PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JACQUES TITS

Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 2 (1959), p. 13-60
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1959__2__13_0>

SUR LA TRIALITÉ
ET CERTAINS GROUPES QUI S'EN DÉDUISENT

Par J. TITS

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Un espace projectif défini sur un corps commutatif K, et que, pour fixer les idées, nous supposerons tridimensionnel, est toujours isomorphe à son dual ; on peut exprimer ce « principe de dualité » en disant que les points et les plans de l'espace jouent un rôle symétrique vis-à-vis de la relation usuelle d'incidence. Plus précisément, dans cet espace existent des *polarités*, transformations involutives permutant les points et les plans et respectant l'incidence. L'ensemble des *points autoconjugués* d'une polarité, c'est-à-dire des points qui appartiennent au plan qui leur correspond, est soit l'ensemble vide, soit l'espace tout entier (polarité « nulle »), soit une quadrique ordinaire ou hermitienne. Une polarité induit une permutation involutive sur l'ensemble des droites de l'espace ; on peut donc parler de ses *droites fixes*, qui sont contenues dans l'ensemble des points autoconjugués (et qui sont d'ailleurs les seules droites contenues dans cet ensemble, sauf dans le cas des polarités nulles).

Une situation analogue se présente sur les hyperquadriques de dimension 6, non dégénérées et non défectives ([1]), d'indice maximum, où règne un *principe de trialité* (**[5]**, **[7]**). Ici, trois types d'êtres, les points et deux espèces de variétés linéaires à 3 dimensions, jouent un rôle symétrique vis-à-vis d'une relation d'incidence naturelle (cf. les n^{os} 1.3 et 3.1), et il existe des transformations cycliques de période 3 qui les permutent circulairement et qui respectent l'incidence. Pour ces transformations, auxquelles nous donnons le nom de *trialités*, peuvent aussi être définis des points autoconjugués et des droites fixes. Le présent travail a pour objet l'étude des trialités, et plus particulièrement de celles qui possèdent des points autoconjugués.

Après un chapitre préliminaire, nous examinons, au chapitre II, quelques propriétés générales des trialités, propriétés concernant notamment les points autoconjugués et les droites fixes. Cela nous conduit à une classification projective complète des trialités possédant des points autoconjugués ; elles sont essentiellement de deux types, notés I_σ et II, les trialités de type II étant toutes projectivement équivalentes entre elles (pour un corps K donné) tandis que les trialités de type I_σ sont en correspondance biunivoque avec les automorphismes σ de K tels que $\sigma^3 =$ l'identité (en abrégé : id.). Poursuivant le parallèle établi plus haut entre polarités et trialités, on peut assez naturellement faire

([1]) Précision nécessaire seulement lorsque K est un corps de caractéristique 2. Pour les définitions, cf. par exemple **[7]** ou **[12]**.

correspondre aux types $I_{id.}$, I_σ ($\sigma \neq$ id.) et II, respectivement les polarités nulles, les polarités hermitiennes et les polarités « ordinaires ».

