

# SUR LA STRUCTURE DU GROUPE D'HOMÉO- MORPHISMES ANALYTIQUES D'UNE CERTAINE VARIÉTÉ KAEHLÉRIENNE

YOZÔ MATSUSHIMA

1. Soit  $V$  une variété<sup>1)</sup> complexe et soit  $I$  le champ de tenseurs de type  $(1, 1)$  de  $V$  définissant la structure complexe de  $V$ . Un champ de vecteurs<sup>1)</sup>  $\xi$  sur  $V$  sera dit conforme si  $I[\xi, \eta] = [\xi, I\eta]$  pour tout champ de vecteurs  $\eta$  sur  $V$ . On désignera par  $\alpha$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs conformes sur  $V$ .  $\alpha$  est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs sur  $V$ . Si  $V$  est compacte,  $\alpha$  est de dimension finie et s'identifie avec l'algèbre de Lie du groupe de Lie  $A(V)$  d'homéomorphismes analytiques de  $V$  [2]. De plus, si  $\xi, \eta \in \alpha$ , on a  $I\xi, I\eta \in \alpha$  et  $I[\xi, \eta] = [\xi, I\eta] = [I\xi, \eta]$ . On peut donc définir une structure d'algèbre de Lie complexe de  $\alpha$  en posant  $\sqrt{-1}\xi = I\xi$  pour tout  $\xi \in \alpha$ .

Une variété kaehlérienne est, par définition, la couple  $(V, g)$  d'une variété complexe  $V$  et d'une métrique kaehlérienne  $g$  de  $V$ . On désignera par  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de Killing de la variété kaehlérienne  $(V, g)$ . On verra que, si  $V$  est compacte,  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de  $\alpha$  (Lemme 3). On dira qu'une variété kaehlérienne compacte satisfait à la condition (P) si l'on a  $\alpha = \mathfrak{g} + I \cdot \mathfrak{g}$ . Cette condition signifie que le sous-espace complexe de  $\alpha$  engendré par  $\mathfrak{g}$  coïncide avec  $\alpha$ . Si une variété kaehlérienne compacte satisfait à la condition (P), l'algèbre de Lie  $\alpha$  est réductive. En effet, la variété  $V$  étant compacte, le plus grand groupe d'isométries de  $(V, g)$  est compact et par suite son algèbre de Lie qui s'identifie avec  $\mathfrak{g}$  est réductive. Si l'on désigne par  $\mathfrak{g}^c$  la complexifiée de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^c$  est aussi réductive. Puisque l'on a  $\alpha = \mathfrak{g} + I \cdot \mathfrak{g}$ , il existe un homomorphisme naturel de  $\mathfrak{g}^c$  sur l'algèbre de Lie complexe  $\alpha$  et par suite  $\alpha$  est réductive. Soit, réciproquement,  $V$  une variété complexe et compacte telle

---

Received October 9, 1956.

<sup>1)</sup> Les variétés considérées ici seront supposées connexes et les champs de tenseurs seront indéfiniment différentiables.

que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  soit semi-simple et supposons que  $V$  admet une métrique kaehlérienne  $h$ . Soit  $A_0(V)$  le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes analytiques de  $V$  et soit  $G$  un sous-groupe compact maximal de  $A_0(V)$ . Pour tout  $\sigma \in G$  on désigne par  $\sigma^*h$  la transformée de  $h$ .  $\sigma$  étant un homéomorphisme analytique de  $V$ ,  $\sigma^*h$  est aussi une métrique kaehlérienne de  $V$ . Si l'on pose  $g = \int_G \sigma^*h \cdot d\sigma$ ,  $g$  est une métrique kaehlérienne invariante par  $G$ . Soit  $\mathfrak{g}$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{a}$  correspondant au sous-groupe  $G$  de  $A_0(V)$ .  $G$  étant un sous-groupe compact maximal de  $A_0(V)$ ,  $\mathfrak{g}$  coïncide avec l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de Killing de la variété kaehlérienne  $(V, g)$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  étant complexe et semi-simple et  $G$  étant un sous-groupe compact maximal de  $A_0(V)$ , le sous-espace complexe de  $\mathfrak{a}$  engendré par  $\mathfrak{g}$  coïncide avec  $\mathfrak{a}$ .  $(V, g)$  satisfait donc à la condition (P).

