b) Si $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, il suffit que la condition (13.12) soit vérifiée pour que (14.1) soit encore valable.

Utilisant une terminologie usuelle, nous énoncerons ces résultats sous la forme suivante:

THÉORÈME 14.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1 *et* 2 (10-i) *à* (10-ix) ([13]).

Si $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{cases} q_h u_{ih} & \textit{est } L_\infty(\tilde{H}) \textit{ stable} \\ p_{ih} w_{ih} & \textit{est } L_2(F_i) \textit{ stable.} \end{cases} \tag{14.2}$$

([13]) Les hypothèses de consistance (10-x) à (10-xii) ne jouent aucun rôle dans ce qui précède. Elles interviendront uniquement dans le passage à la limite.

THÉORÈME 14.2.

Les hypothèses sont celles du théorème 14.1.

Si $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, (14.2) *a lieu si*

$$(14.3) \qquad \begin{cases} kS_i^2(h) \leq \dfrac{2\gamma_i(1-\delta)}{P_i^2(1-2\theta)}, & i = 1, \ldots, m \ (^{14}) \\ \delta > 0 \ \text{fixé arbitrairement petit} \end{cases}$$

et si $k \leq k_0$, k_0 *fixé assez petit.*

REMARQUE 14.1.

Les constantes γ_i et P_i ne dépendent en pratique que des coefficients de la partie principale de l'opérateur $A_i(t)$. La condition de stabilité (14.3) ne fait donc intervenir que la partie principale de $A_i(t)$.

REMARQUE 14.2.

Les théorèmes 14.1 et 14.2 redonnent, lorsque $m = 1$, des résultats de RAVIART [28].

15. - Théorème de Convergence Faible ou Théorème d'Equivalence.

Nous formulons le théorème de convergence sous une forme analogue au Théorème d'Equivalence de Lax [29] (cf. aussi AUBIN [1]).

THÉORÈME 15.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2 *et* 10, *et* u *désigne la solution du problème* 1.

Les propriétés de stabilité

$$(15.1) \qquad \begin{cases} q_h u_{ih} \ \text{est} \ L_\infty(\tilde{H}) \ \text{stable} \\ p_{ih} w_{ih} \ \text{est} \ L_2(F_i) \ \text{stable} \quad (1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait, lorsque k *et* $h \to 0$, *les propriétés de convergence suivantes:*

$$(15.2) \qquad \begin{cases} q_h u_{ih} \to u \ \text{dans} \ L_\infty(\tilde{H}) \ \text{faible} \\ p_{ih} w_{ih} \to \bar{\omega}_i u \ \text{dans} \ L_2(F_i) \ \text{faible} \\ q_h u_{ih}(t) \to u(t) \ \text{dans} \ \tilde{H} \ \text{faible}, \quad \forall\, t \in [0, T] \quad (1 \leq i \leq m). \end{cases}$$

([14]) Pour la définition de P_i, γ_i, $S_i(h)$, cf. (10-iv'), (10-v') et (10-vii).

Il est évident que (15.2) implique (15.1). Nous démontrerons la proposition réciproque dans les n° 16 et 17.

Les théorèmes 14.1, 14.2 et 15.1 donnent immédiatement les corollaires suivants:

COROLLAIRE 15.1.

Sous les hypothèses du théorème 15.1, *si* $\theta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, *les convergences* (15.2) *ont lieu lorsque* $k \to 0$ *et* h.

COROLLAIRE 15.2.

Sous les hypothèses du théorème 15.1, *si* $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, *les convergences* (15.2) *ont lieu si* k *et* h *tendent vers* 0 *en vérifiant*

$$(15.3)\qquad \begin{cases} kS_i^2(h) \leq \dfrac{2\gamma_i(1-\delta)}{P_i^2(1-2\theta)}, & i = 1, \dots, m \\ \delta > 0 & \textit{fixé arbitrairement petit.} \end{cases}$$

16. - Lemmes.

Nous introduisons l'opérateur de moyenne O_k qui opère dans tout espace de fonctions sommables sur $[0, T]$:

$$(16.1)\qquad O_h\varphi = \varphi_k,$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k} \varphi(s)ds, \qquad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[.$$

LEMME 16.1.

Soit X *un espace de Banach et* $p \in [1, \infty[$. *Por tout* $v \in L_p(X)$,

$$O_k g \to g \quad \textit{dans} \quad L_p(X) \quad \textit{fort, lorsque} \quad k \to 0.$$

Démonstration.

Avec l'inégalité de Hölder, on vérifie sans peine que

$$(16.2)\qquad \| O_k g \|_{L_p(X)} \leq \| g \|_{L_p(X)}.$$

Il suffit alors de prouver le lemme pour des fonctions g continues de $[0, T]$ dans X, et cela est immédiat.

Nous posons

$$(16.3)\qquad \tilde{a}_{ik}(t;\, u, v) = O_k\tilde{a}_i(t;\, u, v), \qquad \forall\, u, v \in F_i.$$

Soit $\tilde{A}_i(t)$ [resp. $\tilde{A}_{ik}(t)$] l'opérateur linéaire continu de F_i dans F'_i défini par

$$< \tilde{A}_i(t)u,\ v > = \tilde{a}_i(t;\ u,\ v), \qquad \forall\ u,\ v \in F_i$$

$$[\text{resp.} \quad < \tilde{A}_{ik}(t)u,\ v > = \tilde{a}_{ik}(t;\ u,\ v), \qquad \forall\ u,\ v \in F_i].$$

On vérifie avec (10–iii) et (10–iv) que si $\varphi(\cdot) \in L_2(F_i)$ alors $\tilde{A}_i(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_2(F'_i)$ [resp. $\tilde{A}_{ik}(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_2(F'_i)$] (cf. [14]).

LEMME 16.2.

Lorsque $k \to 0$, pour toute fonction $\varphi \in L_2(F_i)$,

$$\tilde{A}_{ik}\varphi \to \tilde{A}_i\varphi \quad \textit{dans} \quad L_2(F'_i) \quad \textit{fort}$$

Démonstration.

Il est équivalent d'après le lemme 16.1 de montrer que

$$\tilde{A}_{ik}\varphi - O_k(\tilde{A}_i\varphi) \to 0 \quad \text{dans} \quad L_2(F'_i) \quad \text{fort.} \tag{16.4}$$

Il résulte immédiatement de (10–iv) que

$$\| \tilde{A}_{ik}\varphi \|_{L_2(F'_i)} \leq M_i \| \varphi \|_{L_2(F_i)} \tag{16.5}$$

et il suffit alors de démontrer le lemme ou (16–4), pour des fonctions φ continues de $[0,\ T]$ dans F_i.

Pour une telle fonction φ, si $t \in [rk,\ (r+1)k[$:

$$< A_{ik}(t)\varphi(t) - (O_k\tilde{A}_i\varphi)(t),\ v > = \frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{a}_i(s;\ \varphi(t) - \varphi(s),\ v)ds, \qquad \forall\ v \in F_i$$

$$| < \tilde{A}_{ik}(t)\varphi(t) - (O_k\tilde{A}_i\varphi)(t),\ v > | \leq M_i\eta(k) \| v \|_{F_i}, \qquad \forall\ v \in F_i,$$

où $\eta(\cdot)$ est le module de continuité de φ.

Nous en déduisons que

$$\| \tilde{A}_{ik}(t)\varphi(t) - (O_k\tilde{A}_i\varphi)(t) \|_{F'_i} \leq M_i\eta(k), \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]$$

$$\| \tilde{A}_{ik}\varphi - O_k(\tilde{A}_i\varphi) \|_{L_2(F'_i)} \leq T^{1/2}M_i\eta(k) \tag{16.6}$$

et le lemme en résulte puisque $\eta(k) \to 0$ avec k.

LEMME 16.3.

Soient $\varphi,\ \psi \in L_2(F_i)$ et $\varphi_n,\ \psi_n$, deux suites de $L_2(F_i)$, telles que lorsque $n \to \infty$

$$\varphi_n \to \varphi \quad \textit{dans} \quad L_2(F_i) \quad \textit{fort}$$

$$\psi_n \to \psi \quad \textit{dans} \quad L_2(F_i) \quad \textit{faible.}$$

Alors, lorsque $k \to 0$ *et* $n \to \infty$

$$\int_0^T \tilde{a}_{ik}(t;\ \varphi_n(t),\ \psi_n(t))dt \to \int_0^T \tilde{a}_i(t;\ \varphi(t),\ \psi(t))dt \tag{16.7}$$

$$\int_0^T \tilde{a}_{ik}(t;\ \psi_n(t),\ \varphi_n(t))\,dt \to \int_0^T \tilde{a}_i(t;\ \psi(t),\ \varphi(t))dt. \tag{16.8}$$

Démonstration.

Nous pouvons écrire

$$\int_0^T \tilde{a}_i(t;\ \varphi_n(t),\ \psi_n(t))dt = \int_0^T < \tilde{A}_{ik}(t)\varphi_n(t),\ \psi_n(t) > dt$$

$$\int_0^T \tilde{a}_i(t;\ \varphi(t),\ \psi(t))dt = \int_0^T < \tilde{A}_i(t)\varphi(t),\ \psi(t) > dt.$$

Pour démontrer (16.7), il suffit de vérifier que $\tilde{A}_{ik}\varphi_n \to \tilde{A}_i\varphi$ dans $L_2(F_i')$ fort. En raison du lemme 16.2, il suffit pour cela de vérifier que

$$\tilde{A}_{ik}\varphi_n - \tilde{A}_{ik}\varphi \to 0 \quad \text{dans} \quad L_2(F_i') \quad \text{fort,}$$

et ce dernier point résulte immédiatement de (16.5).

Pour établir (16.8), il suffit de reprendre les démonstrations précédentes, en remplaçant la forme $\tilde{a}_i(t;\ u,\ v)$ par la forme adjointe

$$\tilde{a}_i^*(t.\ u,\ v) = \overline{\tilde{a}_i(t;\ u,\ v)}.$$

LEMME 16.4.

Si $g \in L_p(H)$, $1 \leq p \leq \infty$, *alors*

$$q_h r_h g \to g \quad \textit{dans} \quad L_p(\tilde{H}) \quad \textit{fort, lorsque} \quad h \to 0, \tag{16.9}$$

$$O_k q_h r_h g \to g \quad \textit{dans} \quad L_p(\tilde{H}) \quad \textit{fort, lorsque} \quad k \ \textit{et} \ h \to 0. \tag{16.10}$$

Démonstration.

En raison de (10-vi),

$$|\,q_h r_h g(t)\,| \leq c_5\,|\,g(t)\,|, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T],$$

et, en raison de (10.1), $q_h r_h g(t) \to g(t)$ dans $\tilde{H}$ fort, pour presque tout t; (16.9) résulte alors du théorème de Lebesgue.

Pour établir (16.10), il suffit, avec le lemme 16.1, de vérifier que

$$O_k q_h r_h g - O_k g \to 0 \quad \text{dans} \quad L_p(\tilde{H}) \quad \text{fort},$$

et cela est une conséquence de (16.2) et (16.9).

17. - Démonstration du théorème 15.1.

Comme nous l'avons précédemment remarqué, nous devons montrer que (15.1) implique (15.2).

17.1. - *Première partie de la démonstration.*

Si la condition (15.1) est réalisée, on peut trouver des fonctions u_i, w_i, et une sous-suite k', $h' \to 0$, telles que, pour $i = 1, \dots, m$,

$$(17.1) \qquad \begin{cases} q_{h'} u_{ih'} \to u_i & \text{dans} \quad L_\infty(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ p_{ih'} w_{ih'} \to w_i & \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

LEMME 17.1.

$$(17.2) \qquad u_1(t) = \dots = u_m(t) \; (= w(t)) \quad \text{p.p.}$$

$$(17.3) \qquad w \in L_\infty(H) \cap L_2(V)$$

$$(17.4) \qquad w_i(t) = \bar{\omega}_i w(t) \quad \text{p.p.,} \qquad i = 1, \dots, m.$$

Démonstration.

Nous posons

$$(17.5) \qquad f_{ih} = O_k q_h r_h f_i, \qquad i = 1, \dots, m,$$

c'est-à-dire

$$f_{ih}(t) = q_h f_h^{r + \frac{i}{m}} \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[, \qquad r = 0, \dots, N.$$

Tenant compte des notations des n° 12 et 16, nous pouvons interpréter (12.4) (avec $i = 2$) de la manière suivante:

$$(q_h u_{2h}(t) - q_h u_{1h}(t), q_h v_h) + k\tilde{a}_{2h}(t; p_{2h} w_{2h}(t), p_{2h} v_h) =$$
$$= k(f_{2h}(t), q_h v_h), \qquad \forall \, v_h \in V_h, \qquad \forall \, t \in [0, T].$$

Soient $v \in \mathcal{V}$ et $\varphi \in \mathcal{C}$, quelconque ($\mathcal{C} =$ espaces des fonctions scalaires continues sur $[0, T]$). Nous écrivons l'égalité précédente avec $v_h = r_h v$, nous multiplions par $\bar{\varphi}(t)$ et intégrons de 0 à T. Il vient:

$$\int_0^T (q_h u_{2h}(t) - q_h u_{1h}(t),\ \varphi(t) q_h r_h v) dt +$$

$$+ k \int_0^T \tilde{a}_{2k}(t;\ p_{2h} w_{2h}(t),\ \varphi(t) p_{2h} r_h v) dt = k \int_0^T (f_{2h}(t),\ \varphi(t) q_h r_h v) dt.$$

D'où, avec (10-iv):

$$\left| \int_0^T (q_h u_{2h}(t) - q_h u_{1h}(t),\ \varphi(t) q_h r_h v) dt \right| \leq \tag{17.6}$$

$$\leq k \,|\, \varphi \,|_{L_2(C)} \{ M_2 \| p_{2h} w_{2h} \|_{L_2(F_2)} \| p_{2h} r_h v \| + |\, f_{2h} \,|_{L_2(\tilde{H})} \,|\, q_h r_h v \,| \}.$$

Les différents termes entre les accolades restent bornés lorsque k et $h \to 0$:

$\| p_{2h} w_{2h} \|_{L_2(F_2)}$ en raison de (15.1), $\| p_{2h} r_h v \|_{F_2}$ en raison de (10-x),

$|\, f_{2h} \,|_{L_2(\tilde{H})} = O_k q_h r_h f_2 \,|_{L_2(\tilde{H})}$ en raison du lemme 16.4,

$|\, q_h r_h v \,|$ en raison de (10-vi).

Alors, lorsque k et $h \to 0$, le second membre de (17.6) tend vers 0 et donc également le premier.

D'après le lemme 16.4, $\varphi q_{h'} r_{h'} v = q_{h'} r_{h'} (\varphi v) \to \varphi v$ dans $L_1(\tilde{H})$ fort et, avec (17,1):

$$\int_0^T (q_{h'} u_{2h'}(t) - q_{h'} u_{1h'}(t),\ \varphi(t) q_{h'} r_{h'} v) dt \to \int_0^T (u_2(t) - u_1(t),\ \varphi(t) v) dt.$$

Donc

$$\int_0^T (u_2(t) - u_1(t),\ \varphi(t) v) dt = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}, \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}. \tag{17.7}$$

Puisque $\mathcal{V}$ est dense dans H, (17.7) est encore valable par continuité, pour tout $v \in H$, D'après (10-xi), $u_2 - u_1 \in L_2(H)$, et $\mathcal{C} \otimes H$ étant dense dans $L_2(H)$, il en résulte que $u_2 - u_1 = 0$.

Nous montrerions de manière identique que $u_2 = u_3, \ldots, u_{m-1} = u_m$; d'où (17.3). Nous posons $u_i = w$.

Avec (12 6) et (12.7) on a

$$(17.8)\qquad \begin{cases} w_{ih}(t) = \theta u_{1h}(t) + (1-\theta)u_{mh}(t-k) \\ w_{ih}(t) = \theta u_{ih}(t) + (1-\theta)u_{(i-1)h}(t), \qquad i = 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Il est alors clair que

$$q_{h'}w_{ih'} \to w \quad \text{dans} \quad L_\infty(H) \quad \text{faible}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

En raison de (17.1) et de l'hypothèse (10-xii):

$$w = \pi_i w_i \in L_2(V), \qquad w_i(t) = \bar\omega_i w(t) \quad \text{p.p.}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

et cela termine la démonstration du lemme.

17.2. - *Dernière partie de la démonstration*: $w(t) = u(t)$ *p.p.*

Soit t fixé, $t \in [qk, (q+1)k[$; nous sommons les égalités (12.4) pour $r = 0, \ldots, q$, $i = 1, \ldots, m$. Nous obtenons:

$$(u_h^{q+1} - u_h^0, v_h)_h + k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{q} a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(w_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right) =$$
$$= k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{q} \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right)_h.$$

Cette égalité peut être interprétée ainsi:

$$(17.9)\qquad (q_h u_{mh}(t), q_h v_h) = (q_h r_h u_0, q_h v_h) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} (f_{ih}(s), q_h v_h) ds - \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} \tilde a_{ik}(s; p_{ik} w_{ih}(s), p_{ih} v_h) ds.$$

Nous écrivons (17.9) avec $v_h = r_h v$, $v \in \mathcal{V}$ quelconque, et, t et v étant fixés, nous allons passer à la limite dans cette égalité avec la suite k', h'.

D'après (10.1), $q_h v_h = q_h r_h v \to v$ dans $\tilde H$ fort, et $q_h r_h u_0 \to u_0$ dans $\tilde H$ fort.

Nous pouvons écrire

$$\int_0^{(q+1)k} \tilde a_{ik}(s; p_{ih} w_{ih}(s), p_{ih} v_h) ds = \int_0^T \tilde a_{ik}(s; p_{ih} w_{ih}(s), \psi_{(q+1)k}(s) p_{ih} r_h v) ds,$$

ψ_ξ désignant, pour $\xi > 0$, la fonction caractéristique de $[0, \xi]$. D'après (10-x), $p_{ih} r_h v \to \bar\omega_i v$ dans F_i fort et il est alors facile de vérifier que

$$\psi_{(q+1)k}\, p_{ih} r_h v \to \psi_t \bar\omega_i v \quad \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{fort}.$$

Moyennant (17.1) et le lemme 16.3, nous en déduisons que:

$$\int_0^{(q+1)k'} \tilde{a}_{ik'}(s\,;\; p_{ih'}w_{ih'}(s),\; p_{ih'}r_{h'}v)ds \to \int_0^t \tilde{a}_i(s\,;\; w_i(s),\; \tilde{\omega}_i v)ds.$$

D'où avec (17.5) et le lemme 17.1:

$$\sum_{i=1}^m \int_0^{(q+1)k'} \tilde{a}_{ik'}(s\,;\; p_{ih'}w_{ih'}(s),\; p_{ih'}r_{h'}v)ds \to \int_0^t a(s\,;\; w(s),\; v)ds.$$

D'après le lemme 16.4, $f_{ih} \to f_i$ dans $L_2(\tilde{H})$ fort, et le passage à la limite est identique pour les intégrales

$$\int_0^{(q+1)k} (f_{ih}(s),\; q_h r_h v)ds.$$

Nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^m \int_0^{(q+1)k'} (f_{ih'}(s),\; q_{h'}r_{h'}v)ds \to \sum_{i=1}^m \int_0^t (f_i(s),\; v)ds = \int_0^t (f(s),\; v)ds.$$

Dans ces conditions, le second membre de (17.9), et donc aussi le premier, tendent vers une limite $g(t)$:

$$g(t) = (u_0,\; v) + \int_0^t (f(s),\; v) - \int^t a(s\,;\; w(s),\; v)ds. \tag{17.10}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,\, T]$, $(q_{h'}u_{mh'}(t),\; q_{h'}r_{h'}v)$ tend vers $g(t)$. D'après (10-vi) et (15.1), la fonction $t \mapsto (q_{h'}u_{mh'}(t),\; q_{h'}r_{h'}v)$ est essentiellement bornée sur $[0,\, T]$, indépendamment de k' et h'. Soit alors φ une fonction scalaire continue sur $[0,\, T]$; d'après le théorème de Lebesgue et les résultats précédents, on a:

$$\int_0^T (q_h,\; u_{mh'}(t),\; q_{h'}r_{h'}v)\varphi(t)dt \to \int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

D'après le lemme 16.4, $\varphi q_{h'}r_{h'}v \to \varphi v$ dans $L_1(\tilde{H})$ fort et, avec (17.1), nous avons aussi

$$\int_0^T (q_{h'}u_{mh'}(t),\; q_{h'}r_{h'}v)\varphi(t)dt \to \int_0^T (w(t),\; v)\varphi(t)dt.$$

Donc

$$\int_0^T (w(t),\ v)\varphi(t)dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)dt, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C},$$

ce qui implique $g(t) = (w(t),\ v)$ p.p.

L'égalité (17.10) devient à présent

$$(17.11) \qquad (w(t),\ v) + \int_0^t a(s;\ w(s),\ v)ds = (u_0,\ v) + \int_0^t (f(s),\ v)ds.$$

$$\forall\ v \in \mathcal{V}, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].$$

Puisque $\mathcal{V}$ est dense dans V, (17.11) a lieu aussi pour tout $v \in V$ et nous en déduisons que

$$w(t) + \int_0^t A(s)w(s)ds = u_0 + \int_0^t f(s)ds, \quad \text{p.p.}$$

Cela signifie que la fonction w est p.p. égale à une fonction w_* continue dans V', vérifiant $w_*(0) = u_0$ et

$$w'_*(t) + A(t)w_*(t) = f(t).$$

en sorte que $w_* = u$.

Les limites étant indépendantes de la sous-suite k', h', les convergences (17.1) ont lieu pour la suite k, h, toute entière.

Il ne reste plus à prèsent qu'à démontrer le

LEMME 17.2.

$$(17.12) \qquad q_h u_{ih}(t) \to u(t) \quad \textit{dans } \tilde{H} \textit{ faible, pour tout } t \in [0,\ T], \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Démonstration.

Dans ce qui précède, nous avons montré que

$$(q_{h'} u_{mh'}(t),\ q_{h'} r_{h'} v) \to (u(t),\ v), \qquad \forall\ t \in [0,\ T], \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}.$$

La limite étant indépendante de la sous-suite k', h', cette convergence a lieu pour la suite k, h, toute entière:

$$(17.13) \qquad (q_h u_{mh}(t),\ q_h r_h v) \to (u(t),\ v), \qquad \forall\ t \in [0,\ T], \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}.$$

Soit $t \in [0,\ T]$ fixé; $q_h u_{mh}(t)$ est une suite bornée dans $\tilde{H}$ et il existe donc

$\varphi \in \tilde{H}$ et une sous-suite k'', $h'' \to 0$, tels que

$$q_{h''} u_{mh''}(t) \to \varphi \quad \text{dans } \tilde{H} \text{ faible.}$$

Alors si $v \in \mathcal{V}$, avec (10.1),

$$(q_{h''} u_{mh''}(t),\ q_{h''} r_{h''} v) \to (\varphi,\ v),$$

et par comparaison

$$(u(t) - \varphi,\ v) = 0, \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}. \tag{17.14}$$

D'après (10.3), $\varphi \in H$; puisque $u(t) - \varphi \in H$ et que $\mathcal{V}$ est dense dans H, (17.14) implique que $\varphi = u(t)$, et c'est la suite $q_h u_{mh}(t)$ elle même qui converge vers $u(t)$ dans $\tilde{H}$ faible.

Démonstration identique pour $i = 1, \ldots, m - 1$.

18. - Un théorème de convergence forte.

THÉORÈME 18.1.

Les hypothèses sont celles du théorème 15.1.

a) *Si* $\theta \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$, *alors lorsque* k *et* $h \to 0$,

$$\begin{cases} q_h u_{ih}(t) \to u(t) & \text{dans } \tilde{H} \text{ fort, pour tout } t \in [0,\ T] \\ p_{ih} w_{ih} \to \bar{\omega}_i u & \text{dans } L_2(F_i) \text{ fort;} \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{18.1}$$

b) *Si* $\theta \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right[$, *les convergences* (18.1) *ont lieu si* k *et* h *tendent vers* 0 *de manière que*

$$k S_i^2(h) \to 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{18.2}$$

REMARQUE 18.1.

Sous les hypothèses du théorème 18.1, les corollaires 15.1 et 15.2 sont applicables. Outre (18.1), nous avons donc

$$q_h u_{ih} \to u \quad \text{dans } L_\infty(\tilde{H}) \text{ faible.} \tag{18.3}$$

Avec le théorème de Lebesgue, (18.1) et (18.3), nous avons aussi

$$q_h u_{ih} \to u \quad \text{dans } L_q(\tilde{H}) \text{ fort,} \qquad \forall\, q \in [1,\ \infty[\qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{18.4}$$

REMARQUE 18.2.

Pour $m = 1$, les résultats du n° 15 redonnent des résultats de RAVIART

[28]; le théorème 18.1 (de convergence forte) complète les résultats de [28] et ce résultat a été trouvé indépendamment, avec une démonstration équivalente, par LIEUTAUD [12].

Démonstration du théorème 18.1.

Soient t et i fixés, $t \in [0, T]$, $1 \leq i \leq m$. Comme au nº 7 (section 7.3), nous allons montrer qu'une expression $X_{ih}(t)$ convenable tend vers 0, lorsque k et $h \to 0$. Soit

$$(18.5)\qquad X_{ih}(t) = |\, q_h u_{ih}(t) - u(t)\,|^2 + (2\theta - 1) \sum_{q,j}{}^{*} \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + \\ + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} \tilde{a}_{jk}(s;\, p_{jh} w_{jh}(s) - \tilde{\omega}_j u(s),\ p_{jh} w_{jh}(s) - \tilde{\omega}_j u(s))\,ds$$

où $\sum_{q,j}^{*}$ désigne la sommation:

$$(18.6)\qquad \begin{cases} q = 0, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, m, \quad q + \dfrac{j}{m} \leq r + \dfrac{i}{m}, \\ r \ \text{ plus grand entier } \ \leq t/k \end{cases}$$

et où

$$(18.7)\qquad t_{ij} = (r+1)k \quad \text{pour} \quad j \leq i \qquad t_{ij} = rk \quad \text{pour} \quad j > i.$$

Nous écrivons

$$X_{ih}(t) = X_{ih}^1(t) + X_{ih}^2(t) + X_{ih}^3(t)$$

avec,

$$X_{ih}^1(t) = |\, u(t)\,|^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} \tilde{a}_{jk}(s;\, \tilde{\omega}_j u(s),\ \tilde{\omega}_j u(s))\,ds$$

$$X_{ih}^2(t) = -2\,\mathcal{R}e\,(u(t),\ q_h u_{ih}(t)) - \\ - 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} [\tilde{a}_{jk}(s;\, p_{jh} w_{jh}(s),\ \tilde{\omega}_j u(s)) + \tilde{a}_{jk}(s;\, \tilde{\omega}_j u(s),\ p_{jh} w_{jh}(s))]\,ds$$

$$X_{ih}^3(t) = |\, q_h u_{ih}(t)\,|^2 + (2\theta - 1) \sum_{q,j}{}^{*} \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + \\ + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} \tilde{a}_{jk}(s;\, p_{jh} w_{jh}(s),\ p_{jh} w_{jh}(s))\,ds.$$

Passons à la limite. Pour $X^1_{ih}(t)$, nous écrivons

$$\int_0^{t_{ij}} \tilde{a}_{jk}(s;\ \bar{\omega}_j u(s),\ \bar{\omega}_j u(s))ds = \int_0^T \tilde{a}_{jk}(s;\ \psi_{t_{ij}}(s)\bar{\omega}_j u(s),\ \bar{\omega}_j u(s))ds,$$

$\psi_\xi(\cdot)$ désignant toujours la fonction caractéristique de $[0, \xi]$; $\psi_{t_{ij}}(\cdot)\bar{\omega}_j u(\cdot) \to \psi_t(\cdot)\bar{\omega}_j u(\cdot)$ dans $L_2(F_j)$ fort et avec le lemme 16.3 nous avons

$$\int_0^{t_{ij}} \tilde{a}_{jk}(s;\ \bar{\omega}_j u(s),\ \bar{\omega}_j u(s))ds \to \int_0^t \tilde{a}_j(s;\ \bar{\omega}_j u(s),\ \bar{\omega}_j u(s))ds.$$

D'où

$$\lim_{k,\, h\to 0} X^1_{ih}(t) = X^1(t) = |\, u(t)\,|^2 + 2\, \mathcal{R}e \int_0^t a(s;\ u(s),\ u(s))ds.$$

Pour $X^2_{ih}(t)$, le passage à la limite est analogue; il repose sur (15.2) et le lemme 16.3. Nous trouvons

$$\lim_{k,\, h\to 0} X^2_{ih}(t) = -\, 2X^1(t).$$

Pour passer à la limite dans $X^3_{ih}(t)$, nous commençons par transformer cette expression en utilisant les égalités d'énergie pour les fonctions approchées.

D'après (13.1), pour $q = 0, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, m$,

$$\text{(18.8)} \qquad \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} \right|_h^2 - \left| u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + (2\theta - 1) \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + $$
$$+ 2k\, \mathcal{R}e\, a_h^{q+\frac{j}{m}}\Big(w_h^{q+\frac{j}{m}},\ w_h^{q+\frac{j}{m}}\Big) = 2k\, \mathcal{R}e\Big(f_h^{q+\frac{j}{m}},\ w_h^{q+\frac{j}{m}}\Big)_h.$$

Effectuant la sommation (18.6) pour ces égalités, nous obtenons:

$$\text{(18.9)} \qquad \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + (2\theta - 1) \sum_{q,j}{}^{*} \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + $$
$$+ 2k\, \mathcal{R}e \sum_{q,j}{}^{*} a_h^{q+\frac{j}{m}}\Big(w_h^{q+\frac{j}{m}},\ w_h^{q+\frac{j}{m}}\Big) = 2k\, \mathcal{R}e \sum_{q,j}{}^{*}\Big(f_h^{q+\frac{j}{m}},\ w_h^{q+\frac{j}{m}}\Big)_h + |\, u_h^0\,|_h^2.$$

Cette égalité (18.9) est identique à

$$\text{(18.10)} \qquad X^3_{ih}(t) = |\, q_h r_h u_0\,|^2 + 2\, \mathcal{R}e \sum_{j=1}^m \int_0^{t_{ij}} (f_{jh}(s),\ q_h w_{jh}(s))ds.$$

Alors

$$\lim_{k,\, h\to 0} X_{ih}^{3}(t) = X^{3}(t) = |\, u_0 \,|^2 + 2\, \Re e \int_0^t (f(s),\ u(s))ds.$$

Finalement

$$\lim_{h,\, h\to 0} X_{ih}(t) = X(t) = |\, u_0 \,|^2 + 2\, \Re e \int_0^t (f(s),\ u(s))ds\, -$$

$$- \,|\, u(t) \,|^2 - 2\, \Re e \int_0^t a(s:\ u(s),\ u(s))ds,$$

et $X(t) = 0$ en raison de (1.5).

Il faut à présent distinguer deux cas selon le signe de $2\theta - 1$.

Cas où $(2\theta - 1) \geq 0$.

Alors

$$0 \leq |\, u(t) - q_h u_{ih}(t) \,|^2 \leq X_{ih}(t) \to 0, \tag{18.11}$$

et ainsi $q_h u_{ih}(t) \to u(t)$ dans $\tilde{H}$ fort.

On considère également $X_{mh}(T)$; avec (10–v):

$$0 \leq 2 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^T \| \, p_{jh} w_{jh}(s) - \tilde{\omega}_j u(s) \, \|_{F_j}^2 ds \leq X_{mh}(T) \to 0, \tag{18.12}$$

et (18.1) est démontré dans ce cas.

Cas où $(2\theta - 1) < 0$.

Les inégalités (18.11) et (18.12) ne sont plus valables car $X_{ih}(t)$ contient un terme négatif:

$$(2\theta - 1) \sum_{q,\, j}{}^{*} \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2.$$

Mais, pour parvenir aux mêmes conclusions, il suffirait de savoir que ce terme tend vers 0. Pour que ce terme tende vers 0, il suffit que

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{q=0}^{N} \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 \to 0. \tag{18.13}$$

Les inégalités (13.17) sont valables. Lorsque (18.2) est réalisée, (18.13) découle immédiatement de (13.17).

Cela achève la démonstration du thèoréme 18.1.

19. - **Exemples** (suite).

19.1. - EXEMPLE 1.

Problèmes approchés ($\theta \neq 0$).

Pour r et i fixés, $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ est solution de (12.4) ou (12.5):

$$\left(I + k\theta A_h^{r+\frac{i}{m}}\right)u_h^{r+\frac{i}{m}} = u_h^{r+\frac{i-1}{m}} + kf_h^{r+\frac{i}{m}} - k(1-\theta)A_h^{r+\frac{i}{m}}u_h^{r+\frac{i-1}{m}}, \tag{19.1}$$

où $A_h^{r+\frac{i}{m}} \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ est défini par

$$\left(A_h^{r+\frac{i}{m}}u_h, v_h\right)_h = \frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k}\int_\Omega a_i(x, t)\delta_i u_h(x)\overline{\delta_i v_h(x)}dxdt + \tag{19.2}$$

$$+ \frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k}\int_{R^n} d_i(x, t)u_h(x)\overline{v_h(x)}dxdt.$$

Posons

$$u_h^{r+\frac{i}{m}} = \sum_{M\in\Omega_h^1} \xi_M w_{hM};$$

alors (19.1) est un système de $N(h)$ équations pour les $N(h)$ inconnues ξ_M.

L'équation obtenue en multipliant scalairement (19.1) par w_{hP} ne fait intervenir que ξ_P, $\xi_{P-\vec{h}_i}$ (si $\xi_{P-\vec{h}_i} \in \Omega_h^1$) et $\xi_{P+\vec{h}_j}$ (si $\xi_{P+h_j} \in \Omega_h^1$). Le système linéaire (19.1) se décompose donc en plusieurs systèmes indépendants, chaque système correspondant à tous les $P \in \Omega_h^1$ et situés sur une même parallèle à l'axe des x_i.

Condition de stabilité

Pour les schémas explicites, $\theta = 0$, la condition (14.3) s'écrit

$$\frac{k}{h_i^2} \leq \frac{\gamma_i(1-\delta)}{2P_i^2}, \qquad \delta > 0 \text{ fixé arbitrairement petit,} \tag{19.3}$$

γ_i et P_i définis par (11.2).

Nous savons [28] que pour l'approximation de cet exemple par le schéma explicite classique à deux niveaux en t, la condition de stabilité s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{h_i^2} \leq \frac{\gamma(1-\delta)}{2P^2},$$

$$\gamma = \min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}, \qquad P = \max\{P_1, \ldots, P_n\}.$$

Cette condition est plus restrictive que (19.3): *l'utilisation de la méthode des pas fractionnaires permet donc d'améliorer la condition de stabilité des schémas explicites.*

Résultats de Convergence.

Explicitons les résultats de convergence dans le cas, par exemple, où le théorème 18.1 est applicable :

Lorsque k et $h \to 0$, pour $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{cases} \delta_i u_{ih}|_{Q_T} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort} \\ u_{ih} \to \tilde{u} \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(R^n)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_{R^n} |u_{ih}(x, t) - \tilde{u}(x, t)|^2 \, dx \to 0, \qquad \forall\, t \in [0, T]. \end{cases}$$

19.2. - EXEMPLE 2.

Problèmes approchés ($\theta \neq 0$).

Pour r et i fixés, $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ est solution de (19.1). A chaque indice i, $1 \leq i \leq m$, correspond un multi-entier j, $|j| = \mu$ et $A_h^{r+\frac{i}{m}}$ est défini par:

$$\left(A_h^{r+\frac{i}{m}} u_h,\ v_h\right)_h =$$
$$\frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} \int_{\Omega} [a_j(x,\ t)\delta^j u_h(x)\delta^j \overline{v_h(x)} + c_j(x,\ t)\, u_h(x)\, \overline{v_h(y)}] dx dt.$$

Condition de stabilité.

Pour un schéma, θ, elle s'écrit

$$\frac{k}{h^{j_1}, \ldots, h_n^{j_n}} \leq \frac{2\gamma_j(1-\delta)}{\sigma(j)P_j}, \qquad \forall\, j,\ |j| = \mu, \tag{19.4}$$

γ_j et P_j définis par (11.3).

Cette condition est également moins restrictive que la condition de stabilité du schéma explicite classique.

Résultats de Convergence.

Le théorème 18.1, lorsqu'il est applicable, donne: Lorsque k et $h \to 0$, pour tout j, $|j| = \mu$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta^j u_{jh}|_{Q_T} \to D^j u & \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort} \\ u_{jh}|_{Q_T} \to u & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \int\limits_\Omega |u_{jh}(x,\ t) - u(x,\ t)|^2\, dx \to 0, & \forall\, t \in [0,\ T]. \end{array}\right.$$

Avec l'inégalité de Poincaré et son analogue discret (cf. CÉA [6]), nous avons aussi

$$\delta^q u_{jh}|_{Q_T} \to D^q u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort}, \qquad \forall\, q,\ q \leq j.$$

19.3. - EXEMPLE 3.

Problèmes approchés $(\theta \neq 0)$.

$i = 1, \ldots, n$.

Pour r et i fixés,

$$\vec{u}_h^{\,r+\frac{i}{m}} = \sum_{M \in \overset{\circ}{\Omega}{}_h^1} \vec{\xi}_M w_{hM}, \qquad \vec{\xi}_M = (\xi_M,\ \eta_M) \in \boldsymbol{C}^2$$

est solution de

$$(19.5) \qquad (I + k\theta A_{ih})\vec{u}_h^{\,r+\frac{i}{m}} = \vec{u}_h^{\,r+\frac{i-1}{m}} + \vec{kf}_h^{\,r+\frac{i}{m}} - k(1-\theta)A_{ih}\vec{u}_h^{\,r+\frac{i-1}{m}}$$

où $A_{ih} \in \mathcal{L}(V_h,\ V_h)$ est défini par

$$(A_{ih}\vec{u}_h,\ \vec{v}_h)_h = \int\limits_\Omega \left[\delta_i \vec{u}_h(x)\delta_i \vec{v}_h(x) + \frac{1}{n+1}\,\vec{u}_h(x)\vec{v}_h(x)\right] dx.$$

Dans (19.5) les équations relatives à ξ_M et à η_M sont découplées. Le système relatif aux ξ_M (resp. aux η_M) se découple en outre en systèmes partiels regroupant les $M \in \Omega_h^1$ situés sur une même parallèle à l'axe des x_i.

$i = n + 1$.

Soit

$$\vec{u}_h^{\,r+1} = \sum_{M \in \overset{\circ}{\Omega}{}_h^1} \vec{\xi}_M w_{hM}, \qquad \vec{\xi}_M = (\xi_M,\ \eta_M);$$

pour chaque $M \in \mathring{\Omega}_h^1$, ξ_M et η_M sont définis par les équations suivantes (de résolution immédiate):

$$\left(1 + \frac{\theta k}{n+1}\right)\xi_M - \theta k \eta_M = f_M \quad \text{(connu)}$$

$$\left(1 + \frac{\theta k}{n+1}\right)\eta_M + \theta k \xi_M = g_M \quad \text{(connu)}.$$

Condition de stabilité.

Pour le schéma explicite, $\theta = 0$, elle s'écrit:

$$\frac{k}{h_i^2} \leq \frac{1}{2}(1 - \delta), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \delta > 0. \tag{19.6}$$

Résultats de convergence.

Lorsque le théorème 18.1 est applicable, nous avons:

Lorsque k et $h \to 0$,

pour $i = 1, \ldots, n+1$,

$$\begin{cases} \vec{u}_{ih} \,|\, _{Q_T} \to \vec{u} \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)^2) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega |\vec{u}_{ih}(x, t) - \vec{u}(x, t)|^2 \, dx \to 0, \qquad \forall\, t \in [0, T]. \end{cases}$$

pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\delta_i u_{ih} \,|\, _{Q_T} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T)^2 \quad \text{fort.}$$

20. - Approximation par des équations différentielles.

Les notations sont celles des numéros précédents (en particulier n° 1, 2, 10 et 12).