Une étude particulière de chacun des deux types de trialités fait l'objet des chapitres III et IV. Au chapitre III, nous nous attachons principalement à déterminer la structure du groupe G des projectivités qui conservent une trialité de type I_σ. Il se trouve (théorème 7. 2. 1) que le dérivé de G est toujours un groupe simple. La démonstration que nous donnons de cette propriété est générale, et ne fait pas apparaître de différence entre divers cas (exception faite, dans une certaine mesure, pour le cas du corps $K = F_2$ de deux éléments). Il y a lieu cependant de noter la différence fondamentale existant entre les cas $\sigma =$ id. et $\sigma \neq$ id. au point de vue de la théorie des groupes algébriques (**[6]**, **[16]**) : lorsque $\sigma =$ id., G est un groupe de type G_2 sur K, à savoir la forme « normale » de ce type, c'est-à-dire celle définie par C. Chevalley dans **[8]**, tandis que quand $\sigma \neq$ id., G est une forme non normale de type D_4 sur le corps L des éléments fixes de σ (1). Ces nouvelles formes de D_4, qui n'ont pas d'équivalent dans le cas classique du corps des complexes, ont été rencontrées indépendamment par D. Hertzig (non publié) et par R. Steinberg **[17]** (2) ; d'autre part, il est vraisemblable qu'elles sont en étroite relation avec certaines algèbres de Lie de type D_4 étudiées par C. Carroll (3). Le cas où $\sigma \neq$ id. et où $K = F_{q^3}$ est un corps fini présente un intérêt particulier, les groupes G qui y correspondent constituant une nouvelle classe de groupes finis simples ; selon un résultat de D. Hertzig, ces groupes sont, avec les groupes classiques, les groupes exceptionnels de Chevalley et les groupes (formes non normales) de type E_6 définis dans **[18]** (4), les seuls groupes finis simples qu'on peut obtenir à partir de groupes algébriques simples par les procédés usuels.

Le chapitre IV est consacré aux trialités de type II. Celles-ci ne présentent pas le même intérêt que les trialités de type I, du moins en ce qui concerne les groupes qu'elles déterminent. En un certain sens, leur étude se trouve ramenée à un problème de géométrie projective plane (cf. les théorèmes 9. 1. 2 et 9. 2. 1), sauf dans le cas de la caractéristique 3 qui apparaît, pour ainsi dire, comme un cas de dégénérescence.

L'espace constitué par l'ensemble des points autoconjugués et des droites fixes d'une trialité, considérés intrinsèquement, c'est-à-dire abstraction faite de l'hyperquadrique de départ et de la trialité en question, jouit de propriétés d'incidence remarquables (nos 4. 3. 1 et 4. 3. 2). Dans un appendice, nous considérons la classe d'espaces plus généraux, que nous appelons *hexagones généralisés* (cas particuliers de *polygones généralisés*) obtenus en prenant ces propriétés pour axiomes, et nous en indiquons, sans

(1) Cela signifie que le groupe déduit de G par extension du corps de base L à un surcorps (cf. **[6]**, p. 105) — en l'occurrence K — est le groupe (normal) de type D_4, c'est-à-dire la composante de l'élément neutre du groupe des projectivités d'une hyperquadrique de dimension 6 (sur K).

(2) Il est hors de doute que les groupes considérés par R. Steinberg sont les mêmes que ceux dont il est question ici (la coïncidence des ordres nous paraît, à elle seule, un indice presque concluant), bien que les brèves indications données dans **[17]** ne nous permettent pas de l'affirmer en toute rigueur.

(3) D'après une communication de N. Jacobson.

(4) Certainement identiques à ceux dont il est question dans **[17]**.

démonstration, quelques propriétés qui éclairent, en les situant dans un cadre plus général, certains résultats des paragraphes précédents, notamment ceux concernant les liens entre trialités de type II et géométrie projective plane.

Des conversations avec MM. D. Hertzig, N. Jacobson et J.-P. Serre ont souligné pour moi l'intérêt que pouvaient présenter certaines des idées développées dans ce travail ([1]). M. J. Dieudonné a bien voulu lire mon manuscrit qui, dans sa forme présente, est redevable de ses nombreuses et utiles suggestions. Il m'est agréable de leur en exprimer à tous mes sincères remerciements.

([1]) Les principaux résultats exposés ici, et notamment le théorème 7. 2. 1, ont été obtenus lors d'un bref séjour à Paris en février 1955.

Chapitre Premier

PRÉLIMINAIRES, RAPPELS

§ 1. Notations, terminologie.