Soit  $g$  une métrique kaehlérienne sur une variété complexe  $V$ . On dira que la métrique  $g$  est d'Einstein si  $g_{ij} = \frac{\lambda_0}{2} R_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 2n$ ,  $2n = \dim V$ ), où  $R_{ij}$  désignent les composantes du tenseur de Ricci et  $\lambda_0$  désigne un certain nombre réel. On démontrera le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.** *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte dont la métrique  $g$  est d'Einstein. Alors  $(V, g)$  satisfait à la condition (P) et par suite le groupe d'homéomorphismes analytiques de  $V$  est réductif.*

Soit maintenant  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte. Par la dualité définie par la métrique  $g$  il correspond à tout champ de vecteurs sur  $V$  une 1-forme. On désignera par  $\mathfrak{a}^*$  (resp. par  $\mathfrak{g}^*$ ) l'espace vectoriel des 1-formes correspondant aux champs de vecteurs dans  $\mathfrak{a}$  (resp.  $\mathfrak{g}$ ). Les 1-formes appartenant à  $\mathfrak{a}^*$  (resp.  $\mathfrak{g}^*$ ) seront appelées les formes conformes (resp. les formes de Killing). On démontrera le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.** *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte et supposons que le premier nombre de Betti de  $V$  soit nul. Alors pour que  $(V, g)$  satisfasse à la condition (P), il faut et il suffit que  $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^* \cap \delta C^2 + \mathfrak{a}^* \cap dC^0$ , où  $C^p$  ( $p = 0, 2$ ) désigne l'espace vectoriel des  $p$ -formes de  $V$  et  $d$  et  $\delta$  désignent les opérateurs de différentiation et de codifférentiation respectivement.*

Le théorème 1 et un théorème de Koszul [4] nous conduiront au théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Soit  $V$  une variété complexe et compacte et supposons que le groupe  $A(V)$  d'homéomorphismes analytiques de  $V$  soit transitif sur  $V$ . Si le groupe fondamental de  $V$  est fini et si la caractéristique d'Euler de  $V$  n'est pas nulle, le groupe de Lie  $A(V)$  est semi-simple.*

2. Soit  $(V, g)$  une variété riemannienne compacte. On désigne par  $d$  et  $\delta$  respectivement les opérateurs de différentiation et de codifférentiation, par  $\Delta$  le laplacien de G. de Rham et par  $K$  l'opérateur sur les 1-formes défini par

$$K : \alpha_i \longrightarrow R_{ij} \alpha^j,$$

où  $R_{ij}$  désignent les composantes du tenseur de Ricci.<sup>2)</sup> Pour toute 1-forme  $\alpha$  on a

$$(1) \quad (\Delta\alpha)_k = -\nabla^i \nabla_i \alpha_k + K(\alpha)_k.$$

Supposons maintenant que  $(V, g)$  soit une variété kaehlérienne. Les composantes  $R_{ij}$  du tenseur de Ricci vérifient les relations  $R_{ij} I_k^i I_l^j = R_{kl}$ ,  $I_k^i$  désignant les composantes du tenseur  $I$  définissant la structure complexe de  $V$ . On en déduit facilement que  $R_k^i I_j^k = I_k^i R_j^k$  et ceci montre que l'on a

$$(2) \quad K(I\alpha) = IK(\alpha)$$

pour toute 1-forme  $\alpha$ . Les dérivées covariantes du tenseur  $I$  étant nulles, on déduit de (1) et (2) la formule

$$(3) \quad \Delta(I\alpha) = I\Delta(\alpha).$$

Nous rappelons ici des résultats dûs à Bochner, Yano et Lichnerowicz.

LEMME 1.<sup>3)</sup> *Soit  $(V, g)$  une variété riemannienne compacte. Pour qu'une 1-forme  $\eta$  sur  $V$  soit une forme de Killing, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions  $\Delta\eta = 2K(\eta)$ ,  $\delta\eta = 0$ .*

LEMME 2.<sup>4)</sup> *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte et soit  $\xi$  une forme conforme. On a alors  $\Delta(\xi) = 2K(\xi)$ .*

LEMME 3. *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte. Pour qu'une 1-forme  $\eta$  soit une forme de Killing, il faut et il suffit que  $\eta$  soit conforme et  $\delta\eta = 0$ .*

<sup>2)</sup> Pour le signe du tenseur de Ricci nous suivons celui de [1] et [9].