Nous allons indiquer une méthode de semi-discrétisation (discrétisation en les seules variables d'espace) permettant de ramener l'approximation du problème 1 à la résolution de systèmes différentiels

Les fonction u_{ih} $(i = 1, \ldots, m)$ de $[0, T] \to V_h$ sont définies comme suit: pour chaque r et chaque i, la restriction de u_{ih} à l'intervalle $[rk, (r+1)k[$ (restriction encore notée u_{ih}) est définie comme la solution du problème suivant (comparer à (2.1)):

$$(20.1)\quad \begin{cases} u_{ih} \in L_2(rk,\ (r+1)k;\ V_h) \\ \dfrac{d}{dt}(u_{ih}(t),\ v_h)_h + a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_{ih}(t),\ v_h) = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h\right)_h, \qquad \forall\, v_h \in V_h \\ u_{ih}(rk+0) \ \text{donné dans}\ V_h. \end{cases}$$

Définissant $A_h^{r+\frac{i}{m}} \in \mathcal{L}(V_h,\ V_h)$ comme à la remarque 12.1, nous pouvons écrire l'équation différentielle (20.1) sous la forme suivante

$$(20.2)\qquad \frac{d}{dt}u_{ih}(t) + A_h^{r+\frac{i}{m}} u_{ih}(t) = f_h^{r+\frac{i}{m}}.$$

Par application du théorème 1.1 nous voyons que le problème (20.1) possède une solution unique, u_{ih} étant continue de $[rk,\ (r+1)k] \mapsto V_h$.

Les conditions initiales successives aux points rk sont prises alors comme en (2.2):

$$(20.3)\quad \begin{array}{ll} \textit{Pour } r = 0 & \textit{Pour } r = 1,\ \ldots,\ N \\ \begin{cases} u_{1h}(0) = r_h u_0 = u_h^0 \\ u_{2h}(0) = u_{1h}(k-0) \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ u_{mh}(0) = u_{(m-1)h}(k-0) \end{cases} & \begin{cases} u_{1h}(rk+0) = u_{mh}(rk-0) \\ u_{2h}(rk+0) = u_{1h}((r+1)k-0) \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ u_{mh}(rk+0) = u_{(m-1)h}((r+1)k-0). \end{cases} \end{array}$$

Les fonctions u_{ih} sont continues par morceaux de $[0,\ T] \to V_h$, avec des discontinuités aux points rk, $r = 1,\ \ldots,\ N$.

PROPOSITION 20.1.

Sous les hypothèses des n° 1, 2 *et* 10, *pour k et h fixés, il existe m fonctions u_{ih} définies de manière unique par*

$$(20.4)\qquad u_{ih} \in L_2(V_h), \qquad i = 1,\ \ldots,\ m,$$

$$(20.5)\quad \begin{cases} u'_{ih}(t) + A_h^{r+\frac{i}{m}} u_{ih}(t) = f_h^{r+\frac{i}{m}}, \qquad t \in]rk,\ (r+1)k[\\ r = 0,\ \ldots,\ N, \qquad i = 1,\ \ldots,\ m, \end{cases}$$

et les conditions initiales successives (20.3).

Avec les méthodes précédemment utilisées, nous pouvons montrer le

THÉORÈME 20.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2 *et* 10, *et* u *désigne la solution du problème* 1.

Lorsque k *et* $h \to 0$, *pour* $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{cases} q_h u_{ih} \to u & \textit{dans} \quad L_\infty(\tilde{H}) \quad \textit{faible} \\ p_{ih} u_{ih} \to \tilde{\omega}_i u & \textit{dans} \quad L_2(F_i) \quad \textit{fort} \end{cases}$$

$$q_h u_{ih}(t) \to u(t) \quad \textit{dans} \quad \tilde{H} \quad \textit{fort, pour tout} \quad t \in [0, T].$$

REMARQUE 20.1.

(20.2) est un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Pour l'exemple 1 et pour l'exemple 2 si $\mu = 1$, ce système différentiel se décompose en systèmes différentiels indépendants. Chaque système partiel correspond aux $\xi_M(t) = (u_{ih}(t), w_{hM})_h$, pour les $M \in \Omega_h^1$ et situés sur une même parallèle à l'axe des x_i (*).

(*) Signalons également ici une variante de la méthode des pas fractionnaires, proposée par J. L. LIONS et étudiée par J. L. LIONS et l'auteur.

Les notations étant inchangées (en particulier celles du n° 12), cette méthode consiste, à définir comme suit une famille $\left(u_h^{r+\frac{i}{m+1}}\right)_{\substack{0 \le r \le N \\ 1 \le i \le m+1}}$, d'éléments de V_h.

On part, comme en (12.3), de $u_h^0 = r_h u_0$. Ayant détérminés les éléments $u_h^0, u_h^{1/m+1}, \ldots, u_h^r$, on définit ensuite les $u_h^{r+\frac{i}{m+1}}$, $1 \le i \le m+1$.

pour $i = 1, \ldots, m$

$u_h^{r+\frac{i}{m+1}}$ est la solution dans V_h de

$$\frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m+1}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m+1}}\right) + A_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = f u_h^{r+\frac{i}{m+1}}$$

pour $i = m+1$,

$$u_h^{r+\frac{i}{m+1}} = u_h^{r+1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} u_h^{r+\frac{i}{m+1}}$$

Les résultats de convergence obtenus avec cette méthode sont tout à fait analogues aux résultats donnés par les théorèmes 15.1, 18.1 et 20.1.

On pourrait aussi envisager dans cet ordre d'idée des schémas faisant intervenir un paramètre $\theta \in [1/2, 1]$.

L'intérêt de cette méthode, dite de calcul parallèle, est qu'elle permet le calcul simultané des $u_h^{r+\frac{i}{m+1}}$, $i = 1, \ldots, m$, c'est-a-dire *l'inversion simultanée des matrices* $I + kA_h^{r+\frac{i}{m}}$.

21. - Remarque sur les problèmes elliptiques variationnels.

On suppose que $a(t; u, v)$ et $f(t)$ (resp. $a_i(t; u, v)$ et $f_i(t)$) sont indépendants de t:

(21-i) $$a(t;\ u,\ v) = a(u,\ v), \qquad f(t) = f,$$

(21-ii) $$(\text{resp.}\quad a_i(t;\ u,\ v) = a_i(u,\ v), \qquad f_i(t) = f_i)$$

toutes les autres hypothèses étant inchangées.

Nous savons [14] qu'il existe $u \in V$ unique, qui vérifie

(21.1) $$a(u,\ v) = (f,\ v), \qquad \forall\, v \in V.$$

Nous allons voir qu'il est possible de rattacher à ce qui précède l'approximation de la solution u de (21.1).

Soit ε un paramètre > 0. Pour ε fixé, nous voyons avec le théorème 1.1 qu'il existe une fonction u_ε unique qui vérifie

(21.2) $$\begin{cases} u_\varepsilon \in L_2(V) \cap \mathcal{C}(H) \\ \varepsilon u'_\varepsilon(t) + A u_\varepsilon(t) = f \\ u_\varepsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

où $u_0 \in H$ est fixé quelconque.

THÉORÈME 21.1.

Sous les hypothèses (1-i) *à* (1-iv) *et* (21-i), *lorsque* $\varepsilon \to 0$,

(21.3) $$u_\varepsilon(T) \to u \quad \textit{dans } H \textit{ fort},$$

u solution de (21.1).

Démonstration.

Si nous posons $w_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t) - u$, alors w_ε vérifie:

$$\begin{cases} w_\varepsilon \in L_2(V) \cap \mathcal{C}(H), \qquad w_\varepsilon(0) = u_0 - u \\ \varepsilon w'_\varepsilon(t) + A w_\varepsilon(t) = 0. \end{cases}$$

Avec (1.5) et (1-iv) nous en déduisons:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \,|\, w_\varepsilon(t) \,|^2 + 2\, \mathcal{R}e\; a(w_\varepsilon(t);\ w_\varepsilon(t)) = 0$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \,|\, w_\varepsilon(t) \,|^2 + 2\alpha \,\|\, w_\varepsilon(t) \,\|^2 \leq 0;$$

c_6 désignant la norme de l'injection de V dans H, nous obtenons:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} | w_\varepsilon(t) |^2 + \frac{\alpha}{c_6^2} | w_\varepsilon(t) |^2 \leq 0$$

et

$$| w_\varepsilon(t) |^2 \leq | w_\varepsilon(0) |^2 \exp\left(-\frac{\alpha t}{c_6^2 \varepsilon}\right) \tag{21.4}$$

ce qui montre même que $u^\varepsilon(t) \to u$ dans H fort lorsque $\varepsilon \to 0$, quel que soit $t > 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé toutes les méthodes d'approximation de ce chapitre sont applicables à (21.2). Envisageons par exemple, l'approximation discrète (12.3)-(12.4) avec $\theta = 1$; si on considère u_h^{N+1} (qui dépend en fait de ε, h et k, $= u_{\varepsilon hk}^{N+1}$), alors d'après le théorème 18.1, $q_h u_h^{N+1} \to u_\varepsilon(T)$ dans $\tilde{H}$ fort, lorsque k et $h \to 0$. Cela nous fournit avec le théorème 21.1, une approximation en «deux temps» de u.

En résumé, pour approcher la solution u de (21.1) avec une erreur dans $\tilde{H}$, inférieure à η:

a) on choisit ε assez petit pour que $|u_\varepsilon(T) - u| \leq \frac{\eta}{2}$; ε peut être estimé grâce à (21.4).

b) ε étant ainsi choisi, on construit l'approximation (12.3)-(12.4) de (21.2); si h et k sont assez petits, on aura

$$| q_h u_h^{N+1} - u_\varepsilon(T) | \leq \frac{\eta}{2}$$

et alors

$$| u - q_h u_h^{N+1} | \leq \eta .$$

Nous renvoyons à LIONS-TEMAM [22-23] pour un résultat semblable pour les inéquations variationelles.

CHAPITRE II

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE EN t.

Introduction.

Dans ce chapitre, nous étudions l'approximation de la solution d'équations

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t),$$

où $A(t)$ est un opérateur linéaire de type elliptique et où $B(t)$ est un opérateur non linéaire, monotone.

Pour $B(t)=0$, nous retrouvons évidemment les équations linéaires du chapitre I, mais il nous a paru préférable, pour la clarté de la présentation, d'étudier séparément les problèmes linéaires et non linéaires.

Les n° 1 *à* 5 *concernent les approximations semi-discrètes.*

Nous formulons au n° 1 le problème exact dont nous cherchons à approcher la solution. Au n° 2, après avoir formulé les hypothèses convenables nous définissons les solutions approchées semi-discrètes. Nous établissons ensuite des estimations à priori pour les solutions approchées (n° 3) et démontrons un théorème de convergence de ces solution approchées vers la solution du problème exact (n° 4).

Au n° 5 nous appliquons ces résultats à deux exemples.

Les n° 6 *à* 11 *concernent les approximations discrètes.*

Au n° 6 nous formulons les hypothèses de discrétisation. Nous définissons ensuite les solutions approchées discrètes (n° 7), nous établissons des estimations à priori pour ces solutions approchées (n° 8) et nous démontrons un théorème de convergence de ces solutions approchées discrètes vers la solution du problème exact (n° 9).

Au n° 10, nous appliquons les résultats précédents aux exemples du n° 5.

Au n° 11, nous étudions une autre méthode d'approximation discrète.

§ 1. - Approximations Semi-discrètes.

1. - Rappels. Le problème exact.

Nous nous donnons deux espaces de Hilbert complexes V et H, et un espace de Banach complexe réflexif W, tels que V et W soient inclus dans H, les injections étant continues. Nous supposons également que $V \cap W$ est un espace séparable, dense dans V, dans W et dans H. Nous notons $((u, v))$ et $\|u\|$ (resp. (f, g) et $|f|$) le produit scalaire et la norme dans V (resp. H); $\|u\|_W$ désigne la norme W.

Nous identifions H à son anti-dual; X' désignant l'anti-dual de X, nous avons alors les inclusions suivantes;

$$(1\text{-i}) \qquad \begin{cases} V \cap W \subset V \subset H \subset V' \subset (V \cap W)' \\ V \cap W \subset W \subset H \subset W' \subset (V \cap W)', \end{cases}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Nous nous donnons une famille de formes sesquilinéaires continues sur V, soit $a(t;\ u,\ v)$, $t \in [0,\ T]$, et nous supposons que celles-ci vérifient les conditions suivantes:

(1-ii) $\quad t \to a(t;\ u,\ v)$ est une fonction mesurable, $\quad \forall\, u,\ v \in V$

(1-iii) $$\begin{cases} |a(t;\ u,\ v)| \leq M\|u\|\|v\| \\ \forall\, u,\ v \in V, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T] \end{cases}$$

(1-iv) $\quad \mathcal{Re}\, a(t;\ u,\ u) \geq 0 \quad \forall\, u \in V, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]$

(1-v) $$\begin{cases} \mathcal{Re}\, a(t;\ u,\ u) + \lambda\, |u|^2 \geq \alpha\, \|u\|^2 \\ \forall\, u \in V, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]; \qquad \lambda \geq 0, \qquad \alpha > 0. \end{cases}$$

Pour presque tout t, il existe un opérateur linéaire $A(t)$ appliquant V dans V', et défini par

$$< A(t)u,\ v > = a(t;\ u,\ v), \qquad \forall\, u,\ v \in V,$$

$<,>$ anti-dualité entre $V \cap W$ et $(V \cap W)'$. En raison de (1-ii) et (1-iii), l'application linéaire $u(\cdot) \mapsto A(\cdot)u(\cdot)$ est continue de $L_2(V)$ dans $L_2(V')$.

Nous nous donnons encore une famille d'opérateurs (non linéaires) $B(t)$, $t \in [0,\ T]$, qui appliquent W dans W' et qui vérifient les propriétés suivantes:

(1-vi) $\quad \Big\{$ Pour presque tout t, $B(t)$ est continu des sous-espaces de dimension finie de W dans W' faible.

(1-vii) $$\begin{cases} \mathcal{Re} < B(t)u - B(t)v,\ u - v > \geq 0, \\ \forall\, u,\ v \in W, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T] \quad (\textit{Hypothèse de monotonie}). \end{cases}$$

(1-viii) $$\begin{cases} \mathcal{Re} < B(t)u,\ u > + \mu\, |u|^p \geq \beta\, \|u\|_W^p, \\ \forall\, u \in W, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]; \qquad \mu \geq 0, \qquad \beta > 0, \qquad 1 < p < \infty. \end{cases}$$

(1-ix) $\quad \Big\{$ Si $u(\cdot) \in L_p(W)$, alors $B(\cdot)u(\cdot) \in L_{p'}(W')$ $(1/p + 1/p' = 1)$. En outre l'application $u(\cdot) \mapsto B(\cdot)u(\cdot)$ transforme les ensembles bornés de $L_p(W)$ en ensembles bornés de $L_{p'}(W')$ et est faiblement continue sur les droites de $L_p(W)$.

Le problème auquel nous nous intéressons dans ce chapitre est une généralisation du problème 1 du Chapitre I:

PROBLÈME 1.

Pour $u_0 \in H$ *et* $f \in L_1(H) + L_2(V') + L_{p'}(W')$ *donnés, trouver nne fonction* u *vérifiant*

$$u \in L_\infty(H) \cap L_2(V) \cap L_p(W) \tag{1.1}$$

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \qquad t \in]0, T[\tag{1.2}$$

$$u(0) = u_0 . \tag{1.3}$$

REMARQUE 1.1.

Notons que (1.3) a un sens. En effet si u vérifie (1.1) et (1.2), alors

$$u' \in L_1(H) + L_2(V') + L_{p'}(W'). \tag{1.4}$$

On démontre (cf. LIONS [17]), qu'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, toute fonction vérifiant (1.1) et (1.4) est continue de $[0, T]$ dans H.

Des problèmes de ce type ont été étudiés par VISIK [40], MINTY [26], BROWDER [5], LIONS [18], LIONS-STRAUSS [21]. Le résultat suivant est donné dans [21]:

THÉORÈME 1.1.

Sous les hypothèses (1-i) *à* (1-ix), *le problème* 1 *possède une solution* u *unique.*

La fonction u *est continue de* $[0, T]$ *dans* H, *et vérifie pour tout* $t \in [0, T]$, *l'égalité d'énergie suivante*:

$$|u(t)|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^t a(s;\, u(s),\, u(s))ds + 2\,\mathcal{R}e\int_0^t < B(s)u(s),\, u(s) > ds = \tag{1.5}$$

$$= |u_0|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^t < f(s),\, u(s) > ds.$$

REMARQUE 1.2.

Le théorème 1.1 reste encore valable si l'on remplace l'opérateur $B(t)$ par une somme finie d'opérateurs analogues à $B(t)$, avec des espaces W différents et des nombres p différents pour chaque opérateur. Il est possible d'étendre ce qui suit à de tels problèmes.

2. – Problème approché semi-discret.

Nous nous donnons m espaces de Hilbert $V_1, \ldots, V_m$ [produits scalaires $((u, v))_i$, normes $\|u\|_i$] et m espaces de Banach réflexifs $W_1, \ldots, W_m$ [normes

$\| u \|_{W_i}]$ tels que

$$V \subset V_i \subset H, \qquad W \subset W_i \subset H, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2-i}$$

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i, \qquad W = \bigcap_{i=1}^{m} W_i. \tag{2-ii}$$

Avec (2-i), (2-ii) et le théorème du graphe fermé nous voyons que

$$\begin{cases} \| u \| \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \| u \|_i \text{ sont des normes équivalentes sur } V \\ \| u \|_W \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \| u \|_{W_i} \text{ sont des normes équivalentes sur } W. \end{cases}$$

Puisque H est identifié à son anti-dual, nous avons alors les inclusions suivantes:

$$\begin{cases} V \cap W \subset V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V' \subset (V \cap W)' \\ V \cap W \subset W \subset W_i \subset H \subset W_i' \subset W' \subset (V \cap W)', \end{cases} \tag{2-iii}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Nous supposons que, pour presque tout t,

$$a(t;\, u,\, v) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t;\, u,\, v), \qquad \forall\, u,\, v \in V, \tag{2-iv}$$

où, pour $i = 1, \ldots, m$, $a_i(t;\, u,\, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur V_i et qui vérifie des propriétés identiques à (1-ii) - (1-v), V étant remplacé par V_i, les constantes α, λ, M, par des constantes α_i, λ_i, M_i.

Pour presque tout t, nous associons à la forme $a_i(t;\, u,\, v)$ l'opérateur linéaire $A_i(t) \in \mathcal{L}(V_i,\, V_i')$, défini par

$$< A_i(t)u,\, v > = a_i(t;\, u,\, v) \qquad \forall\, u,\, v \in V_i.$$

L'application $u(\cdot) \mapsto A_i(\cdot)u(\cdot)$ est linéaire et continue de $L_2(V_i)$ dans $L_2(V_i')$.

Nous supposons également que, pour presque tout t

$$B(t)v = \sum_{i=1}^{m} B_i(t)v, \qquad \forall\, v \in W, \tag{2-v}$$

où les $B_i(t)$ sont des opérateurs qui appliquent W_i dans W_i' (p.p. $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, m$) et qui vérifient des propriétés identiques à (1-vi)-(1-ix), W étant remplacé par W_i, β et μ par des constantes β_i et μ_i, la constante p étant par contre la même.

Puisque $f \in L_1(H) + L_2(V') + L_{p'}(W')$, il existe $f^0 \in L_1(H)$, $f^1 \in L_2(V')$, $f^2 \in L_{p'}(W')$, tels que $f = f^0 + f^1 + f^2$. Nous décomposons arbitrairement f^0 sous la forme $f^0 = \sum_{i=1}^{m} f_{0i}$ avec $f_{0i} \in L_1(H)$. D'après le lemme 6.1 du Chapitre I, $L_2(V) = \bigcap_{i=1}^{m} L_2(V_i)$ [resp. $L_p(W) = \bigcap_{i=1}^{m} L_p(W_i)$], et alors, par anti-dualité, $L_2(V') = \sum_{i=1}^{m} L_2(V'_i)$ [resp. $L_{p'}(W') = \sum_{i=1}^{m} L_{p'}(W'_i)$]. Il existe donc une décomposition (non unique) de f^1 [resp. f^2] de la forme $f^1 = \sum_{i=1}^{m} f_{1i}$, $f_{1i} \in L_2(V'_i)$ [resp. $f^2 = \sum_{i=1}^{m} f_{2i}$, $f_{2i} \in L_{p'}(W'_i)$].

Nous obtenons ainsi une décomposition (non unique) de f de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i, \qquad f_i = f_{0i} + f_{1i} + f_{2i} \in L_1(H) + L_2(V'_i) + L_{p'}(W'_i). \tag{2-vi}$$

Les Fonctions Approchées.

Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini et $k = T/(N+1)$.

Pour chaque k fixé, nous déterminons les fonctions approchéés de la même manière qu'au Chapitre I: par utilisation du théorème 1.1, pour chaque i et pour chaque r, on définit la restriction (15) de u_{ik} à l'intervalle $[rk + 0, (r+1)k - 0]$ comme la solution du problème suivant:

$$\begin{cases} u_{ik} \in L_\infty(rk, (r+1)k;\ H) \cap L_2(rk, (r+1)k;\ V_i) \cap L_p(rk, (r+1)k;\ W_i) \\ u'_{ik}(t) + A_i(t)u_{ik}(t) + B_i(t)u_{ik}(t) = f_i(t) \\ u_{ik}(rk+0) \quad \text{donné dans } H. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les conditions initiales *successives* aux points rk sont les mêmes qu'au chapitre I:

$$\text{Pour } r = 0 \qquad\qquad \text{Pour } r = 1, \ldots, N$$

$$\begin{cases} u_{1k}(0) = u_0 \\ u_{2k}(0) = u_{1k}(k-0) \\ \quad\vdots \\ u_{mk}(0) = u_{(m-1)k}(k-0) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{1k}(rk+0) = u_{mk}(rk-0) \\ u_{2k}(rk+0) = u_{1k}((r+1)k-0) \\ \quad\vdots \\ u_{mk}(rk+0) = u_{(m-1)k}((r+1)k-0) \end{cases} \tag{2.2}$$

Comme au Chapitre précédent, les fonctions u_{ik} sont continues par morceaux de $[0, T] \mapsto H$, avec des discontinuités aux points rk, $r = 1, \ldots, N$. Nous

(15) Restriction encore notée u_{ik}.

convenons de poser

$$\begin{cases} u_{ik}(rk) = u_{ik}(rk+0) & \left(\text{noté} \quad u_k^{r+\frac{i-1}{m}}\right) \\ r=0, \ldots, N, & i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

ce qui rend les fonctions u_{ik} continues à droite dans H.

Nous avons ainsi la

PROPOSITION 2.1.

Sous les hypothèses (1-i) *à* (1-ix) *et* (2-i) *à* (2-vi), *pour k fixé, il existe m fonctions u_{ik} définies de manière unique par*

$$u_{ik} \in L_\infty(H) \cap L_2(V_i) \cap L_p(W_i), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} u'_{ik}(t) + A_i(t)u_{ik}(t) + B_i(t)u_{ik}(t) = f_i(t), \\ t \in]rk, (r+1)k[, \qquad r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.5}$$

et les conditions initiales successives (2.2).

REMARQUE 2.1.

Les hypothèses faites sur les opérateurs $A_i(t)$ et $B_i(t)$, nous permettent de choisir des opérateurs $A_i(t)$ ou $B_i(t)$ identiquement nuls, l'espace V_i ou W_i correspondant étant alors l'espace H. Cela permet beaucoup de liberté dans le choix des décompositions de $A(t)$ et $B(t)$; *en particulier, nous pouvons faire en sorte qu'il n'y ait dans* (2.5) *qu'un seul des opérateurs $A_i(t)$ ou $B_i(t)$ non nul.*

Nous allons étudier à présent le passage à la limite $k \to 0$.

3. - Estimations à priori.

PROPOSITION 3.1.

Lorsque $k \to 0$, u_{ik} demeure dans un ensemble borné de $L_\infty(H) \cap L_2(V_i) \cap L_p(W_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Démonstration.

Remarquons tout d'abord, qu'en retranchant éventuellement $B_i(t)0$ aux deux membres des équations (2.5) nous pouvons toujours nous ramener au cas où $B_i(t)0 = 0$. Avec l'hypothèse (1-vii) pour $B_i(t)$, nous voyons alors que

$$\mathcal{R}e < B_i(t)u, u > \geq 0, \qquad \forall\, u \in W_i, \qquad \text{p.p. } t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

L'égalité d'énergie analogue à (1.5) permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}| u_{ik}(t) |^2 + 2\,\mathcal{R}e\, a_i(t;\, u_{ik}(t), u_{ik}(t)) + \\ + 2\,\mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t), u_{ik}(t) > = 2\,\mathcal{R}e < f_i(t), u_{ik}(t) >, \qquad t \in]rk, (r+1)k[, \tag{3.2}$$

$f_i = f_{0i} + f_{1i} + f_{2i}$.

Nous majorons le second membre de (3.2) de la manière suivante:

$$X = 2\,\mathcal{R}e\,(f_{0i}(t),\ u_{ik}(t)) \leq 2\,|\,f_{0i}(t)\,|\ |\,u_{ik}(t)\,| \leq |\,f_{0i}(t)\,|\,(1 + |\,u_{ik}(t)\,|^2)$$

$$Y = 2\,\mathcal{R}e < f_{1i}(t),\ u_{ik}(t) > \ \leq 2\,\|\,f_{1i}(t)\,\|_{V_i'}\,\|\,u_{ik}(t)\,\|_i$$

$$Z = 2\,\mathcal{R}e < f_{2i}(t),\ u_{ik}(t) > \ \leq 2\,\|\,f_{2i}(t)\,\|_{W_i'}\,\|\,u_{ik}(t)\,\|_{W_i}.$$

Avec l'inégalité

$$(a + b)^{1/2} \leq a^{1/2} + b^{1/2}\ (a,\ b \geq 0),$$

et l'hypothèse (1-v) pour $a_i(t;\ u,\ v)$, nous avons

$$\|\,u_{ik}(t)\,\|_i \leq \alpha_i^{-1/2}\,[\mathcal{R}e\,a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + \lambda_i\,|\,u_{ik}(t)\,|^2]^{1/2}$$

$$\|\,u_{ik}(t)\,\|_i \leq \alpha_i^{-1/2}\,[\mathcal{R}e\,a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t))]^{1/2} + \alpha_i^{-1/2}\lambda^{+1/2}\,|\,u_{ik}(t)\,|$$

$$\|\,u_{ik}(t)\,\|_i \leq \alpha_i^{-1/2}\,[\mathcal{R}e\,a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t))]^{1/2} + \frac{1}{2}\alpha_i^{-1/2}\lambda_i^{1/2}[1 + |\,u_{ik}(t)\,|^2]$$

D'où

$$Y \leq 2\alpha_i^{-1/2}\,\|\,f_{1i}(t)\,\|_{V_i'}\,[\mathcal{R}e\,a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t))]^{1/2} +$$
$$+\ \alpha_i^{-1/2}\lambda_i^{1/2}\,\|\,f_{1i}(t)\,\|_{V_i'}\,[1 + |\,u_{ik}(t)\,|^2]$$

$$Y \leq \mathcal{R}e\,a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + c_1'\,\|\,f_{1i}(t)\,\|_{V_i'}^2 + c_2'\,\|\,f_{1i}(t)\,\|_{V_i'}\,[1 + |\,u_{ik}(t)\,|^2],$$

les c_j, c_j', désignant diverses constantes indépendantes de k.

Nous traitons le terme Z de manière analogue. Avec l'inégalité $(a + b)^{1/p} \leq \leq a^{1/p} + b^{1/p}$ $(a,\ b \geq 0)$ et l'hypothèse (1-viii) pour $B_i(t)$, nous avons

$$\|\,u_{ik}(t)\,\|_{W_i} \leq \beta_i^{-1/p}\,[\mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) > + \mu_i\,|\,u_{ik}(t)\,|^p]^{1/p}$$

$$\|\,u_{ik}(t)\,\|_{W_i} \leq \beta_i^{-1/p}\,[\mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) >]^{1/p} + \beta_i^{-1/p}\mu_i^{1/p}\,|\,u_{ik}(t)\,|$$

$$\|\,u_{ik}(t)\,\|_{W_i} \leq \beta_i^{-1/p}\,[\mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) >]^{1/p} + \frac{1}{2}\beta_i^{-1/p}\mu_i^{1/p}[1 + |\,u_{ik}(t)\,|^2]$$

$$Z \leq 2\beta_i^{-1/p}\,\|\,f_{2i}(t)\,\|_{W_i'}\,[\mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) >]^{1/p} +$$
$$+\ \beta_i^{-1/p}\mu_i^{1/p}\,\|\,f_{2i}(t)\,\|_{W_i'}[1 + |\,u_{ik}(t)\,|^2].$$

L'inégalité de Young peut être écrite sous la forme

$$ab \leq a^p + c(p)b^{p'},\ a,\ b \geq 0,$$

où $c(p)$ ne dépend que de p. Cela nous permet d'écrire

$$Z \leq \mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)> + c_3' \| f_{2i}(t) \|_{W_i'}^{p'} + c_4' \| f_{2i}(t) \|_{W_i'} [1 + | u_{ik}(t) |^2].$$

Avec ces majorations du second membre, l'inégalité (3.2) devient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} | u_{ik}(t) |^2 + \mathcal{R}e\, a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + \mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)> \leq \\ &\leq [\, | f_{0i}(t) | + c_2' \| f_{1i}(t) \|_{V_i'} + c_4' \| f_{2i}(t) \|_{W_i'}] [1 + | u_{ik}(t) |^2] + \\ &+ c_1' \| f_{1i}(t) \|_{V_i'}^2 + c_3' \| f_{2i}(t) \|_{W_i'}^{p'} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} (3.3) \qquad &\frac{d}{dt} | u_{ik}(t) | + \mathcal{R}e\, a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + \mathcal{R}e < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)> \leq \\ &\leq \varphi_i(t)[1 + | u_{ik}(t) |^2], \qquad t \in]rk,\ (r+1)k[\end{aligned}$$

avec

$$(3.4) \qquad \varphi_i(t) = c_5'[\, | f_{0i}(t) | + \| f_{1i}(t) \|_{V_i'} + \| f_{2i}(t) \|_{W_i'} + \| f_{1i}(t) \|_{V_i'}^2 + \| f_{2i}(t) \|_{W_i'}^{p'}].$$

Estimations à priori dans $L_\infty(H)$.

En raison de (3.1) et de l'hypothèse (1-iv) pour $a_i(t;\ u,\ v)$, (3.3) donne en particulier:

$$\frac{d}{dt}[1 + | u_{ik}(t) |^2] \leq \varphi_i(t)\, [1 + | u_{ik}(t) |^2],$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ [1 + | u_{ik}(t) |^2] \left[\exp \left(- \int_{rk}^{t} \varphi_i(s) ds \right) \right] \right\} \leq 0.$$

D'où

$$(3.5) \qquad [1 + | u_{ik}(t) |^2] \leq [1 + | u_k^{r+i-1/m} |^2] \left[\exp \left(\int_{rk}^{t} \varphi_i(s) ds \right) \right],$$

pour $t \in]rk,\ (r+1)k[$, et, pour $t = (r+1)k - 0$:

$$(3.6) \qquad [1 + | u_k^{r+i/m} |^2] \leq [1 + | u_k^{r+i-1/m} |^2] \left[\exp \left(\int_{rk}^{(r+1)k} \varphi_i(s) ds \right) \right].$$

Pour q et j donnés, nous multiplions membre à membre les inégalités (3.6), pour $r = 0,\ \ldots,\ q,\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ r + i/m \leq q + j/m$; nous obtenons:

$$[1 + | u_k^{q+j/m} |^2] \leq [1 + | u_0 |^2] \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{j} \int_0^{(q+1)k} \varphi_i(s) ds + \sum_{i=j+1}^{m} \int_0^{qk} \varphi_i(s) ds \right) \right]$$

$$(3.7)\qquad [1 + |u_k^{q+j/m}|^2] \leq [1 + |u_0|^2] \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^T \varphi_i(s) ds \right) \right].$$

Le second membre de (3.7) est indépendant de k. q et j. Nous en concluons que les

$$u_k^{q+\frac{j}{m}}, \qquad q = 0, \ldots, N, \qquad j = 1, \ldots, m$$

sont bornés indépendamment de k dans H; (3.5) implique alors que les fonctions u_{ik} sont bornées indépendamment de k dans $L_\infty(H)$.

Estimations à priori dans $L_2(V_i) \cap L_p(W_i)$.

Nous intégrons (3.3) de rk à $(r+1)k$; cela donne

$$(3.8)\qquad \left| u_k^{r+\frac{i}{m}} \right|^2 + \Re e \int_{rk}^{(r+1)k} [a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + \langle B_i(t) u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) \rangle] dt \leq$$

$$\leq \left| u_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + \int_{rk}^{(r+1)k} \varphi_i(t) [1 + |u_{ik}(t)|^2] dt.$$

Nous ajoutons toutes les inégalités (3.8), pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$; il vient:

$$|u_k^{N+1}|^2 + \Re e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T [a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + \langle B_i(t) u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) \rangle] dt \leq$$

$$\leq |u_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \varphi_i(t) [1 + |u_{ik}(t)|^2] dt.$$

Avec l'hypothèse (1-v) pour $a_i(t;\ u,\ v)$ et l'hypothèse (1-viii) pour $B_i(t)$, il en résulte:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^T [\alpha_i \| u_{ik}(t) \|_i^2 + \beta_i \| u_{ik}(t) \|_{W_i}^p] dt \leq$$

$$\leq |u_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T [\lambda_i |u_{ik}(t)|^2 + \mu_i |u_{ik}(t)|^p + \varphi_i(t)(1 + |u_{ik}(t)|^2)] dt.$$

Tenant compte des estimations à priori dans $L_\infty(H)$, nous voyons que le second membre de cetté inégalité est majoré indépendamment de k, et les u_{ik} sont donc bornés indépendamment de k dans $L_2(V_i)$ et $L_p(W_i)$.

REMARQUE 3.1.

Nous allons établir une égalité d'énergie vérifiée par les fonctions u_{ik} et utile pour la suite.

Par intégration de rk à $(r+1)k$, (3.2) donne

$$\left| u_k^{r+\frac{i}{m}} \right|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{(r+1)k} [a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) >]dt =$$

$$= \left| u_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{(r+1)k} < f_i(t),\ u_{ik}(t) > dt.$$

Ajoutant membre à membre toutes ces égalités pour $r=0, \ldots, N$, $i=1, \ldots, m$, nous obtenons:

$$(3.9) \qquad | u_k^{N+1} |^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T [a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) + < B_i(t)u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) >]dt =$$

$$= | u_0 |^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < f_i(t),\ u_{ik}(t) > dt.$$

4. - Théorème de convergence.

4.1. - *Enoncé du théorème.*

THÉORÈME 4.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1 *et* 2 [(1-i)-(1-ix), (2-i)-(2-vi)] *et* u *désigne la solution du problème* 1.

Lorsque $k \to 0$, *pour* $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{cases} u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_2(V_i) \quad \text{fort, dans} \quad L_p(W_i) \quad \text{faible} \\ \text{et dans} \quad L_\infty(H) \quad \text{faible} \end{cases}$$

$$u_{ik}(t) \to u(t) \quad \text{dans} \quad H \quad \text{fort, pour tout} \quad t \in [0,\ T].$$

La démonstration du théorème 4.1 est donnée dans les sections 4.2 à 4.4.

REMARQUE 4 1.

Avec le théoreme de Lebesgue, le théorème 4.1 nous permet d'affirmer que

$$u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_s(H) \quad \text{fort,} \qquad \forall\, s \in [1,\ \infty[, \qquad i = 1,\ \ldots,\ m.$$

En complément au théorème 4.1, nous pouvons démontrer dans certains cas, que $u_{ik} \to u$ dans $L_p(W_i)$ *fort* (cf. section 4.5).

4.2. - *Première partie de la démonstration.*

En raison de la proposition 3.1, il existe des fonctions $w_1, \dots, w_m$, et une sous-suite $k' \to 0$, telles que, pour $i = 1, \dots, m$:

$$u_{ik'} \to w_i \quad \text{dans} \quad L_\infty(H) \text{ faible et dans } \quad L_2(V_i) \cap L_p(W_i) \quad \text{faible.} \tag{4.1}$$

Puisque l'application linéaire $v(\cdot) \mapsto A_i(\cdot)v(\cdot)$ est continue de $L_2(V_i)$ dans $L_2(V_i')$, elle est aussi faiblement continue et donc

$$A_i u_{ik'} \to A_i w_i \quad \text{dans} \quad L_2(V_i') \quad \text{faible,} \quad i = 1, \dots, m. \tag{4.2}$$

L'application $v(\cdot) \mapsto B_i(\cdot)v(\cdot)$ qui applique $L_p(W_i)$ dans $L_{p'}(W_i')$ n'est pas faiblement continue et le résultat analogue à (4.2) pour les suites $B_i u_{ik'}$ est, à priori, faux.

Nous ne possédons actuellement que le renseignement suivant: en raison de l'hypothèse (1-ix) pour $B_i(t)$, la suite $B_i u_{ik}$ est bornée indépendamment de k dans $L_{p'}(W_i)$ et nous pouvons choisir la suite extraite k' de manière que l'on ait aussi:

$$B_i u_{ik'} \to \chi_i \quad \text{dans} \quad L_{p'}(W_i') \quad \text{faible,} \quad i = 1, \dots, m. \tag{4.3}$$

En tenant compte de la structure particulière du problème, nous montrerons par la suite que $B_i w_i = \chi_i$. La démonstration de ce point constitue la différence essentielle avec le cas linéaire.

Comme au chap. I nous montrons tout d'abord le résultat suivant:

LEMME 4.1.

$$w_1(t) = \dots = w_m(t) \; (= w(t)) \quad \text{p.p.} \tag{4.4}$$

$$w \in L_\infty(H) \cap L_2(H) \cap L_p(W). \tag{4.5}$$

Démonstration.

Pour montrer, par exemple, que $w_1(t) = w_2(t)$ p.p., nous procédons comme dans le lemme 7.1 du chap. I. Pour $t \in [rk, (r+1)k[$, par intégration des égalités (2.5), nous obtenons l'égalité suivante:

$$u_{2k}(t) - u_{1k}(t) = \int_t^{(r+1)k} [f_1(s) - A_1(s)u_{1k}(s) - B_1(s)u_{1k}(s)]ds +$$
$$+ \int_{rk}^t [f_2(s) - A_2(s)u_{2k}(s) - B_2(s)u_{2k}(s)]ds.$$

D' où

$$(4.6)\qquad \| u_{2k}(t) - u_{1k}(t) \|_{(V\cap W)'} \leq c_1 \int_t^{(r+1)k} | f_{01}(s) | \, ds + c_1 \int_{rk}^{t} | f_{02}(s) | \, ds +$$
$$+ c_1 k^{1/2} (\| f_{11} - A_1 u_{1k} \|_{L_2(V_1')} + \| f_{12} - A_2 u_{2k} \|_{L_2(V_2')}) +$$
$$+ c_1 k^{1/p} (\| f_{21} - B_1 u_{1k} \|_{L_{p'}(W_1')} + \| f_{22} - B_2 u_{2k} \|_{L_{p'}(W_2')}),$$

la constante c_1 étant supérieure ou égale aux normes des injections de H, V_i', W_i' dans $(V \cap W)'$.

Lorsque $k \to 0$, t étant fixé, le second membre de (4.6) tend vers 0. Ainsi $u_{2k}(t) - u_{1k}(t) \to 0$ dans $(V \cap W)'$ fort, pour tout $t \in [0, T]$. La fonction $\| u_{2k}(t) - - u_{1k}(t) \|_{(V\cap W)'}$ étant essentiellement bornée sur $[0, T]$ indépendamment de k, il en résulte avec le théorème de Lebesgue, que $u_{2k} - u_{1k} \to 0$ dans $L_1((V \cap \cap W)')$ (par exemple). Par comparaison avec (4.1), $w_1(t) = w_2(t)$ p.p.