1. 1. Les indices latins varieront toujours de 0 à 2 et les indices grecs de 0 à 3, sauf mention explicite du contraire. Un indice placé entre crochets devra être réduit mod. 3 ; on aura, par exemple

$$x_{[3]} = x_0 , \qquad x^{([-1])} = x^{(2)}$$

Étant donné un système de coordonnées dans un espace projectif, le point fondamental correspondant à une coordonnée, soit $x_i, y_i, \ldots$, c'est-à-dire le point où toutes les coordonnées s'annulent à l'exception de celle-là, sera désigné par la capitale correspondante, X_i, Y_i, ... Le transformé d'un point ou d'un ensemble a par une application f sera noté $(a)f$, af ou a^f. L'expression : « variété linéaire à r dimensions » sera abrégée en « V_r ».

1. 2. *Espaces projectifs* (1).

Tous les espaces projectifs considérés seront des espaces définis sur un corps commutatif K.

Une application biunivoque d'un espace projectif sur un autre, éventuellement confondu avec le premier, est une *collinéation* si elle applique toute droite sur une droite. $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ étant des systèmes de coordonnées projectifs dans les espaces en question, l'équation générale d'une collinéation, pour $n \geqslant 2$, est

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\sigma} . \mathbf{a} \tag{1. 2. 1}$$

où $\mathbf{a}$ est une matrice à $(n+1) \times (n+1)$ éléments, déterminée à un facteur constant près, et où σ est un automorphisme du corps K. On dit que la collinéation (1. 2. 1) *appartient* à l'automorphisme σ et on appelle *collinéation linéaire* ou *projectivité* une collinéation appartenant à l'identité. Une *réciprocité* (une *réciprocité linéaire*) est une collinéation (une collinéation linéaire) d'un espace sur son dual.

Soient P un espace projectif et φ une collinéation de P sur lui-même, d'équation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{\sigma} . \mathbf{a}.$$

φ est conservée par (*i.e.* permute avec) la projectivité

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} . \mathbf{b}$$

(1) Il y a lieu de noter quelques différences entre la terminologie, assez classique, adoptée ici, et celle de J. Dieudonné [12], notamment en ce qui concerne l'emploi des termes « projectivité » et « collinéation ».

si

$$(\mathbf{b}^{\sigma})^{-1}.\mathbf{a}.\mathbf{b} = k.\mathbf{a} \tag{1.2.2}$$

où $k \in K$. On désignera par $(\varphi)M$ le groupe multiplicatif des éléments $k \in K$ tels qu'il existe une matrice $\mathbf{b}$ satisfaisant à (1.2.2), par $(\varphi)\Delta$ le groupe des éléments $b \in K$ tels qu'il existe une matrice $\mathbf{b}$ de déterminant $|\mathbf{b}| = b$ vérifiant (1.2.2) avec $k = 1$, et enfin par $(\varphi)H$ l'homomorphisme $(\varphi)H : (\varphi)M \rightarrow K^*/(\varphi)\Delta$ (K^* = groupe multiplicatif des éléments non nuls de K) défini comme suit : l'image de $k \in K$ par $(\varphi)H$ est la classe mod. $(\varphi)\Delta$ du déterminant $|\mathbf{b}|$ d'une matrice quelconque vérifiant (1.2.2). On voit sans peine que $(\varphi)M$, $(\varphi)\Delta$ et $(\varphi)H$ ne dépendent que de φ et non du système de coordonnées choisi, ni du facteur arbitraire qui intervient dans la matrice $\mathbf{a}$. On notera aussi que les éléments de $(\varphi)\Delta$ sont tous des éléments fixes de σ.

Une projectivité d'un espace projectif P à n dimensions sur lui-même est dite *biaxiale* si elle conserve tous les points de deux variétés linéaires v et v' de dimensions r et $r' = n - r - 1$, ainsi que tous les hyperplans contenant v ou v'. v et v' sont appelés les *axes* de la projectivité. Celle-ci est dite spéciale si l'un des axes est contenu dans l'autre. Une projectivité biaxiale non spéciale a pour équations, dans un système de coordonnées $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ convenablement choisi

$$\begin{cases} x'_i = x_i & (i = 0, \ldots, r) \\ x'_j = x_j.a & (j = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

a est appelé l'*invariant* de la projectivité biaxiale en question. Une *homologie* est une projectivité biaxiale dont les axes sont un point (*centre* de l'homologie) et un hyperplan (*axe* de l'homologie).