<sup>3)</sup> Yano [8] et Lichnerowicz [7].

<sup>4)</sup> Bochner [1] et Yano-Bochner [9], p. 133. M. Yano m'a écrit qu'il a démontré que la condition  $\Delta\xi = 2K(\xi)$  est suffisante pour que  $\xi$  soit conforme.

En effet, si  $\eta$  est conforme et si  $\delta\eta=0$ ,  $\eta$  est une forme de Killing par les lemmes 1 et 2. Soit, réciproquement,  $\eta$  une forme de Killing. On désignera par la même lettre  $\eta$  le champ de vecteurs de Killing correspondant à la forme  $\eta$ .  $\eta$  étant de Killing, la dérivée de Lie  $\theta(\eta) \cdot \alpha$  d'une forme harmonique  $\alpha$  est nulle. Soit  $K$  la forme de Kaehler associée à la métrique kaehlérienne  $g$ . Pour les champs de vecteurs  $\xi, \zeta$  sur  $V$  on a  $K(\xi, \zeta) = g(I\xi, \zeta)$ . La forme  $K$  étant harmonique, on a  $(\theta(\eta)K)(\xi, \zeta) = \theta(\eta)(g(I\xi, \zeta)) - g(I[\eta, \xi], \zeta) - g(I\xi, [\eta, \zeta]) = 0$  pour tout champ de vecteurs  $\xi, \zeta$  sur  $V$ . D'autre part, on a  $\theta(\eta)g=0$  et par suite  $(\theta(\eta)g)(I\xi, \zeta) = \theta(\eta)(g(I\xi, \zeta)) - g([\eta, I\xi], \zeta) - g(I\xi, [\eta, \zeta]) = 0$ . On en déduit que  $I[\eta, \xi] = [\eta, I\xi]$ .  $\eta$  est donc conforme. Le lemme 3 est ainsi établi.

LEMME 4. *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte et soit  $\zeta$  une forme de Killing sur  $V$ . On a alors  $dI\zeta = 0$ .*

Par le lemme 3  $\zeta$  est conforme. Soit  $(z^\alpha)(\alpha = 1, \dots, n)$  un système de coordonnées complexes locales et soit  $(\zeta_\alpha, \zeta_{\bar{\alpha}})$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) les composantes de  $\zeta$ .  $\zeta$  étant conforme et de Killing, on a  $\nabla_\alpha \zeta_\beta = \nabla_{\bar{\alpha}} \zeta_{\bar{\beta}} = 0$ ,  $\nabla_\alpha \zeta_{\bar{\beta}} + \nabla_{\bar{\beta}} \zeta_\alpha = 0$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ). De plus,  $(I\zeta)_\alpha = \sqrt{-1} \cdot \zeta_\alpha$  et  $(I\zeta)_{\bar{\alpha}} = -\sqrt{-1} \cdot \zeta_{\bar{\alpha}}$ . Alors  $(dI\zeta)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha(I\zeta)_\beta - \nabla_\beta(I\zeta)_\alpha = \sqrt{-1}(\nabla_\alpha \zeta_\beta - \nabla_\beta \zeta_\alpha) = 0$  et  $(dI\zeta)_{\alpha\bar{\beta}} = \nabla_\alpha(I\zeta)_{\bar{\beta}} - \nabla_{\bar{\beta}}(I\zeta)_\alpha = -\sqrt{-1}(\nabla_\alpha \zeta_{\bar{\beta}} + \nabla_{\bar{\beta}} \zeta_\alpha) = 0$ . On obtient donc  $dI\zeta = 0$ .