Ayant montré (4.4), (4.5) en résulte immédiatement avec le lemme 6.1 du chap. I.

4.3. - *Deuxième partie de la démonstration*: $w(t) = u(t)$ *p.p.*

Soit $t \in [0, T]$ fixé et $r = E(t/k)$, le plus grand entier inférieur ou égal à t/k. A partir de (2.2) et (2.5) nous pouvons établir une égalité analogue à l'égalité (7.5) du chap I:

$$(4.7)\qquad u_{1k}(t) = u_0 + \int_0^t [f_1(s) - A_1(s) u_{1k}(s) - B_1(s) u_{1k}(s)] ds +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m} \int_0^{rk} [f_i(s) - A_i(s) u_{ik}(s) - B_i(s) u_{ik}(s)] ds.$$

Avec (4.2), (4.3) et le lemme 6.2 du chap. I, nous avons:

$$\int_0^t [f_1(s) - A_1(s) u_{1k'}(s) - B_1(s) u_{1k'}(s)] ds \to$$
$$\to \int_0^t [f_1(s) - A_1(s) w(s) - \chi_1(s)] ds \quad \text{dans} \quad (V \cap W)' \quad \text{faible}$$

$$\int_0^{rk'} [f_i(s) - A_i(s) u_{ik'}(s) - B_i(s) u_{ik'}(s)] ds \to$$
$$\to \int_0^t [f_i(s) - A_i(s) w(s) - \chi_i(s)] ds \quad \text{dans} \quad (V \cap W)' \quad \text{faible.}$$

Ainsi, t étant fixé, lorsque $k' \to 0$, le second membre de (4.7) (et donc aussi le premier) converge dans $(V \cap W)'$ faible vers

$$w_*(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t [f_i(s) - A_i(s)w(s) - \chi_i(s)]ds$$

c'est-à-dire

$$w_*(t) = u_0 + \int_0^t f(s)ds - \int_0^t A(s)w(s)ds - \int_0^t \chi(s)ds \tag{4.8}$$

où

$$\chi = \sum_{i=1}^{m} \chi_i . \tag{4.9}$$

Nous venons de montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $u_{1k'}(t) \to w_*(t)$ dans $(V \cap W)'$ faible, lorsque $k' \to 0$ et, d'après la proposition 3.1, les fonctions $\|u_{1k'}(t)\|_{(V \cap W)'}$ sont (essentiellement) bornées sur $[0, T]$ indépendamment de k'.

Soit alors $v \in V \cap W$ et $\varphi \in \mathcal{C}$ (fonctions scalaires continues sur $[0, T]$), quelconques. Avec ce qui précède et le théorème de Lebesgue, on a

$$\int_0^T < u_{1k'}(t),\ v > \varphi(t)dt \to \int_0^T < w_*(t),\ v > \varphi(t)dt,$$

et puisque $\varphi \otimes v \in L_2(V_1)$, on a aussi d'après (4.1) et (4.2):

$$\int_0^T < u_{1k'}(t),\ v > \varphi(t)dt \to \int_0^T < w(t),\ v > \varphi(t)dt.$$

Par comparaison

$$\int_0^T < w_*(t),\ v > \varphi(t)dt = \int_0^T < w(t),\ v > \varphi(t)dt,$$

$\forall\, v \in V \cap W$, $\forall\, \varphi \otimes \mathcal{C}$; $\mathcal{C} \otimes (V \cap W)$ est dense, par exemple, dans $L_1(V)$, et donc $w = w_*$, c'est-à-dire, $w(t) = w_*(t)$ p.p.

D'après (4.8), la fonction $t \to w_*(t)$ est continue de $[0, T]$ dans $(V \cap W)'$ et $w_*(0) = u_0$. Dérivant (4.8) au sens des distributions vectorielles sur $]0, T[$, à valeurs dans $(V \cap W)'$, nous obtenons

$$w'_*(t) + A(t)w_*(t) + \chi(t) = f(t). \tag{4.10}$$

Pour conclure que $w_* = u$, il nous suffit à présent de montrer que

$$\chi = B w_* . \tag{4.11}$$

C'est l'objet des lemmes qui suivent

LEMME 4.2.

La fonction w_* est continue de $[0, T]$ dans H et

$$|w_*(T)|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^T [a(t;\, w_*(t),\, w_*(t)) + <\chi(t),\, w_*(t)>]dt = \tag{4.12}$$
$$= |u_0|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^T <f(t),\, w_*(t)>dt.$$

Démonstration.

Il résulte de (4.10) que

$$w'_* \in L_1(H) + L_2(V) + L_{p'}(W'). \tag{4.13}$$

D'après LIONS [17] (cf. Remarque 1.1), toute fonction vérifiant (4.5) et (4.13) est p.p. égale à une fonction continue de $[0, T] \mapsto H$; w_* est donc continue de $[0, T]$ dans H.

Pour obtenir (4.12), nous multiplions scalairement (4.10) par $w_*(t)$, nous intégrons de 0 à T et prenons la partie réelle de l'égalité obtenue:

$$\mathcal{R}e\int_0^T [<w'_*(t),\, w_*(t)> + a(t;\, w_*(t),\, w_*(t) + <\chi(t),\, w_*(t)>]dt =$$
$$= \mathcal{R}e\int_0^T <f(t),\, w_*(t)>dt.$$

On montre aussi en [17] que, pour toute fonction vérifiant (4.5) et (4.13),

$$2\,\mathcal{R}e\int_0^T <w'_*(t),\, w_*(t)>dt = |w_*(T)|^2 - |w_*(0)|^2$$

et (4.12) en résulte.

LEMME 4.3.

Lorsque $k' \to 0$, pour $i = 1, \ldots m$, pour tout $t \in [0, T]$

$$u_{1k'}(t) \to w_*(t) \quad \textit{dans } H \textit{ faible.} \tag{4.14}$$

Démonstration.

Soit $t \in [0, T]$ fixé; $u_{1k'}(t)$ est une suite bornée dans H et, d'après ce qui précède, $u_{1k'}(t) \to w_*(t)$ dans $(V \cap W)'$ faible. Pour $i = 1$, (4.14) résulte alors du lemme 6.3 du Chap I.

Pour $i \geq 2$, le raisonnement est le même car, d'après la démonstration du lemme 4.1, $u_{jk}(t) - u_{(j-1)k}(t) \to 0$ dans $(V \cap W)'$ fort, pour $j = 2, \ldots, m$.

Nous démontrons à présent un résultat plus précis que (4.11):

LEMME 4.4.

$$\chi_i = B_i w, \qquad i = 1, \ldots, m, \text{ (16)}$$

Démonstration.

Nous allons adapter à notre problème une méthode de démonstration dûe à G. MINTY [26]. La monotonie des opérateurs $B_i(t)$ (hypothèse (1-vii)) joue un rôle essentiel dans cette démonstration.

Etant données m fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, vérifiant

$$\varphi_j \in \mathcal{C}(H) \cap L_2(V) \cap L_p(W_j), \qquad j = 1, \ldots, m, \text{ (17)}, \tag{4.15}$$

nous considérons l'expression suivante:

$$Y_{k\varphi} = |\varphi(T) - u_k^{N+1}|_*^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T a_j(t;\, \varphi(t) - u_{jk}(t),\ \varphi(t) - u_{jk}(t))dt +$$

$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T < B_j(t)\varphi_j(t) - B_j(t)u_{jk}(t),\ \varphi_j(t) - u_{jk}(t) > dt,$$

où

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j.$$

Les fonctions φ_j étant fixées, nous voulons passer à la limite dans $Y_{k\varphi}$ avec la suite k'. Nous remarquons pour cela que

$$Y_{k\varphi} = Y_\varphi^1 + Y_{k\varphi}^2 + Y_{k\varphi}^3,$$

$$Y_\varphi^1 = |\varphi(T)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \int_0^T a(t;\, \varphi(t),\ \varphi(t))dt +$$

$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T < B_j(t)\varphi_j(t),\ \varphi_j(t) > dt,$$

(16) Ce qui signifie avec (4.3): $B_i u_{ik'} \to B_i w$ dans $L_{p'}(W_i')$ faible, $i = 1, \ldots, m$.

(17) $\mathcal{C}(H)$, espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H.

$$Y^2_{k\varphi} = -2\,\mathcal{R}e\,(\varphi(T),\ u_k^{N+1}) -$$
$$-2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T [a_j(t;\ \varphi(t),\ u_{jk}(t)) + a_j(t;\ u_{jk}(t),\ \varphi(t))]dt -$$
$$-2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T [< B_j(t)\varphi_j(t),\ u_{jk}(t)> + B_j(t)u_{jk}(t),\ \varphi_j(t)> d]t,$$

$$Y^3_{k\varphi} = |\,u_k^{N+1}\,|^2 + 2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T a_j(t;\ u_{jk}(t),\ u_{jk}(t))dt +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T < B_j(t)u_{jk}(t),\ u_{jk}(t)> dt.$$

L'expression Y^1_φ est indépendante de k; pour $Y^2_{k'\varphi}$ le passage à la limite se fait sans difficulté grâce à (4.1), (4.3) et au lemme 4.3:

$$\lim_{k'\to 0} Y^2_{k'\varphi} = Y^2_\varphi = -2\,\mathcal{R}e\,(\varphi(T),\ w_*(T)) - 2\,\mathcal{R}e\int_0^T a(t;\ \varphi(t),\ \varphi(t))dt -$$
$$-2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T [<\chi_j(t),\ \varphi^j(t)> + <B_j(t)\varphi^j(t),\ w(t)>]dt.$$

Pour $Y^3_{k\varphi}$, utilisant successivement (3.9), (4.1), puis le lemme 4.2, nous obtenons:

$$Y^3_{k\varphi} = |\,u_0\,|^2 + 2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T <f_i(t),\ u_{1k}(t)> dt,$$

$$\lim_{k'\to 0} Y^3_{k'\varphi} = Y^3_\varphi = |\,u_0\,|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^T <f(t),\ w(t)> dt,$$

$$Y^3_\varphi = |\,w_*(T)\,|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^T [a(t;\ w(t),\ w(t)) + <\chi(t),\ w(t)>]\,dt.$$

Finalement en regroupant ces résultats:

$$\lim_{k'\to 0} Y_{k'\varphi} = Y_\varphi = |\,\varphi(T) - w_*(T)\,|^2 +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e\int_0^T a(t;\ \varphi(t) - w(t),\ \varphi(t) - w(t))dt +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e\sum_{j=1}^{m}\int_0^T [< B_j(t)\varphi_j(t) - \chi_j(t),\ \varphi_j(t) - w(t)>]dt.$$

En raison de (1-iv) et (1-vii), l'expression $Y_{k\varphi}$ est positive ou nulle. Nous pouvons donc affirmer à la limite, que Y_φ est positif ou nul, quelles que soient les fonctions φ_j vérifiant (4.13). Pour montrer que $\chi_i = B_i w$, nous écrivons l'inégalité $Y_\varphi \geq 0$, avec le choix suivant des fonctions φ_j:

$$\begin{cases} \varphi_j = w_* \quad \text{pour} \quad j \neq i, \quad \text{et} \\ \varphi_i = w_* + \xi\psi, \qquad \xi > 0, \qquad \psi \in \mathcal{C}(H) \cap L_2(V) \cap L_p(W_i). \end{cases}$$

Après division par ξ, il vient

$$\xi \left| \frac{1}{m} \psi(T) \right|^2 + 2\xi \, \mathcal{R}e \int_0^T a\left(t;\ \frac{1}{m}\psi(t),\ \frac{1}{m}\psi(t)\right) dt +$$
$$+ 2 \, \mathcal{R}e \int_0^T < B_i(t) \cdot (w_*(t) + \xi\psi(t)) - \chi_i(t),\ \psi(t) > dt \geq 0.$$

A présent faisons tendre ξ vers 0. En raison de l'hypothèse (1-ix) pour $B_i(t)$,

$$B_i \cdot (w_* + \xi\psi) \rightarrow B_i w_* \quad \text{dans} \quad L_{p'}(W_i') \quad \text{faible},$$

et nous obtenons:

$$\mathcal{R}e \int_0^T < B_i(t) w_*(t) - \chi_i(t),\ \psi(t) > dt \geq 0.$$

Cette inégalité ne peut avoir lieu pour toutes les fonctions ψ considérées que si

$$B_i w_* = \chi_i,$$

et le lemme est démontré.

Avec ce lemme nous pouvons affimer que $w_* = u$. Puisque les limites sont indépendantes de la sous-suite k', les convergences (4.1) et (4.14) ont lieu pous la suite k toute entière. Il ne reste plus alors qu'à démontrer les résultats de convergence forte énoncés dans le théorème 4.1.

4.4. - *Troisième partie de la démonstration. - Résultats de convergence forte.*

Pour $t \in [0, T]$ et $1 \leq i \leq m$, fixés, nous considérons (comparer à (7.10), chap. I):

$$(4.16) \qquad X_{ik}(t) = | u(t) - u_{ik}(t) |^2 +$$
$$+ 2 \, \mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} a_j(s;\ u(s) - u_{jk}(s),\ u(s) - u_{jk}(s)) ds +$$

$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} \langle B_j(s)u(s) - B_j(s)u_{jk}(s),\ u(s) - u_{jk}(s)\rangle\, ds,$$

où t_{ij} a la même signification qu'en (7.11), chap. I.

De la même manière qu'au chap I, nous montrons que $X_{ik}(t) \to 0$ lorsque $k \to 0$ et nous en déduisons que $u_{ik}(t) \to u(t)$ dans H fort.

Pour tout $t \in [0, T]$, $|u_{ik}(t) - u(t)| \to 0$, lorsque $k \to 0$, et, la fonction $t \mapsto |u_{ik}(t) - u(t)|$ étant essentiellement bornée sur $[0, T]$ indépendamment de k, alors

$$\int_0^T |u_{ik}(t) - u(t)|^2\, dt \to 0, \quad \text{lorsque} \quad k \to 0. \tag{4.17}$$

D'autre part $X_{mk}(T) \to 0$, et donc

$$0 \leq 2\,\mathcal{R}e \int_0^T a_i(t;\ u(t) - u_{ik}(t),\ u(t) - u_{ik}(t))dt \leq X_{mk}(T) \to 0. \tag{4.18}$$

Avec (4.17) et l'hypothèse (1-v) pour $a_i(t, u, v)$:

$$0 \leq \alpha_i \int_0^T \| u_{ik}(t) - u(t) \|_i^2\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T [\mathcal{R}e\, a_i(t,\ u(t) - u_{ik}(t),\ u(t) - u_{ik}(t)) + \lambda_i |u(t) - u_{ik}(t)|^2]\, dt \to 0,$$

ce qui montre que u_{ik} tend vers u dans $L_2(V_i)$ fort.

Cela termine la démonstration du théorème 4.1.

4.5. - *Un complément au théorème* 4.1.

Puisque $X_{mk}(T) \to 0$, nous avons également

$$0 \leq 2\,\mathcal{R}e \int_0^T \langle B_i(t)u(t) - B_i(t)u_{ik}(t),\ u(t) - u_{ik}(t)\rangle\, dt \leq X_{mk}(T) \to 0. \tag{4.19}$$

Les hypothèses que nous avons faites sur $B_i(t)$ ne nous permettent pas de déduire de cela un résultat nouveau. Mais, avec (4.1), (4.3) et le lemme 4.4, (4.19) donne aussi

$$\mathcal{R}e \int_0^T < B_i(t) u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) > dt \rightarrow \tag{4.20}$$

$$\rightarrow \mathcal{R}e \int_0^T < B_i(t) u(t),\ u(t) > dt.$$

Dans certains cas, il est possible de montrer avec (4.20) que $u_{ik} \rightarrow u$ dans $L_p(W_i)$ fort. Voici un résultat précis dans ce sens:

THÉORÈME 4.2.

Avec les hypothèses du théorème 4.1, *si l'espace* W_i *est uniformément convexe, et si l'hypothèse* (1–viii) *pour* $B_i(t)$ *est remplacée par*

$$\mathcal{R}e < B_i(t) v,\ v > + \mu_i \,|\, v \,|^p = \beta_i \,\|\, v \,\|_{W_i}^p, \qquad \forall\, v \in W_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T] \tag{4–i}$$

alors

$$u_{ik} \rightarrow u \quad dans \quad L_p(W_i) \quad fort. \tag{4.21}$$

Démonstration.

Avec (4.20) et la remarque 4.1, nous voyons que

$$\int_0^T [\mathcal{R}e < B_i(t) u_{ik}(t),\ u_{ik}(t) > + \mu_i \,|\, u_{ik}(t) \,|^p]\, dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^T [\mathcal{R}e < B_i(t) u(t),\ u(t) > + \mu_i \,|\, u(t) \,|^p]\, dt,$$

et, avec l'hypothèse (4–i) cela signifie que $\| u_{ik} \|_{L_p(W_i)} \rightarrow \| u \|_{L_p(W_i)}$.

L'espace W_i étant uniformément convexe, $L_p(W_i)$ l'est également, et le théorème en résulte.

5. – Exemples.

5.1. – *Exemple* 1: *Opérateur à partie principale linéaire.*

Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ et soit $H = L_2(\Omega)$ avec le produit scalaire habituel.

Nous posons

$$V = H_0^1(\Omega)\ ([18]), \qquad W = L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega),$$

$$\| u \|_W = \left(| u |^p + \int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Nous prenons $m = n + 1$ et

pour $i = 1, \ldots, n,$

$$V_i = H_0(D_i;\ \Omega)\ ([18]), \qquad W_i = H, \qquad B_i(t) \equiv 0,$$

$$a_i(t;\ u,\ v) = \int_\Omega a_i(x,\ t) D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx,$$

les fonctions $a_i(x,\ t)$ appartenant à $L_\infty(Q_T)$ et vérifiant

$$\mathcal{R}e\, a_i(x,\ t) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

pour $i = n + 1,$

$V_i = H,\ W_i = W,\ a_i(t;\ u,\ v) \equiv 0,\ B_i(t) = B_i,$ indépendant de t et défini par

$$(5.1) \qquad < B_i u,\ v > = \int_\Omega | u(x) |^{p-2} u(x) \overline{v(x)} dx, \qquad \forall\ u,\ v \in W.$$

La vérification des hypothèses des nº 1 et 2 se fait sans difficulté; (2-iv) définit $a(t;\, u,\, v)$, (2-v) définit $B(= B_{n+1})$; pour vérifier (1-vii) on utilise l'inégalité suivante

$$(5.2) \qquad \mathcal{R}e\, (| \xi |^{p-2} \xi - | \eta |^{p-2} \eta) (\bar{\xi} - \bar{\eta}) \geq 0, \qquad \forall\ \xi,\ \eta \in \boldsymbol{C}.$$

Problème exact.

Soient $u_0 = u_0(x) \in L_2(\Omega)$ et $f = f(x,\ t)$ donnés. La solution $u = u(x,\ t)$ du problème exact (problème 1) vérifie:

$$(5.3) \qquad u \in L_\infty(L_2(\Omega)) \cap (L_2(H_0^1(\Omega)) \cap L_p(Q_T)$$

$$(5.4) \qquad u'(x,\ t) - \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x,\ t) D_i u(x,\ t)] + | u(x,\ t) |^{p-2} u(x,\ t) =$$
$$= f(x,\ t) \quad \text{dans} \quad Q_T$$

([18]) Notations de l'exemple 2, chap. I.

(5.5) $u(x, 0) = u_0(x)$

(5.6) $u(x, t) = 0$ sur Σ_T

(condition aux limites non formelle si Ω est assez régulier [15]).

Problème approché.

Les fonctions $u_{ik} = u_{ik}(x, t)$ vérifient les conditions initiales successives habituelles et

pour $i = 1, \dots, n$,

(5.7) $u_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)), \quad D_i u_{ik} \in L_2(Q_T)$

(5.8) $u'_{ik}(x, t) - D_i[a_i(x, t) D_i u_{ik}(x, t)] = f_i(x, t)$

dans $\Omega \times]rk, (r+1)(r+1)k[, \qquad r = 0, \dots, N$

(5.9) $u_{ik}(x, t) \cos(\nu, x_i) = 0$ sur Σ_T,

(condition aux limites non formelle si Ω est assez régulier; cf. App. th. 2.2).

pour $i = n + 1$,

(5.10) $u_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)) \cap L_p(Q_T)$

(5.11) $u'_{ik}(x, t) + |u_{ik}(x, t)|^{p-2} u_{ik}(x, t) = f_i(x, t)$

dans $\Omega \times]rk, (r+1)k[, \qquad r = 0, \dots, N.$

REMARQUE 5.1.

L'équation (5.11) *est une équation différentielle en t, x apparaissant seulement comme un paramètre. Si* $f_{n+1} = 0$, *cette équation s'intègre explicitement.*

Résultats de convergence.

Les théorèmes 4.1 et 4.2 donnent les résultats de convergence suivants: Lorsque $k \to 0$,

$$\begin{cases} u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega |u_{ik}(x, t) - u(x, t)|^2\, dx \to 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T], \\ i = 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_i u_{ik} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_2(Q_T) \quad \text{fort}, \qquad i = 1, \dots, n \\ u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_p(Q_T) \quad \text{fort}, \qquad i = n+1. \end{cases}$$

5.2. - EXEMPLE 2: *Opérateur à partie principale non linéaire.*

Soit encore Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ et $H = L_2(\Omega)$. Nous posons:

$$V = H, \qquad a(t;\, u,\, v) = 0,$$

$$W = \{\, v \mid v \in L_2(\Omega),\quad D_i v \in L_p(\Omega),\quad i = 1, \dots, n \,\},$$

$$\| v \|_W = \left(| v |^p + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | D_i v(x) |^p \, dx \right)^{1/p}.$$

L'opérateur $B(t) = B$ est indépendant de t et défini par

$$< Bu,\, v> = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | D_i u(x) |^{p-2} D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx, \qquad \forall\, u,\, v \in W.$$

Nous prenons $m = n$ et, pour $i = 1, \dots, n$,

$$V_i = H, \qquad a_i(t;\, u,\, v) = 0,$$

$$W_i = \{\, v \mid v \in L_2(\Omega),\quad D_i v \in L_p(\Omega) \,\},$$

$$\| v \|_{W_i} = \left(| v |^p + \int_\Omega | D_i v(x) |^p \, dx \right)^{1/p}.$$

L'opérateur $B_i(t) = B_i$ est indépendant de t et défini par

$$< B_i u,\, v> = \int_\Omega | D_i u(x) |^{p-2} D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx, \qquad \forall\, u,\, v \in W_i.$$

On montre dans l'appendice que W est dense dans W_i. La vérification des hypothèses (1-vi)-(1-ix) (et des hypothèses analogues pour $B_i(t)$) est classique. Les autres hypothèses se vérifient sans difficulté.

Problème exact.

Soient $u_0 = u_0(x) \in L_2(\Omega)$ et $f = f(x,\, t)$ donnés. La solution $u = u(x,\, t)$ du problème 1 vérifie:

(5.12) $$u \in L_\infty(L_2(\Omega)), \qquad D_i u \in L_p(Q_T), \qquad i = 1, \dots, n$$

(5.13) $$u'(x,\, t) - \sum_{i=1}^{n} D_i[| D_i u(x,\, t) |^{p-2} D_i u(x,\, t)] = f(x,\, t) \quad \text{dans} \quad Q_T,$$

la condition initiale

(5.14) $$u(x,\, 0) = u_0(x),$$

et la condition aux limites (formelle)

$$\sum_{i=1}^{n} | D_i u(x, t) |^{p-2} D_i u(x, t) \cdot \cos(\nu, x_i) = 0 \text{ sur } \Sigma_T . \tag{5.15}$$

Problème approché.

Les fonctions $u_{ik} = u_{ik}(x, t)$ vérifient les conditions initiales successives habituelles et

$$u_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)), \qquad D_i u_{ik} \in L_p(Q_T) \tag{5.16}$$

$$u'_{ik}(x, t) - D_i[| D_i u_{ik}(x, t) |^{p-2} D_i u_{ik}(x, t)] = f_i(x, t) \tag{5.17}$$

$$\text{dans} \quad \Omega \times]rk, (r+1)k[, \qquad r = 0, \ldots, N,$$

et la condition aux limites formelle

$$| D_i u_{ik}(x, t) |^{p-2} D_i u_{ik}(x, t) \cdot \cos(\nu, x_i) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T . \tag{5.18}$$

Résultats de convergence.

Appliqués à cet exemple, les théorèmes 4.1 et 4.2 donnent les résultats de convergence suivants:

Lorsque $k \to 0$, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{cases} u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ D_i u_{ik} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_p(Q_T) \quad \text{fort} \\ \displaystyle\int_\Omega | u_{ik}(x, t) - u(x, t) |^2 \, dx \to 0, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

§ 2. - **Approximations Discrètes.**

6. - **Hypothèses de discrétisation.**

6.1. - Nous nous donnons un espace de Hilbert $\tilde{H}$ dont H est un sous-espace hilbertien et dont nous notons encore (f, g) le produit scalaire.

Nous nous donnons pour $i = 1, \ldots, m$, un espace de Hilbert Φ_i et un espace de Banach réflexif Ψ_i; nous appelons F_i l'espace de Hilbert $\tilde{H} \times \Phi_i$ et G_i l'espace de Banach $\tilde{H} \times \Psi_i$; π_i désignera indifféremment la projection canonique de F_i sur $\tilde{H}$ ou de G_i sur $\tilde{H}$. Nous supposons qu'il existe un isomorphisme $\bar{\omega}_i$ (resp. ω_i) de V_i dans F_i (resp. de W_i dans G_i) tel que $\pi_i \cdot \bar{\omega}_i$ (resp. $\pi_i \cdot \omega_i$) soit l'identité.

Pour $i = 1, \dots, m$, soit $\tilde{a}_i(t; u, v)$, $t \in [0, T]$, une famille de formes sesquilinéaires continues sur F_i, vérifiant les conditions suivantes

$$\text{(6-i)} \qquad \begin{cases} \tilde{a}_i(t;\ \bar{\omega}_i u,\ \bar{\omega}_i v) = a_i(t;\ u,\ v) \\ \forall\, u,\ v \in V_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

$$\text{(6-ii)} \qquad \begin{cases} |\tilde{a}_i(t;\ u,\ v)| \leq M_i \| u \|_{F_i} \| v \|_{F_i} \\ \forall\, u,\ v \in F_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

$$\text{(6-iii)} \qquad \mathcal{R}e\, \tilde{a}_i(t;\ u,\ u) \geq 0, \qquad \forall\, u \in F_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].$$

$$\text{(6-iv)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e\, \tilde{a}_i(t;\ u,\ u) + \lambda_i |\pi_i u|^2 \geq \alpha_i \| u \|^2_{F_i} \\ \forall\, u \in F_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

Pour $i = 1, \dots, m$, soit $\tilde{B}_i(t)$, $t \in [0, T]$, une famille d'opérateurs qui appliquent G_i dans G'_i et qui vérifient les propriétés suivantes:

$$\text{(6-v)} \qquad \begin{cases} <\tilde{B}_i(t)(\omega_i u),\ \omega_i v> \ = \ <B_i(t)u,\ v> \\ \forall\, u,\ v \in W_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

(6-vi) Pour presque tout t, $\tilde{B}_i(t)$ est continu des sous-espaces de dimension finie de G_i dans G'_i faible.

$$\text{(6-vii)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e <\tilde{B}_i(t)u - \tilde{B}_i(t)v,\ u - v> \geq 0 \\ \forall\, u,\ v \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T] \end{cases}$$

$$\text{(6-viii)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e <\tilde{B}_i(t)u,\ u> + \mu_i |\pi_i u|^p \geq \beta_i \| u \|^p_{G_i} \\ \forall\, u \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

Les hypothèses précédentes sont semblables aux hypothèses faites sur les opérateurs $B_i(t)$. Nous ferons en outre l'hypothèse suivante

$$\text{(6-ix)} \qquad \| \tilde{B}_i(t)u \|_{G'_i} \leq N_i \| u \|^{p/p'}_{G_i}, \qquad \forall\, u \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].$$

Faisant $u = 0$ dans (6-ix), nous voyons que $\tilde{B}_i(t) \cdot 0 = 0$. Faisant alors $v = 0$ dans (6-vii), il vient

$$\text{(6-x)} \qquad \mathcal{R}e <\tilde{B}_i(t)u,\ u> \geq 0, \qquad \forall\, u \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].$$

6.2. - Soit $\mathcal{H} = (]0, 1])^n$ et, pour chaque $h \in \mathcal{H}$, soit:

— V_h un espace vectoriel sur $\boldsymbol{C}$ de dimension finie;

— r_h une application linéaire de H dans V_h et q_h une application linéaire biunivoque de V_h dans $\tilde{H}$ avec

$$|q_h r_h|_{\mathcal{L}(H, \tilde{H})} \leq c_2 . \tag{6-xi}$$

constante indépendante de h;

— p_{ih} une application linéaire biunivoque de V_h dans F_i telle que $\pi_i \cdot p_{ih} = q_h$, $i = 1, \ldots, m$;

— q_{ih} une application linéaire biunivoque de V_h dans G_i telle que $\pi_i \cdot q_{ih} = q_h$, $i = 1, \ldots, m$.

Les applications q_h, p_{ih}, q_{ih} étant injectives, les produits scalaires

$$(u_h, v_h)_h = (q_h u_h, q_h v_h)$$

$$((u_h, v_h))_{ih} = ((p_{ih} u_h, p_{ih} v_h))_{F_i}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

sont des produits scalaires hilbertiens sur V_h et

$$\| q_{ih} u_h \|_{G_i}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

est une norme sur V_h.

Hypothèses de consistance $(h \to 0)$.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

(6-xii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un sous espace } \mathcal{V} \text{ dense dans } V \cap W, \text{ tel que, pour tout } v \in \mathcal{V}, \text{ lorsque } h \to 0 \\ p_{ih} r_h v \to \bar{\omega}_i v \quad \text{dans } F_i \text{ fort}, \\ q_{ih} r_h v \to \bar{\omega}_i v \quad \text{dans } G_i \text{ fort}, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{array} \right.$

(6-xiii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } h' \text{ une suite qui tend vers 0. Soit } \varphi \in L_1(\tilde{H}) \text{ et } \varphi_{h'} \text{ une suite d'applications de } [0, T] \to V_{h'}, \text{ telles que, lorsque } h' \to 0 \\ q_{h'} \varphi_{h'} \to \varphi \quad \text{dans } L_1(\tilde{H}) \text{ faible}. \\ \text{Alors } \varphi \in L_1(H) \text{ [c'.à.d. } \varphi(t) \in H \text{ p.p.].} \end{array} \right.$

(6-xiv) $\left\{\begin{array}{l} \text{Soit } h' \text{ une suite qui tend vers 0. Soient } \varphi_{ih'},\ i=1, \ldots, m, \\ \text{des suites d'applications de } [0, T] \mapsto V_{h'}, \text{ telles que, lorsque } h' \to 0, \\ \text{pour } i = 1, \ldots, m, \\ q_{h'}\varphi_{ih'} \to \psi \quad \text{dans} \quad L_2(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ p_{ih'}\varphi_{ih'} \to \varphi_i \quad \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{faible.} \\ \text{Alors } \psi = \pi_i\varphi_i \in L_2(V) \text{ et } \varphi_i(t) = \bar{\omega}_i\psi(t), \text{ p.p. } t \in [0, T],\ i = 1, \ldots, m. \end{array}\right.$

(6-xv) $\left\{\begin{array}{l} \text{Même hypothèse que (6-xiv), } \bar{\omega}_i,\ L_2(F_i),\ L_2(V), \text{ étant remplacés} \\ \text{par } \omega_i,\ L_p(G_i),\ L_p(W). \end{array}\right.$

REMARQUE 6.1.

D'après (6-xi) et (6-xii), lorsque $h \to 0$

6.1) $$q_h r_h u \to u \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{fort}, \qquad \forall\, u \in H.$$

D'après (6-xiii):

(6.2) $\left\{\begin{array}{l} \text{Si} \quad \varphi_{h'} \in V_{h'} \quad \text{et si} \quad q_{h'}\varphi_{h'} \to \varphi \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{faible} \\ \text{lorsque} \quad h' \to 0, \quad \text{alors} \quad \varphi \in H. \end{array}\right.$

7. - Problème approché discret.

7.1. - Le paramètre k ayant toujours la même signification, nous posons

(7.1) $$\left\{\begin{array}{l} a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{a}_i(t;\ p_{ih}u_h,\ p_{ih}v_h)dt \\ b_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} < \tilde{B}_i(t) \cdot (q_{ih}u_h),\ q_{ih}v_h > dt \\ \forall\, u_h,\ v_h \in V_h, \qquad r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{array}\right.$$

Dans le cas des approximation discrètes, nous supposons pour simplifier que $f_i \in L_2(H)$ et nous posons

(7.2) $$f_h^{q+\frac{i}{m}} = \frac{1}{k}\int_{qk}^{(q+1)k} r_h f_i(t)dt.$$

Nous construisons par récurrence, comme au chap. I, la famille d'éléments $u_h^{r+\frac{i}{m}} \in V_h$.

Nous partons de

$$u_h^0 = r_h u_0 \tag{7.3}$$

puis, $u_h^0, \ldots, u_h^{r+\frac{i-1}{m}}$, étant déterminés, nous définissons $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ comme la solution dans V_h de:

$$\frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}}, v_h\right)_h + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right) + b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right) = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right)_h, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{7.4}$$

Il n'est pas évident qu'il existe un élément unique $u_h^{r+\frac{i}{m}} \in V_h$ qui vérifie (7.4): nous démontrons ce point dans la suite (section 7.2). Ce résultat étant admis pour l'instant, nous définissons les fonctions approchées u_{ih} en posant

$$\begin{cases} u_{ih}(t) = u_h^{r+\frac{i}{m}} \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[\\ r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{7.5}$$

Nous nous intéresserons aux problèmes de la stabilité de ces fonctions approchées et de leur convergence vers la solution u du problème 1.

REMARQUE 7.1.

Au lieu de (7.4) nous pourrions considérer comme au chap. I des schémas de la forme

$$\frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}}, v_h\right)_h + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(\theta u_h^{r+\frac{i}{m}} + (1-\theta)u_h^{r+\frac{i-1}{m}}, v_h\right) + b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(\theta u_h^{r+\frac{i}{m}} + (1-\theta)u_h^{r+\frac{i-1}{m}}, v_h\right) = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right)_h, \quad \forall v_h \in V_h,$$

$\theta \in [0, 1]$; on retrouve (7.4) pour $\theta = 1$.

L'étude qui suit s'adapte sans difficulté aux cas où $\theta \in [1/2, 1]$. Les schémas correspondant à $\theta \in [0, 1/2[$ ne semblent présenter ici que peu d'intérêt.

Au n° 11 nous étudions d'autres schémas dépendant d'un paramètre θ, $\theta \in [0, 1]$.

7.2. – *Existence et unicité d'une solution de* (7.4).

LEMME 7.1.

$u_h^0, \ldots, u_h^{r+\frac{i-1}{m}}$ *étant supposés connus, il existe un élément* $u_h^{r+\frac{i}{m}} \in V_h$ *et un seul qui vérifie* (7.4).

Démonstration.

L'équation (7.4) peut s'écrire sous la forme

$$\text{(7.6)} \quad \begin{cases} \left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right)_h + k a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right) + k b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h\right) = \\ \qquad = L_h(v_h), \qquad \forall\, v_h \in V_h, \\ L_h \text{ forme anti-linéaire sur } V_h \text{ (connue).} \end{cases}$$

En raison de (6-iii) et (6-vii), l'équation (7.6) ne peut posséder plus d'une solution. L'existence d'une solution $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ résulte d'un théorème de LERAY-LIONS [11]. En vertu de ce théorème, V_h étant de dimension finie, l'équation (7.6) possède une solution, pourvu que les deux conditions suivantes soient réalisées:

$$\text{(7.7)} \qquad \lim_{|w_h|_h \to +\infty} \frac{|w_h|_h^2 + k a_h^{r+\frac{i}{m}}(w_h, w_h) + k b_h^{r+\frac{i}{m}}(w_h, w_h)}{|w_h|_h} = +\infty.$$

$$\text{(7.8)} \quad \begin{cases} \text{L'application } w_h \mapsto (w_h, v_h)_h + k a_h^{r+\frac{i}{m}}(w_h, v_h) + k b_h^{r+\frac{i}{m}}(w_h, v_h) \text{ est} \\ \text{continue pour tout } v_h \in V_h. \end{cases}$$

La condition (7.7) est une condition de coercivité et résulte immédiatement de (6-iii) et (6-x). L'application $w_h \mapsto (w_h, v_h)_h + k a_h^{r+\frac{i}{m}}(w_h, v_h)$ étant linéaire est évidemment continue. Il ne reste plus alors qu'à vérifier le

LEMME 7.2.

Pour tout $v_h \in V_h$, *pour* $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$, *l'application* $w_h \mapsto$ $\mapsto b_h^{r+\frac{i}{m}}(w_h, v_h)$ *est continue.*

Démonstration.

Soit w_{hn} une suite qui tend vers w_h dans V_h (pour l'une quelconque des normes de V_h, puisque cet espace est de dimension finie). Nous devons démontrer ceci:

$$\text{(7.9)} \qquad \int_{rk}^{(r+1)k} < \tilde{B}_i(t) \cdot (q_{ih} w_{hn}),\ q_{ih} v_h > dt \to$$
$$\to \int_{rk}^{(r+1)k} < \tilde{B}_i(t) \cdot (q_{ih} w_h),\ q_{ih} v_h > dt.$$

Or $q_{ih}V_h$ étant un sous-espace de dimension finie de G_i, nous avons, d'après (6-vi):

$$<\tilde{B}_i(t)\cdot(q_{ih}w_{hn}),\ q_{ih}v_h> \to <\tilde{B}^i(t)\cdot(q_{ih}w_h),\ q_{ih}v_h>,$$

lorsque $n\to\infty$, pour presque tout t.

En outre avec (6-ix),

$$|<\tilde{B}_i(t)\cdot(q_{ih}w_{hn}),\ q_{ih}v_h>|\leq N_i\|q_{ih}w_{hn}\|_{G_i}^{p/p'}\|q_{ih}v_h\|_{G_i},$$

letceci demeure borné indépendamment de t et n, lorsque $n\to\infty$; (7.9) résulte alors du théorème de Lebesgue.

REMARQUE 7.2.

Le théorème de [11] que nous avons utilisé pour démontrer l'existence d'une solution de (7.6) est un théorème de point fixe et ne permet pas de construire effectivement la solution de (7.6). Des méthodes itératives permettant de déterminer cette solution sont développées entre autres par BREZIS et SIBONY [4].

8. - Estimations à priori. Théorème de stabilité.

8.1. - *Un lemme.*

LEMME 8.1.

Supposons qu'une famille de nombres positifs $\psi^{r+\frac{i}{m}}$, $r=0,\dots,N$, $i=$ $=1,\dots,m$, *vérifient les inégalités suivantes*:

$$\psi^{r+\frac{i}{m}}-\psi^{r+\frac{i-1}{m}}\leq k\sigma^{r+\frac{i}{m}}+kd_1\psi^{r+\frac{i}{m}}+kd_2\psi^{r+\frac{i-1}{m}} \tag{8.1}$$

avec $\sigma^{r+\frac{i}{m}}\geq 0,\ d_1\geq 0,\ d_2\geq 0.$

Alors pour $k\leq k_0<\dfrac{1}{d_1}$, *nous avons*:

$$\left\{\begin{aligned}&\psi^{q+\frac{j}{m}}\leq\exp(mTd_3)\left(\psi^0+k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\sigma^{r+\frac{i}{m}}\right),\\&d_3=d_2+\frac{d_1}{1-d_1k_0},\qquad q=0,\dots,N,\qquad j=1,\dots,m.\end{aligned}\right. \tag{8.2}$$

Démonstration.