1.3. Deux variétés linéaires d'un espace projectif sont généralement dites *incidentes* si l'une d'elles contient l'autre. Lorsqu'on étudie la géométrie intrinsèque d'une hyperquadrique Q de dimension paire $2n$, il y a quelquefois intérêt à étendre cette définition en considérant aussi comme incidentes deux V_n appartenant à Q et se coupant suivant une V_{n-1} ; c'est ce qu'on fera ici.

L'attention étant toujours portée sur une hyperquadrique Q, on dira que deux points sont alignés (sous-entendu : « sur Q »), que trois points sont coplanaires, etc., si la droite déterminée par les deux points, le plan déterminé par les trois points, etc., appartiennent à Q.

§ 2. Collinéations de période 3 dans les plans projectifs.

2.1. *Collinéations à points fixes.*

Soient Π un plan projectif défini sur un corps K, φ une collinéation de période 3 (φ^3 = l'identité) de Π appartenant à l'automorphisme σ de K (σ^3 = l'identité), et L le corps des éléments fixes de σ.

Supposons tout d'abord qu'il existe un point p tel que p, $p\varphi$ et $p\varphi^2$ ne soient pas alignés et prenons ces trois points comme points fondamentaux X_i d'un système de coordonnées x_i. Les équations de φ s'écrivent

(2. 1. 1) $$x'_i = x^{\sigma}_{[i-1]} \cdot a_i$$

Si φ possède un point fixe, on peut le choisir comme point unité (point de coordonnées 1, 1, 1) du système de coordonnées et il vient alors $a_0 = a_1 = a_2$. Supposons en outre que σ diffère de l'identité, et soit k un élément de K tel que k, k^{σ}, k^{σ^2} forment une base normale de K sur L (cf. [**2**], pp. 157 à 159). Alors (*loc. cit.*, prop. 13), la matrice

$$\begin{pmatrix} k & k^{\sigma} & k^{\sigma^2} \\ k^{\sigma^2} & k & k^{\sigma} \\ k^{\sigma} & k^{\sigma^2} & k \end{pmatrix}$$

est inversible et la projectivité de Π qu'elle définit transforme φ en la collinéation d'équations

$$x'_i = x_i^{\sigma}$$

Considérons à présent le cas où p, $p\varphi$ et $p\varphi^2$ sont alignés quel que soit p. Alors, par tout point p non invariant par φ passe une droite invariante $(p)d$, à savoir, la droite joignant p et $p\varphi$. Si toutes les droites ainsi définies concourent en un même point, toute droite passant par ce point est invariante, et φ est une homologie qui est spéciale ou non selon que K est ou non de caractéristique 3 (en effet, selon le cas, le groupe multiplicatif, respectivement le groupe additif, de K ne peut contenir aucun élément d'ordre 3). Supposons enfin qu'il existe trois points non invariants, p_i $(i = 0, 1, 2)$, tels que les droites $d_i = (p_i)d$ ne soient pas concourantes ; nous allons voir que cette hypothèse implique une contradiction. Les points $q_0 = d_1 \cap d_2$, $q_1 = d_2 \cap d_0$ et $q_2 = d_0 \cap d_1$ sont invariants par φ. Soit r_i un point quelconque de la droite p_iq_i, distinct de p_i et q_i. La droite $(r_i)d$ ne peut passer par q_i, sinon elle serait confondue avec p_iq_i et $p_i = p_iq_i \cap (r_i)d$ serait un point fixe de φ. $(r_i)d$ coupe donc l'une au moins des deux droites d_j $(j \neq i)$ en un point distinct de q_0, q_1 et q_2. Ceci étant vrai pour tout i, deux au moins des droites d_i contiennent au moins un point fixe de φ distinct des q_i ; soient, pour fixer les idées, $s_0 \in d_0$ et $s_1 \in d_1$ de tels points. Introduisons à présent un système de coordonnées x_i ayant pour points fondamentaux $X_i = q_i$, et pour point unité le point d'intersection des droites q_0s_0 et q_1s_1. Ces quatre points étant invariants par la collinéation φ, celle-ci aura pour équation