LEMME 5. *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte et soit  $\varphi$  une fonction différentiable sur  $V$ . Pour que  $Id\varphi$  soit une forme de Killing, il faut et il suffit que  $\varphi$  satisfasse à l'équation*

$$(4) \quad \Delta(d\varphi) = 2K(d\varphi).$$

En effet, si  $Id\varphi$  est une forme de Killing, elle est conforme par le lemme 3 et par suite  $d\varphi = -I(Id\varphi)$  est conforme. Par le lemme 2 la fonction  $\varphi$  satisfait à l'équation (4). Soit, réciproquement,  $\varphi$  une fonction différentiable sur  $V$  satisfaisant à l'équation (4). D'après les formules (2) et (3) on a  $\Delta(Id\varphi) = 2K(Id\varphi)$ . D'autre part,  $\delta Id\varphi = -\nabla_i I_j^i \nabla^j \varphi = -I_j^i \nabla_i \nabla^j \varphi = -I^{ik} \nabla_i \nabla_k \varphi$ . Puisque  $I^{ik} = -I^{ki}$  et que  $\nabla_i \nabla_k \varphi = \nabla_k \nabla_i \varphi$ , on a  $I^{ik} \nabla_i \nabla_k \varphi = 0$  et par suite  $\delta Id\varphi = 0$ . La forme  $Id\varphi$  est donc une forme de Killing par le lemme 1.

Il résulte des lemmes 4 et 5 le corollaire suivant.

CORLLAIRE. *Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte telle que le premier nombre de Betti de  $V$  soit nul. Toute forme de Killing  $\zeta$  sur  $V$  s'écrit*

$\zeta = Id\varphi$ , où  $\varphi$  est une fonction différentiable satisfaisant à l'équation (4).

On va démontrer le théorème 1. Soit  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte dont la métrique  $g$  est d'Einstein et soit  $R_{ij} = \frac{\lambda_0}{2} g_{ij}$ . On a alors  $2K(\alpha) = \lambda_0 \cdot \alpha$  pour toute 1-forme  $\alpha$ . Si donc  $\xi$  est une forme conforme, on a  $\Delta\xi = \lambda_0 \cdot \xi$ . Supposons d'abord que  $\lambda_0 \neq 0$  et posons  $\alpha = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \xi$ . On a alors  $\xi = \Delta\alpha = d\delta\alpha + \delta d\alpha$ . Posons  $\delta d\alpha = \eta$ . Alors  $\Delta\eta = \delta d\Delta\alpha = \delta d(\lambda_0 \alpha) = \lambda_0 \eta$  et  $\delta\eta = 0$ .  $\eta$  est donc une forme de Killing. D'autre part, si l'on pose  $\delta\alpha = \varphi$ , on a  $\Delta d\varphi = \Delta d\delta\alpha = d\delta\Delta\alpha = \lambda_0 d\delta\alpha = \lambda_0 d\varphi$ . Donc  $Id\varphi = Id\delta\alpha$  est une forme de Killing par le lemme 5. Si l'on pose  $\xi = -Id\varphi$ ,  $\xi$  est une forme de Killing et on a  $d\varphi = d\delta\alpha = I\xi$ . On a donc démontré que toute forme conforme  $\xi$  s'écrit  $\xi = \eta + I\zeta$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  étant des formes de Killing. Inversement, si  $\eta$  et  $\zeta$  sont des formes de Killing,  $\xi = \eta + I\zeta$  est conforme. On a donc  $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{g}^* + I \cdot \mathfrak{g}^*$  et cette relation est évidemment équivalente à la condition (P).<sup>5)</sup> Soit maintenant  $\lambda_0 = 0$ . Alors  $R_{ij} = 0$  et par suite  $K(\alpha) = 0$ . Si donc  $\xi$  est une forme conforme, on a  $\Delta\xi = 0$ .  $\xi$  est ainsi harmonique et par suite  $\delta\xi = 0$ . Par le lemme 1  $\xi$  est une forme de Killing. Inversement toute forme de Killing est conforme. On a donc  $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{g}^*$  et par suite  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g} + I \cdot \mathfrak{g}$ . Dans ce cas le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes analytiques de  $V$  est un tore complexe, parce qu'il est un groupe de Lie complexe et compact. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Soit maintenant  $(V, g)$  une variété kaehlérienne compacte. On désigne par  $\mathfrak{h}^1$  l'espace vectoriel des 1-formes harmoniques de  $V$  et par  $\mathcal{C}^p$  ( $p = 0, 1, 2$ ) l'espace vectoriel des  $p$ -formes de  $V$ . D'après le résultat bien connu de Kodaira-de Rham, on a  $\mathcal{C}^1 = \mathfrak{h}^1 + d\mathcal{C}^0 + \delta\mathcal{C}^2$  (somme directe).  $\mathfrak{h}^1 + \delta\mathcal{C}^2$  (resp.  $\mathfrak{h}^1 + d\mathcal{C}^0$ ) est le sous-espace de  $\mathcal{C}^1$  de tous les 1-formes  $\alpha$  telles que  $\delta\alpha = 0$  (resp.  $d\alpha = 0$ ). Il résulte de là et des lemmes 3 et 4 que  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a}^* \cap (\mathfrak{h}^1 + \delta\mathcal{C}^2)$  et que  $I \cdot \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{a}^* \cap (\mathfrak{h}^1 + d\mathcal{C}^0)$ . Supposons maintenant que le premier nombre de Betti de  $V$  soit nul. On a alors  $\mathfrak{h}^1 = (0)$ . Soit  $d\varphi \in \mathfrak{a}^* \cap d\mathcal{C}^0$ . Par les lemmes 2 et 5  $Id\varphi = -\zeta$  est une forme de Killing et  $d\varphi = I\zeta$ . On a donc  $I\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a}^* \cap d\mathcal{C}^0$ . Par suite, pour que la variété kaehlérienne compacte  $(V, g)$  satisfasse à la condition (P), il faut et il suffit que  $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^* \cap \delta\mathcal{C}^2 + \mathfrak{a}^* \cap d\mathcal{C}^0$ . Le théorème 2 est donc démontré.