Nous pouvons écrire (8.1) sous la forme

$$\frac{1-d_1k}{1+d_2k}\psi^{r+\frac{i}{m}}\leq\psi^{r+\frac{i-1}{m}}+\frac{k}{1+d_2k}\sigma^{r+\frac{i}{m}}.$$

On vérifie aisément que pour $k \leq k_0 < \dfrac{1}{d_1}$,

$$\frac{1-d_1k}{1+d_2k} \geq \exp(-kd_3),$$

et alors

$$\exp(-kd_3)\psi^{r+\frac{i}{m}} \leq \psi^{r+\frac{i-1}{m}} + k\sigma^{r+\frac{i}{m}}.$$

Après multiplication par $\exp[-kd_3(mr+i-1)]$, nous en déduisons:

$$\begin{aligned}\exp[-kd_3(mr+i)]\cdot\psi^{r+\frac{i}{m}} \leq \\ \leq \exp[-kd_3(mr+i-1)]\cdot\psi^{r+\frac{i-1}{m}} + k\sigma^{r+\frac{i}{m}}.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Pour q et j donnés, nous ajoutons les inégalités (8.3) pour

$$r=0, \ldots, q, \qquad i=1, \ldots, m, \qquad r+\frac{i}{m} \leq q+\frac{j}{m}, \tag{8.4}$$

et nous obtenons:

$$\exp[-kd_3(mq+j)]\psi^{q+\frac{j}{m}} \leq \psi^0 + k\sum_{r,i}^{*}\sigma^{r+\frac{i}{m}},$$

où $\sum\limits_{r,i}^{*}$ désigne la sommation (8.4); (8.2) en résulte à fortiori.

8.2. - *Estimations à priori.*

LEMME 8.2.

Il existe une constante c_1' *indépendante de* k *et* h, *telle que, pour* $i=1, \ldots, m$,

$$\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \leq c_1' L, \qquad r=0, \ldots, N, \tag{8.5}$$

$$k\sum_{r=0}^{m} \left\| u^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq c_1' L, \tag{8.6}$$

$$k\sum_{r=0}^{N} \left\| q_{ih} u^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{G_i} \leq c_1'(L+L^{p/2}), \tag{8.7}$$

où

$$L = L(u_0, f_1, \ldots, f_m) = |u_0|^2 + \sum_{i=1}^{m}\int_0^T |f_i(t)|^2\, dt.$$

Démonstration.

Nous remplaçons v_h par $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ dans (7.4) et prenons la partie réelle de l'égalité obtenue. Il vient

$$
\begin{aligned}
(8.8)\qquad & \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 - \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \\
& + 2k\, \mathcal{R}e\, a_h^{r+\frac{i}{m}}\!\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) + 2k\, \mathcal{R}e\, b_h^{r+\frac{i}{m}}\!\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = \\
& = 2k\, \mathcal{R}e \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h .
\end{aligned}
$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
2k\, \mathcal{R}e \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h & \leq 2k \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \leq \\
& \leq 2kT \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + \frac{k}{2T} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 .
\end{aligned}
$$

Avec (6–iii) et (6–x), (8.8) donne alors

$$
\left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 - \left| u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 \leq 2kT \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + \frac{k}{2T} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 .
$$

Utilisant le lemme 8.1 avec $k_0 = T$, nous voyons que

$$
(8.9)\qquad \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} \right|_h^2 \leq (\exp m) \left(\left| u_h^0 \right|_h^2 + 2kT \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{m} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \right)
$$

pour $q = 0, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, m$.

Nous vérifions comme dans le lemme 13.1 du Chap. I que

$$
\left| u_h^0 \right|_h^2 + 2kT \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq c_2^2 \left(\left| u_0 \right|^2 + 2T \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \left| f_i(t) \right|^2 dt \right)
$$

et (8.5) en résulte.

Pour établir (8.6) et (8.7), nous ajoutons membre à membre toutes les égalités (8.8) pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$. Il vient

$$
\begin{aligned}
(8.10)\qquad & \left| u_h^{N+1} \right|_h^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \\
& + 2k\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left[a_h^{r+\frac{i}{m}}\!\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) + b_h^{r+\frac{i}{m}}\!\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) \right] \\
& = \left| u_h^0 \right|_h^2 + 2k\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ u_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h^2 .
\end{aligned}
$$

Utilisant (6-iv) et (6-viii), nous en déduisons

$$(8.11)\qquad 2k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left[\alpha_i\left\| u_h^{r+\frac{i}{m}}\right\|_{ih}^2+\beta_i\left\| q_{ih}u_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_{G_i}^{p}\right]\leq$$

$$\leq\left| u_h^0\right|_h^2+k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left[\left| f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2+(2\lambda_i+1)\left| u_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2+2\mu_i\left| u_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^p\right]$$

Compte tenu de ce qui précède, (8.6) et (8.7) découlent immédiamment de (8.11).

8.3. – *Théorème de Stabilité.*

A l'aide des fonctions u_{ih}, nous pouvons interpréter le lemme 8.2 sous la forme du théorème suivant:

THÉORÈME 8.1.

Sous les hypothèses des n° 1, 2 *et* 6, [(1-i)-(1-ix), (2-i)-(2-vi), (6-i)-(6-xi)], *pour* $i=1,\ldots,m$,

$$(8.11)\qquad \begin{cases} q_h u_{ih} & \textit{est}\quad L_\infty(\tilde H)\quad \textit{stable}\\ p_{ih}u_{ih} & \textit{est}\quad L_2(F_i)\quad \textit{stable}\\ q_{ih}u_{ih} & \textit{est}\quad L_p(G_i)\quad \textit{stable.}\end{cases}$$

8.4. – *Une autre estimation à priori.*

Nous aurons besoin dans la suite d'une estimation à priori supplémentaire résultant en fait des estimations à priori précédentes.

Considérons les opérateurs $\tilde B_{ik}(t)$ qui appliquent G_i dans G_i' et définis par

$$(8.12)\qquad \tilde B_{ik}(t)\cdot u=0_k(\tilde B_i(t)\cdot u),\qquad \forall\, u\in G_i,$$

soit [définition de 0_k en (16.1), ch. I]:

$$(8.13)\qquad \tilde B_{ik}(t)\cdot u=\frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k}\tilde B(s)\cdot u\,ds,\qquad \text{pour}\quad t\in[rk,(r+1)k[.$$

Nous posons

$$(8.14)\qquad \chi_{ih}(t)=\tilde B_{ik}(t)\cdot(q_{ih}u_{ih}(t)),$$

et nous avons alors le

LEMME 8.3.

Pour $i=1,\ldots,m$, $\chi_{ik}\in L_{p'}(G_i')$ *et demeure dans un ensemble borné de cet espace lorsque* k *et* $h\to 0$.

Démonstration.

La fonction $t \mapsto \chi_{ih}(t)$ est constante sur chaque intervalle $[rk, (r+1)k[$ et il est donc évident que $\chi_{ih} \in L_{p'}(G'_i)$.

Pour $t \in [rk, (r+1)k[$

$$\chi_{ih}(t) = \tilde{B}_{ik}(t) \cdot \left(q_{ih} u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{B}_i(s) \cdot \left(q_{ih} u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) ds,$$

et, avec (6–ix)

$$\| \chi_{ih}(t) \|_{G'_i} \leq N_i \left\| q_{ih} u_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{G_i}^{p/p'} = N_i \| q_{ih} u_{ih}(t) \|_{G_i}^{p/p'} .$$

Le lemme résulte alors du théorème 8.1.

9. – Théorème de convergence

9.1. – *Enoncé du théorème.*

Nous faisons encore l'hypothèse suivante [19]:

$$\text{(9–i)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \varphi(\cdot) \in L_p(G_i), \text{ alors } B_i(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_{p'}(G'_i); \text{ pour chaque } k \text{ fixé} \\ \tilde{B}_{ik}(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_{p'}(G'_i) \text{ et, lorsque } k \to 0: \\ \tilde{B}_{ik}(\cdot)\varphi(\cdot) \to \tilde{B}_i(\cdot)\varphi(\cdot) \text{ dans } L_{p'}(G'_i) \text{ fort}, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{array} \right.$$

Le théorème de convergence s'énonce alors

THÉORÈME 9.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2, 6 *et* 9 [(1–i)–(1–ix), (2–i)–(2–vi), (6–i)–(6–xv), (9–i)]; *u désigne la solution du problème* 1.

Lorsque k et $h \to 0$, pour $i = 1, \ldots, m$,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_h u_{ih} \to u \quad \textit{dans} \quad L_\infty(\tilde{H}) \quad \textit{faible} \\ p_{ih} u_{ih} \to \bar{\omega}_i u \quad \textit{dans} \quad L_2(F_i) \quad \textit{fort} \\ q_{ih} u_{ih} \to \omega_i u \quad \textit{dans} \quad L_p(G_i) \quad \textit{fort} \end{array} \right.$$

$$q_h u_{ih}(t) \to u(t) \quad \textit{dans} \quad \tilde{H} \quad \textit{fort, pour tout} \quad t \in [0, T].$$

La démonstration du théorème 9.1 est donnée dans les sections 9.2 à 9.4. Elle présente des points communs avec les démonstrations du théorème 4.1 de ce chapitre et des théorèmes 15.1 et 18.1 du chapitre I.

---

[19] La propriété analogue pour les opérateurs $\tilde{A}_i(t)$ résulte des hypothèses précédentes (cf. lemme 16.2, chap. I).

REMARQUE 9.1.

Avec le théorème de Lebesgue, il résulte du théorème 9.1 que

$$(9.1)\qquad q_h u_{ih} \to u \quad \text{dans} \quad L_s(\tilde{H}) \quad \text{fort}, \qquad \forall\, s \in [1, \infty[, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Nous indiquerons dans la section 9.5 une condition suffisante pour que $q_{ih} u_{ih}$ converge vers $\omega_i u$ dans $L_p(G_i)$ fort.

9.2. - *Première partie de la démonstration.*

D'après le théorème 8.1 et le lemme 8.3, il existe une sous-suite $k' \to 0$, $h' \to 0$, telle que, pour $i = 1, \dots. m$:

$$(9.2)\qquad \begin{cases} q_{h'} u_{ih'} \to u_i & \text{dans} \quad L_\infty(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ p_{ih'} u_{ih'} \to \varphi_i & \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{faible} \\ q_{ih'} u_{ih'} \to \psi_i & \text{dans} \quad L_p(G_i) \quad \text{faible} \\ \chi_{ih'} \to \chi_i & \text{dans} \quad L_{p'}(G'_i) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

Nous allons prouver le

LEMME 9.1.

$$(9.3)\qquad u_1(t) = .. = u_m(t) \qquad (= w(t)) \quad \text{p.p.}$$

$$(9.4)\qquad w \in L_\infty(H) \cap L_2(V) \cap L_p(W)$$

$$(9.5)\qquad \varphi_i(t) = \bar{\omega}_i w(t), \; \psi_i(t) = \omega_i w(t), \qquad \text{p.p.}, \quad i = 1. \dots, m.$$

Démonstration.

En raison de (6-iii) et (6-x), l'égalité d'énergie (8.10) permet d'écrire

$$(9.6)\qquad \sum_{i=2}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 \leq$$
$$\leq | u_h^0 |_h^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left(\left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \right).$$

Avec les résultats démontrés au n° 8, nous voyons sans peine que le second membre de (9.6) est majoré par une expression $L_1 = L_1(u_0, f_1, \dots, f_m)$ indépendante de k et h. Multipliant alors (9.6) par k, nous obtenons

$$k \sum_{i=2}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 \leq k L_1 .$$

Cette inégalité peut être interprétée ainsi:

$$\sum_{i=2}^{m} \int_0^T | q_h u_{ih}(t) - q_h u_{(i-1)h}(t) |^2 \, dt \leq k L_1 .$$

Cela montre que, lorsque k et $h \to 0$,

$$q_h u_{ih} - q_h u_{(i-1)h} \to 0 \quad \text{dans} \quad L_2(H) \quad \text{fort}, \qquad i = 2, \ldots, m,$$

et (9.3) en résulte.

Ayant montré (9.3), (9.4) et (9.5) résultent immédiatement des hypothèses (6-xiv) et (6-xv).

9.3. - *Deuxième partie de la démonstration*: $w(t) = u(t)$ p.p.

Soit t fixé et q le plus grand entier inférieur ou égal à t/k ($t \in [qk, (q+1)k[$). Ajoutant membre à membre les égalités (7.4) pour $r = 0, \ldots, q$, $i = 1, \ldots, m$, nous obtenons [comparer à (17.9), ch. I]:

$$(9.7) \qquad (q_h u_{mh}(t), q_h v_h) = (q_h r_h u_0, q_h v_h) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} [(f_{ih}(s), q_h v_h) - \tilde{a}_{ik}(s; p_{ih} u_{ih}(s), p_{ih} v_h) - \langle \chi_{ih}(s), q_{ih} v_h \rangle] ds$$

où $f_{ih}(s)$ et $\tilde{a}_{ih}(s; u, v)$ sont définis comme au chap. I [(16.3) et (17.5)].

Nous écrivons (9.7) avec $v_h = r_h v$, $v \in \mathcal{V}$ et, t et v étant fixés, nous passons à la limite avec la suite k', h'.

Avec le même raisonnent qu'au chapitre I, nous voyons que

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k'} \tilde{a}_{ik'}(s; p_{ih'} u_{ih'}(s), p_{ih'} r_{h'} v) ds \to \\ \to \int_0^t a(s; w(s), v) ds$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} (f_{ih'}(s), q_{h'} r_{h'} v) ds \to \int_0^t (f(s), v) ds$$

$$(q_{h'} r_{h'} u_0, q_{h'} r_{h'} v) \to (u_0, v).$$

D'autre part, les intégrales

$$\int_0^{(q+1)k'} <\chi_{ih}(s),\ q_{ih} r_h v> ds$$

peuvent être écrites sous la forme

$$\int_0^T <\chi_{ih'}(s),\ \psi_{[(q+1)k']}(s) q_{ih'} r_{h'} v> ds,$$

$\psi_\xi =$ fonction caractéristique de $[0,\ \xi]$ $(\xi > 0)$. Avec l'hypothèse (6-xii) nous voyons que

$$\psi_{[(q+1)k]} q_{ih} r_h v \to \psi_t \omega_i v \quad \text{dans} \quad L_p(G_i) \quad \text{fort},$$

et, avec (9.2), nous voyons que les intégrales considérées tendent respectivement vers

$$\int_0^T <\chi_i(s),\ \psi_t(s)\omega_i v> ds = \int_0^t <\chi_i(s),\ \omega_i v> ds.$$

Il en résulte que le second membre de (9.7) (et donc aussi le premier), tend vers une limite $g(t)$,

$$g(t) = (u_0,\ v) + \int_0^t (f(s),\ v) ds - \int_0^t a(s;\ w(s),\ v) ds - \sum_{i=1}^m \int_0^t <\chi_i(s),\ \omega_i v> ds. \tag{9.8}$$

Ainsi pour tout $t \in [0,\ T]$, $(q_{h'} u_{mh'}(t),\ q_{h'} r_{h'} v)$ tend vers $g(t)$ et, d'après (6-xi) et le théorème 8.1, les fonctions $t \mapsto (q_{h'} u_{mh'}(t),\ q_{h'} r_{h'} v)$ sont essentiellement bornées sur $[0,\ T]$, indépendamment de k et h. Dans ces conditions, soit φ une fonction scalaire continue sur $[0,\ T]$ $(\varphi \in \mathcal{C})$: d'après ce qui précède et le théorème de Lebesgue, on a

$$\int_0^T (q_{h'} u_{mh'}(t),\ q_{h'} r_{h'} v) \varphi(t) dt \to \int_0^T g(t) \varphi(t) dt.$$

On vérifie facilement avec (6.1) que $\varphi_{q h'} r_{h'} v \to \varphi v$ dans $L_1(\tilde{H})$ et avec (9.2) et (9.3), on a aussi

$$\int_2^T (q_{h'} u_{mh'}(t),\ q_{h'} r_{h'} v) \varphi(t) dt \to \int_0^T (w(t),\ v) \varphi(t) dt.$$

Par comparaison

$$\int_0^T g(t)\varphi(t)dt = \int_0^T (w(t),\ v)\varphi(t)dt, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C},$$

et donc

$$g(t) = (w(t),\ v) \quad \text{p.p.}$$

L'égalité (9.8) devient alors

$$(w(t),\ v) + \int_0^t a(s;\ w(s),\ v)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t <\chi_i(s),\ \omega_i v> ds =$$

$$= (u_0,\ v) + \int_0^t (f(s),\ v)ds, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].$$

Cette égalité valable pour tout $v \in \mathcal{V}$ est encore valable par continuité, pour tout $v \in V \cap W$ et il en résulte l'égalité

$$w(t) + \int_0^t A(s)w(s)ds + \int_0^t \chi(s)ds = u_0 + \int_0^t f(s)ds, \quad \text{p.p.,} \tag{9.9}$$

où

$$\chi = \sum_{i=1}^{m} \chi_i^*, \qquad \chi_i^* = \omega_i^* \chi_i,$$

$\omega_i^* \in \mathcal{L}(G_i',\ W_i')$, opérateur linéaire transposé de ω_i.

Avec (9.9), nous voyons que w est p.p. égale à une fonction w_* continue de $[0,\ T]$ dans $(V \cap W)'$ et vérifiant $w_*(0) = u_0$. Par dérivation de (9.9) nous avons

$$w'_*(t) + A(t)w_*(t) + \chi(t) = f(t). \tag{9.10}$$

Pour conclure que $w_* = u$, il nous suffit donc de montrer que

$$\chi = Bw_*. \tag{9.11}$$

C'est l'objet des lemmes qui suivent.

LEMME 9.2.

La fonction w_* est continue de $[0,\ T]$ dans H et

$$|\, w_*(T)\,|^2 + 2\, \mathcal{R}e \int_0^T [a(t;\ w(t),\ w(t)) + <\chi(t),\ w(t)>]dt = \tag{9:12}$$

$$= |u_0|^2 + 2\,\mathcal{R}e\int_0^T <f(t), w(t)>\,dt.$$

Même démonstration que pour le lemme 4.2.

LEMME 9.3.

Pour $i = 1, \ldots, m$, *pour tout* $t \in [0, T]$,

(9.13) $$q_{h'}u_{ih'}(t) \to w_*(t) \quad \text{dans } \tilde{H} \text{ faible.}$$

Même démonstration que pour le lemme 17.2, ch. I.

Nous allons maintenant démontrer un résultat plus précis que (9.11).

LEMME 9.4.

$$\chi_i^* = B_i w, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Démonstration.

Comme pour le lemme 4.4., étant données m fonctions φ_j vérifiant

(9.14) $$\varphi_j \in \mathcal{C}(H) \cap L_2(V) \cap L_p(W_j), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

nous considérons l'expression suivante [20]:

$$\begin{aligned} Y_{h\varphi} = {} & |\varphi(T) - q_h u_h^{N+1}|^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^N \left| u_h^{r+\frac{j}{m}} - u_h^{r+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + \\ & + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^m \int_0^T a_{jk}(t;\ \bar{\omega}_j\varphi(t) - p_{jh}u_{jh}(t),\ \bar{\omega}_j\varphi(t) - p_{jh}u_{jh}(t))dt + \\ & + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^m \int_0^T < \tilde{B}_{jk}(t)\cdot(\omega_j\varphi_j(t)) - \tilde{B}_{jk}(t)\cdot(q_{jh}u_{jh}(t)),\ (\omega_j\varphi_j(t)) - (q_{jh}u_{jh}(t))> dt \end{aligned}$$

où

$$\varphi = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \varphi_i.$$

Nous écrivons

$$Y_{h\varphi} = Y_{h\varphi}^1 + Y_{h\varphi}^2 + Y_{h\varphi}^3,$$

$$Y_{h\varphi}^1 = |\varphi(T)|^2 + 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^m \int_0^T a_{jk}(t;\ \bar{\omega}_j\varphi(t),\ \bar{\omega}_j\varphi(t))dt +$$

---

[20] Pour la définition de $\tilde{a}_{ik}(t;\ u, v)$, cf. (16.3), Ch. I, pour la définition de $\tilde{B}_{ik}(t)$, cf. (8.12).

$$+ 2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T <\tilde{B}_{jk}(t)\cdot(\omega_j\varphi_j(t)),\ (\omega_j\varphi_j(t))>\,dt$$

$$Y^2_{h\varphi} = -\,2\,\Re e\,(\varphi(T),\ q_h u_h^{N+1}) -$$

$$-\,2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T [\tilde{a}_{jk}(t;\ \bar{\omega}_j\varphi(t),\ p_{jh}u_{jh}(t)) + \tilde{a}_{jk}(t;\ p_{jh}u_{jh}(t),\ \bar{\omega}_j\varphi(t))]dt -$$

$$-\,2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T [<\tilde{B}_{jk}(t)\cdot(\omega_j\varphi_j(t)),\ q_{jh}u_{jh}(t)> + <\tilde{B}_{jk}(t)\cdot(q_{jh}u_{jh}(t)),\ \omega_j\varphi_j(t)>]dt$$

$$Y^3_{h\varphi} = |\, q_h u_h^{N+1}\,|^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=0}^{N} \left| u_h^{r+\frac{j}{m}} - u_h^{r+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 +$$

$$+ 2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T \tilde{a}_{jk}(t;\ p_{jh}u_{jh}(t),\ p_{jh}u_{jh}(t))dt +$$

$$+ 2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T <\tilde{B}_{jk}(t)\cdot(q_{jh}u_{jh}(t)),\ q_{jh}u_{jh}(t)>\,dt.$$

Le passage à la limite se fait sans difficulté pour $Y^1_{h\varphi}$, grâce au lemme 16.3 du ch. I et à (9-i):

$$\lim_{k,\,h\to 0} Y^1_{h\varphi} = Y^1_\varphi = |\,\varphi(T)\,|^2 + 2\,\Re e \int_0^T a(t;\ \varphi(t),\ \varphi(t))\,dt +$$

$$+ 2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T <B_j(t)\varphi_j(t),\ \varphi_j(t)>\,dt.$$

Pour $Y^2_{h'\varphi}$, on utilise le lemme 16.3 du Ch. I, (9-i), (9.2) et le lemme 9.3 ci-dessus; alors

$$\lim_{k',\,h'\to 0} Y^2_{h'\varphi} = Y^2_\varphi = -\,2\,\Re e\,(\varphi(T),\ w_*(T)) -$$

$$-\,2\,\Re e \int_0^T [a(t;\ \varphi(t),\ w(t)) + a(t;\ w(t),\ \varphi(t))]\,dt -$$

$$-\,2\,\Re e \sum_{j=1}^{m} \int_0^T [<B_j(t)\varphi_j(t),\ w(t)> + <\chi_j^*(t),\ \varphi_j(t)>]\,dt.$$

Nous transformons $Y^3_{h\varphi}$ à l'aide de l'égalité d'énergie (8.10); nous passons à la limite et, utilisant (9.12), nous obtenons

$$\lim_{k', h' \to 0} Y^3_{h'\varphi} = Y^3_\varphi = |w_*(T)|^2 + 2\,\mathcal{Re}\int_0^T a(t;\ w(t),\ w(t))dt +$$
$$+ 2\,\mathcal{Re}\int_0^T < \chi(t),\ w(t) > dt.$$

Regroupant ces résultats, nous en concluons que

$$\lim_{k', h' \to 0} Y_{h'\varphi} = Y_\varphi = |\varphi(T) - w_*(T)|^2 +$$
$$+ 2\,\mathcal{Re}\sum_{j=1}^m \int_0^T < B_j(t)\varphi_j(t) - \chi_j^*(t),\ \varphi_j(t) - w(t) > dt.$$

En raison de (6–iii) et (6–viii), l'expression $Y_{h\varphi}$ est positive ou nulle. Nous en concluons, à la limite, que Y_φ est positif ou nul quelles que soient les fonctions φ_j vérifiant (9.14). La démonstration du lemme se termine alors comme dans le lemme 4.4.

Avec ce lemme, nons pouvons affirmer que

$$w_* = u.$$

Puisque la limite est indépendante de la sous-suite k', h', les convergences (9.2) et (9.13) ont lieu pour la suite k, h, elle-même.

9.4. – *Troisième partie de la démonstration: Résultats de convergence forte.*

Pour t et i fixés, $t \in [0, T]$, $1 \leq i \leq m$, nous considérons [comparer à (18.5), chap. I]:

$$X_{ih}(t) = |u(t) - q_h u_{ih}(t)|^2 + \sum_{q,j}{}^* \left| u_h^{q+\frac{j}{m}} - u_h^{q+\frac{j-1}{m}} \right|_h^2 + \tag{9.15}$$
$$+ 2\,\mathcal{Re}\sum_{j=1}^m \int_0^{t_{ij}} \tilde{a}_{jk}(t;\ \bar\omega_j u(t) - p_{jh}u_{jh}(t),\ \bar\omega_j u(t) - p_{jh}u_{jh}(t))dt +$$
$$+ 2\,\mathcal{Re}\sum_{j=1}^m \int_0^{t_{ij}} < \tilde{B}_{jk}(t)\cdot(\omega_j u(t)) - \tilde{B}_{jk}(t)\cdot(q_{jh}u_{jh}(t)),\ \omega_j u(t) - q_{jh}u_{jh}(t) > dt$$

où la sommation $\sum\limits_{q,j}^*$ et t_{ij} ont la même signification qu'en (18.6) et (18.7), chap. I.

On montre que, lorsque k et $h \to 0$, $X_{ih}(t) \to 0$ ce qui implique que $q_h u_{ih}(t) \to u(t)$ dans $\tilde{H}$ fort.

De même, puisque $X_{mh}(T) \to 0$, nous en concluons que

$$p_{ih} u_{ih} \to \bar{\omega}_i u \quad \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{fort},$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

9.5. - *Complément au théorème* 9.1.

Puisque $X_{mh}(T) \to 0$, nous avons aussi

$$(9.16) \qquad 0 \leq 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (\omega_i u(t)) - \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (q_{ih} u_{ih}(t)),\ \omega_i u(t) - q_{ih} u_{ih}(t) > dt \leq$$
$$\leq X_{mh}(T) \to 0.$$

Avec (9.2) et le lemme 9.4, (9.16) donne aussi

$$(9.17) \qquad \mathcal{R}e \int_0^T < \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (q_{ih} u_{ih}(t)),\ q_{ih} u_{ih}(t) > dt \to$$
$$\to \mathcal{R}e \int_0^T < B_i(t) u(t),\ u(t) > dt, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Dans certains cas, (9.17) nous permet de démontrer que

$$(9.18) \qquad q_{ih} u_{ih} \to \omega_i u \quad \text{dans} \quad L_p(G_i) \quad \text{fort}.$$

Voici un résultat précis analogue à celui du théorème 4.2:

THÉORÈME 9.2.

Sous les hypothèses du théorème 9.1, *si l'espace* G_i *est uniformément convexe et si l'hypothèse* (6-viii) *est complétée par*

$$(9\text{-ii}) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e < \tilde{B}_i(t) \cdot v,\ v > + \mu_i \ \pi_i v |^p = \beta_i \| v \|_{G_i}^p \\ \forall\, v \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

alors

$$(9.18) \qquad q_{ih} u_{ih} \to \omega_i u \quad \textit{dans} \quad L_p(G_i) \quad \textit{fort}.$$

Démonstration.

Comme pour le théorème 4.2, nous vérifions que

$$\| q_{ih} u_{ih} \|_{L_p(G_i)} \to \| \omega_i u \|_{L_p(G_i)}$$

et puisque $q_{ih} u_{ih} \to \omega_i u$ dans $L_p(G_i)$ faible, nous obtenons (9.18).

10. - **Exemples.**

Nous appliquons ce qui précède aux exemples du n° 5.

10.1. - EXEMPLE 1 (suite).

Espaces $\tilde{H}$, F_i, G_i.

Nous posons $\tilde{H} = H = L_2(\Omega)$ et

pour $i = 1, \dots, n$

$$\Phi_i = L_2(\Omega), \qquad F_i = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

$$\Psi_i = \{0\}, \qquad G_i = L_2(\Omega) \times \{0\};$$

pour $i = n + 1$

$$\Phi_i = \{0\}, \qquad F_i = L_2(\Omega) \times \{0\},$$

$$\Psi_i = L_p(\Omega), \qquad G_i = L_2(\Omega) \times L_p(\Omega).$$

Les espace F_{n+1}, $G_1, \dots, G_n$ sont identiques à $H \times \{0\}$ et ne jouent aucun rôle: ce sont les espaces associés aux opérateurs $A_{n+1}, B_1, \dots, B_n$, identiquement nuls.

Opérateurs $\bar{\omega}_i$, ω_i

pour $i = 1, \dots, n$

$$\text{si} \quad u \in V_i, \qquad \bar{\omega}_i u = (u, D_i u),$$

$$\text{si} \quad u \in W_i = H, \qquad \omega_i u = (u, 0);$$

pour $i = n + 1$

$$\text{si} \quad u \in V_i = H, \qquad \bar{\omega}_i u = (u, 0),$$

$$\text{si} \quad u \in W_i, \qquad \omega_i u = (u, u).$$

Formes $\tilde{a}_i(t; u, v)$

$i = 1, \dots, n$

$$\tilde{a}_i(t; u, v) = \int_\Omega a_i(x, t) u_1(x) \overline{v_1(x)} dx,$$

pour $u, v \in F_i$, $u = (u_0, u_1)$, $v = (v_0, v_1)$.

$i = n + 1$

$$\tilde{a}_i(t; u, v) = 0.$$

Opérateurs $\tilde{B}_i(t)$

$i = 1, \ldots, n$

$$\tilde{B}_i(t) = 0,$$

$i = n + 1$

$$\tilde{B}_i(t) = \tilde{B}_i \quad \text{indépendant de } t \text{ et défini par}$$

$$< \tilde{B}_i u, v > = \int_\Omega |u_1(x)|^{p-2} u_1(x) \overline{v_1(x)} dx,$$

pour $u, v \in G_i$, $u = (u_0, u_1)$, $v = (v_0, v_1)$.

Espaces V_h.

L'espace V_h est l'espace des fonctions étagées u_h:

$$u_h(x) = \Sigma_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} u_h(M) w_{hM}(x), \quad u_h(M) \in \boldsymbol{C},$$

$\mathring{\Omega}_h^1$, w_{hM}, définis au chap. I, section 11.1.

La dimension $N(h)$ de V_h est le nombre de $M \in \mathring{\Omega}_h^1$.

Opérateurs q_h, r_h, p_{ih}, q_{ih}.

Pour $u \in H$, $r_h u = u_h$ est défini par

$$u_h(M) = (h_1, \ldots, h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M,0)} u(x) dx, \qquad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1.$$

Si $u_h \in V_h$, $q_h u_h = u_h|_\Omega$ et, pour

$i = 1, \ldots, n$

$$p_{ih} u_h = (u_h|_\Omega, \delta_i u_h|_\Omega), \qquad q_{ih} u_h = (u_h|_\Omega, 0)$$

$i = n + 1$

$$p_{ih} u_h = (u_h|_\Omega, 0), \qquad q_{ih} u_h = (u_h|_\Omega, u_h|_\Omega).$$

Vérification des hypothèses du n° 6.

Pour (6-xi) et (6-xii) nous renvoyons à RAVIART [28]; (6-xiii) est triviale car $H = \tilde{H}$; (6-xiv) a été vérifiée à l'occasion de l'exemple 2 du chap. 1; (6-xv) se vérifie de manière analogue. Les autres hypothèses se vérifient sans difficulté.

Problèmes approchés.

Pour r et i fixés, il faut trouver $u_h^{r+\frac{i}{m}} \in V_h$ solution de (7.4).

$i = 1, \ldots, n$

L'équation (7.4) s'écrit

$$\left(I + kA_h^{r+\frac{i}{m}}\right) u_h^{r+\frac{i}{m}} = u_h^{r+\frac{i-1}{m}} + kf_h^{r+\frac{i}{m}}, \tag{10.1}$$

où $A_h^{r+\frac{i}{m}} \in \mathfrak{L}(V_h, V_h)$ est défini par

$$\left(A_h^{r+\frac{i}{m}} u_h, v_h\right) = a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h), \qquad \forall\, u_h, v_h \in V_h \tag{10.2}$$

$$= \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} \int_\Omega a_i(x, t) \delta_i u_h(x) \delta_i \overline{v_h(x)} dx dt.$$

(10.1) est un système d'équations linéaires (découplées comme dans le cas de l'exemple 1 du chap. I).

$i = n + 1$

Décomposons u_h^{r+1} sur la base naturelle de V_h, les fonctions étagées w_{hM}, $M \in \mathring{\Omega}_h^1$:

$$u_h^{r+1} = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \xi_M w_{hM}, \qquad \xi_M \in \boldsymbol{C}.$$

Alors, avec (7.4), nous voyons que, pour chaque $M \in \mathring{\Omega}_h^1$, ξ_M est solution de

$$\xi_M + k \,|\, \xi_M \,|^{p-2} \xi_M = g_M, \tag{10.3}$$

g_M étant connu $\left[g_M = \left(u_h^{r+\frac{i-1}{m}} + kf_h^{r+\frac{i}{m}}, w_{hM}\right)_h\right]$.

Les différentes composantes de u_h^{r+1} sont donc solutions d'équations algébriques très simples et totalement découplées.

Les problèmes approchés (10.1) et (10.3) sont beacoup plus simples que les problèmes algébriques à résoudre lorsqu'on envisage l'approximation de u par un schéma implicite classique à deux niveaux en t.

Résultats de convergence.

Par application des théorèmes 9.1 et 9.2, nous obtenons les résultats de convergence suivants:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{ih}|_{Q_T} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega |\, u_{ih}(x, t) - u(x, t)\,|^2 dx \to 0, \quad \text{pous tout} \quad t \in [0, T] \\ i = 1, \ldots, n+1. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \delta_i u_{ih}|_{Q_T} \to D_i u & \text{dans} \quad L_2(Q_T) \ \text{fort}, & i = 1, \ldots, n \\ u_{ih}|_{Q_T} \to u & \text{dans} \quad L_p(Q_T) \ \text{fort}, & i = n+1. \end{array}\right.$$

10.2. - EXEMPLE 2 (suite).

Espaces $\tilde{H}$, F_i, G_i.

Nous posons $\tilde{H} = L_2(R^n)$; $H = L_2(\Omega)$ en est un sous espace hilbertien si nous convenons d'identifier $u \in L_2(\Omega)$ avec la fonction $\tilde{u} \in L_2(R^n)$ égale à u dans Ω et à 0 dans $\complement\,\Omega$.

Pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\Phi_i = \{0\}, \qquad F_i = L_2(R^n) \times \{0\},$$

$$\Psi_i = L_p(\Omega), \qquad G_i = L_2(R^n) \times L_p(\Omega).$$

Opérateurs $\bar{\omega}_i$, ω_i.

$$\text{Si} \quad u \in V_i = H, \qquad \bar{\omega}_i u = (\tilde{u}, 0)$$

$$\text{Si} \quad u \in W_i, \qquad \omega_i u = (\tilde{u}, D_i u), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Formes $\tilde{a}_i(t; u, v)$: identiquement nulles.

Opérateurs $\tilde{B}_i(t)$.

Ils sont indépendants de t et définis pour $i = 1, \ldots, n$, par

$$<\tilde{B}_i u, v> = \int_\Omega |u_1(x)|^{p-2} u_1(x) \overline{v_1(x)} dx,$$

$$\forall\, u, v \in G_i, \qquad u = (u_0, u_1), \qquad v = (v_0, v_1).$$

Espaces V_h.

L'espace V_h est l'espace des fonctions étagées u_h,

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^1} u_h(M) w_{hM}(x), \qquad u_h(M) \in \boldsymbol{C}.$$

La dimension $N(h)$ de V_h est le nombre de $M \in \Omega_h^1$.

Opérateurs r_h, q_h, p_{ih}, q_{ih}.

Si Ω est assez régulier, il existe un opérateur linéaire $\mathcal{P}$ continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(R^n)$ et de W dans $\{u \mid u \in L_2(R^n), D_i u \in L_p(R^n)\}$. Si $u \in H$, $r_h u = u_h$ est défini par

$$u_h(M) = (h_1 \cdot \ldots \cdot h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M, 0)} \mathcal{P} u(x) dx, \qquad \forall\, M \in \Omega_h^1.$$

L'opérateur q_h est l'identité, $q_h u_h = u_h$, et, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$p_{ih} u_h = (u_h, 0), \qquad q_{ih} u_h = (u_h, \delta_i u_h|_\Omega).$$

Vérification des hypothèses du N° 6.

Pour (6-xi) et (6-xii), cf. [28]; (6-xiv) est triviale puisque $\Phi_i = \{0\}$; (6-xiii) et (6-xv) se vérifient comme dans l'exemple 1 du chap. I. Les autres hypothèses sont immédiates.

Problèmes approchés.

Pour r et i fixés, il faut trouver $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ solution de (7.4). Il s'agit d'un système algébrique de $N(h)$ équations pour les composantes ξ_M de $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ $\left[\xi_M = \left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, w_{hM}\right)_h, \quad \forall M \in \Omega_h^1\right]$.

Comme dans le cas linéaire ce système se décompose en plusieurs systèmes indépendants, chacun de ces systèmes correspondant à tous les $M \in \Omega_h^1$ et situés sur un même parallèle à l'axe des x_i. Ces systèmes sont beacoup plus simples que les systèmes algébriques qu'il faut résoudre avec une méthode d'approximation implicite classique ($m = 1$). Leur résolution n'est toutefois pas immédiate et nous renvoyons à BREZIS-SIBONY [4] pour la résolution effective de ces systèmes.

Résultats de convergence.

Par application des théorème 9.1 et 9.2, nous avons:

Lorsque k et $h \to 0$, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{cases} \delta_i u_{ih}|_{Q_T} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_p(Q_T) \quad \text{fort} \\ u_{ih} \to \tilde{u} \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(R^n)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_{R^n} |u_{ih}(x, t) - \tilde{u}(x, t)|^2 dx \to 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

11. - Approximations de type mêlé.

Nous allons indiquer maintenant une nouvelle méthode d'approximation discrète particulièrement adaptée à l'exemple 1.

Nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses du n° 6 et nous supposons que les décompositions de $A(t)$ et $B(t)$ sont choisies de manière que

$$\text{(11-i)} \qquad \begin{cases} \tilde{a}_i(t; u, v) = 0 \quad \text{pour} \quad i = m_1 + 1, \ldots, m \\ \tilde{B}_i(t) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m_1, \\ m_1 \quad \text{entier}, \qquad 1 \leq m_1 \leq m. \end{cases}$$

11.1. - *Problème approché.*

Soit θ un paramètre réel fixé, $\theta \in [0, 1]$. Les fonctions approchées u_{ih} définies sur $[0, T]$ à valeurs dans V_h sont déterminées comme suit:

Nous partons de

$$u_h^0 = r_h u_0. \tag{11.1}$$

Supposant connu u_h^r, nous allons définir les fonctions u_{ih} sur l'intervalle $[rk, (r+1)k[$.

Pour $i = 1, \ldots, m_1$

$$u_{ih}(t) = u_h^{r+\frac{i}{m}} \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[, \tag{11.2}$$

les $u_h^{r+\frac{i}{m}} (\in V_h)$ étant définis successivement à partir de u_h^r comme la solution de

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r+\frac{i-1}{m}},\ v_h\right)_h + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(w_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h\right) = \\ &\qquad = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h\right)_h, \qquad \forall\, v_h \in V_h \end{aligned}\right. \tag{11.3}$$

où

$$w_h^{r+\frac{i}{m}} = \theta u_h^{r+\frac{i}{m}} + (1-\theta) u_h^{r+\frac{i-1}{m}}. \tag{11.4}$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour (11.3) se vérifient sans peine, cette équation étant linéaire $\left(\text{en } u_h^{r+\frac{i}{m}}\right)$.

Pour $i = m_1 + 1, \ldots, m$.

La restriction de u_{ih} à l'intervalle $[rk, (r+1)k[$ (restriction encore notée u_{ih}) est définie comme la solution de

$$\left\{\begin{aligned} &u_{ih} \in L_\infty(rk, (r+1)k;\ V_h) \\ &\frac{d}{dt}(u_{ih}(t),\ v_h)_h + b_h^{r+\frac{i}{m}}(u_{ih}(t),\ v_h) = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h\right)_h, \qquad \forall\, v_h \in V_h \\ &u_{ih}(rk+0) \quad \text{donné dans} \quad V_h. \end{aligned}\right. \tag{11.5}$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour (11.5) résultent du théorème 1.1.