$$x'_i = x_i^{\sigma}$$

Mais alors, si k est un élément de K choisi comme plus haut, et si p désigne le point de coordonnées $(k, k^{\sigma}, k^{\sigma^2})$, p, $p\varphi$ et $p\varphi^2$ ne sont pas alignés, contrairement à l'hypothèse faite au départ.

De ces remarques, il résulte que

2. 1. 2. *Toute collinéation de période 3 de Π, possédant au moins un point fixe, est projectivement équivalente à une et une seule des collinéations suivantes :*

(I_σ) $$x_i' = x_i^\sigma$$

(II) $$x_i' = x_{[i-1]}$$

(III_0) *Si* $3=0$,

$$\begin{cases} x_0' = x_0 + x_1 \\ x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

$(\mathrm{III}^{\pm})$ *Si* $3 \neq 0$ *et si les trois racines cubiques de l'unité,* $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ *appartiennent à* K,

$$\begin{cases} x_0' = \varepsilon^{\pm 1} . x_0 \\ x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que

2. 1. 3. *Les points fixes de* (I_σ) *forment un plan projectif sur le corps des éléments fixes de* σ, (II) *a trois points fixes (non alignés) si* $3 \neq 0$ *et* $\varepsilon \in K$, *et un seul dans les autres cas,* (III_0) *a une droite de points fixes, et enfin,* $(\mathrm{III}^{\pm})$ *a une droite de points fixes et un point fixe extérieur à celle-ci.*

2. 1. 4. *Si* φ *représente une collinéation de période 3 de* Π *possédant au moins un point fixe,* $(\varphi)\Delta$ *est le groupe de tous les éléments non nuls de* K *qui sont fixes pour l'automorphisme* σ *de* K *auquel appartient* φ.

2. 2. *Deux propositions concernant le cas général.*

Supposons à présent que φ n'ait pas de point fixe. On peut encore choisir le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ et normaliser les a_i de façon à avoir, dans l'équation (2. 1. 1), $a_0 = a_1 = 1$. En exprimant que φ^3 est l'identité, on voit alors que $a_2^\sigma = a_2$. De ceci, nous retiendrons en particulier que

2. 2. 1. *Toute collinéation* φ *de période 3 de* Π *peut, par un choix convenable du système de coordonnées* $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$, *être écrite sous la forme*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^\sigma . \mathbf{a}$$

où $\mathbf{a}$ *est une matrice à 9 éléments, invariante pour* σ. *On peut en outre s'arranger pour que* $\mathbf{a}^3 = |\mathbf{a}| . \mathbf{1}$ *(*$|\mathbf{a}|$ *= déterminant de* $\mathbf{a}$, $\mathbf{1}$ *= matrice unité), sauf si* φ *est une homologie non spéciale (ce qui implique en particulier que* $3 \neq 0$ *et* $\varepsilon \in \mathrm{K}$*)* (1).

(1) L'exemple de la collinéation $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^\sigma . \mathbf{a}$, avec

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montre que $\mathbf{a}^3 = |\mathbf{a}| . \mathbf{1}$ n'est pas une conséquence de $\mathbf{a}^\sigma = \mathbf{a}$.