Soit maintenant  $V$  une variété complexe et compacte telle que le groupe fondamental soit fini et telle que la caractéristique d'Euler ne soit pas nulle.

<sup>5)</sup> Si  $\lambda_0 < 0$ , on a  $\mathfrak{a} = (0)$  par un théorème de Bochner [1].

Supposons que le groupe  $A(V)$  d'homéomorphismes analytiques de  $V$  soit transitif sur  $V$ . La variété  $V$  étant connexe, la composante connexe de l'unité  $A_0(V)$  de  $A(V)$  est aussi transitif sur  $V$ . Soit  $G$  un sous-groupe compact maximal de  $A_0(V)$ . D'après un théorème de Montgomery [5],  $G$  est transitif sur  $V$ . Soit  $B$  le groupe d'isotropie de  $G$  à un point  $p$  de  $V$ . Puisque la caractéristique d'Euler de  $V$  n'est pas nulle,  $B$  est un sous-groupe de rang maximum de  $G$  [3].  $G$  étant effectif sur  $V$ ,  $G$  est semi-simple, sinon le sous-groupe  $B$  contiendrait le centre de  $G$ . D'après un théorème de Koszul [4],  $V$  admet alors une métrique kaehlerienne d'Einstein  $g$  invariante par  $G$ . La variété kaehlerienne  $(V, g)$  satisfait donc à la condition (P). Par suite l'algèbre de Lie  $\alpha$  de  $A_0(V)$  s'identifie avec la complexifiée de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .  $\mathfrak{g}$  étant semi-simple,  $\alpha$  est aussi semi-simple. Le théorème 3 est ainsi démontré.<sup>6)</sup>

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Bochner, Vector fields and Ricci curvature, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 776-797.
- [2] S. Bochner and D. Montgomery, Groups of analytic manifolds, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 659-669.
- [3] H. Hopf und H. Samelson, Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen, *Comm. Math. Helv.*, **13** (1941), 240-251.
- [4] J. L. Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Can. J. Math.*, **7** (1955), 562-576.
- [5] D. Montgomery, Simply connected homogeneous spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 467-469.
- [6] A. Lichnerowicz, Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kaehleriennes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **239** (1954), 1344-1346.
- [7] A. Lichnerowicz, Transformations infinitésimales conformes de certaines variétés riemanniennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **241** (1955), 726-729.
- [8] K. Yano, On harmonic and Killing vector fields, *Ann. of Math.*, **55** (1952), 38-45.
- [9] K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti numbers, *Annals of Math. Studies*, No. **32** (1953).

*Université de Nagoya*

---

<sup>6)</sup> On peut conjecturer que, si  $V$  est une variété complexe et compacte admettant une métrique kaehlerienne et si le groupe  $A(V)$  est transitif sur  $V$ , on peut trouver une métrique kaehlerienne  $g$  de  $V$  telle que  $(V, g)$  satisfasse à la condition (P).