Précisons les conditions initiales dans (11.5); $u_h^{r+\frac{m_1}{m}}$ ayant été déterminé par (11.3), ces conditions initiales seront successivement:

$$(11.6)\quad \begin{cases} u_{(m_1+1)h}(rk+0) = u_h^{r+\frac{m_1}{m}} \\ u_{(m_1+2)h}(rk+0) = u_{(m_1+1)h}((r+1)k-0) \quad \left(\text{noté} \quad u_h^{r+\frac{m_1+1}{m}}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{mh}(rk+0) = u_{(m-1)h}((r+1)k-0) \quad \left(\text{noté} \quad u_h^{r+\frac{m-1}{m}}\right) \end{cases}$$

Les fonctions u_{ih} sont ainsi connues pour $t \in [rk, (r+1)k[$. Nous posons

$$(11.7)\qquad u_{mh}((r+1)k-0) = u_h^{r+1},$$

et nous sommes en mesure de passer à l'intervalle $[(r+1)k, (r+2)k[$, u_h^{r+1} remplaçant u_h^r.

Les fonctions u_{ih} étant connues sur tout l'intervalle $[0, T]$, nous définissons enfin les fonctions w_{ih}:

$$(11.8)\quad \begin{cases} w_{ih}(t) = w_h^{r+\frac{i}{m}} \quad \text{pour tout} \quad t \in [rk, (r+1)k[, \\ r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m_1 \end{cases}$$

$$(11.9)\quad \begin{cases} w_{ih}(t) = u_{ih}(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, T] \\ i = m_1 + 1, \ldots, m. \end{cases}$$

REMARQUE 11.1.

Les équations (11.3) forment un système algébrique d'équations linéaires tandis que (11.5) est un système différentiel non linéaire (independant de t). La résolution de (11.3) n'offrant pas de difficulté, la méthode ci-dessus est surtout utile lorsque les équations (11.5) peuvent être intégrées explicitement (cf. section 11.3).

11.2. - *Enoncé des résultats de convergence.*

Avec les méthodes du chap. I et de ce chapitre, nous démontrons les résultats suivants

THÉORÈME 11.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2 *et* 6, (9-i) *et* (11-i); u *désigne la solution du problème* 1.

Si $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *lorsque* k *et* $h \to 0$,

$$(11.10) \qquad \begin{cases} q_h u_{ih} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(\tilde{H}) \quad \text{faible} \\ q_h u_{ih}(t) \to u(t) \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{fort}, \qquad \forall t \in [0, T], \qquad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

$$(11.11) \qquad p_{ih} w_{ih} \to \bar{\omega}_i u \quad \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{fort}, \qquad i = 1, \dots, m_1$$

$$(11.12) \qquad q_{ih} w_{ih} \to \omega_i u \quad \text{dans} \quad L_p(G_i) \quad \text{faible}, \qquad i = m_1 + 1, \dots, m.$$

THÉORÈME 11.2.

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, si $\theta \in [0, 1/2[$, *si* k *et* h *tendent vers* 0 *de manière que*

$$(11.13) \qquad kS_i^2(h) \to 0, \qquad i = 1, \dots, m_1, \text{ [21]}$$

alors les convergences (11.10)-(11-12) *ont lieu.*

REMARQUE 11.2.

Si $\theta \in [0, 1/2[$, comme pour le théorème 14.2 du chapitre I, on démontre la stabilité des fonctions approchées, moyennant une condition du type

$$kS_i^2(h) \leq \text{constante convenable}.$$

En raison des termes non linéaires, la stabilité ne suffit pas ici pour passer à la limite. La condition (11.13) apparait alors comme dans le théorème 18.1 du chap. I.

11.3. - EXEMPLE 1 (suite).

Ici $m_1 = n$, $m = n + 1$. Avec les notations de la section 10.1, nous pouvons écrire les équations linéaires (11.3) sous la forme

$$(11.14) \qquad \left(I + k\theta A_h^{r+\frac{i}{m}}\right) u_h^{r+\frac{i}{m}} = u_h^{r+\frac{i-1}{m}} + $$
$$+ kf_h^{r+\frac{i}{m}} - k(1-\theta) A_h^{r+\frac{i}{m}} u_h^{r+\frac{i-1}{m}}, \qquad i = 1, \dots. n.$$

Si nous posons $u_{(n+1)h}(t) = \sum_{M \in \overset{\circ}{\Omega}{}_h^1} \xi_M(t) w_{hM}$, le système (11.5) se réduit alors

[21] On définit $S_i(h)$ comme au chap. I: c'est la meilleure constante telle que

$$\| u_h \|_{ih} \leq S_i(h) \, | u_h |_h, \qquad \forall u_h \in V_h.$$

à des équations différentielles découplées,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\xi'_M(t) + |\,\xi_M(t)\,|^{p-2}\xi_M(t) = (f_h^{r+1},\ w_{hM})_h \quad \text{(donné)} \\
\xi_M(rk + 0) \quad \text{donné}; \quad M \in \mathring{\Omega}_h^1.
\end{array}
\right.
\tag{11.15}
$$

L'intégration de ces équations est immédiate, en particulier si les seconds membres sont nuls, c'est-à-dire si on a choisi $f_{n+1} = 0$, ce qui est loisible.

Envisageons alors les deux cas les plus importants, $\theta = 1$ et $\theta = 0$.

Pour $\theta = 1$.

Cette méthode est très voisine de celle envisagée au nº 7, mais son intérêt réside dans une simplification supplémentaire des problèmes approchés.

Les équations (11.14) sont identiques aux équations (10.1) mais les équations algébriques (10.3) (simples mais non immédiates à résoudre) sont remplacées par les équations différentielles (11.15) que l'on sait intégrer explicitement.

Les deux méthodes sont inconditionellement stables et conduisent aux mêmes résultats de convergence.

Pour $\theta = 0$.

Les équations (11.14) sont explicites, et, les équations (11.15) étant intégrables explicitement, *on peut considérér le schéma comme explicite. La condition de stabilité est la même que dans le cas linéaire* (remarque 11.2) *et* (11.13) *assure la convergence.*

CHAPITRE III

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION LINÉAIRES DU 2ème ORDRE EN t UNE CLASSE D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES DU 2ème ORDRE EN t

Introduction.

Dans ce chapitre nous étudions l'approximation de la solution d'équations

$$
A(t)u(t) + u''(t) + B(t)u'(t) = f(t),
\tag{1}
$$

où $A(t)$ est un opérateur linéaire de type elliptique et $B(t)$ un opérateur linéaire de type elliptique, ou un opérateur non linéaire monotone.

Les méthodes d'approximations pour ces équations sont différentes des méthodes relatives aux équations du ler ordre [c'est-à-dire, ce ne sont pas celles que l'obtient en posant $v = u'$ et en écrivant formellemt (1) comme une équation du ler ordre pour $\vec{u} = (u, v)$; cf. Remarque 2.1 ci-après].

Les n° 1 *à* 5 *concernent les approximations semi-discrètes.*

Au n° 1 nous formulons le problème exact dont nous cherchons à approcher la solution.

Au n° 2, nous formulons les hypothèses nécessaires et définissons les solutions approchées semi-discrètes. Nous établissons des estimations à priori pour ces solutions approchées (n° 3) et démontrons leur convergence vers la solution du problème exact (n° 4).

Ces résultats sont appliqués au n° 5 à deux exemples, l'un linéaire, l'autre non linéaire.

Les n^{a} 6 *à* 11 *concernent les approximations discrètes.*

Au n° 6 nous formulons les hypothèses de discrétisation. Nous définissons ensuite les solutions approchées discrètes (n° 7), nous établissons des estimations à priori pour ces solutions approchées (n° 8) et démontrons leur convergence vers la solution du problème exact (n° 9).

Au n° 10, nous appliquons les résultats précédents aux exemples du n° 5, Au n° 11 nous étudions une autre méthode d'approximation discrète.

§ 1. - Approximations semi-discrètes.

1. - Rappels. Le problème exact.

Nous nous donnons deux espaces de Hilbert complexes, V et H, et un espace de Banach complexe réflexif W, tels que V et W soient inclus dans H, les injections étant continues. Nous supposons également que $V \cap W$ est un espace séparable, dense dans V, dans W et dans H. Nous notons $((u, v))$, $\| u \|$ [resp. (f, g), $| f |$], le produit scalaire et la norme dans V [resp. H]; $\| u \|_W$ désigne la norme dans W.

Nous identifions H à son anti-dual; X désignant toujours l'anti-dual d'un espace de Banach X, nous avons alors les inclusions suivantes:

$$(1\text{-}i) \qquad \begin{cases} V \cap W \subset V \subset H \subset V' \subset (V \cap W)' \\ V \cap W \subset W \subset H \subset W' \subset (V \cap W)', \end{cases}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Soit $a(t;\, u,\, v)$, $t \in [0,\, T]$, une famille de formes sesquilinéaires continues sur V, vérifiant les conditions suivantes:

(1-ii) $$a(t;\, u,\, v) = \overline{a(t;\, v,\, u)}, \qquad \forall\, u,\, v \in V, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

(1-iii) $$a(t;\, u,\, u) \geq 0, \qquad \forall\, u \in V, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

(1-iv) $$\begin{cases} a(t;\, u,\, u) + \lambda\, |\, u\, |^2 \geq \alpha\, \|\, u\, \|^2 \\ \forall\, u \in V, \qquad \forall\, t \in [0,\, T]; \qquad \alpha > 0. \end{cases}$$

(1-v) Pour tout $u \in V$, la fonction $t \to a(t;\, u,\, u)$ est une fois continûment différentiable.

(1-vi) $$a'(t;\, u,\, u) = \frac{d}{dt} a(t;\, u,\, u) \leq 0, \qquad \forall\, u \in V, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

D'après (1-ii) et (1-v), la fonction $t \to a(t;\, u,\, v)$ est une fois continûment différentiable pour tout couple d'éléments u, v de V; il existe donc une constante M telle que:

(1-vii) $$\begin{cases} |\, a(t;\, u,\, u)\, | + |\, a'(t;\, u,\, v)\, | \leq M\, \|\, u\, \|\, \|\, v\, \| \\ \text{pour} \quad u,\, v \in V, \qquad \text{pour} \quad t \in [0,\, T]. \end{cases}$$

Nous associons à la forme $a(t;\, u,\, v)$, l'opérateur linéaire $A(t)$, appliquant V dans V', et défini par

$$< A(t)u,\, v > = a(t;\, u,\, v), \qquad \forall\, u,\, v \in V,$$

$<\, ,\, >$ anti-dualité entre $V \cap W$ et $(V \cap W)'$. En raison de (1-vii) l'application linéaire $u(\cdot) \to A(\cdot)u(\cdot)$ est continue de $L_2(V)$ dans $L_2(V')$.

Soit encore $B(t)$, $t \in [0,\, T]$, une famille d'opérateurs (non linéaires) qui appliquent W dans W' et qui vérifient les propriétés suivantes:

(1-viii) Pour presque tout t, $B(t)$ est continu des sous-espaces de dimension finie de W dans W' faible

(1-ix) $$\begin{cases} \mathcal{Re} < B(t)\, u - B(t) v,\; u - v > \geq 0 \\ \forall\, u,\, v \in W, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\, T] \end{cases}$$

(1-x) $$\begin{cases} \mathcal{Re} < B(t) u,\; u > + \mu\, |\, u\, |^p \geq \beta\, \|\, u\, \|_W^p \\ \forall\, u \in W, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\, T]; \qquad \mu \geq 0, \qquad \beta > 0, \qquad 1 < p < \infty. \end{cases}$$

(1-xi) $\left\{\begin{array}{l}\text{Si } u(\cdot)\in L_p(W), \text{ alors } B(\cdot)u(\cdot)\in L_{p'}(W') \quad (1/p+1/p'=1).\\ \text{L'application } u(\cdot)\to B(\cdot)u(\cdot) \text{ transforme les ensembles bornés}\\ \text{de } L_p(W) \text{ en ensembles bornés de } L_{p'}(W') \text{ et est faiblement}\\ \text{continue sur les droites de } L_p(W).\end{array}\right.$

Nous considérons alors le problème suivant:

PROBLÈME 1.

Etant donnés $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ *et* $f \in L_1(H) + L_{p'}(W')$, *trouver une fonction* u *vérifiant*

(1.1) $u \in L_\infty(V)$

(1.2) $u' \in L_\infty(H) \cap L_p(W)$

(1.3) $A(t)u(t) + u''(t) + B(t)u'(t) = f(t), \qquad t \in]0, T[,$

(1.4) $u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$

REMARQUE 1.1.

D'après W. A STRAUSS [35], si une fonction u vérifie (1.1), (1.2) et (1.3), alors, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,

(1-5) $\left\{\begin{array}{l} u \text{ est une fonction continue de } [0, T] \to V,\\ u' \text{ est une fonction continue de } [0, T] \to H.\end{array}\right.$

Cette remarque donne en particulier un sens à (1.4).

Le résultat suivant est dû à J. L. LIONS et W. A. STRAUSS [21], [35]:

THÉORÈME 1.1.

Sous les hypothèses (1-i) *à* (1-xi), *le problème* 1 *possède une solution* u *unique.*

La fonction u *est continue de* $[0, T]$ *dans* V, *sa dérivée* u' *est continue de* $[0, T]$ *dans* H. *Pour tout* $t \in [0, T]$ *nous avons l'égalité d'énergie suivante:*

(1.6)
$$|u'(t)|^2 + a(t; u(t), u(t)) - \int_0^t a'(s; u(s), u(s))ds + \\ + 2\,\mathcal{R}e \int_0^t < B(s)u'(s), u'(s) > ds = |u_1|^2 + a(0; u_0, u_0) + \\ + 2\,\mathcal{R}e \int_0^t < f(s), u'(s) > ds.$$

Nous nous intéressons dans ce chapitre, à l'approximation de cette fonction u.

REMARQUE 1.2.

Le théorème 1.1 est encore valable si l'on remplace $B(t)$ par une somme finie d'opérateurs analogues à $B(t)$ avec des espace W différents et des nombres p différents pour chaque opérateur. Tout ce qui suit peut se géneraliser à de tels problèmes.

REMARQUE 1.3.

Le théorème 1.1 reste encore orai si l'on supprime l'hypothèse (1–vi) mais, pour simplifier, nons ne traiterons l'approximation du problème 1 que dans le cas où l'hypothèse (1–vi) et d'autres hypothèses semblables sont vérifiées. Certaine remarques simples (rem. 3.2, 4.1 et 9.1) indiqueront comment les résultats s'étendent au cas où l'hypothèse (1–vi) n'est pas vérifiée, l'opérateur B étant toutefois linéaire.

2. – Problème approché semi-discret.

Nous nous donnons m espaces de Hilbert $V_1, \ldots, V_m$ [produits scalaires $((u, v))_i$, normes $\| u \|_i$] et m espaces de Banach réflexifs $W_1, \ldots, W_m$ [normes $\| u \|_{W_i}$], tels que

$$V \subset V_i \subset H, \qquad W \subset W_i \subset H, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

les injections étant continues, $V \cap W$ étant dense dans chaque V_i et dans H. Il en résulte que les espaces V_i, W_i, sont séparables et denses dans H.

Puisque H est identifié à son anti-dual, nous avons alors les inclusions suivantes:

$$\text{(2–i)} \qquad \begin{cases} V \cap W \subset V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V' \subset (V \cap W)' \\ V \cap W \subset W \subset W_i \subset H \subset W_i' \subset W' \subset (V \cap W)', \end{cases}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

$$\text{(2–ii)} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i, \qquad W = \bigcap_{i=1}^{m} W_i.$$

Avec (2–i), (2–ii) et le théorème du graphe fermé nous voyons que

$$\begin{cases} \| u \| \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \| u \|_i \quad \text{sont des normes équivalentes sur } V, \\ \| u \|_W \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \| u \|_{W_i} \quad \text{sont des normes équivalentes sur } W. \end{cases}$$

Par anti-dualité, (2-ii) implique aussi que

(2-iii) $$V' = \sum_{i=1}^{m} V'_i, \qquad W' = \sum_{i=1}^{m} W'_i.$$

Nous supposons que, pour tout $t \in [0, T]$,

(2-iv) $$a(t;\, u,\, v) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t;\, u,\, v), \qquad \forall\, u,\, v \in V,$$

où, pour $i = 1, \ldots, m$, $a_i(t;\, u,\, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V_i \times V_i$, vérifiant des propriétés identiques à (1-ii)-(1-vii), V étant remplacé par V_i, les constantes α, λ, M, par des constantes α_i, λ_i, M_i.

Nous associons à la forme $a_i(t;\, u,\, v)$, l'opérateur linéaire $A_i(t) \in \mathcal{L}(V_i,\, V'_i)$, défini par

$$< A_i(t)u,\, v > \, = a_i(t;\, u,\, v) \qquad \forall\, u,\, v \in V_i.$$

L'application $u(\cdot) \to A_i(\cdot)u(\cdot)$ est linéaire et continue de $L_2(V_i)$ dans $L_2(V'_i)$.

Nous supposons enfin que, pour presque tout $t \in [0, T]$:

(2-v) $$B(t)v = \sum_{i=1}^{m} B_i(t)v, \qquad \forall\, v \in W,$$

où les $B_i(t)$ sont des opérateurs qui appliquent W_i dans W'_i (p.p. $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, m$) et qui vérifient des propriétés identiques à (1-vii)-(1-xi), W étant remplacé par W_i, β et μ par des constantes β_i et μ_i, la constante p étant par contre la même.

Puisque $f \in L_1(H) + L_{p'}(W')$, il existe $f^0 \in L_1(H)$ et $f^1 \in L_{p'}(W')$, tels que $f = f^0 + f^1$. Nous décomposons arbitrairement f^0 ous la forme $f^0 = \sum_{i=1}^{m} f_{0i}$ avec $f_{0i} \in L_1(H)$. D'autre part d'après le lemme 6.1 du Ch. I.

$$L_p(W) = \bigcap_{i=1}^{m} L_p(W_i),$$

et cela impliqué par anti-dualité que

$$L_{p'}(W') = \sum_{i=1}^{m} L_{p'}(W'_i).$$

Il existe donc une décomposition non unique de f^1 de la forme $f^1 = \sum_{i=1}^{m} f_{1i}$, avec $f_{1i} \in L_{p'}(W'_i)$. Nous obtenons ainsi une décomposition non unique de f de la forme

(2-vi) $$f = \sum_{i=1}^{m} f_i, \qquad f_i = f_{0i} + f_{1i} \in L_1(H) + L_{p'}(W'_i).$$

Les fonctions approchées.

Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini et $k = T/(N+1)$. Pour chaque k fixé, nous définissons les fonctions approchées $u_{ik}(i = 1, \ldots, m)$ sèlon un procédé semblable à celui étudié pour les équations du premier ordre.

Nous déterminons successivement la valeur des fonctions $u_{1k}, \ldots, u_{mk}$ sur l'intervalle $[0, k-0]$, puis successivemet sur les autres intervalles $[rk+0, (r+1)k-0]$.

Pour chaque i et chaque r, la restriction de u_{ik} à l'intervalle $[rk+0, (r+1)k-0]$ (restiriction encore notée u_{ik}), est définie comme la solution du problème suivant:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u_{ik} \in L_\infty(rk, (r+1)k; V_i) \\ u'_{ik} \in L_\infty(rk, (r+1)k; H) \cap L_p(rk, (r+1)k; W_i) \\ A_i(t)u_{ik}(t) + u''_{ik}(t) + B_i(t)u'_{ik}(t) = f_i(t) \quad \text{p.p.} \\ u_{ik}(rk+0) \quad \text{donné dans} \quad V_i \\ u'_{ik}(rk+0) \quad \text{donné dans} \quad H. \end{cases}$$

Ce problème est analogue au problème 1 et l'existence et l'unicité d'une solution pour (2.1) résultent du théorème 1.1 lui-même. Le seul point à préciser est donc le choix des conditions initiales successives dans (2.1).

D'après le théorème 1.1 si u_{ik} est solution de (2.1) alors (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle), u_{ik} est continue de $[rk+0, (r+1)k-0]$ dans V_i, u'_{ik} est continue de $[rk+0, (r+1)k-0]$ dans H. On pourra donc définir sans ambiguité

$$u_{ik}((r+1)k-0) \in V_i, \qquad u'_{ik}((r+1)k-0) \in H.$$

Les conditions initiales successives aux points rk sont alors les suivantes (cf. Remarque 2.1 ci-après):

Pour $r = 0$,

$$(2.2)\qquad \begin{cases} u_{1k}(0) = u_0 & u'_{1k}(0) = u_1 \\ \quad\cdot & u'_{2k}(0) = u'_{1k}(k-0) \\ \quad\cdot & \quad\cdot \\ \quad\cdot & \quad\cdot \\ \quad\cdot & \quad\cdot \\ \quad\cdot & \quad\cdot \\ u_{mk}(0) = u_0 & u'_{mk}(0) = u'_{(m-1)k}(k-0). \end{cases}$$

Pour $r = 1, \ldots, N,$

$$(2.3)\quad \begin{cases} u_{1k}(rk+0) = u_{1k}(rk+0)\ , & u'_{1k}(rk+0) = u'_{mk}(rk-0) \\ \quad\cdot \qquad , & u'_{2k}(rk+0) = u'_{1k}((r+1)k-0) \\ \quad\cdot \qquad , & \quad\cdot \\ \quad\cdot \qquad , & \quad\cdot \\ \quad\cdot \qquad , & \quad\cdot \\ \quad\cdot \qquad , & \quad\cdot \\ u_{mk}(rk+0) = u_{mk}(rk-0), & u'_{mk}(rk+0) = u'_{(m-1)k}((r+1)k-0). \end{cases}$$

Les fonctions $u_{ik}(t)$ sont alors définies sur $[0, T]$. Il est naturel de poser

$$(2.4)\quad \begin{cases} u_{ik}(rk) = u_{ik}(rk \pm 0) \quad \left(\text{noté} \quad u_k^{r+\frac{i-1}{m}}\right) \\ r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

et les fonctions u_{ik} deviennent ainsi continues de $[0, T] \to V_i$.

Les dérivées u'_{ik} sont seulement continues par morceaux de $[0, T] \to H$, des discontinuités étant possibles aux points rk, $r=1, \ldots, N$. Nous conviendrons de poser

$$(2.5)\quad \begin{cases} u'_{ik}(rk) = u'_{ik}(rk+0) \quad \left(\text{noté} \quad v_k^{r+\frac{i-1}{m}}\right) \\ r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

ce qui rend les fonctions u'_{ik} continues à droite dans H.

PROPOSITION 2.1.

Sous les hypothèses (1-i)-(1-xii), (2-i)-(2-vi), *pour chaque* k *fixé, il existe* m *fonctions* u_{ik} *définies de manière unique par*

$$(2.6)\quad u_{ik} \in L_\infty(V_i)$$

$$(2.7)\quad u'_{ik} \in \tilde{L_\infty}(H) \cap L_p(W_i)$$

$$(2.8)\quad \begin{cases} A_i(t)u_{ik}(t) + u''_{ik}(t) + B_i(t)u'_{ik}(t) = f_i(t), \\ t \in \,]rk, (r+1)k[, \qquad r = 0, \ldots, N, \end{cases}$$

et les conditions initiales successives (2.2) *et* (2.3).

REMARQUE 2.1.

Par comparaison avec les équations du premier ordre en t, un choix des conditions initiales successives, plus naturel que (2.2)-(2.3), serait le suivant:

$$u_{1k}(0) = u_0, \qquad u'_{1k}(0) = u_1$$

$$\begin{cases} u_{1k}(rk+0) = u_{mk}(rk-0), \qquad u'_{1k}(rk+0) = u'_{mk}(rk-0) \\ r = 1, \dots, N \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{ik}(rk+0) = u_{(i-1)k}((r+1)k-0), \qquad u'_{ik}(rk+0) = u'_{(i-1)k}((r+1)k-0) \\ i = 2, \dots, m, \qquad r = 0, \dots, N. \end{cases}$$

Dans ce cas, nous nous heurtons en particulier à la difficulté suivante: $u_{(i-1)k}((r+1)k-0) \in V_{i-1}$ et ne peut donc servir de condition initiale pour u_{ik}, sauf dans le cas peu intéressant où tous les espaces V_i sont identiques à V. Par ailleurs, avec les conditions initiales (2.2), (2.3), nous obtenons des fonctions u_{ik} continues dans V_i ce qui ne serait pas le cas avec les conditions initiales précédentes.

REMARQUE 2.2.

Certains opérateurs A_i ou B_i peuvent être choisis nuls, l'espace V_i ou W_i correspondant étant alors H. *En particulier nous pouvons faire en sorte que pour chaque i, un seul des opérateurs $A_i(t)$ et $B_i(t)$ soit non nul.*

Nous allons étudier maintenant, le comportement des fonctions u_{ik} lorsque $k \to 0$.

3. - Estimations à priori.

PROPOSITION 3.1.

Lorsque $k \to 0$, pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{cases} u_{ik} \text{ demeure dans un ensemble borné de } L_\infty(V_i) \\ u'_{ik} \text{ demeure dans un ensemble borné de } L_\infty(H) \cap L_p(W_i). \end{cases}$$

Démonstration.

En retranchant éventuellement $B_i(t)\cdot 0$ aux deux membres des égalités (2.8), il est toujours possible de se ramener au cas où $B_i(t)\cdot 0 = 0$. Avec l'yhpothèse (1-ix) pour $B_i(t)$, nous voyons alors que

$$\mathcal{R}e < B_i(t)v,\ v> \geq 0, \qquad \forall\, v \in W_i, \qquad \text{p.p. } t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

Sur chaqué intervalle $[rk+0,\ (r+1)k-0]$, les fonctions u_{ik} vérifient des égalités d'énergie analogues à (1.6):

$$\text{(3.2)}\qquad |u'_{ik}(t)|^2 + a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) -$$
$$-\int_{rk}^{t} a'_i(s;\ u_{ik}(s),\ u_{ik}(s))\,ds + 2\,\mathcal{R}e\int_{rk}^{t} < B_i(s)\,u'_{ik}(s),\ u'_{ik}(s) > ds =$$
$$-\left| v_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + a_i(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)) + 2\,\mathcal{R}e\int_{rk}^{t} < f_i(s),\ u'_{ik}(s) > ds,$$

pour $t \in [rk+0,\ (r+1)k-0]$.

D'après (3.2), la fonction ψ_{ik}:

$$\text{(3.3)}\qquad \psi_{ik}(t) = |u'_{ik}(t)|^2 + a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t))$$

est une fonction absolument continue. Nous dérivons alors (3.2), remplaçons f_i par $f_{0i} + f_{1i}$, et, puisque $a'_i(t;\ u,\ u) \leq 0$, nous obtenons

$$\text{(3.4)}\qquad \frac{d}{dt}\psi_{ik}(t) + 2\,\mathcal{R}e < B_i(t)\,u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > \leq$$
$$\leq 2\,\mathcal{R}e < f_{0i}(t) + f_{1i}(t),\ u'_{ik}(t) >.$$

Il est possible de majorer le second membre de (3.4) comme suit:

$$X = 2\,\mathcal{R}e\,(f_{0i}(t),\ u'_{ik}(t)) \leq 2\,|f_{0i}(t)|\ |u'_{ik}(t)| \leq |f_{0i}(t)|\,(1 + |u'_{ik}(t)|^2)$$

$$Y = 2\,\mathcal{R}e < f_{1i}(t),\ u'_{ik}(t) > \leq 2\,\|f_{1i}(t)\|_{W'_i}\,\|u'_{ik}(t)\|_{W_i}.$$

Avec l'inégalité (1-x) pour $B_i(t)$ nous pouvons écrire:

$$\|u'_{ik}(t)\|_{W_i} \leq \beta_i^{-1/p}\,(\mathcal{R}e < B_i(t)\,u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t)) > + \mu_i\,|u'_{ik}(t)|^p)^{1/p}.$$

Utilisant (3.1) et l'inégalité $(a+b)^{1/p} \leq a^{1/p} + b^{1/p}$ $((a,\ b \geq 0)$, nous obtenons

$$\|u'_{ik}(t)\|_{W_i} \leq \beta_i^{-1/p}\,(\mathcal{R}e < B_i(t)\,u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) >)^{1/p} +$$
$$+ \beta_i^{-1/p}\mu_i^{1/p}\,|u'_{ik}(t)|,$$

d'où

$$Y \leq 2\beta_i^{-1/p}\mu_i^{1/p}\,\|f_{1i}(t)\|_{W'_i}\,|u'_{ik}(t)| +$$
$$+ 2\beta_i^{-1/p}\,\|f_{1i}(t)\|_{W'_i}\,(\mathcal{R}e < B_i(t)\,u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) >)^{1/p}.$$

En raison de l'inégalité de Young, nous avons

$$2\beta_i^{-1/p} \| f_{1i}(t) \|_{W_i'} (\mathcal{R}e < B_i(t) u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) >)^{1/p} \leq$$
$$\leq \mathcal{R}e < B_i(t) u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > + c'_1 \| f_{1i}(t) \|^{p'}_{W_i'},$$

les c_j, c'_j désignant comme d'habitude des constantes indépendantes de k; et alors:

$$Y \leq \mathcal{R}e < B_i(t) u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > + c'_1 \| f_{1i}(t) \|^{p'}_{W_i'} +$$
$$+ c'_2 \| f_{1i}(t) \|_{W_i'} (1 + | u'_{ik}(t) |^2).$$

Avec ces majorations du second membre, (3.3) donne:

$$\frac{d}{dt} \psi_{ik}(t) + \mathcal{R}e < B_i(t) u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > \leq$$
$$\leq (| f_{0i}(t) | + c'_1 \| f_{1i}(t) \|^{p'}_{W_i'} + c'_2 \| f_{1i}(t) \|_{W_i'}) +$$
$$+ (| f_{0i}(t) | + c'_2 \| f_{1i}(t) \|_{W_i'}) \, | u'_{ik}(t) |^2,$$

et il en résulte facilement l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt} \psi_{ik}(t) + \mathcal{R}e < B_i(t) u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > \leq g_i(t) \, [1 + \psi_{ik}(t)], \tag{3.5}$$

où

$$g_i(t) = | f_{0i}(t) | + c'_1 \| f_{1i}(t) \|^{p'}_{W_i'} + c'_2 \| f_{1i}(t) \|_{W_i'}. \tag{3.6}$$

Estimations à priori dans $L_\infty(V_i)$ et $L_\infty(H)$.

En raison de (3.1), (3.5) permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \psi_{ik}(t) \leq g_i(t) \cdot [1 + \psi_{ik}(t)],$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ [1 + \psi_{ik}(t)] \cdot \left[\exp \left(- \int_{rk}^{t} g_i(s) ds \right) \right] \right\} \leq 0,$$

$$[1 + \psi_{ik}(t)] \leq [1 + \psi_{ik}(rk + 0)] \left[\exp \int_{rk}^{t} g_i(s) ds \right].$$

Nous on déduisons ceci:

$$(3.7)\qquad 1 + |u'_{ik}(t)|^2 + a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) \leq$$
$$\leq \gamma_r\Big[1 + \Big|v_k^{r+\frac{i-1}{m}}\Big|^2 + a_i(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)\Big],$$

pour $t \in [rk,\ (r+1)k[$, et

$$(3.8)\qquad 1 + \Big|v_k^{r+\frac{i}{m}}\Big|^2 + a_i((r+1)k;\ u_{ik}((r+1)k),\ u_{ik}((r+1)k)) \leq$$
$$\leq \gamma_r\Big[1 + \Big|v_k^{r+\frac{i-1}{m}}\Big|^2 + a_i(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk))\Big],$$

où

$$(3.9)\qquad \gamma_r = \exp\Big(\sum_{i=1}^{m} \int_{rk}^{(r+1)k} g_i(s)ds\Big)\ (^{22}).$$

Considérons tout d'abord les inégalités (3.8); nous multiplions (3.8) par $(\gamma_r)^{m-i}$ et ajoutons membre à membre les inégalités obtenues pour $i = 1, \ldots, m$ (r étant fixé). Certains termes s'éliminent et nous obtenons:

$$(3.10)\qquad 1 + \Big|v_k^{r+\frac{i}{m}}\Big|^2 + \sum_{i=1}^{m} (\gamma_r)^{m-i} a_i((r+1)k;\ u_{ik}(r+1)k,\ u_{ik}(r+1)k) \leq$$
$$\leq (\gamma_r)^m (1 + |v_k^r|^2) + \sum_{i=1}^{m} (\gamma_r)^{m+1-i} a_i(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)).$$

Posons

$$\sigma_k(rk) = 1 + |v_k^r|^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)).$$

Puisque $\gamma_r \geq 1$, (3.10) permet d'écrire:

$$\sigma_k((r+1)k) \leq (\gamma_r)^m \sigma_k(rk),$$

d'où:

$$\sigma_k((r+1)k) \leq (\gamma_0 \ldots \gamma_r)^m \cdot \sigma_k(0)$$

$$(3.11)\qquad \sigma_k((r+1)k) \leq (\gamma_0 \ldots \gamma_N)^m \cdot \sigma_k(0), \qquad r = 0, \ldots, N.$$

---

(22) On a écrit: $\Big(\int_{rk}^{(r+1)k} g_i(s)ds\Big) \leq \gamma_r$.

Mais, nous avons

$$\sigma_k(0) = 1 + |v_k^0|^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(0;\ u_{ik}(0),\ u_{ih}(0)) =$$

$$= 1 + |u_1|^2 + a(0;\ u_0,\ u_0),$$

$$(\gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_N)^m = \exp\left|m \sum_{i-1}^{m} \int_0^T (|f_{0i}(s)| + c_1' \| f_{1i}(s)\|_{W_i'}^{p'} + c_2' \| f_{1i}(s) \|_{W_i'}) ds\right|$$

et le second membre de (3.11) est donc fini et indépendant de k. Il résulte alors de (3.11) que les termes

$$\begin{cases} |v_k^r|, & r = 0,\ \ldots,\ N+1, \\ a_{ik}(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)), & r = 0,\ \ldots,\ N+1, \qquad i = 1,\ \ldots,\ m \end{cases}$$

sont majorés indépendamment de r et k. Portant cela dans les inégalités (3.8), nous voyons qu'il en est de même des termes

$$\left| v_k^{r+\frac{i}{m}} \right|, \qquad r = 0,\ \ldots,\ N, \qquad i = 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Avec (3.7), il en résulte que

$$\text{(3.12)} \qquad \operatorname*{Sup}_{t \in [0,T]} | u_{ik}'(t) | \leq c_3' \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m)$$

$$\text{(3.13)} \qquad \operatorname*{Sup}_{t \in [0,T]} a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) \leq c_3' \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m)$$

où c_3' est indépendant de k; (3.12) fournit déjà une des estimations à priori cherchées. Par ailleurs

$$u_{ik}(t) = u_0 + \int_0^t u_{ih}'(s) ds$$

et donc

$$\operatorname*{Sup}_{t \in [0,T]} | u_{ik}(t) | \leq | u_0 | + T \operatorname*{Sup}_{t \in [0,T]} | u_{ik}'(t) | \leq c_4', \qquad i = 1,\ \ldots,\ m.$$

Avec (3.13) et l'inégalité (1-iv) pour $a_i(t;\ u,\ v)$, nous obtenons

$$\alpha_i \| u_{ik}(t) \|_i^2 \leq \lambda_i | u_{ik}(t) |^2 + a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)) \leq \lambda_i c_4' + c_3',$$

d'où

$$\sup_{t\in[0,T]} \| u_{ik}(t) \|_i \leq c_5', \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.14}$$

c_5' constante indépendante de k.

Estimations à priori dans $L_p(W_i)$.

En intégrant (3.4) de rk à $(r+1)k$, nous obtenons;

$$\left| v_k^{r+\frac{i}{m}} \right|^2 + a_i((r+1)k;\ u_{ih}(r+1)k,\ u_{ik}h(r+1)k) + \\ + \Re e \int_{rk}^{(r+1)k} < B_i(t) u_{ik}'(t),\ u_{ik}'(t) > dt \leq \left| v_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + \\ + a\,(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)) + \int_{rk}^{(r+1)k} g_i(t)\,[1 + \psi_{ik}(t)]\, dt.$$

Ajoutant membre à membre toutes ces inégalités pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$, il vient:

$$| v_k^{N+1} |^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(T;\ u_{ik}(T),\ u_{ik}(T)) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \Re e \int_0^T < B_i(t) u_{ik}'(t),\ u_{ik}'(t) > dt \leq | u_1 |^2 + \\ + a(0,\ u_0,\ u_0) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T g_i(t) \cdot [1 + \psi_{ik}(t)]\, dt.$$

Avec l'inégalité (1-x) pour $B_i(t)$, nous avons:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \int_0^T \| u_{ik}'(t) \|_{W_i'}^{p'} dt \leq | u_1 |^2 + a(0,\ u_0,\ u_0) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (\mu_i\, | u_{ik}'(t) |^p + g_i(t)\,[1 + \psi_{ik}(t)]) dt. \tag{3.15}$$

En raison de (3.11) et (3.13), le second membre de (3.15) est majoré par

$$| u_1 |^2 + a(0;\ u_0,\ u_0) + T(c_3')^p (\sum_{i=1}^{m} \mu_i) + \\ + [1 + c_3' + (c_3')^2] \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (| f_{0i}(t) | + c_1' \| f_{1i}(t) \|_{W_i'}^{p'} + c_2' \| f_{1i}(t) \|_{W_i'})\, dt.$$

Cette expression étant indépendante de k, il en résulte que les fonctions u'_{ik} sont bornées indépendamment de k dans $L_p(W_i)$.

La proposition est complètement démontrée.

REMARQUE 3.1.

Nous allons établir une égalité d'énergie qui sera utile dans la suite.

En intégrant (3.2) de rk à $(r+1)k$, nous obtenons:

$$\tag{3.16} \begin{aligned} &\left| v_k^{r+\frac{i}{m}} \right|^2 + a_i((r+1)k;\ u_{ik}((r+1)k),\ u_{ik}((r+1)k)) - \\ &- \int_{rk}^{(r+1)k} a'_i(s;\ u_{ik}(s),\ u_{ik}(s))\,ds + 2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{(r+1)k} < B_i(s)u'_{ik}(s),\ u'_{ik}(s) > ds = \\ &= \left| v_k^{r+\frac{i-1}{m}} \right|^2 + a_i(rk;\ u_{ik}(rk),\ u_{ik}(rk)) + 2\,\mathcal{R}e \int_{rk}^{(r+1)k} < f_i(s),\ u'_{ik}(s) > dt. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre toutes ces égalités pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$, nous obtenons:

$$\tag{3.17} \begin{aligned} &| v_k^{N+1} |^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(T;\ u_{ik}(T),\ u_{ik}(T)) - \\ &- \sum_{i=1}^{m} \int_0^T a'_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t))dt + 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < B_i(t)u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > dt = \\ &= | u_1 |^2 + a(0;\ u_0,\ u_0) + 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < f_i(t),\ u'_{ik}(t) > dt. \end{aligned}$$

REMARQUE 3.2.

L'hypothèse (1-vi) a été utilisée dans la démonstration de la proposition 3.1 pour établir (3.4). Toutefois la proposition reste valable sans cette hypothèse pourvu que (1-iv) ait lieu avec $\lambda_i = 0$. En effet, si $\lambda_i = 0$, nous avons

$$| a'_i(t;\ u,\ u) | \leq M_i \| u \|_i^2 \leq \frac{M_i}{\alpha_i} a_i(t;\ u,\ u), \qquad \forall\, u \in V_i.$$

Au lieu de (3.4) nous pourrions écrire

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\psi_{ik}(t) + 2\,\mathcal{R}e < B_i(t)u'_{ik}(t),\ u'_{ik}(t) > \leq \\ &\qquad \leq 2\,\mathcal{R}e < f_{0i}(t) + f_{1i}(t),\ u'_{ik}(t) > + \frac{M_i}{\alpha_i} a_i(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t)), \end{aligned}$$

et a partir de là, la démonstration de la proposition demeurerait valable, sans changement.

4. - Théorème de Convergence.

4.1. - *Enoncé du théorème.*

THÉORÈME 4.1.

Les hypothèses sont (1-i)-(1-xi), (2-i)-(2-vi) *et* u *désigne la solution du problème* 1.

Lorsque $k \to 0$, *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{cases} u_{ik} \to u \quad \textit{dans} \quad L_\infty(V_i) \quad \textit{faible} \\ u'_{ik} \to u' \quad \textit{dans} \quad L_\infty(H) \quad \textit{faible et dans} \quad L_p(W_i) \quad \textit{faible}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{ik}(t) \to u(t) \quad \textit{dans} \quad V_i \quad \textit{faible pour tout} \quad t \in [0, T] \\ u'_{ik}(t) \to u'(t) \quad \textit{dans} \quad H \quad \textit{faible pour tout} \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

La démonstration du théorème 4.1 est donnée dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4. Dans la section 4.5 nous indiquons, sans démonstration, quelques résultats de convergence forte.

REMARQUE 4.1.

Si l'opérateur $B_i(t)$ est linéaire et si (1-iv) a lieu avec $\lambda_i = 0$, tous les résultats de cette partie demeurent valables même si l'hypothèse (1-vi) n'est pas vérifiée.

En effet le théorème 1.1 et la proposition 3.1 sont valables dans ce cas (cf. remarques 1.1 et 3.2). D'autre part nous verrons que l'hypothèse (1-vi) n'intervient dans la démonstration du théorème 4.1 que pour le lemme 4.4 et ce lemme est trivial si l'opérateur $B_i(t)$ est linéaire.

4.2. - *Première partie de la démonstration.*

En raison de la proposition 3.1 et de la propriété (1-xi) pour $B_i(t)$, la suite $B_i u'_{ik}$ est bornée indépendamment de k dans $L_{p'}(W'_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Il existe donc une sous-suite $k' \to 0$, telle que, pour $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{cases} u_{ik'} \to w_i \quad \text{dans} \quad L_\infty(V_i) \quad \text{faible} \\ u'_{ik'} \to w'_i \quad \text{dans} \quad L_\infty(H) \quad \text{faible et dans} \quad L_p(W_i) \quad \text{faible} \end{cases} \tag{4.1}$$

$$B_i u'_{ik'} \to \chi_i \quad \text{dans} \quad L_{p'}(W'_i) \quad \text{faible.} \tag{4.2}$$

LEMME 4.1.

Les fonctions w_i sont p.p. égales à une même fonction w et

$$\left\{\begin{array}{l} w \in L_\infty(V) \\ w' \in L_\infty(H) \cap L_p(W). \end{array}\right. \tag{4.3}$$

Démonstration.

Soit t fixé, $t \in [rk, (r+1)k[$; par intégration des égalités (2.8), nous avons

$$u'_{1k}((r+1)k-0) - u'_{1k}(t) = \int_t^{(r+1)k} [f_1(s) - A_1(s)u_{1k}(s) - B_1(s)u'_{1k}(s)]ds$$

$$u'_{2k}(t) - u'_2(rk+0) = \int_{rk}^{t} [f_2(s) - A_2(s)u_{2k}(s) - B_2(s)u'_{2k}(s)]ds.$$

D'après (2.2) et (2.3),

$$u'_{1k}((r+1)k-0) = u'_{2k}(rk+0)\left(= v_k^{r+\frac{i}{m}}\right).$$

Ajoutant membre à membre les égalités précédentes, il reste alors

$$u'_{2k}(t) - u'_{1k}(t) = \int_t^{(r+1)k} [f_{01}(s) + f_{11}(s) - A_1(s)u_{1k}(s) - B_1(s)u'_{1k}(s)]ds +$$
$$+ \int_{rk}^{t} [f_{02}(s) + f_{12}(s) - A_2(s)u_{2k}(s) - B_2(s)u'_{2k}(s)]\,ds.$$

Avec l'inégalité de Hölder, nous en déduisons

$$\| u'_{2k}(t) - u'_{1k}(t) \|_{(V \cap W)'} \leq c_1\left(\int_t^{(r+1)k} | f_{01}(s) |\, ds + \int_{rk}^{t} | f_{02}(s) |\, ds\right) + \tag{4.4}$$
$$+ c_1 k^{1/2}(M_1 \| u_{ik} \|_{L_2(V_1)} + M_2 \| u_{2k} \|_{L_2(V_2)}) +$$
$$+ c_1 k^{1/p}(\| f_{11} - B_1 u'_{ik} \|_{L_{p'}(W_1')} + \| f_{12} - B_2 u'_{2k} \|_{L_{p'}(W_2')}),$$

la constante c_1 étant supérieure ou égale aux normes des injections de H, V'_i, W'_i dans $(V \cap W)'$.

Grâce aux estimations à priori de la proposition 3.1, il est clair que, t étant fixé, le second membre de (4.4) tend vers 0 avec k.

Ainsi $u'_{2k}(t) - u'_{1k}(t) \to 0$ dans $(V \cap W)'$ fort, pour tout $t \in [0, T]$. La fonction $t \mapsto \| u'_{2k}(t) - u'_{ik}(t) \|_{(V \cap W)'}$ étant en outre essentiellement bornée sur $[0, T]$ indépendamment de k, nous en déduisons avec le théorème de Lebesgue que

$$u'_{2k} - u'_{1k} \to 0 \quad \text{dans} \quad L_1((V \cap W)').$$

Par comparaison avec (4.1), cela implique

$$w'_2(t) = w'_1(t) \quad \text{p.p.}, \tag{4.5}$$

et $w_2 - w_1$ est une fonction constante p.p.

Puisque $w_i \in L_\infty(V_i)$ et $w'_i \in L_\infty(H)$, les fonctions w_i sont p.p. égales à des fonctions w_{*i} continues de $[0, T]$ dans H (au moins) et, d'après (4.1), $u_{ik'}(t) \to$ $\to w_{*i}(t)$ dans H faible, pour tout $t \in [0, T]$. En particulier

$$w_{*i}(0) = \lim_{k' \to 0} \ (\text{dans } H \text{ faible}) \ u_{ik'}(0) = u_0 .$$

Donc $w_{*1}(0) = w_{*2}(0)$ et, avec (4.5), $w_{*1}(t) = w_{*2}(t) \ \forall\, t \in [0, T]$; $w_1(t) = w_2(t)$ p.p.

Nous démontrerions de manière identique que $w_2 = w_3, \ldots, w_{m-1} = w_m$. Ce point étant établi, (4.3) est alors une conséquence immédiate du lemme 6.1 du chap. I.

4.3. - *Deuxième partie de la démonstration*: $w(t) = u(t)$ *p.p.*

Par intégration des égalités (2.8), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} v_k^{q+\frac{i}{m}} + \int_{qk}^{(q+1)k} [A_i(s) u_{ik}(s) + B_i(s) u'_{ik}(s)] ds = \\ = v_k^{q+\frac{i-1}{m}} + \int_{qk}^{(q+1)k} f_i(s) ds, \qquad q = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour t fixé, r désignant le plus grand entier inférieur ou égal à t/k (donc $t \in [rk, (r+1)k[$), nous avons aussi

$$u'_{1k}(t) + \int_{rk}^{t} [A_1(s) u_{1k}(s) + B_1(s) u'_{1k}(s)] ds = v_k^r + \int_{rk}^{t} f_1(s) ds.$$

Nous ajoutons membre à membre cette égalité et toutes les égalités (4.6) pour $q = 1, \ldots, r-1$, $i = 1, \ldots, m$. Il vient

$$u'_{1k}(t) = u_1 + \int_0^t [f_1(s) - A_1(s)u_{1k}(s) - B_1(s)u'_{1k}(s)]ds + \tag{4.7}$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} \int_0^{rk} [f_i(s) - A_i(s)u_{ik}(s) - B_i(s)u'_{ik}(s)]ds.$$

Nous étudions la limite, pour $k' \to 0$, du second membre de (4.7) (t étant fixé). D'après (4.1), (4.2) et le lemme 6.2 du chapitre I:

$$\int_0^t [f_{01}(s) - A_1(s)u_{1k'}(s)]ds \to \int_0^t [f_{01}(s) - A_1(s)w(s)]ds \quad \text{dans } V'_2 \text{ faible,}$$

$$\int_0^{rk'} [f_{0i}(s) - A_i(s)u_{ik'}(s)]ds \to \int_0^t [f_{0i}(s) - A_i(s)w(s)]ds \quad \text{dans } V'_i \text{ faible,}$$

$$\int_0^t [f_{11}(s) - B_1(s)u'_{1k'}(s)]ds \to \int_0^t [f_{11}(s) - \chi_i(s)]ds \quad \text{dans } W'_1 \text{ faible,}$$

$$\int_0^{rk'} [f_{1i}(s) - B_i(s)u'_{ik'}(s)]ds \to \int_0^t [f_{1i}(s) - \chi_i(s)]ds \quad \text{dans } W'_i \text{ faible.}$$

Cela nous montre que, lorsque $k' \to 0$, le second membre de (4.7), et donc aussi le premier, converge dans $(V \cap W)'$ faible, vers

$$g(t) = u_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t [f_{0i}(s) + f_{1i}(s) - A_i(s)w(s) - \chi_i(s)]ds,$$

soit

$$g(t) = u_1 + \int_0^t [f(s) - A(s)w(s) - \chi(s)]ds, \tag{4.8}$$

$$\chi(s) = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(s). \tag{4.9}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$, $u'_{1k'}(t) \to g(t)$ dans $(V \cap W)'$ faible, lorsque $k' \to 0$ et, d'après la proposition 3.1, les fonctions $t \mapsto \| u'_{1k'}(t) \|_{(V \cap W)'}$ sont essentiellement bornées sur $[0, T]$ indépendamment de k.

Soit alors $v \in V \cap W$ et $\varphi \in \mathcal{C}$ (fonctions scalaires continues sur $[0, T]$), quelconques. D'après les résultats précédents et le théorème de Lebesgue, nous avons

$$\int_0^T < u'_{1k}(t),\ v > \varphi(t)\,dt \to \int_0^T < g(t),\ v > \varphi(t)dt$$

et puisque $\varphi \otimes v \in L_1(H)$, d'après (4.1) et (4.3), nous avons

$$\int_0^T < u'_{1k'}(t),\ v > \varphi(t)dt \to \int_0^T < w'(t),\ v > \varphi(t)dt.$$

Par comparaison,

$$\int_0^T < g(t),\ v > \varphi(t)dt = \int_0^T < w'(t),\ v > \varphi(t)dt,$$

$\forall\, v \in V \cap W$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}$; comme $\mathcal{C} \otimes (V \cap W)$ est dense dans $L_1(H)$ (par exemple), on a $g = w'$; $g(t) = w'(t)$ p.p.

Dans ces conditions, (4.8) donne l'égalité suivante

$$w'(t) + \int_0^t A(s)w(s)ds + \int_0^t \chi(s)ds = u_0 + \int_0^t f(s)ds, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \tag{4.11}$$

Avec (4.11) et une remarque faite dans la démonstration du lemme 4.1, nous voyons que w est p.p. égale à une fonction w_* continue de $[0,\ T] \to H$, de dérivée w'_* continue de $[0,\ T] \to (V \cap W)'$, avec $w_*(0) = u_0$, $w'_*(0) = u_1$.

Par dérivation de (4.11), nous obtenons

$$w''_*(t) + A(t)w_*(t) + \chi(t) = f(t). \tag{4.12}$$

Pour conclure que $w_* = u$, il nous suffit à présent de montrer

$$\chi = Bw'_*. \tag{4.13}$$

C'est l'objet des lemmes qui suivent.

LEMME 4.2.

La fonction w_* *est continue de* $[0,\ T] \to V$, w'_* *est continue de* $[0,\ T] \to H$ *et, pour tout* $t \in [0,\ T]$:

$$(4.14)\qquad |w'_*(t)|^2 + a(t;\, w_*(t),\, w_*(t)) = |u_1|^2 + a(0;\, u_0,\, u_0) + \\ + \int_0^t a'(s;\, w(s),\, w(s))ds + 2\,\Re e\int_0^t < f(s) - \chi(s),\, w'(s) > ds.$$

Compte tenu de ce qui précède, ce lemme est une conséquence directe des théorèmes 4.1 et 4.2 de W. A. STRAUSS [35].

LEMME 4.3.

Pour tout $t \in [0, T]$, *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$(4.15)\qquad \begin{cases} u_{ik'}(t) \to w_*(t) & \textit{dans } V_i \textit{ faible} \\ u'_{ik'}(t) \to w'_*(t) & \textit{dans } H \textit{ faible.} \end{cases}$$

Démonstration.

Soient t et i fixés, $t \in [0, T]$, $1 \leq i \leq m$.

D'après la proposition 3.1, $u_{1k}(t)$ est une suite bornée dans V_i, et nous avons vu dans la démonstration du lemme 4.1 que $u_{ik'}(t) \to w_*(t)$ dans H faible. En raison du lemme 6.3 du chapitre I, cette convergence a lieu dans V_i faible.

D'aprés la proposition 3.1, $u'_{1k}(t)$ est une suite bornée dans H. Dans ce qui précède [cf. (4.7)-(4.11)] nous avons vu que $u_{1k'}(t) \to w'_*(t)$ dans $(V \cap W)'$ faible. Dans la démonstration du lemme 4.1, nous avons vu que $u'_{jk}(t) - u'_{(j-1)k}(t) \to 0$ dans $(V \cap W)'$ fort, $j = 2, \ldots, m$. Donc $u'_{ik'}(t) \to w'_*(t)$ dans $(V \cap W)'$ faible et, d'après le lemme 5.3 du chap. I, cette convergence a lieu dans H faible.

Nous allons montrer à presént un résultat plus précis qùe (4.13):

LEMME 4.4.

$$\chi_i = B_i w'_*\,, \qquad i = 1, \ldots, m, \text{ [23]}.$$

Démonstration.

Le principe de cette démonstration est le même que pour les équations du ler ordre, et repose sur la monotonie des opérateurs $B_i(t)$ [hypothèse (1-ix)].

Etant données m fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, vérifiant

$$(4.16)\qquad \varphi_i \in \mathcal{C}(V), \qquad \varphi'_i \in \mathcal{C}(H) \cap L_p(W_i), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

---

[23] C'est-à-dire que $B_i u'_{ik} \to B_i w'$ dans $L_{p'}(W'_i)$ faible (cf. (4.2))

nous considérons l'expression suivante:

$$Y_{k\varphi} = | v_k^{N+1} - \varphi'(T) |^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(T;\ u_{ik}(T) - \varphi(T),\ u_{ik}(T) - \varphi(T)) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \int_0^T a_i'(t;\ u_{ik}(t) - \varphi(t),\ u_{ik}(t) - \varphi(t))dt +$$

$$+ 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < B_i(t)u_{ik}'(t) - B_i(t)\varphi_i'(t),\ u_{ik}'(t) - \varphi_i'(t) > dt,$$

où

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i .$$

Nous écrivons

$$Y_{k\varphi} = Y_\varphi^1 + Y_{k\varphi}^2 + Y_{k\varphi}^3$$

où

$$Y_\varphi^1 = | \varphi'(T) |^2 + a(T;\ \varphi(T),\ \varphi(T)) -$$

$$- \int_0^T a'(t;\ \varphi(t),\ \varphi(t))dt + 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < B_i(t)\varphi_i'(t),\ \varphi_i'(t) > dt,$$

$$Y_{k\varphi}^2 = -\, 2\, \mathcal{R}e\, (v_k^{N+1},\ \varphi'(T)) - 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} a_i(T;\ \varphi(T),\ u_{ik}(T)) +$$

$$+ 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T a_i'(t;\ \varphi(t),\ u_{ik}(t))dt -$$

$$- 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T [< B_i(t) u_{ik}'(t),\ \varphi_i'(t) > + < B_i(t)\varphi_i'(t),\ u_{ik}'(t) >]dt,$$

$$Y_{k\varphi}^3 = | v_k^{N+1} |^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(T;\ u_{ik}(T),\ u_{ik}(T)) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \int_0^T a_i'(t;\ u_{ik}(t),\ u_{ik}(t))dt + 2\, \mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < B_i(t)u_{ik}'(t),\ u_{ik}'(t) > dt.$$

Les fonctions φ_i étant fixées, nous passons à la limite avec la suite k; Y_φ^1 est indépendant de k. Pour $Y_{k\varphi}^2$, grâce à (4.1), (4.2) et au lemme 4.3 nous avons:

$$\lim_{k'\to 0} Y^2_{k'\varphi} = Y^2_\varphi = -2\,\Re e\,(w'_*(T),\ \varphi'(T)) -$$
$$-2\,\Re e\, a(T;\ \varphi(T),\ w_*(T)) + 2\,\Re e\int_0^T a'(t;\ \varphi(t),\ w(t))dt -$$
$$-2\,\Re e \sum_{i=1}^m \int_0^T [<\chi_i(t),\ \varphi'_i(t)> + <B_i(t)\varphi'_i(t),\ w'(t)>]\, dt.$$

Utilisant successivement (3.17), (4.1) puis (4.14), nous avons:

$$Y^3_{k\varphi} = |\,u_1\,|^2 + a(0;\ u_0,\ u_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^T <f_i(s),\ u'_{ik}(s)> ds,$$

$$\lim_{k'\leftarrow 0} Y^3_{k'\varphi} = Y^3_\varphi = |\,u_1\,|^2 + a(0;\ u_0,\ u_0) + \int_0^T <f(s),\ w'(s)> ds,$$

$$Y^3_\varphi = |\,w'_*(T)\,|^2 + a(T;\ w_*(T),\ w_*(T)) -$$
$$-\int_0^T a'(t;\ w(t),\ w(t))dt + 2\,\Re e\int_0^T <\chi(t),\ w'(t)> dt.$$

Regroupant ces résultats de convergence, nous obtenons:

$$\lim_{k'\to 0} Y_{k'\varphi} = Y_\varphi = |\,w'_*(T) - \varphi'(T)\,|^2 + a(T;\ w_*(T) - \varphi(T),\ w_*(T) - \varphi(T)) -$$
$$-\int_0^T a'(t;\ w(t) - \varphi(t),\ w(t) - \varphi(t))dt +$$
$$+2\,\Re e \sum_{i=1}^m \int_0^T <B_i(t)\varphi'_i(t) - \chi_i(t),\ \varphi'_i(t) - w'(t)> dt.$$

L'expression $Y_{k\varphi}$ est non négative en raison des hypothèses (1-iii), (1-vi) et (1-ix). A la limite il en est donc de même de Y_φ. Pour montrer que $\chi_i = B_i w'$, nous écrivons l'inégalité $Y_\varphi \geq 0$, avec le choix suivant des fonctions φ_j:

$$\begin{cases} \varphi_j = w_* \quad \text{pour} \quad j \neq i \quad \text{et} \\ \varphi_i = w_* + \xi\psi, \qquad \xi > 0, \qquad \psi \in \mathcal{C}(V), \qquad \psi' \in \mathcal{C}(H) \cap L_p(W_i). \end{cases}$$

Après division par ξ nous obtenons:

$$\xi \left| \frac{1}{m} \psi'(T) \right|^2 + \xi a\left(T; \frac{1}{m}\psi(T), \frac{1}{m}\psi(T)\right) - \xi \int_0^T a'\left(s; \frac{1}{m}\psi(s), \frac{1}{m}\psi(s)\right) ds +$$

$$+ 2\,\Re e \int_0^T < B_i(t) \cdot (w'_*(t) + \xi\psi'(t)) - \chi_i(t),\ \psi'(t)> dt \geq 0.$$

Faisons tendre ξ vers 0. Nous voyons avec (1-xi) que $B_i(w'_* + \xi\psi') \to B_i \cdot w'_*$ dans $L_{p'}(W'_i)$ faible, et il vient

$$\Re e \int_0^T < B_i(t) w'_*(t) - \chi_i(t),\ \psi'(t) > dt \geq 0.$$

Cette inégalité ne peut être vérifiée pour toutes les fonctions ψ considérées, que si

$$\chi_i = B_i w'_* ,$$

et le lemme en résulte.

Nous pouvons affirmer avec ce lemme que

$$w_* = u.$$

Puisque les limites sont indépendantes de la sous-suite k', les convergences (4.1), (4.2) (4.15) ont lieu pour la suite k toute entière.

Cela termine la démonstration du théorème 4.1.

4.4. - *Complément au théorème* 4.1: *Résultats de convergence forte.*

Nous pouvons compléter le théorème 4.1 par différents résultats de convergence forte. Nous nous contentons d'énoncer ces résultats, leur démonstration étant très technique.

THÉORÈME 4.2.

Avec les hypothèses du théorème 5.1, *lorsque* $k \to 0$, *pour* $i = 1, ..., m$

$$u_{ik}(t) \to u(t) \quad \textit{dans } V_i \textit{ fort, pour tout } \quad t \in [0, T]$$

$$u'_{ik}(t) \to u'(t) \quad \textit{dans } H \textit{ fort, pour tout } \quad t \in [0, T].$$

Selon la méthode utilisée dans la section 7.3 du chapitre I, on montre qu'une expression $X_{ik}(t)$ convenable tend vers 0 avec k (t et i étant fixés).

Cette expression est ici:

$$X_{ik}(t) = | u'_{ik}(t) - u'(t) |^2$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} a_j(t_{ij};\ u_{jk}(t_{ij}) - u(t),\ u_{jk}(t_{ij}) - u(t)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} a'_j(s;\ u_{jk}(s) - u(s),\ u_{jk}(s) - u(s))ds +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{j=1}^{m} \int_0^{t_{ij}} < B_j(s)u'_{jk}(s) - B_j(s)u'(s),\ u'_{jk}(s) - u'(s) > ds,$$

où t_{ij} a la même signification qu'au chapitre I-(7.11).

Avec des hypothèses supplémentaires sur les opérateurs $B_i(t)$ nous pouvons obtenir des résultats de convergence forte dans $L_p(W_i)$. Voici un résultat analogue à celui du théorème 4.2. Chapitre II (et se démontrant de la même manière):

THÉORÈME 4.3.

Avec les hypothèses du théorème 4.1, *si l'espace* W_i *est uniformément convexe et si l'hypothèse* (1-x) *pour* $B_i(t)$ *est remplacée par*

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}e < B_i(t)v,\ v > + \mu_i\,|\,v\,|^p = \beta_i \,\|\, v\,\|^p_{W_i} \\ \forall\, v \in W_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T], \end{cases}$$

alors, lorsque $k \to 0$,

$$u'_{ik} \to u' \quad \textit{dans} \quad L_p(W_i) \quad \textit{fort.}$$

5. - Exemples.

5.1. - EXEMPLE 1: *Problème linéaire.*

Soit Ω un ouvert borné de R^n, de frontière Γ. Nous posons $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ (24), $W = H$. Nous prenons $m = n$ et, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$V_i = H_0(D_i\,;\ \Omega)\ (^{24}); \qquad W_i = H.$$

Formes $a(t\,;\ u,\ v)$, $a_i(t\,;\ u,\ v)$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, soient $a_i(x,\ t)$ et $c_i(x,\ t)$ des fonctions appartenant à

(24) Notations de l'exemple 2, chapitre I.

$L_\infty(Q_T)$ et telles que

$$a_i'(x,\ t) = \frac{\partial}{\partial t} a_i(x,\ t) \in L_\infty(Q_T)$$

$$\Re e\, a_i(x,\ t) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T$$

$$\Re e\, c_i(x,\ t) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T.$$

Nous posons

$$a_i(t\,;\ u,\ v) = \int_\Omega a_i(x,\ t) D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx + \int_\Omega c_i(x,\ t) u(x) \overline{v(x)}\, dx, \tag{5.1}$$

$$a(t\,;\ u,\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x,\ t) D_i u(x) D_i \overline{v(x)} dx + \int_\Omega c(x,\ t) u(x) \overline{v(x)} dx, \tag{5.2}$$

où

$$c(x,\ t) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x,\ t).$$

Opérateurs $B(t)$, $B_i(t)$: identiquement nuls.

Les hypothèses relatives aux opérateurs $B(t)$, $B_i(t)$, sont triviales. Les autres hypothèses se vérifient comme dans l'exemple 2 du chapitre I.

Problème exact.

Soient $u_0 = u_0(x) \in H^1(\Omega)$, $u_1 = u_1(x) \in L_2(\Omega)$, $f = f(x,\ t) \in L_1(L_2(\Omega))$ donnés. La solution $u = u(x,\ t)$ du problème 1 vérifie:

$$u,\ u',\ D_i u \in \mathcal{C}(H) = \mathcal{C}(0,\ T\,;\ L_2(\Omega)), \qquad i = 1,\ \ldots,\ n \tag{5.3}$$

$$u''(x,\ t) - \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x,\ t) D_i u(x,\ t)] + c(x,\ t) u(x,\ t) = f(x,\ t) \quad \text{dans} \quad Q_T \tag{5.4}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x), \qquad u'(x,\ 0) = u_1(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{5.5}$$

$$u(x,\ t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T. \tag{5.6}$$

Problème approché.

Les fonctions $u_{ik} = u_{ik}(x,\ t)$ vérifient les conditions initiales successives (2.2), (2.3) et, pour $i = 1,\ \ldots,\ n$

$$\begin{cases} u_{ik},\ D_i u_{ik} \in \mathcal{C}(0,\ T\,;\ L_2(\Omega)) \\ u_{ik}' \in L_\infty(L_2(\Omega)) \end{cases} \tag{5.7}$$

(5.8) $$u''_{ik}(x,\ t) - D_i[a_i(x,\ t)D_iu_{ik}(x,\ t)] + c_i(x,\ t)u_{ik}(x,\ t) = \\ = f_i(x,\ t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times]rk,\ (r+1)k[, \qquad r = 0,\ \dots,\ N$$

(5.9) $$\cos(\nu,\ x_i)u_{ik}(x,\ t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T.$$

Résultats de convergence.

Lorsque $k \to 0$, pour $i = 1, \dots, n$, nous avons en particulier (cf. remarque 4.1):

$$\begin{cases} u_{ik} \to u & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ D_iu_{ik} \to D_iu & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ u'_{ik} \to u' & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \end{cases}$$

5.2. - EXEMPLE 2: *Problème non linéaire.*

Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ et soit $H = L_2(\Omega)$ avec le produit scalaire habituel. Nous posons

$$V = H^1(\Omega), \qquad W = L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega),$$

$$((u,\ v)) = (u,\ v) + \sum_{i=1}^{n} (D_iu,\ D_iv),$$

$$\| u \|_W = \left(| u |^p + \int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Nous prenons $m = n + 1$ et,

pour $i = 1, \dots, n$,

$$V_i = H(D_i;\ \Omega) = \{ u \mid u \in L_2(\Omega), \qquad D_iu \in L_2(\Omega) \},$$

$$a_i(t;\ u,\ v) = a_i(u,\ v) = \int_\Omega a_i(x)D_iu(x)D_i\overline{v(x)}dx,$$

où $a_1(x), \dots, a_n(x)$ sont des fonctions dans $L_\infty(\Omega)$ avec

$$\mathcal{R}e\, a_i(x) \geq \eta > 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega;$$

pour $i = n + 1$,

$$V_i = H, \qquad a_i(t;\ u,\ v) = 0,$$

$$W_i = W, \qquad B_i = B \quad \text{défini par}$$

$$< Bu, v > = \int_\Omega | u(x) |^{p-2} u(x)\overline{v(x)}dx, \qquad \forall\, u, v \in W.$$

La vérification des hypothèses (1-i)-(1-xi), (2-i)-(2-vi) se fait sans difficulté [(2-iv) définit $a(t; u, v)$].

Problème exact.

Soient $u_0 = u_0(x) \in H^1(\Omega)$, $u_1 = u_1(x) \in L_2(\Omega)$, $f = f(x, t) \in L_1(L_2(\Omega)) + L_{p'}(Q_T)$ donnés. La solution $u = u(x, t)$ du problème 1 vérifie:

$$(5.10) \qquad \begin{cases} u, D_i u \in \mathcal{C}(0, T; L_2(\Omega)) \qquad (i = 1, .., n) \\ u' \in \mathcal{C}(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_p(Q_T) \end{cases}$$

$$(5.11) \qquad u''(x, t) - \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x) D_i u(x, t)] + + | u'(x, t) |^{p-2} u'(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans} \quad Q_T$$

$$(5.12) \qquad u(x, 0) = u_0(x), \qquad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

$$(5.13) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T.$$

Problème approché.

Les fonctions $u_{ik} = u_{ik}(x, t)$ vérifient les conditions initiales successives (2.2), (2.3) et

pour $i = 1, \ldots, n$.

$$(5.14) \qquad u_{ik}, D_i u_{ik} \in \mathcal{C}(0, T; L_2(\Omega)), \qquad u'_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega))$$

$$(5.15) \qquad u''_{ik}(x, t) - D_i[a_i(x) D_i u_{ik}(x, t)] = f_i(x, t)$$

$$\text{dans} \quad \Omega \times]rk, (r+1)k[, \qquad r = 0, \ldots, N,$$

$$(5.16) \qquad \cos(\nu, x_i) D_i u_{ik}(x, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T$$

(condition aux limites formelle)

pour $i = n + 1$,

$$(5.17) \qquad u_{ik} \in \mathcal{C}(0, T; L_2(\Omega)), \qquad u'_{ik} \in L_\infty(L_2(\Omega)) \cap L_p(Q_T),$$

$$(5.18) \qquad u''_{ik}(x, t) + | u_{ik}(x, t) |^{p-2} u'_{ik}(x, t) = f_i(x, t) \quad \text{dans} \quad Q_T.$$

REMARQUE 5.1.

L'équation (5.18) *est une équation différentielle en t, x étant seulement un paramètre.*

Résultats de convergence.

Lorsque $k \to 0$, d'après les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3. nous avons

$$\begin{cases} u_{ik} \to u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible,} \\ u'_{ik} \to u' \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega | u_{ik}(x, t) - u(x, t) |^2 \, dx \to 0 \qquad \forall\, t \in [0, T], \\ \displaystyle\int_\Omega | u'_{ik}(x, t) - u'(x, t) |^2 \, dx \to 0 \qquad \forall\, t \in [0, T], \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, n+1.$$

$$\begin{cases} D_i u_{ik} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible,} \\ \displaystyle\int_\Omega | D_i u_{ik}(x, t) - D_i u(x, t) |^2 \, dx \to 0, \qquad \forall\, t \in [0, T]; \qquad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

$$u'_{(n+1)k} \to u' \quad \text{dans} \quad L_p(Q_T) \quad \text{fort.}$$

5.3. - *Autres exemples.*

Les résultats de ce chapitre sont encore applicables à des problèmes très différents des exemples précédents. Voici un exemple que nous n'expliciterons pas, mais dont l'approximation entre dans le cadre de ce chapitre:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}(0, T; H_0^2(\Omega)) \\ u' \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0, T; L_2(\Omega)) \\ u''(x, t) - \Delta u'(x, t) + \Delta^2 u(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans} \quad Q_T \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad (\text{donné dans} \quad H_0^2(\Omega)) \\ u'(x, 0) = u_1(x) \quad (\text{donné dans} \quad L_2(\Omega)). \end{cases}$$

§ 2. - Approximations discrètes.

6. - Hypothèses de discrétisation.

6.1. - Nous nous donnons un espace de Hilbert $\tilde{H}$ dont H est un sous-espace hilbertien et dont nous notons encore (f, g) le produit scalaire.

Nous considérons pour $i = 1, \ldots, m$, un espace de Hilbert Φ_i et un espace de Banach reflexif Ψ_i; nous posons $F_i = \tilde{H} \times \Phi_i$, $G_i = \tilde{H} \times \Psi_i$ et nous appelons (abusivement) π_i la projection canonique de F_i sur $\tilde{H}$ ou de G_i sur $\tilde{H}$. Nous supposons qu'il existe un isomorphisme $\bar{\omega}_i$ (resp. ω_i) de V_i dans F_i (resp. de W_i dans G_i), tel que $\pi_i \cdot \bar{\omega}_i$ (resp. $\pi_i \; \omega_i$) soit l'identité.

Pour $i = 1, \ldots, m$, soit $\tilde{a}_i(t; u, v)$, $t \in [0, T]$, une famille de formes sesquilinéaires continues sur F_i vérifiant les conditions suivantes:

$$(6\text{-i}) \qquad \begin{cases} \tilde{a}_i(t;\, \bar{\omega}_i u,\, \bar{\omega}_i v) = a_i(t;\, u,\, v) \\ \forall\, u,\, v \in V_i, \qquad \forall\, t \in [0,\, T] \end{cases}$$

$$(6\text{-ii}) \qquad \tilde{a}_i(t,\, u,\, v) = \overline{\tilde{a}_i(t;\, v,\, u)}, \qquad \forall\, u,\, v \in F_i, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

$$(6\text{-iii}) \qquad \tilde{a}_i(t;\, u,\, u) \geq 0, \qquad \forall\, u \in F_i, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

$$(6\text{-iv}) \qquad \tilde{a}_i(t;\, u,\, u) + \lambda_i\, |\, \pi_i u\, |^2 \geq \alpha_i \, \| u \|_{F_i}^2, \qquad \forall\, u \in F_i, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

(6-v) $\Big\{$ Pour tout $u \in F_i$, la fonction $t \to \tilde{a}_i(t;\, u,\, u)$ est une fois continûment différentiable.

$$(6\text{-vi}) \qquad \tilde{a}_i'(t;\, u,\, u) = \frac{d}{dt}\tilde{a}_i(t;\, u,\, u) \leq 0, \qquad \forall\, u \in F_i, \qquad \forall\, t \in [0,\, T].$$

D'après (6-ii) et (6-v), la fonction $t \to \tilde{a}_i(t;\, u,\, v)$ est continûment différentiable pour tout couple d'éléments u, v de F_i; il existe donc une constante M_i telle que

$$(6\text{-vii}) \qquad \begin{cases} |\, \tilde{a}_i'(t,\, u,\, v)\, | + |\, \tilde{a}_i(t;\, u,\, v)\, | \leq M_i \| u \|_{F_i} \| v \|_{F_i} \\ \forall\, u,\, v \in F_i, \qquad \forall\, t \in [0,\, T]. \end{cases}$$

Nous nous donnons également, pour $i = 1, \ldots, m$, et pour presque tout $t \in [0, T]$ un opérateur $\tilde{B}_i(t)$ qui applique G_i dans G_i', et nous faisons les hypothèses suivantes:

$$\text{(6-viii)} \qquad \begin{cases} < \tilde{B}_i(t)(\omega_i u),\ \omega_i v > \, = \, < B_i(t)u,\ v > \\ \forall\ u,\ v \in W_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

(6-ix) $\left\{\right.$ Pour presque tout t, $\tilde{B}_i(t)$ est continu des sous-espaces de dimension finie de G_i dans G_i' faible.

$$\text{(6-x)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e < \tilde{B}_i(t)u - \tilde{B}_i(t)v,\ u - v > \, \geq 0 \\ \forall\ u,\ v \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

$$\text{(6-xi)} \qquad \begin{cases} \mathcal{R}e < \tilde{B}_i(t)u,\ u > + \, \mu_i \,|\, \pi_i u \,|^p \geq \beta_i \,\|\, u \,\|_{G_i}^p \\ \forall\ u \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T]. \end{cases}$$

$$\text{(6-xii)} \qquad \|\, B_i(t)u \,\|_{G_i'} \leq N_i \,\|\, u \|_{G_i}^{p/p'}, \qquad \forall\ u \in G_i, \qquad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T].$$

Faisant $u = 0$ dans (6-xii), nous voyons que $B_i(t) \cdot 0 = 0$. Faisant alors $v = 0$ dans (6-x), il vient

$$\text{(6-xiii)} \qquad \mathcal{R}e < \tilde{B}_i(t)u,\ u > \, \geq 0, \qquad \forall\ u \in G_i, \qquad p.p. \quad t \in [0,\ T].$$

6.2. - Soit $\mathcal{H} = (]0,\ 1])^n$; et pour chaque $h \in \mathcal{H}$, soit:

— V_h un espace vectoriel sur $\boldsymbol{C}$ de dimension finie;

— r_h une application linéaire de H et dans V_h q_h une application linéaire biunivoque de V_h dans $\tilde{H}$, avec

$$\text{(6-xiv)} \qquad |\, q_h r_h \,|_{\mathcal{L}(H,\, \tilde{H})} \leq c_2,$$

(constante indépendante de h).

— p_{ih}, $i = 1, \ldots, m$, une application linéaire biunivoque de V_h dans F_i, telle que $\pi_i \cdot p_{ih} = q_h$ et que

$$\text{(6-xv)} \qquad |\, p_{ih} r_h \,|_{\mathcal{L}(V_i,\, F_i)} \leq c_3;$$

— q_{ih}, $i = 1, \ldots, m$, une application linéaire biunivoque de V_h dans G_i, avec $\pi_i \cdot q_{ih} = q_h$.

Les applications q_h, p_{ih}, q_{ih} étant injectives, il est clair que les produits scalaires

$$(u_h,\ v_h)_h = (q_h v_h,\ q_h u_h)$$

$$((u_h,\ v_h))_{ih} = ((p_{ik} u_h,\ p_{ih} v_h))_{F_i}, \qquad i = 1,\ \ldots,\ m,$$

sont des produits scalaires hilbertiens sur V_h, et que

$$\| q_{ih} u_h \|_{G_i}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

est une norme sur V_h.

Hypothèses de consistance $(h \to 0)$.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

(6-xvi) Il existe une sous-espace $\mathcal{V}$ dense dans $V \cap W$, tel que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, lorsque $h \to 0$,

$$p_{ih} r_h v \to \bar{\omega}_i v \quad \text{dans} \quad F_i \quad \text{fort}$$

$$q_{ih} r_h v \to \omega_i v \quad \text{dans} \quad G_i \quad \text{fort}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

(6-xvii) Soit h' une suite qui tend vers 0. Soit $\varphi \in L_1(\tilde{H})$ et $\varphi_{h'}$ une suite d'applications de $[0, T] \to V_{h'}$, telles que, lorsque $h' \to 0$,

$$q_{h'} \varphi_{h'} \to \varphi \quad \text{dans} \quad L_1(\tilde{H}) \quad \text{faible.}$$

Alors $\varphi \in L_1(H)$ (c'est-à-dire $\varphi(t) \in H$ p.p.).

(6-xviii) Soit h' une suite qui tend vers 0. Soient $\psi_{ih'}$, $i = 1, \ldots, m$, des suites d'applications de $[0, T] \to V_{h'}$, telles que, lorsque $h' \to 0$, pour $i = 1, \ldots, m$,

$$q_{h'} \varphi_{ih'} \to \psi \quad \text{dans} \quad L_2(\tilde{H}) \quad \text{faible}$$

$$p_{ih'} \varphi_{ih'} \to \varphi_i \quad \text{dans} \quad L_2(F_i) \quad \text{faible}$$

Alors $\psi = \pi_i \varphi_i \in L_2(V)$ et $\varphi_i(t) = \bar{\omega}_i \psi(t)$, p.p. $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, m$.

(6-xix) Même hypothèse que (6-xiv), $\bar{\omega}_i$, $L_2(F_i)$, $L_2(V)$, étant remplacés par ω_i, $L_p(G_i)$, $L_p(W)$.

REMARQUE 6.1.

D'après (6-xiv) et (6-xvi), lorsque $h \to 0$,

$$q_h r_h u \to u \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{fort}, \quad \forall\, u \in H. \tag{6.1}$$

D'après (6-xv) et (6-xvi), lorsque $h \to 0$,

$$p_{ih} r_h u \to \bar{\omega}_i u \quad \text{dans} \quad F_i \quad \text{fort}, \quad \forall\, u \in V_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{6.2}$$

Avec (6-xvii), on vérifie facilement ceci:

$$
(6.3)\qquad \begin{cases} \text{Si } \varphi_{h'} \in V_{h'} \text{ et si } q_{h'}\varphi_{h'} \to \varphi \text{ dans } H \text{ faible, lorsque } h' \to 0, \\ \text{alors } \varphi \in H. \end{cases}
$$

De même, avec (6-xviii), on a:

$$
(6.4)\qquad \begin{cases} \text{Soient } \varphi_{ih'},\ i = 1, \dots, m \text{ des suites de } V_{h'}, \text{ telles que} \\ q_{h'}\varphi_{ih'} \to \psi \text{ dans } \tilde{H} \text{ faible, } p_{ih'}\varphi_{ih'} \to \varphi_i \text{ dans } F_i \text{ faible,} \\ \text{lorsque } h' \to 0, \quad (i = 1, \dots, m). \\ \text{Alors } \psi = \pi_i\varphi_i \in V \text{ et } \varphi_i = \varpi_i\psi,\ i = 1, \dots, m. \end{cases}
$$

7. - Problème approché discret.

Le paramètre k ayant la signification habituelle, nous posons

$$
(7.1)\qquad \begin{cases} a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{a}_i(t; p_{ih}u_h, p_{ih}u_h)dt, \\ b_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h, v_h) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} < \tilde{B}_i(t)\cdot(q_{ih}u_h), q_{ih}v_h > dt, \\ \forall\, u_h, v_h \in V_h, \quad r = 0, \dots, N, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}
$$

Nous supposons pour simplifier que $f_i \in L_2(H)$ et nous posons

$$
(7.2)\qquad f_h^{q+\frac{i}{m}} = \frac{1}{k}\int_{qk}^{(q+1)k} r_h f_i(t)dt, \qquad q = 0, \dots, N, \qquad i = 1, \dots, m.
$$

Nous allons définir deux familles d'éléments de V_h, $u^{r+\frac{i}{m}}$, $v_h^{r+\frac{i}{m}}$. Nous partons de

$$
\boxed{(7.3)\qquad u_h^{-1+\frac{i}{m}} = r_h u_0, \qquad 1 \leq i \leq m; \qquad v_h^0 = r_h u_1.}
$$

Ensuite, $u_h^{1/m}, \dots, u_h^{r+\frac{i-1}{m}}$, $v_h^{1/m}, \dots, v_h^{r+\frac{i-1}{m}}$, étant supposés déterminés, nous définissons $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ et $v_h^{r+\frac{i}{m}}$ de la manière suivante:

$$(7.4)\qquad v_h^{r+\frac{i}{m}} = \frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right)$$

$$(7.5)\qquad \frac{1}{k}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}}, w_h\right)_h + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right) + b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right) = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right)_h, \qquad \forall\, w_h \in V_h,$$ (25),

$$r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

LEMME 7.1.

(7.4) *et* (7.5) *definissent* $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ *et* $v_h^{r+\frac{i}{m}}$ *de manière unique.*

Démonstration.

En effet, $v_h^{r+\frac{i}{m}} \in V_h$ est solution de l'équation suivante:

$$(7.6)\qquad \left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right)_h + k^2 a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right) + k b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right) = \left(k f_h^{r+\frac{i}{m}} + v_h^{r+\frac{i-1}{m}}, w_h\right)_h - k a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}}, w_h\right), \qquad \forall\, w_h \in V_h.$$

On démontre de la même manière qu'au lemme 7.1 du Chap. II, que (7.6) définit $v_h^{r+\frac{i}{m}}$ de manière unique. On détermine ensuite $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ à l'aide de (7.4).

A ces éléments $u_h^{r+\frac{i}{m}}$, $v_h^{r+\frac{i}{m}}$, nous associons les fonctions approchées u_{ih}, v_{ih}:

$$(7.7)\qquad \begin{cases} u_{ih}(t) = u_h^{r+\frac{i}{m}}, \qquad v_{ih}(t) = v_h^{r+\frac{i}{m}}, \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[, \\ r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

La fonction v_{ih} représente une dérivée discrète de u_{ih}.

Nous nous intéressons maintenant aux problèmes de la stabitité des fonctions approchées et de leur convergence vers la solution du problème 1.

---

(25) Ce schéma nous semble être la version discrète naturelle de la méthode d'approximation envisagée dans la première partie. Le même schéma, avec $m = 2$, est proposé par YANENKO [41] pour l'approximation de l'équation des ondes. Un schéma analogue est étudié par SAMARSKII [30] pour l'approximation d'équations hyperboliques.

8. - Estimations à priori. Théorème stabilité.

8.1. - *Deux lemmes.*

Nous convenons de poser

$$(8.1)\qquad a_h^{-1+\frac{i}{m}}(u_h,\, v_h) = a_h^{1/m}(u_h,\, v_h), \qquad u_h,\, v_h \in V_h, \qquad i = 1, \dots, m.$$

LEMME 8.1.

$$(8.2)\qquad 2k\,\mathcal{R}e\, a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\, v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\, u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) -$$
$$- a_h^{r-1+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}},\, u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right) + k^2 a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}},\, v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) -$$
$$- kc_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}},\, u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right),$$

où

$$c_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\, v_h) = \frac{1}{k}\left[a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\, v_h) - a_h^{r-1+\frac{i}{m}}(u_h,\, u_h)\right],$$

$r = 0, \dots, N,\ \ i = 1, \dots, m.$

Vérification immédiate

LEMME 8.2.

Les formes $c_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\, v_h)$ *étant définies comme au lemme* 8 1 *on a*

$$(8.3)\qquad c_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\, u_h) \leq 0, \qquad \forall\, u_h \in V_h, \qquad r = 0, \dots, N, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Démonstration.

C'est évident pour $r = 0$; pour $r \geq 1$, d'après (7.1) et (8.2):

$$k^2 c_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\, u_h) = \int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{a}_i(t;\, p_{ih}u_h,\, p_{ih}u_h)dt - \int_{(r-1)k}^{rk} \tilde{a}_i(t;\, p_{ih}u_h,\, p_{ih}u_h)dt,$$

$$k^2 c_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\, u_h) = \int_{rk}^{(r+1)k} [\tilde{a}_i(t;\, p_{ih}u_h,\, p_{ih}u_h) - \tilde{a}_i(t-k;\, p_{ih}u_h,\, p_{ih}u_h)]dt.$$

En raison de (6-vi):

$$\tilde{a}_i(t;\, u,\, u) - \tilde{a}_i(t-k;\, u,\, u) \leq 0, \quad \forall\, u \in F_i,$$

et (8.3) en résulte.

8.2. - *Estimations à priori.*

LEMME 8.3.

Il existe une constante c'_1 indépendante de k et h, telle que, pour $r = 0, \dots, N$, $i = 1, \dots, m$:

$$\left| v_h^{r+\frac{i}{m}} \right|^2 \leq c'_1 L(u_0, u_1, f_1, \dots, f_m) \tag{8.4}$$

$$\left\| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq c'_1 L(u_0, u_1, f_1, \dots, f_m) \tag{8.5}$$

où

$$L(u_0, u_1, f_1, \dots, f_m) = |u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |f_i(t)|^2 \, dt.$$

Démonstration.

Nous remplaçons dans (7.5) w_h par $v_h^{r+\frac{i}{m}}$ et nous prenons la partie réelle de l'égalité obtenue. Avec le lemme 8.1, il vient:

$$\begin{aligned} &\left| v_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 - \left| v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_k^2 + \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + \\ &+ a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) - a_h^{r-1+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}}, u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right) + \\ &+ k^2 a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) - k c_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}}, u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right) + \\ &+ 2k \,\mathcal{R}e\, b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = 2k \,\mathcal{R}e \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Nous majorons le second membre de (8.6) par

$$2k \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h \leq 2kT \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + \frac{k}{2T} \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2,$$

et, avec le lemme 8.2, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{k}{2T}\right) \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}}\right) \leq \\ &\qquad \leq \left| v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + a_h^{r-1+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}}, u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right) + 2kT \left| f_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2. \end{aligned}$$

Nous posons

$$\psi_h^{r+\frac{i}{m}} = \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2, \quad \varphi_h^{r+\frac{i}{m}} = a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}}\right),$$

et puisque $\left(1-\frac{k}{2T}\right) \geq \exp\left(-\frac{k}{T}\right)$ (car $k \leq T$), nous avons:

$$\exp\left(-\frac{k}{T}\right)\psi_h^{r+\frac{i}{m}} + \varphi_h^{r+\frac{i}{m}} \leq \psi_h^{r+\frac{i-1}{m}} + \varphi_h^{r-1+\frac{i}{m}} + 2kT\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2. \tag{8.7}$$

Nous multiplions les deux membres de l'égalité (8.7) par $\exp\left(-\frac{k(i-1)}{T}\right)$ et nous ajoutons, pour $i=1, \ldots, m$, les égalités ainsi obtenues. Il vient

$$\exp\left(-\frac{mk}{T}\right)\cdot\psi_h^{r+1} + \sum_{i=1}^{m}\exp\left(-k\frac{(i-1)}{T}\right)\varphi_h^{r+\frac{i}{m}} \leq$$
$$\leq \psi_h^r + \sum_{i=1}^{m}\left\{\left[\exp\left(-\frac{k(i-1)}{T}\right)\right]\left[\varphi_h^{r-1+\frac{i}{m}} + 2kT\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2\right]\right\},$$

d'où

$$\left[\exp\left(-\frac{mk}{T}\right)\right]\cdot\left[\psi_h^{r+1} + \sum_{i=1}^{m}\varphi_h^{r+\frac{i}{m}}\right] \leq \tag{8.8}$$
$$\leq \left[\psi_h^r + \sum_{i=1}^{m}\varphi_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right] + 2kT\sum_{i=1}^{m}\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2.$$

Nous multiplions les deux membres de (8.8) par $\exp\left(-\frac{mrk}{T}\right)$ et ajoutons pour $r=0, \ldots, q$, les égalités ainsi obtenues. Il en résulte

$$\psi_h^{q+1} + \sum_{i=1}^{m}\varphi_h^{q+\frac{i}{m}} \leq \exp\left[\left(\frac{m(q+1)k}{T}\right)\right]\cdot\left[\psi_h^0 + \sum_{i=1}^{m}\varphi_h^{-1+\frac{i}{m}} + \right.$$
$$\left. + 2kT\sum_{r=0}^{q}\sum_{i=1}^{m}\exp\left(-\frac{mrk}{T}\right)\cdot\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2\right],$$

d'où

$$\psi_h^{q+1} + \sum_{i=1}^{m}\varphi_h^{q+\frac{i}{m}} \leq (\exp m)\left[\psi_h^0 + \sum_{i=1}^{m}\varphi_h^{-1+\frac{i}{m}} + 2kT\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2\right]. \tag{8.9}$$

En raison de (7.3), (6-xiv) et (6-xv):

$$\psi_h^0 = |v_h^0|_h^2 = |r_h u_1|_h^2 = |q_h r_h u_1|^2 \leq c_2^2\,|u_1|^2 \tag{8.10}$$

$$\varphi_h^{-1+\frac{i}{m}} = a_h^{\frac{i}{m}}(r_h u_0,\ r_h u_0) \leq M_i\,\|p_{ih} r_h u_0\|_{F_i}^2 \leq M_i\,c_3^2\,\|u_0\|_i^2. \tag{8.11}$$

Avec la même démonstrations qu'au chap. I, lemme 13.1, nous vérifions que

$$2kT\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2 \leq 2c_2^2\,T\sum_{i=1}^{m}\int_0^T |f_i(t)|^2\,dt. \tag{8.12}$$

Le second membre de (8.8) est dons majoré par $c_2'L(u_0, u_1, f_1, \ldots, f_m)$, où c_2' est une constante convenable indépendante de k et h. Ainsi:

$$\left\{\begin{array}{l} |v_h^{q+1}|_h^2 \leq c_2'L, \qquad a_h^{q+\frac{i}{m}}\left(u_h^{q+\frac{i}{m}}, u_h^{q+\frac{i}{m}}\right) \leq c_2'L \\ L = L(u_0, u_1, f_1, \ldots, f_m); \qquad q = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{array}\right. \tag{8.13}$$

Portant cela dans (8.7), nous obtenons

$$\left| v_h^{q+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq c_3'L, \qquad q = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{8.14}$$

et (8.4) est ainsi démontré.

Par ailleurs, il résulte de (7.3) et (7.4) que

$$u_h^{q+\frac{i}{m}} = r_h u_0 + \sum_{r=0}^{m} v_h^{r+\frac{i}{m}}. \tag{8.15}$$

Alors, avec (8.14) et (8.11)

$$\left| u_h^{q+\frac{i}{m}} \right|_h \leq |r_h u_0|_h + T(c_3'L)^{1/2}$$

$$\left| u_h^{q+\frac{i}{m}} \right|_h^2 \leq c_4'L, \qquad q = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{8.16}$$

Avec (6-iv) et les majorations (8.13) et (8.16), nous avons

$$\alpha_i \left\| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq \lambda_i \left| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right|_h^2 + a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, u_h^{r+\frac{i}{m}}\right)$$

$$\alpha_i \left\| u_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{ih}^2 \leq c_5'L, \qquad r = 0, \ldots, N, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Cela prouve (8.5) et termine le démonstration du lemme.

LEMME 8.4

Il existe une constante c_6' indépendante de k et h telle que, pour $i = 1, \ldots, m$,

$$k \sum_{r=0}^{N} \left\| q_{ih} u_{ih}{}_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{G_i}^p \leq c_6'(L + L^{p/2}), \tag{8.17}$$

où $L = L(u_0, u_1, f_1, \ldots, f_m)$.

Démonstration.

Ajoutant membre à membre toute les égalités (8.6, pour $r = 0, \ldots, N$,

$i = 1, \ldots, m$, nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
(8.18)\qquad & |v_h^{N+1}|_h^2 + \sum_{i=1}^{m} a_h^{N+\frac{i}{m}}\left(u_h^{N+\frac{i}{m}},\ u_h^{N+\frac{i}{m}}\right) + \\
& + \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left[\left|v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}}\right|_h^2 + k^2 a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) - \right.\\
& \left. - kc^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r-1+\frac{i}{m}},\ u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right) + 2k\,\mathcal{R}e\, b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)\right] = \\
& = |v_h^0|_h^2 + \sum_{i=1}^{m} a_h^{\frac{i}{m}}(r_h u_0,\ r_h u_0) + 2k\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons avec (6-x):

$$
\begin{aligned}
& 2k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left\| q_{ih} v_h^{r+\frac{i}{m}}\right\|_{G_i}^p \leq \\
& \quad \leq 2k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left[\mathcal{R}e\, b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) + \mu_i\left|v_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^p\right] \leq \\
& \quad \leq |v_h^0|_h^2 + \sum_{i=1}^{m} a_h^{\frac{i}{m}}(r_h u_0,\ r_h u_0) + k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left|f_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2 + \\
& \quad + k\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\left[\left|v_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^2 + 2\mu_i\left|v_h^{r+\frac{i}{m}}\right|_h^p\right].
\end{aligned}
$$

Le lemme résulte alors des majorations (8.10) à (8.12) et (8.14).

8.3. - *Théorème de stabilité.*

Nous pouvons interpréter les lemme 8.3 et 8.4 de la manière suivante:

THÉORÈME 8.1.

Sous les hypothèses (1-i)-(1-xi), (2-i)-(2-vi) *et* (6-i)-(6-xv), *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
p_{ih}u_{ih} \ \textit{est} \ L_\infty(F_i) \ \textit{stable} \\
q_h v_{ih} \ \textit{est} \ L_\infty(\tilde{H}) \ \textit{stable} \\
q_{ih} v_{ih} \ \textit{est} \ L_p(G_i) \ \textit{stable.}
\end{array}
\right.
$$

8.4. - Nous introduisons, comme au chapitre II, les opérateurs $\tilde{B}_{ik}(t)$ qui appliquent G_i dans G_i' et qui sont définis par

$$
(8.19)\qquad \tilde{B}_{ik}(t)u = \frac{1}{k}\int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{B}_i(s)u\,ds, \qquad \forall\, u \in G_i, \qquad t \in [rk,\ (r+1)k[.
$$

Nous posons

$$\chi_{ih}(t) = \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (q_{ih} v_{ih}(t)) \quad \text{p.p.} \tag{8.20}$$

Nous avons alors le

LEMME 8.5.

Pour $i = 1, \ldots, m$, $\chi_{ih} \in L_{p'}(G_i)$ *et demeure dans un ensemble borné de cet espace, lorsque* k *et* $h \to 0$.

Démonstration.

La fonction $t \to \chi_{ih}(t)$ est constante sur chaque intervalle $[rk, (r+1)k[$, et il est donc évident que $\chi_{ih} \in L_{p'}(G_i')$.

Pour $t \in [rk, (r+1)k[$:

$$\chi_{ih}(t) = \tilde{B}_{ih}(t) \cdot \left(q_{ih} v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) = \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} \tilde{B}_i(s) \cdot \left(q_{ih} v_h^{r+\frac{i}{m}}\right) ds,$$

et, en raison de (6-xii)

$$\|\chi_{ih}(t)\|_{G'_i} \leq N_i \left\| q_{ih} v_h^{r+\frac{i}{m}} \right\|_{G'_i}^{p/p'} = N_i \| q_{ih} v_{ih}(t) \|_{G_i'}^{p/p'}.$$

Le lemme résulte alors du théorème 8.1.

9. - Théorème de Convergence.

9.1. - *Enoncé du théorème de convergence.*

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante:

$$\text{(9-i)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \varphi(\cdot) \in L_p(G_i), \text{ alors } \tilde{B}_i(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_{p'}(G_i') \text{ et, pour chaque } k \text{ fixé,} \\ \tilde{B}_{ik}(\cdot)\varphi(\cdot) \in L_{p'}(G_i'). \text{ En outre, lorsque } k \to 0, \\ \tilde{B}_{ik}(\cdot)\varphi(\cdot) \to \tilde{B}_i(\cdot)\varphi(\cdot) \quad \text{dans} \quad L_{p'}(G_i') \quad \text{fort}, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{array} \right.$$

THÉORÈME 9.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2, 6 *et* 9 [(1-i)-(1-xi), (2-i)-(2-vi), (6-i)-(6-xix), (9-i)]; u *désigne la solution du problème* 1.

Lorsque k *et* $h \to 0$, *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ih} u_{ih} \to \bar{\omega}_i u \quad \textit{dans} \quad L_\infty(F_i) \quad \textit{faible}, \\ q_h v_h \to u' \quad \textit{dans} \quad L_\infty(\tilde{H}) \quad \textit{faible}, \\ q_{ih} v_{ih} \to \omega_i u' \quad \textit{dans} \quad L_p(G_i) \quad \textit{faible}, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} p_{ih}u_{ih}(t) \to \tilde{\omega}_i u(t) & \textit{dans } F_i \textit{ faible, pour tout } t \in [0, T], \\ q_{ih}v_{ih}(t) \to u'(t) & \textit{dans } \tilde{H} \textit{ faible, pour tout } t \in [0, T]. \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans les sections 9.2 à 9.4. Dans la section 9.5 nous indiquons, sans démonstration, des résultats de convergence forte.

REMARQUE 9.1 (En liaison avec la remarque 4.1).

L'hypothèse (6–vi) n'est pas indispensable dans toute cette partie, si les opérateurs $\tilde{B}_i(t)$ sont linéaires et si (6–iv) a lieu avec $\lambda_i = 0$: le théorème 8.1 demeure valable avec une légère modification de la démonstration et le théorème 9.1 subsiste également (dans la démonstration du théorème 9.1, nous verrons que (6–vi) n'intervient que pour le lemme 9.6 et ce lemme est évident si les opérateurs $\tilde{B}_i(t)$ sont linéaires).

9.2. – *Première partie de la démonstration.*

En raison du théorème 8.1 et du lemme 8.5, nous pouvons affirmer qu'il existe un sous-suite $k' \to 0$, $h' \to 0$, telle que, pour $i = 1, \ldots, m$:

$$(9.1) \qquad \begin{cases} q_{h'}u_{ih'} \to u_i & \text{dans } L_\infty(\tilde{H}) \text{ faible} \\ p_{ih'}u_{ih'} \to \varphi_i & \text{dans } L_\infty(F_i) \text{ faible} \\ q_{h'}v_{ih'} \to v_i & \text{dans } L_\infty(\tilde{H}) \text{ faible} \\ q_{ih'}v_{ih'} \to \psi_i & \text{dans } L_p(G_i) \text{ faible} \\ \chi_{ih'} \to \chi_i & \text{dans } L_{p'}(G_i') \text{ faible.} \end{cases}$$

Les lemmes qui suivent précisent les liens qui existent entre les différentes fonctions limites.

LEMME 9.1.

$$(9.2) \qquad u_i(t) = u_0 + \int_0^t v_i(s)ds, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Démonstration.

Nous avons vu [cf. (8.15)] que

$$u_h^{r+\frac{i}{m}} = r_h u_0 + k \sum_{q=0}^{r} v_h^{q+\frac{i}{m}},$$

pour $r = 0, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$. Ceci permet d'écrire

$$u_{ih}(t) = r_h u_0 + \int_0^{(r+1)k} v_{ih}(s)ds \quad \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[.$$

D'après (6.1), $q_h r_h u_0 \to u_0$ dans $\tilde{H}$ fort $(h \to 0)$.

Avec (9.1) et le lemme 6.2 du chap. I, nous voyons que, pour tout $t \in [0, T]$

$$q_{h'} u_{ih'}(t) \to u_0 + \int_0^t v_i(s) ds \quad \text{dans} \quad \tilde{H} \quad \text{faible.}$$

La fonction $t \mapsto | q_{h'} u_{ih'}(t) |$ étant essentiellement bornée sur $[0, T]$ indépendamment de k et h, nous en déduisons facilement avec le théorème de Lebesgue que

$$q_{h'} u_{ih'}(t) \to u_0 + \int_0^t v_i(s) ds,$$

dans l'espace des distributions vectorielles sur $]0, T[$ à valeurs dans H. D'après (9.1), $q_{ih'} u_{ih'} \to u_i$ dans le même espace, et par comparaison nous avons (9.2).

LEMME 9.2.

$$u_1(t) = u_2(t) = \ldots = u_m(t) \ (= w(t)) \quad \text{p.p.} \tag{9.3}$$

$$w \in L_\infty(V), \qquad w' \in L_\infty(H) \cap L_p(W), \tag{9.4}$$

$$\varphi_i(t) = \bar{\omega}_i w(t), \qquad \psi_i(t) = \omega_i w'(t) \quad \text{p.p.} \tag{9.5}$$

Démonstration.

L'égalité d'énergie (8.18) nous permet d'écrire l'inégalité suivante

$$\sum_{i=2}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 \leq | v_h^0 |_h^2 + \sum_{i=1}^{m} a_h^{\frac{i}{m}}(r_h u_0, \ r_h u_0 \ +$$
$$+ 2k \, \Re e \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, \ v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h .$$

Avec les résultats établis au n° 8 [(8.10)-(8.14)] nous voyons que le second membre de cette inégalité est majoré par une expression $L_1 = L_1(u_0, u_1, f_1, \ldots, f_m)$ indépendante de k et h:

$$\sum_{i=2}^{m} \sum_{r=0}^{N} \left| v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 \leq L_1 .$$

Après multiplication par k, cette inégalité est équivalente à la suivante:

$$\sum_{i=2}^{m} \int_0^T | q_h v_{ih}(t) - q_h v_{(i-1)h}(t) |^2 \, dt \leq k L_1 .$$

Il en résulte évidemment que, pour $i = 2, \dots, m$,

$$q_h v_{ih} - q_h v_{(i-1)h} \to 0 \quad \text{dans} \quad L_2(\tilde{H}) \quad \text{fort},$$

ce qui montre que les fonctions $v_1, \dots, v_m$ sont égales. D'après (9.2), les fonctions $u_1, \dots, u_m$, sont aussi égales.

Ayant montré (9.3), on voit que (9.4) et (9.5) résultent immédiatement des hypothèses (6-xviii) et (6-xix).

Nous récrivons à présent (9.1):

$$(9.6) \qquad \begin{cases} p_{ih'} u_{ih'} \to \bar{\omega}_i w & \text{dans} \quad L_\infty(F_i) \quad \text{faible} \\ q_{h'} v_{ih'} \to w' & \text{dans} \quad L_\infty(H) \quad \text{faible} \\ q_{ih'} v_{ih'} \to \omega_i w' & \text{dans} \quad L_{p'}(G_i) \quad \text{faible} \\ \chi_{ih'} \to \chi_i & \text{dans} \quad L_{p'}(G_i') \quad \text{faible.} \end{cases}$$

9.3. - *Deuxième partie de la démonstration*: $w(t) = u(t)$ p.p.

Soit t fixé et $q = E(t/k)$ le plus grand entier inférieur ou égal à t/k. Nous ajoutons les égalités (7.5) pour $r = 0, \dots, q$, $i = 1, \dots, m$. Nous obtenons

$$(v_h^{q+1}, w_h)_h + k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{q} \left[a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right) + b_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right) \right] =$$
$$= (v_h^0, w_h)_h + k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{q} \left(f_h^{r+\frac{i}{m}}, w_h\right)_h .$$

Cette égalité peut être interprétée ainsi:

$$(9.7) \qquad (q_h v_{mh}(t), q_h w_h) = - \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} \tilde{a}_{ik}(s; p_{ih} u_{ih}(s), p_{ih} w_h) ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} [-\langle \chi_{ih}(s), q_{ih} w_h \rangle + (f_{ih}(s), q_h w_h)] ds + (q_h r_h u_1, q_h w_h),$$

où $\tilde{a}_{ik}(s; u, v)$ est défini comme au chap. I-(16.3), et où

$$f_{ih}(s) = q_h f_h^{r+\frac{i}{m}} \quad \text{pour} \quad s \in [rk, (r+1)k[.$$

Nous écrivons (9.7) avec $w_h = r_h v$, $v \in \mathcal{V}$ et, t et v étant fixés, nous passons à la limite avec la suite k', h'. Grâce aux hypothèses du n° 6 et aux résultats de convergence (9.6), nous montrons, exactement comme aux chapitres précédents, les convergences suivantes:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_0^{(q+1)k'} \tilde{a}_{ik'}(s;\ p_{ih'}u_{ih'}(s),\ p_{ih'}r_{h'}v)ds \to \int_0^t a(s;\ w(s),\ v)ds$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_0^{(q+1)k'} < \chi_{ih'}(s),\ q_{ih'}r_{h'}v > ds \to \sum_{i=1}^{m}\int_0^t < \chi_i(s),\ \omega_i v > ds$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_0^{(q+1)k'} (f_{ih'}(s),\ q_{h'}r_{h'}v)ds \to \int_0^t (f(s),\ v)ds$$

$$(q_{h'}r_{h'}u_1,\ q_{h'}r_{h'}v) \to (u_1,\ v).$$

Il en résulte que le premier et le second membre de (9.7) tendent vers une limite $g(t)$,

$$g(t) = (u_1,\ v) + \int_0^t (f(s),\ v)ds - \int_0^t a(s;\ w(s),\ v)ds - \tag{9.8}$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\int_0^t < \chi_i(s),\ \omega_i v > ds.$$

Nous avons ainsi montré que, pour tout $t \in [0, T]$, $(q_{h'}v_{mh'}(t),\ q_{h'}r_{h'}v)$ tend vers $g(t)$. D'après (6–xiv) et le théorème 8.1, les fonctions $t \mapsto (q_{h'}v_{mh'}(t),\ q_{h'}r_{h'}v)$ sont essentiellement bornées sur $[0, T]$ indépendamment de k et h.

Soit alors φ une fonction scalaire continue sur $[0, T]$ ($\varphi \in \mathcal{C}$). D'après ce qui précède et le théorème de Lebesgue on a

$$\int_0^T (q_{h'}v_{mh'}(t),\ q_{h'}r_{h'}v)\varphi(t)dt \to \int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

On vérifie avec (6.1) que $\varphi q_{h'}r_{h'}v \to \varphi v$ dans $L_1(H)$ fort; avec (9.6), on a donc aussi

$$\int_0^T (q_{h'}v_{mh'}\ t),\ q_{h'}r_{h'}v)\varphi(t)dt \to \int_0^T (w'(t),\ v)\varphi(t)dt.$$

Donc

$$\int_0^T (w'(t),\ v)\varphi(t)dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)dt, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C},$$

et nécessairement

$$g(t) = (w'(t),\ v) \quad \text{p.p.}$$

Avec l'expression (9.8) de $g(t)$, nous pouvons écrire:

$$(w'(t),\ v) + \int_0^t a(s;\ w(s),\ v)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t <\chi_i(s),\ \omega_i v> ds =$$

$$= (u_1,\ v) + \int_0^t (f(s),\ v)ds, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,\ T], \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}.$$

Par continuité, l'égalité précédente est encore valable pour tout $v \in V \cap W$ et il en résulte alors que

$$w'(t) + \int_0^t A(s)w(s)ds + \int_0^t \chi(s)ds = u_1 + \int_0^t f(s)ds, \quad \text{p.p.} \tag{9.9}$$

où

$$\chi = \sum_{i=1}^m \chi_i^*, \qquad \chi_i^* = \omega_i^* \chi_i,$$

$\omega_i^* \in \mathcal{L}(G_i',\ W_i')$, opérateur linéaire transposé de ω_i.

En raison de (9.9) et du lemme 9.1, la fonction w est p.p. égale à une fonction w_* continue de $[0,\ T]$ dans H, de dérivée w_*' continue de $[0,\ T]$ dans $(V \cap W)'$, avec $w_*(0) = u_0$, $w_*'(0) = u_1$.

Dérivant (9.9 au sens des distributions vectorielles sur $]0,\ T[$ à valeurs dans $(V \cap W)'$, nous obtenons

$$w_*''(t) + A(t)w_*(t) + \chi(t) = f(t) \quad \text{p.p.} \tag{9.10}$$

Pour conclure que $w_* = u$, il nous suffit donc de montrer que

$$\chi = Bw'. \tag{9.11}$$

C'est ce que nous faisons dans les lemmes qui suivent.

LEMME 9.3.

La fonction w_* est continue de $[0,\ T]$ dans V, w_*' est continue de $[0,\ T]$ dans H et, pour tout $t \in [0,\ T]$:

$$\begin{aligned} |w_*'(t)|^2 + a(t;\ w_*(t),\ w_*(t)) &= |u_1|^2 + a(0,\ u_0,\ u_0) + \\ &+ \int_0^t a'(s;\ w(s),\ w(s))ds + 2\,\mathcal{R}e \int_0^t <f(s) - \chi(s),\ w'(s)> ds. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Comme le lemme 4.2, ce lemme résulte de [35].

LEMME 9.4.

Pour tout $t \in [0, T]$, *pour* $i = 1, \ldots, m$,

$$p_{ih'} u_{ih'}(t) \to \bar{\omega}_i w_*(t) \quad \textit{dans} \ F_i \ \textit{faible} \tag{9.13}$$

$$q_{h'} v_{ih'}(t) \to w'_*(t) \quad \textit{dans} \ \tilde{H} \ \textit{faible.} \tag{9.14}$$

Démonstration.

Soit $t \in [0, T]$, fixé. D'après le lemme 8.3, la suite $p_{ih'} u_{ih'}(t)$ est bornée dans $F_i (i = 1, \ldots, m)$, et il existe donc une sous-suite k'', $h'' \to 0$, telle que

$$p_{ih''} u_{ih''}(t) \to \sigma_i \quad \text{dans } F_i \text{ faible,} \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{9.15}$$

Il résulte de la démonstration du lemme 9.1 que

$$q_{h''} u_{ih''}(t) \to u_0 + \int_0^t v_i(s) ds = w_*(t), \quad \text{dans } \tilde{H} \text{ faible.}$$

Avec (9.15) et (6.4) nous en concluons que $w_*(t) \in V$, ce qui est dejà connu, et que

$$\sigma_i = \bar{\omega}_i w_*(t), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Puisque la limite est indépendante de la sous-suite k'', h'', extraite de k', h', (9.15) a lieu pour la suite k', h', elle-même et (9.13) en résulte.

Montrons à présent (9.14). D'après le lemme 8.3, là suite $q_{h'} v_{ih'}(t)$ est bornée dans $\tilde{H}$ $(i = 1, \ldots, m)$, et il existe donc une sous-suite k_1, $h_1 \to 0$, telle que

$$q_{\tilde{h}_1} v_{ih_1}(t) \to f_i \quad \text{dans } \tilde{H} \text{ faible;} \tag{9.16}$$

d'aprés (6.3), $\rho_i \in H$.

Pour tout $v \in \mathcal{V}$, d'après (6.1), $q_{h_1} r_{h_1} v \to v$ dans $\tilde{H}$ fort, et donc

$$(q_{h_1} v_{ih_1}(t), \ q_{h_1} r_{h_1} v) \to (\rho_i, \ v).$$

Nous avons vu précédemment que

$$(q_{h'} v_{m h'}(t), \ q_{h'} r_{h'} v) \to (w'_*(t), \ v).$$

Nous montrerions de manière identique que

$$(q_{h'} v_{jh'}(t), \ q_{h'} r_{h'} v) \to (w'_*(t), \ v), \qquad j = 1, \ldots, m-1.$$

Nous avons alors, par comparaison

$$(w'_*(t) - \rho_i,\ v) = 0, \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}.$$

Puisque $w'_*(t) - \rho_i \in H$ et que $\mathcal{V}$ est dense dans H, nous en concluons que

$$\rho_i = w'_*(t).$$

Puisque la limite est indépendante de la suite k_1, h_1 extraite de k', h', (9.16) a lieu pour la suite k', h' elle-même et le lemme est démontré.

Introduisons à présent les formes $\tilde{d}_{ik}(t;\ u,\ v)$ sesquilinéaires continues sur F_i et définies par:

$$(9.17) \qquad \begin{cases} \tilde{d}_{ik}(t;\ u,\ v) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in [0,\ k[\\ \tilde{d}_{ik}(t;\ u,\ v) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^{(r+1)k} [\tilde{a}_i(s;\ u,\ v) - \tilde{a}_i(s-k;\ u,\ v)]ds, \\ \text{pour} \quad t \in [rk,\ (r+1)k[, \qquad r = 1,\ \dots,\ N. \end{cases}$$

Nous avons alors le

LEMME 9.5.

Soient φ *et* $\psi \in L_2(F_i)$, *et* φ_n, ψ_n, *deux suites de* $L_2(F_i)$ *telles que, pour* $n \to \infty$,

$$\varphi_n \to \varphi \quad \textit{dans} \quad L_2(F_i) \quad \textit{fort}$$

$$\psi_n \to \psi \quad \textit{dans} \quad L_2(F_i) \quad \textit{faible.}$$

Alors, lorsque $k \to 0$ *et* $n \to \infty$

$$(9.18) \qquad \int_0^T \tilde{d}_{ik}(t;\ \varphi_n(t),\ \psi_n(t))dt \to \int_0^T \tilde{a}'_i(t;\ \varphi(t),\ \psi(t))dt.$$

Ce lemme, assez voisin du lemme 16.3 du chap. I, se démontre par les mêmes méthodes.

Nous sommes en mesure de démontrer (9.11) et même un résultat plus précis:

LEMME 9.6.

$$\chi_i^* = B_i w', \qquad i = 1,\ \dots,\ m.$$

Démonstration.

Etant données m fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, vérifiant

$$\varphi_i \in \mathcal{C}(V), \qquad \varphi_i' \in \mathcal{C}(H) \cap L_p(W_i), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{9.19}$$

nous considérons l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
Y_{h\varphi} = {} & | q_h v_h^{N+1} - \varphi'(T) |^2 + \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ik}\Big(T - k;\ p_{ih} u_h^{N+\frac{i}{m}} - \bar{\omega}_i \varphi(T),\ p_{ih} u_h^{N+\frac{i}{m}} - \bar{\omega}_i \varphi(T)\Big) + \\
& + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \Big[\Big| v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \Big|_h^2 + k^2 a_h^{r+\frac{i}{m}} \Big(v_h^{r+\frac{i}{m}},\ v_h^{r+\frac{i}{m}} \Big) \Big] - \\
& - \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \tilde{d}_{ik}(t;\ p_{ih} t) - \bar{\omega}_i \varphi(t),\ p_{ih} u_{ih}(t) - \bar{\omega}_i \varphi(t)) dt + \\
& + 2 \,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (q_{ih} v_{ih}(t)) - \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (\omega_i \varphi_i'(t)),\ q_{ih} v_{ih}(t) - \omega_i \varphi_i'(t) > dt
\end{aligned}$$

où

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i .$$

Nous écrivons

$$Y_{h\varphi} = Y_{h\varphi}^1 + Y_{h\varphi}^2 + Y_{h\varphi}^3 ,$$

$$\begin{aligned}
Y_{h\varphi}^1 = {} & | \varphi'(T) |^2 + \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ik}(T - k;\ \bar{\omega}_i \varphi(T),\ \bar{\omega}_i \varphi(T)) - \\
& - \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \tilde{d}_{ik}(t;\ \bar{\omega}_i \varphi(t),\ \bar{\omega}_i \varphi(t)) dt + \\
& + 2 \,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T < \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (\omega_i \varphi_i'(t)),\ \omega_i \varphi_i'(t) > dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{h\varphi}^2 = {} & - 2 \,\mathcal{R}e\, (q_h v_h^{N+1},\ \varphi'(T)) - \\
& - 2 \,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ik}(T - k;\ p_{ih} u_h^{N+\frac{i}{m}},\ \bar{\omega}_i \varphi(T)) + \\
& + 2 \,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \tilde{d}_{ik}(t;\ p_{ih} u_{ih}(t),\ \bar{\omega}_i \varphi(t)) dt - \\
& - 2 \,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{m} \int_0^T [< \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (q_{ih} v_{ih}(t)),\ \omega_i \varphi_i'(t) > + \\
& + < \tilde{B}_{ik}(t) \cdot (\omega_i \varphi_i'(t)),\ q_{ih} v_{ih}(t) >] dt,
\end{aligned}$$

$$Y^3_{h\varphi} = |q_h v_h^{N+1}|^2 + \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ik}\left(T-k;\; p_{ih}u_h^{N+\frac{i}{m}},\; p_{ih}u_h^{N+\frac{i}{m}}\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^N \left[\left| v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_h^{r+\frac{i-1}{m}} \right|_h^2 + k^2 a_h^{r+\frac{i}{m}}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}},\; v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)\right] -$$
$$- \sum_{i=1}^m \int_0^T \tilde{a}_{ik}'(t;\; p_{ih}u_{ih}(t),\; p_{ih}u_{ih}(t))dt +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^m \int_0^T <\tilde{B}_{ik}(t)\cdot(q_{ih}v_{ih}(t)),\; (q_{ih}v_{ih}(t))> dt.$$

Les fonctions φ_i étant fixées, nous passons à la limite avec la suite k', h'. Moyennant les hypothèses (6-v) et (9-i) et le lemme 9.5, nous voyons que

$$\lim_{k',\,h'\to 0} Y^1_{h'\varphi} = Y^1_\varphi = |\varphi'(T)|^2 + a(T;\; \varphi(T),\; \varphi(T)) -$$
$$- \int_0^T a'(t;\; \varphi(t),\; \varphi(t))dt + 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^m \int_0^T <\tilde{B}_i(t)(\varphi_i(t)),\; \varphi_i(t)> dt.$$

Pour passer à la limite dans $Y^2_{h\varphi}$, il faut utiliser 8.20) et (9.6), les lemmes 9.4 et 9.5, les hypothèses (6-v) et (9-i). Nous obtenons:

$$\lim_{k',\,h'\to 0} Y^2_{h'\varphi} = Y^2_\varphi = -2\,\mathcal{R}e\,(w'_*(T),\; \varphi'(T)) -$$
$$- 2\,\mathcal{R}e\, a(T;\; w_*(T),\; \varphi(T)) + 2\,\mathcal{R}e \int_0^T a'(t;\; w(t),\; \varphi(t))dt +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^m \int_0^T [<\chi_i^*(t),\; \varphi_i'(t)> + <B_i(t)\varphi_i'(t),\; w'(t)>]dt.$$

Pour $Y^3_{h\varphi}$ nous utilisons l'égalité d'énergie (8.18); on vérifie sans peine que $Y^3_{h,\varphi}$ est identique au premier membre de cette égalité.

$$Y^3_{h\varphi} = |v_h^0|_h^2 + \sum_{i=1}^m a_h^{i/m}(r_h u_0,\; r_h u_0) +$$
$$+ 2k\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^N \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\; v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)_h.$$

$$Y^3_{h\varphi} = |q_h r_h u_1|^2 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{k}\int_0^k \tilde{a}_i(s;\; p_{ih}r_h u_0,\; p_{ih}r_h u_0)ds +$$
$$+ 2\,\mathcal{R}e \sum_{i=1}^m \int_0^T (f_{ih}(t),\; q_h v_{ih}(t))dt.$$

En raison du lemme 16.4 du chap. I, $f_{ih} \to f_i$ dans $L_2(\tilde{H})$ fort. Utilisant (9.6), (6.1), (6.2) et l'hypothèse (6-v), nous obtenons

$$\lim_{k',\, h' \to 0} Y^3_{h'\varphi} = Y^3_\varphi = |\, u_1\,|^2 + a(0\,;\; u_0\,,\; u_0) + $$
$$+ 2\, \Re e \int_0^T (f(t),\; w'(t))dt.$$

Nous avons aussi, d'après (9.12) (où $t = T$):

$$Y^3_\varphi = |\, w'_*(T)\,|^2 + a(T\,;\; w_*(T),\; w_*(T)) -$$
$$- \int_0^T a'(s\,;\; w(s),\; w(s))ds + 2\, \Re e \int_0^T < \chi(s),\; w'(s) > ds.$$

Finalement, en regroupant ces résultats:

$$\lim_{k',\, h' \to 0} Y_{h'\varphi} = Y_\varphi = |\, w'_*(T) - \varphi'(T)\,|^2 +$$
$$+ a(T\,;\; w_*(T) - \varphi(T),\; w_*(T) - \varphi(T)) -$$
$$- \int_0^T a'(t\,;\; w(t) - \varphi(t),\; w(t) - \varphi(t))dt +$$
$$+ 2\, \Re e \sum_{i=1}^m \int_0^T < B_i(t)\varphi'_i(t) - \chi_i^*(t),\; \varphi'_i(t) - w'(t) > dt.$$

Il résulte des hypothèses (6-iii), (6-vi) et (6-x) que $Y_{h\varphi}$ est non négatif, et donc, à la limite, Y_φ est non négatif quelles que soient les fonctions φ_j vérifiant (9.19). La démonstration se termine alors comme dans le lemme 4.4.

Ce lemme nous permet enfin d'affirmer que

$$u = w_*\,.$$

Puisque les limites sont indépendantes de la sous-suite k', h', les convergences (9.6), (9.13) et (9.14) ont lieu pour la suite k, h, elle-même.

Cela achève la démonstration du théorème 9.1.

9.4. - *Compléments au théorème* 9.1: *Résultats de convergence forte.*

Le théorème 9.1 peut être complété par différents résultats de convergence forte que nous énonçons sans démonstration.

THÉORÈME 9.2.

Sous les hypothèses du théorème 9.1, *lorsque* k *et* $h \to 0$, *pour* $i = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} p_{ih} u_{ih}(t) \to \bar{\omega}_i u(t) & \textit{dans } F_i \textit{ fort, pour tout } t \in [0, T] \\ q_h v_{ih}(t) \to u'(t) & \textit{dans } \tilde{H} \textit{ fort, pour tout } t \in [0, T]. \end{cases}$$

THÉORÈME 9.3.

Sous les hypothèses du théorème 9.1, *si l'espace* G_i *est uniformément convexe et si* (6-xi) *est remplacé par*

$$\begin{cases} \mathcal{R}e < \tilde{B}_i(t) v, v > + \mu_i |\pi_i v|^p = \beta_i \| v \|^p_{G_i} \\ v \in G_i, \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \end{cases}$$

alors nous avons

$$q_{ih} v_{ih} \to \omega_i u' \quad \text{dans} \quad L_p(G_i) \quad \text{fort.}$$

10. - Exemples.

10.1. - EXEMPLE 1 (suite).

Espaces $\tilde{H}$, F_i, G_i

$$\tilde{H} = H = L_2(\Omega), \qquad \Phi_i = L_2(\Omega), \qquad \Psi_i = \{ 0 \},$$

$$F_i = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \qquad G_i = L_2(\Omega) \times \{ 0 \}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Opérateurs $\bar{\omega}_i$, ω_i

$$\text{Si} \quad u \in V_i, \qquad \bar{\omega}_i u = (u, D_i u)$$

$$\text{Si} \quad u \in W_i = H, \qquad \omega_i u = (u, 0).$$

Formes $\tilde{a}_i(t; u, v)$

$$\text{Pour} \quad u, v \in F_i, \qquad u = (u_0, u_1), \qquad v = (v_0, v_1):$$

$$\tilde{a}_i(t; u, v) = \int_\Omega [a_i(x, t) u_1(x) \overline{v_1(x)} + c_i(x, t) u_0(x) \overline{v_0(x)}] dx.$$

Opérateurs $\tilde{B}_i(t)$: identiquement nuls.

Espaces V_h

V_h est l'espace des fonctions étagées u_h:

$$u_h(x) = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} u_h(M) \cdot w_{hM}(x), \quad u_h(M) \in \boldsymbol{C},$$

$\mathring{\Omega}_h^1$, w_{hM}, définis au chap. I, section 11.1.

La dimension $N(h)$ de V_h est le nombre de $M \in \mathring{\Omega}_h^1$.

Opérateurs r_h, q_h, p_{ih}, q_{ih}.

Si $u \in H$, nous définissons $u_h = r_h\ u \in V_h$ de la manière suivante:

$$u_h(M) = (h_1, \ldots, h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M,0)} u(x)dx, \qquad \forall\ M \in \mathring{\Omega}_h^1.$$

Nous posons encore

$$q_h u_h = u_h \mid_\Omega$$

$$p_{ih} u_h = (u_h \mid_\Omega,\ \delta_i u_h \mid_\Omega); \qquad q_{ih} u_h = (u_h \mid_\Omega,\ 0).$$

Vérification des hypothèses du n° 6.

Pour (6-xiv), (6-xv) et (6-xvi), nous renvoyons à RAVIART [28]; (6-xviii) a été vérifiée à l'occasion de l'exemple 2 Ch. I; (6-xvii) est triviale car $\tilde{H} = H$, (6-xix) est triviale car $\Psi_i = \{0\}$. Les autres hypothèses se vérifient facilement.

Problèmes approchés.

Pour déterminer $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ $\left(\text{ou } v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)$ il faut résoudre un système linéaire

$$\left(I + k^2 A_h^{r+\frac{i}{m}}\right) \cdot u_h^{r+\frac{i}{m}} = g_h^{r+\frac{i}{m}} \quad (\text{connu}, \quad \in V_h), \tag{10.1}$$

où $A_h^{r+\frac{i}{m}} \in \mathcal{L}(V_h,\ V_h)$ est défini par

$$\left(A_h^{r+\frac{i}{m}} u_h,\ v_h\right)_h = a_h^{r+\frac{i}{m}}(u_h,\ v_h), \qquad \forall\ u_h,\ v_h \in V_h, \tag{10.2}$$

$$= \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} \int_\Omega [a_i(x,\ t)\delta_i\, u_h(x)\delta_i\, \overline{v_h(x)} + c_i(x,\ t) u_h(x) \overline{v_h(x)})] dx dt.$$

Posons $u_h^{r+\frac{i}{m}} = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \xi_M w_{hM}$; alors (10.1) est un système d'équations linéaires pour les ξ_M. Comme pour d'autres exemples nous vérifions que le système (10.1) est découplé en systèmes partiels correspondant aux points M de $\mathring{\Omega}_h^1$ situés sur une même parallèle à l'axe des x_i.

Résultats de convergence.

Le théorème 9.1 (cf. remarque 9.1) donne en particulier ceci:

Lorsque k et $h \to 0$, pour $i = 1, \ldots, m$ $(m = n)$

$$\begin{cases} u_{ih}\,|_{Q_T} \to u & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \delta_i u_{ih}\,|_{Q_T} \to D_i u & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ v_{ih}\,|_{Q_T} \to u' & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

10.2. - EXEMPLE 2 (suite).

Espaces $\tilde{H}$, F_i, G_i.

$\tilde{H} = L_2(R_n)$; $H = L_2(\Omega)$ peut être identifié à un sous-espace hilbertien de $\tilde{H}$, si l'on convient d'identifier $u \in L_2(\Omega)$ avec $\tilde{u} \in L_2(R^n)$, $\tilde{u}(x) = u(x)$ pour $x \in \Omega$, $\tilde{u}(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$.

$i = 1, \ldots, n$

$$\Phi_i = L_2(\Omega), \qquad F_i = L_2(R^n) \times L_2(\Omega),$$

$$\Psi_i = \{0\}, \qquad G_i = L_2(R^n) \times \{0\}.$$

$i = n + 1$

$$\Phi_i = \{0\}, \qquad F_i = L_2(R^n) \times \{0\},$$

$$\Psi_i = L_p(\Omega), \qquad G_i = L_2(R^n) \times L_p(\Omega).$$

Opérateurs $\bar{\omega}_i$, ω_i.

$i = 1, \ldots, n$

$$\text{Si} \quad u \in V_i, \qquad \bar{\omega}_i u = (\tilde{u}, \; D_i u),$$

$$\text{Si} \quad u \in W_i = H, \qquad \omega_i u = (\tilde{u}, \; 0).$$

$i = n + 1$

$$\text{Si} \quad u \in V_i = H, \qquad \bar{\omega}_i u = (\tilde{u}, \; 0),$$

$$\text{Si} \quad u \in W_i, \qquad \omega_i u = (\tilde{u}, \; u),$$

Formes $\tilde{a}_i(t;\, u,\, v)$.

Pour $u, v \in F_i$, $u = (u_0, u_1)$, $v = (v_0, v_1)$,

$$\tilde{a}_i(t;\, u,\, v) = \tilde{a}_i(u,\, v) = \int_\Omega a_i(x) u_i(x) \overline{v_i(x)}\, dx, \qquad i = 1, \ldots, n$$

et

$$\tilde{a}_{n+1}(t;\, u,\, v) = 0.$$

Opérateurs $B_i(t)$.

$\tilde{B}_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, et $\tilde{B}_{n+1}(t) = \tilde{B}_{n+1}$ défini par

$$<\tilde{B}_{n+1}u,\ v> = \int_\Omega |\,u_1(x)\,|^{p-2}\,u_1(x)v_1(x)dx,$$

$$\forall\ u,\ v \in G_{n+1}, \qquad u = (u_0,\ u_1), \qquad v = (v_0,\ v_1).$$

Espaces V_h.

V_h est l'espace des fonctions étagées u_h:

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^1} u_h(M) w_{hM}(x), \qquad u_h(M) \in \boldsymbol{C},$$

Ω_h^1, w_{hM} définis au chap. I (section 11.1).

Opérateurs r_h.

Supposant l'ouvert Ω assez régulier, il existe [15] un opérateur de prolongement $\mathcal{S}$, continu respectivement de $L_2(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ dans $L_2(R^n)$, $L_p(R^n)$, $H^1(R^n)$. Pour $u \in H$ nous définissons alors $u_h = r_h u$:

$$u_h(M) = (h_1, \ldots, h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M,0)} \mathcal{S}u(x)dx, \qquad \forall\ M \in \Omega_h^1.$$

Opérateurs q_h, p_{ih}, q_{ih}.

q_h est l'identité, $q_h u_h = u_h$, et:

$i = 1, \ldots, n$

$$p_{ih}u_h = (u_h,\ \delta_i u_h|_\Omega), \qquad q_{ih}u_h = (u_h,\ 0)$$

$i = n + 1$

$$p_{ih}u_h = (u_h,\ 0), \qquad q_{ih}u_h = (u_h,\ u_h|_\Omega).$$

Vérification des hypothèses du n° 6.

Pour (6-xiv), (6-xv) et (6-xvi) nous renvoyons à RAVIART [28]; (6-xvii) et (6-xviii) ont été vérifiées à l'occasion de l'exemple 1 du Chap I; (6-xix) se vérifie comme (6-xviii). Les autres hypothèses n'offrent pas de difficulté.

Problèmes approchés.

$i = 1, \ldots, n.$

$u_h^{r+\frac{i}{m}}$ $\left(\text{ou } v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)$ est solution d'un système linéaire:

(10.3) $$\left(I + k^2 A_h^{r+\frac{i}{m}}\right) u_h^{r+\frac{i}{m}} = g_h^{r+\frac{i}{m}} \quad (\text{connu}, \ \in V_h).$$

On a $A_h^{r+\frac{i}{m}} = A_{ih}$,

$$(A_{ih}u_h,\ v_h)_h = \int_\Omega a_i(x)\delta_i u_h(x)\delta_i \overline{v_h(x)}dx, \qquad \forall\ u_h,\ v_h \in V_h.$$

Le système d'équations (10.3) est en fait découplé.

$i = n+1$.

Posons

$$v_h^{r+\frac{i}{m}} = \sum_{M\in\Omega_h^1} \xi_M w_{hM}.$$

Les équations (7.5) correspondantes sont totalement découplées, chaque ξ_M étant solution d'une équation algébrique simple

$$\xi_M + k\,|\,\xi_M\,|^{p-2}\,\xi_M = g_M \qquad (g_M \in \boldsymbol{C},\quad \text{connu}). \tag{10.4}$$

Dans cet exemple encore, les problèmes approchés (10.3) et (10.4) sont relativement simples et ils sont beaucoup plus simples que les problèmes algébriques à résoudre lorsqu'on envisage l'approximation du problème (5.10)-(5.13) par le schéma implicite classique à trois niveaux (cf. RAVIART [28]).

Résultats de convergence.

Les théorèmes 9.1, 9.2 et 9.3 donnent ceci:

Lorsque k et $h \to 0$

$$\begin{cases} u_{ih} \to \tilde{u} & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(R^n)) \quad \text{faible} \\ v_{ih} \to \tilde{u}' & \text{dans} \quad L_\infty(L_2(R^n)) \quad \text{faible} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{R^n} |\, u_{ih}(x,\ t) - \tilde{u}(x,\ t)\,|^2\, dx \to 0 \quad \forall\ t \in [0,\ T] \\ \displaystyle\int_{R^n} |\, v_{ih}(x,\ t) - \tilde{u}'(x,\ t)\,|^2\, dx \to 0 \quad \forall\ t \in [0,\ T]; \qquad i = 1,\ \ldots,\ n+1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_i u_{ih}\,|_{Q_T} \to D_i u \quad \text{dans} \quad L_\infty(L_2(\Omega)) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\int_\Omega |\, \delta_i u_{ih}(x,\ t) - D_i u(x,\ t)\,|^2\, dx \to 0 \quad \forall\ t \in [0,\ T]; \qquad i = 1,\ \ldots,\ n. \end{cases}$$

$$u_{(n+1)h}\,|_Q \to u' \quad \text{dans} \quad L_p(Q_T) \quad \text{fort.}$$

11. - Une approximation de type mêlé.

Nous donnons une autre méthode d'approximation discrète, particulièrement adaptée à l'exemple 2.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2 et 6, et nous supposons en outre que les décompositions de $A(t)$ et $B(t)$ sont choisies de manière que

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{a}_i(t;\, u,\, v) = 0 \quad \text{pour} \quad i = m_1 + 1, \ldots, m \\ \tilde{B}_i(t) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m_1, \\ m_1 \quad \text{entier}, \quad 1 \leq m_1 \leq m \end{array}\right.$$

11.1. - *Problème approché.*

Nous posons pour commencer

$$u_h^{-1+\frac{i}{m}} = r_h u_0, \qquad (1 \leq i \leq m); \qquad v_h^0 = r_h u_1. \tag{11.1}$$

Supposant connus $u_h^{r-1+\frac{i}{m}}$, $i = 1, \ldots, m$, et v_h^r, nous allons définir les fonctions u_{ih} et v_{ih} sur l'intervalle $[rk, (r+1)k[$.

Pour $i = 1, \ldots, m$.

$$\left\{\begin{array}{l} u_{ih}(t) = u_h^{r+\frac{i}{m}}, \qquad v_{ih}(t) = v_h^{r+\frac{i}{m}} \\ \text{pour} \quad t \in [rk, (r+1)k[, \end{array}\right.$$

les $u_h^{r+\frac{i}{m}}$, $v_h^{r+\frac{i}{m}}$ étant définis successivement comme suit:

$$v_h^{r+\frac{i}{m}} = \frac{1}{k}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}} - u_h^{r-1+\frac{i}{m}}\right) \tag{11.3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{k}\left(v_h^{r+\frac{i}{m}} - v_k^{r+\frac{i-1}{m}},\, w_h\right)_h + a_h^{r+}\left(u_h^{r+\frac{i}{m}},\, w_h\right) = \\ \qquad = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\, w_h\right)_h, \qquad \forall\, w_h \in V_h. \end{array}\right. \tag{11.4}$$

L'équation (11.4) est une équation linéaire pour $u_h^{r+\frac{i}{m}}$ $\left(\text{ou } v_h^{r+\frac{i}{m}}\right)$.

Pour $i = m_1 + 1, \ldots, m$.

Pour $t \in [rk, (r+1)k[$, les fonctions u_{ih}, v_{ih} sont solutions de

$$(11.5)\qquad \begin{cases} u_{ih} \in L_\infty(rk,\ (r+1)k;\ V_h) \\ v_{ih} = u'_{ih} \in L_\infty(rk,\ (r+1)k;\ V_h) \\ (u''_{ih}(t),\ w_h)_h + b_h^{r+\frac{i}{m}}(u'_{ih}(t),\ w_h) = \left(f_h^{r+\frac{i}{m}},\ w_h\right)_h, \qquad \forall\, w_h \in V_h \\ u_{ih}(rk+0), \quad \text{et} \quad v_{ih}(rk+0) = u'_{ih}(rk+0), \quad \text{donnés dans} \quad V_h. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour (11.5) résultent du théorème 1.1.

Précisons les conditions initiales dans (11.5); les $u_h^{r+\frac{i}{m}}$, $i = 1, \ldots, m_1$, sont supposés connus, et $v_h^{r+\frac{m_1}{m}}$ est déterminé par (11.3)-(11.4). Alors, dans (11.5) nous prenons succesivement

$$(11.6)\qquad u_{ih}(rk+0) = u_h^{r-1+\frac{i}{m}}, \qquad i = m_1+1, \ldots, m$$

$$(11.7)\qquad \begin{cases} v_{(m_1+1)h}(rk+0) = v_h^{r+\frac{m_1}{m}} \\ v_{(m_1+2)h}(rk+0) = v_{(m_1+1)h}((r+1)k-0) \quad \left(\text{noté} \quad v_h^{r+\frac{m_1+1}{m}}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{mh}(rk+0) \quad = v_{(m-1)h}((r+1)k-0) \quad \left(\text{noté} \quad v_h^{r+\frac{m-1}{m}}\right). \end{cases}$$

Les fonctions u_{ih}, v_{ih} sont alors connues sur l'intervalle $[rk,\ (r+1)k[$. Nous posons

$$(11.8)\qquad u_{ih}((r+1)k-0) = u_h^{r+\frac{i}{m}}$$

$$(11.9)\qquad u'_{mh}((r+1)k-0) = v_h^{r+1}$$

et nous sommes en mesure de recommencer le processus dans l'intervalle $[(r+1)k,\ (r+2)k[$.

Les fonctions u_{ih}, v_{ih} sont définies finalement sur $[0,\ T]$.

11.2. - *Enoncé des résultats de convergence.*

Avec des démonstrations entièrement analogues aux précédentes, nous montrons ceci:

THÉORÈME 11.1.

Les hypothèses sont celles des n° 1, 2 *et* 6, (9-i) *et* (11-i); u *désigne la solution du problème* 1.

Lorsque k *et* $h \to 0$,

$$\begin{cases} p_{ih}u_{ih} \to \bar{\omega}_i u & \textit{dans } L_\infty(F_i) \textit{ faible}, \quad i = 1, \dots, m_1, \\ q_h v_{ih} \to u' & \textit{dans } L_\infty(\tilde{H}) \textit{ faible}, \quad i = 1, \dots, m, \\ q_{ih}v_{ih} \to \omega_i u & \textit{dans } L_p(G_i) \textit{ faible}, \quad i = m_1 + 1, \dots, m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{ih}u_{ih}(t) \to \bar{\omega}_i u(t) & \textit{dans } F_i \textit{ fort}, \quad \forall\, t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, m_1, \\ q_h v_{ih}(t) \to u'(t) & \textit{dans } \tilde{H} \textit{ fort}, \quad \forall\, t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

11.3. - *Exemple.*

EXEMPLE 2 (suite).

La différence essentielle avec l'approximation discrète du n° 7, consiste en une simplification supplémentaire des problèmes approchés.

Ici $m_1 = n$ et, pour $i = 1, \dots, n$, les problèmes approchés (11.4) sont les mêmes que (10.3).

Poue $i = n + 1$, nous écrivons:

$$u_{ih}(t) = u_h^r + \int_{rk}^{t} v_{ih}(s)ds \qquad (u_h^r \text{ connu}) \tag{11.10}$$

$$v_{ih}(t) = \sum_{M \in \Omega_h^1} \xi_M(t) w_{hM} \tag{11.11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\xi_M(t) + |\xi_M(t)|^{p-2}\xi_M(t) = (f_{ih}(t), w_{hM})_h \quad \text{(fonct. donnée)} \\ \xi_M(rk + 0) \quad \text{donné.} \end{cases} \tag{11.12}$$

Choissant $f_{n+1} = 0$, l'équation différentielle (11.12) s'intègre explicitement et ***nous avons ainsi évité la résolution des équations algébriques*** (10.4). ***Les résultats de convergence sont les mêmes que pour l'approximation discrète.***

APPENDICE

ESPACES $H(D_i;\ \Omega)$ [26].

Soit Ω un ouvert de R^n. Nous avons défini au chapitre I, l'espace $H(D_i;\ \Omega)$:

$$H(D_i;\ \Omega) = \left\{ u \mid u \in L_2(\Omega),\ D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega) \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$((u,\ v))_i = \int_\Omega [D_i u(x) \cdot D_i \overline{v(x)} + u(x) \cdot \overline{v(x)}]\, dx.$$

On appelle $\mathfrak{D}(\Omega)$ [resp. $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$] l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supoort compact dans Ω [resp. $\overline{\Omega}$], et on pose

$$H_0(D_i;\ \Omega) = \text{ adhérence de } \mathfrak{D}(\Omega) \text{ dans } H(D_i;\ \Omega).$$

1. - Un théorème de densité.

Nous faisons l'hypothèse suivante:

(1-i) $\left\{\begin{array}{l}\text{La frontière } \Gamma \text{ de } \Omega \text{ est une variété continûment différentiable} \\ \text{de dimension } n-1, \text{ et } \Omega \text{ est situé localementd'un seul côté de } \Gamma.\end{array}\right.$

Nous avons alors le

THÉORÈME 1.1.

Sous l'hypothèse (1-i), $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H(D_i;\ \Omega)$, $i = 1. \ldots, n$.

Démonstration.

Soit $u \in H(D_i;\ \Omega)$, quelconque. Nous devons montrer que u est limite dans $H(D_i;\ \Omega)$ de fonctions appartenant à $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$.

---

[26] Les résultats donnés dans cet Appendice ne sont pas nouveaux; le théorème 1.1 est un cas particulier d'un résultat de L. HÖRMANDER [10] et la démonstration est la même qu'en [10]; le théorème 2.1 est dû à J. L. LIONS et E. MAGENES (non publié).

1° - Considérons tout d'abord, le cas où u est à support compact K, K assez petit pour que la condition suivante soit réalisée:

$$\text{1.1)} \qquad \begin{cases} \text{Il existe un ensemble convexe ouvert } \mathcal{C}, \ 0 \in \bar{\mathcal{C}}, \text{ et pour tout} \\ x \in K \cap \Gamma, \quad x + \mathcal{C} \subset \complement \bar{\Omega} \end{cases}$$

Soit alors $\tilde{u}$ la fonction égale à u dans Ω et à 0 dans $\complement \Omega$; on a

$$D_i \tilde{u} = \widetilde{D_i u} + \mu \tag{1.2}$$

où μ est une distribution à support contenu dans $K \cap \Gamma$.

Soit $\rho \in \mathfrak{D}(R^n)$, à support inclus dans $\mathcal{C}$, $\rho \geq 0$, $\int_{R^n} \rho(x) dx = 1$. Pour $\varepsilon \in]0, 1]$, soit ρ_ε la fonction $x \to \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; ρ_ε a son support inclus dans $\mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est convexe.

La fonction $\rho_\varepsilon * \tilde{u}$ appartient à $\mathfrak{D}(R^n)$ et sa restriction à Ω, soit u_ε, appartient à $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$. Nous allons montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $H(D_i; \Omega)$, lorsque $\varepsilon \to 0$.

Lorsque $\varepsilon \to 0$, ρ_ε converge dans $\mathfrak{D}'(R^n)$ vers δ (distribution de Dirac en 0), et on vérifie de manière classique que

$$\rho_\varepsilon * v \to v \quad \text{dans} \quad L_2(R^n), \qquad \forall\, v \in L_2(R^n). \tag{1.3}$$

Ainsi $\rho_\varepsilon * \tilde{u} \to \tilde{u}$ dans $L_2(R^n)$ et, sur Ω, $u_\varepsilon \to u$ dans $L_2(\Omega)$.

D'après (1.2),

$$\rho_\varepsilon * D_i \tilde{u} = \rho_\varepsilon * \widetilde{D_i u} + \rho_\varepsilon * \mu.$$

En raison de (1.1), puisque ρ_ε a son support inclus dans $\mathcal{C}$, $\rho_\varepsilon * \mu$ a son support inclus dans $\complement \Omega$; alors

$$D_i u_\varepsilon = (\rho_\varepsilon * D_i \tilde{u})|_\Omega = (\rho_\varepsilon * \widetilde{D_i u})|_\Omega .$$

Avec cette égalité et (1.3), on en conclut que $D_i u_\varepsilon \to D_i u$ dans $L_2(\Omega)$, ce qui démontre le théorème, dans ce cas.

2° - *Cas général.*

a). On se ramène tout d'abord au cas où u est à support compact $\bar{\Omega}$.

Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\varphi = 0$ pour $|x| \geq 2$. Pour $a > 0$ soit φ_a la restriction à Ω de la fonction $x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{a}\right)$. On vérifie que $\varphi_a u \in H(D_i; \Omega)$ et que $\varphi_a u$ tend vers u dans cet espace, lorsque $a \to \infty$. Les fonctions à support compact forment donc un sous-espace dense de $H(D_i; \Omega)$ et on peut supposer que u est à support compact.

b). On vérifie facilement, avec l'hypothèse (1-i) que, pour tout $x_0 \in \Gamma$, il existe une boule B_{x_0} de centre x_0, de rayon suffisament petit, et un ensemble convexe ouvert $\mathcal{C}_{x_0}$, $0 \in \mathcal{C}_{x_0}$, tel que

$$\text{pour tout} \quad x \in B_{x_0} \cap \Gamma, \qquad x + \mathcal{C}_{x_0} \subset \complement\, \bar{\Omega}$$

Les boules B_{x_0} forment un recouvrement ouvert de Γ dont on peut extraire un recouvremment localement fini, $(\theta_j)_{j \in J}$.

Les ouverts Ω, $(\theta_j)_{j \in J}$, forment en recouvrement ouvert de $\bar{\Omega}$. Considérons une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement:

$$1 = \varphi + \sum_{j \in J} \varphi_j, \qquad \varphi_j \in \mathcal{D}(\theta_j).$$

On peut écrire

$$u = \varphi u + \sum_j \varphi_j u,$$

la somme $\sum_j$ étant finie en réalité, puisque le support de u est compact. Pour chaque fonction $\varphi_j u$ non nulle, on est dans les conditions du 1°); φu étant à support compact dans Ω, on vérifie par régularisation que φu est limite, dans $H(D_i;\, \Omega)$, de fonctions appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ $(\varphi u \in H_0(D_i;\, \Omega))$.

Le théorème en résulte.

REMARQUE 1.1.

On démontrerait de manière identique que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans

$$W^{p,q}(D_i;\, \Omega) = \{ u \mid u \in L_p(\Omega),\ D_i u \in L_q(\Omega) \}, \qquad p,\ q \geq 1,$$

cet espace étant de Banach pour la norme

$$\| u \|_{L_p(\Omega)} + \| D_i u \|_{L_q(\Omega)}.$$

2. - Un théorème de trace.

Pour $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on définit l'opérateur de trace

$$\gamma_i u = \cos(\nu,\, x_i) u|_\Gamma,$$

ν désignant la normale extérieure à Γ. L'application γ_i envoie $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{C}(\Gamma)$, espace des applications continues sur Γ.

THÉORÈME 2.1

Sous l'hypothèse (1-i), *l'application* $u \mapsto \gamma_i u$ *de* $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \mapsto \mathcal{C}(\Gamma)$ *se prolonge* *par continuité en une application linéaire continue de* $H(D_i;\,\Omega)$ *dans* $H^{-1/2}(\Gamma)$ (27), $(i = 1, \ldots, n)$.

Démonstration.

Soit $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$; on sait [15] qu'il existe $w = w(\varphi) \in H^1(\Omega)$ tel que

(2.1) $$\gamma w = \varphi, \qquad \gamma w = \text{trace de } w \text{ sur } \Gamma,$$

(2.2) L'application $\varphi \to w(\varphi)$ est continue de $H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$.

Pour u fixé dans $H(D_i;\,\Omega)$, nous posons

$$X_u(\varphi) = \int_\Omega [D_i u(x)\overline{w(x)} + u(x) D_i \overline{w(x)}]dx$$
$$= (D_i u,\ w) + (u,\ D_i w).$$

LEMME 2.1.

$X_u(\varphi)$ *ne dépend pas du choix de* $w(\varphi)$, *pourvu que* w *appartienne à* $H^1(\Omega)$ *et vérifie* (2.1).

Démonstration.

Soient w_1 et w_2 appartenant à $H^1(\Omega)$, avec

$$\gamma w_1 = \varphi, \qquad \gamma w_2 = \varphi,$$

et soit $w = w_1 - w_2$.

Il faut montrer que

$$(D_i u,\ w_1) + (u,\ D_i w_1) = (D_i u,\ w_2) + (u,\ D_i w_2),$$

autrement dit que

(2.3) $$(D_i u,\ w) + (u,\ D_i w) = 0.$$

Mais $w \in H^1(\Omega)$ et $\gamma\ w = 0$; donc $w \in H^1_0(\Omega)$ et il existe [15] une suite de fonctions $w_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\Omega)$, qui convergent vers w dans $H^1_0(\Omega)$. Il est évident que

$$(D_i u,\ w_\varepsilon) + (u,\ D_i w_\varepsilon) = 0, \quad \text{pour} \quad w_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

et (2.3) en résulte à la limite.

---

(27) $H^{-1/2}(\Gamma)$ est l'anti-dual de $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour la définition de ces espaces cf. [15].

Il est clair avec (2.2), que

$$|X_u(\varphi)| \leq \|u\|_{H(D_i;\,\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{H(D_i;\,\Omega)} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{2.4}$$

L'application $\varphi \mapsto X_u(\varphi)$ est donc anti-linéaire continue sur $H^{1/2}(\Gamma)$ et il existe $g = g(u) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, tel que

$$X_u(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle.$$

D'après (2.4),

$$\|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c\,\|u\|_{H(D_i;\,\Omega)},$$

ce qui montre que l'application $u \to g(u)$ est continue de $H(D_i;\,\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Vérifions pour terminer, que cette application prolonge γ_i.

LEMME 2.2.

Si $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$, alors

$$g(u) = \gamma_i u. \tag{2.5}$$

Démonstration.

En effet, on a alors

$$X_u(\varphi) = \int_\Omega D_i(u(x)\bar{w}(x))dx = \int_\Gamma u(x)\overline{\varphi(x)} \cos(\nu,\, x_i)d\sigma.$$

Cela termine la démonstration du théorème 2.1.

THÉORÈME 2.2.

$$H_0(D_i;\,\Omega) = \{u \mid u \in H(D_i,\,\Omega),\ \ \gamma_i u = 0\}.$$

Démonstration.

Si $u \in H_0(D_i;\,\Omega)$, par définition de $H_0(D_i;\,\Omega)$, il existe une suite de fonctions $u_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\Omega)$, convergeant vers u dans $H(D_i;\,\Omega)$; on a $\gamma_i u_\varepsilon = 0$ et donc, à la limite $\gamma_i u = 0$.

Réciproquement, si $u \in H(D_i;\,\Omega)$ et $\gamma_i u = 0$, nous allons montrer que u est limite de fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Soit $\Phi \in \mathfrak{D}(R^n)$ quelconque, et φ la restriction de Φ à Ω. Puisque $\gamma_i u = 0$, on a $\langle \gamma_i u,\, \gamma\varphi \rangle = 0$, ce qui s'écrit

$$\int_\Omega [u(x) \cdot D_i\overline{\varphi(x)} + D_i u(x) \cdot \overline{\varphi(x)}]dx = 0.$$

Donc

$$\int_{R^n} [\tilde{u}(x) D_i \overline{\Phi(x)} + \widetilde{D_i u}(x) \overline{\Phi(x)}] dx = 0, \qquad \forall\, \Phi \in \mathfrak{D}(R^n),$$

et donc

$$D_i \tilde{u} = \widetilde{D_i u}. \tag{2.6}$$

Comme dans le cas du théorème 1.1, on se ramène au cas d'une fonction u à support K assez petit pour que la condition suivante soit réalisée:

$$\begin{cases} \text{Il existe un ensemble convexe ouvert } \mathcal{C},\ 0 \in \mathcal{C} \text{ et tel que} \\ K - \mathcal{C} \subset \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Soit ρ et ρ_ε comme dans le théorème 1.1 et soit $\check{\rho}_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(-x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(-\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. On vérifie alors, avec (2.5) et (2.7) que la restriction à Ω de $\check{\rho}_\varepsilon * u$ est dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ et converge vers u dans $H(D_i;\ \Omega)$.

REMARQUE 2.1. - *Application aux problémes approchés semi-discrets.*

Le théorème 2.2 permet de donner un sens à certaines conditions aux limites (du type de Dirichlet), vérifiées par les fonctions approchées semi-discrètes: Ch I, ex. 2, (3.24), Ch II, ex. 1, (5.9), Ch III, ex. 1, (5.9).

Pour les autres exemples (Ch I, ex. 1, etc...) il serait possible en utilisant les résultats précédents et les méthodes de LIONS-MAGENES [19-20] de donner un sens aux conditions aux limites (du type de Neumann) vérifiées par les fonctions approchées semi-discrètes (Ch I, (3.11), etc...).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. AUBIN, *Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels*, Bull Soc Mat. de France, Mémoire n. 12 (1967).

[2] N. BOURBAKI, *Intégration*, Act. Scient et Ind., n. 1.175, Hermann, Paris, (1955).

[3] — —, *Espaces vectoriels topologiques*, Act. Scient. et Ind., n. 1.189 et 1.220, Hermann Paris, (1964).

[4] H. BREZIS - M. SIBONY, *Méthodes d'approximation et d'itérations pour les operateurs monotones*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis 28, n. 1 (1968), pp. 59-82.

[5] F. E. BROWDER, *Strongly non linear parabolic boundary value problems*, Amer. J. Math, 86 (1964), pp. 339-357.

[6] J. CEA, *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Ann. Inst. Fourier 14, (1964), pp. 345-444.

[7] DENIDOV - N. N. YANENKO, Soviet Math., 167, n. 6 (1966), pp. 567.

[8] J. JR. DOUGLAS - JR. GUNN, *A general formulation of alternating direction methods, Part I. Parabolic and hyperbolic problems*, Num. Math., 6 (1964), pp. 428-453.

[9] J. JR. DOUGLAS - H. H. RACHFORD, *On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*, Trans. of Amer. Math. Soc., 82 (1956), pp. 421-439.

[10] L. HORMANDER, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta math, 113 (1965), pp. 89-152.

[11] J. LERAY - J. L. LIONS, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires, par les méthodes de Minty - Browder*, Bull. Soc. Mat. France, 93 (1965), pp. 97-107.

[12] LIEUTAUD, Thèse, Fac. des Sciences de Paris (1968).

[13] J. L. LIONS, *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. R.P.R. Bucarest, 2 (1958), pp. 419-432.

[14] — —, *Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites*, Springer, Berlin, (1961).

[15] — —, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Université de Montréal, Oct. 1962.

[16] — —, *Equations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert*, cours du C.I.M.E., Mai 1963.

[17] — —, *Quelques remarques sur les équations différentielles opérationnelles du 1er ordre*, Rend. Semin. Mat. Padova, 33 (1963), pp. 213-225.

[18] — —, *Sur certaines équations paraboliques non linéaires*, Bull. Soc. Math. Fr., 93 (1965), pp. 155-175.

[19] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Remarque sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques*, C. R. Acad. Sc. Paris, 251 (1960), pp. 2.118-2.120.

[20] — —, — —, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1 et 2, Dunod, Paris (1968).

[21] J. L. LIONS - W. A. STRAUSS, *Some non-linear evolution equations*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), pp. 43-96.

[22] J. L. LIONS - R. TEMAM, *Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations*, C. R. Acad. Sc. Paris, 263, Série A (1966), pp 563-565.

[23] — —, — —, *Approximation de la solution d'inéquations variationnelles par décomposition des opérateurs et éclatement des contraintes*, à paraître.

[24] G. I. MARCHOUK, *Conférences faites à l'Université de Paris; Séminaire d'analyse numérique (J. L. Lions)*, Institut Blaise Pascal, Avril-mai 1966.

[25] — —, *Méthodes numériques* ... (en russe) Novosibirsk (1965).

[26] G. J. MINTY, *Monotone (non linear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J., 29 (1962), pp. 341-346.

[27] D. W. PEACEMAN - H. H. RACHFORD, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, Journal S.I.A.M, 3 (1955), pp. 28-41.

[28] P. A. RAVIART, *Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires*, Journal de Math. Pures et Appl., 46 (1967), pp. 11-107 et pp. 109-183.

[29] R. D. RICHTMYER, *Difference methods for initial-value problems*, Interscience, New-York (1957).

[30] A. A. SAMARSKII, *Local one-dimensional difference schemes for multidimensional hyperbolic equations in an arbitrary region*, U.S.S.R Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 4, n. 4 (1964), pp. 21-35.

[31] — —, *Economical difference schemes for parabolic equations with mixed derivatives,* U S.S.R. Comp Math. and Math. Phys., Vol. 4, n. 4 (1964), pp. 182-191.

[32] — —, *Additivity principle for the construction of efficient difference schemes,* Soviet Math. 165 n. 6 (1965), pp. 1 601-1.605; et la bibliographie de [30 - 31 - 32].

[33] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles,* Ann. Inst. Fourier, 7 (1957), pp. 1-139 et 8 (1958) pp. 1-209.

[34] S. L. SOBOLEV, *Certaines applications de l'analyse fonctionelle à la physique mathématique (en russe),* Leningrad (1950).

[35] W. A. STRAUSS, *On the continuity of functions with values in various Banach.spaces, à paraître,*

[36] R. TEMAM, C. R. Acad. Sc. Paris, 263, Série A, pp. 241-244, pp. 265-267, pp. 459-462.

[37] — —, *Sur l'approximatiou de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des fractionnaires,* Archi. for Rat. Mech. and Analysis, à paraître.

[38] H. F. TROTTER, *Approximation of semi-groups of operators,* Pacific Jour. of Math., 8, (1958), pp. 887-919.

[39] — —, *On the product of semi-groups of operators,* Proc. of the Amer. Math. Soc., 10 (1959), pp. 545-551.

[40] I. M. VIŠIK, *Résolution de problèmes aux limites pour équations paraboliques quasi-linéaires d'ordre quelconque (en russe),* Mat. Sbornik 59 (1962), pp. 289-325.

[41] N. N. YANENKO, *Méthode des pas fractionnaires pour la résolution numérique des problémes de la phsique mathématique (en russe),* Novosibirsk (1966), et la bibliographie de ce livre.

[42] — —, *Difference methods for solution of problems of mathematical Physics* I, Procedings of the Steklov Institute of Mathematics, n. 74 (1966) (Traduction de l'Amer. Math. Soc.).