Montrons encore que

2. 2. 2. *Le groupe* $(\varphi)\mathrm{M}$ *est le groupe de tous les éléments non nuls k de* K *tels que* $k.k^{\sigma}.k^{\sigma^2}=1$, *et l'image d'un élément k de ce groupe par l'homomorphisme* $(\varphi)\mathrm{H}$ *est la classe mod.* $(\varphi)\Delta$ *de* k/k^{σ^2}.

En égalant les normes $\mathcal{N}(*)=*^{\sigma^2}.*^{\sigma}.*$ des deux membres de la relation (1.2.2), on voit que tout élément k de $(\varphi)\mathrm{M}$ vérifie la relation $k.k^{\sigma}.k^{\sigma^2}=1$. Réciproquement, soit $k\in K$ un élément non nul remplissant cette condition, et supposons qu'on ait

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k.k^{\sigma} \end{pmatrix}$$

de déterminant $|\mathbf{b}|=k/k^{\sigma^2}$, vérifie alors la relation (1. 2. 2).

§ 3. Principe de trialité (1).

3. 1. *Description géométrique.*

Soient K un corps commutatif, $P^{(0)}$ un espace projectif à 7 dimensions sur K, $x_{\alpha}^{(0)}$, $y_{\alpha}^{(0)}$ un système de coordonnées projectives dans $P^{(0)}$, et $Q^{(0)}$ l'hyperquadrique d'équation

$$\Sigma x_{\alpha}^{(0)}.y_{\alpha}^{(0)}=0$$

Les V_3 appartenant à $Q^{(0)}$ peuvent être réparties en deux familles, deux V_3 appartenant à la même famille si, et seulement si, leur intersection a une dimension (projective) impaire, c'est-à-dire, est une V_3, une droite, ou l'ensemble vide. Nous appellerons $V_3^{(1)}$ les V_3 appartenant à la même famille que la V_3 d'équations $x_{\alpha}^{(0)}=0$, et $V_3^{(2)}$ les autres.

La variété des $V_3^{(i)}$ $(i=1,2)$ de $Q^{(0)}$ est une hyperquadrique $Q^{(i)}$, projectivement isomorphe à $Q^{(0)}$. Une V_3 de $Q^{(1)}$ représente soit l'ensemble des $V_3^{(1)}$ de $Q^{(0)}$ contenant un point donné, soit l'ensemble des $V_3^{(2)}$ incidentes à une $V_3^{(2)}$ donnée ; suivant le cas, on dira qu'il s'agit d'une $V^{(0)}$ ou d'une $V_3^{(2)}$, et on définira de même les $V_3^{(0)}$ et les $V_3^{(1)}$ de $Q^{(2)}$. A l'ensemble des points d'une droite de $Q^{(0)}$ correspond l'ensemble des $V^{(0)}$ de $Q^{(i)}$ $(i=1,2)$ contenant une droite. On donnera le nom de *T-correspondance* à la correspondance

$$(3.\ 1.\ 1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{points de } Q^{(i)}\longleftrightarrow V_3^{(i)} \text{ de } Q^{([i+1])}\longleftrightarrow V_3^{(i)} \text{ de } Q^{([i-1])} \\ \text{droites de } Q^{(0)}\longleftrightarrow \text{droites de } Q^{(1)}\longleftrightarrow \text{droites de } Q^{(2)} \end{array}\right.$$

ainsi établie, qui respecte la relation d'incidence, et par rapport à laquelle les trois hyperquadriques $Q^{(i)}$ jouent des rôles symétriques.

Dans la suite, des éléments se correspondant dans (3. 1. 1) seront le plus souvent identifiés, ce qui donnera un sens à des expressions telles que : « l'incidence d'un point

(1) Cf. [5], [7].

de $Q^{(i)}$ et d'un point de $Q^{(j)}$ ». Il y a lieu de préciser, toutefois, pour éviter une ambiguïté, que si des symboles $p, q, \ldots$, représentant des points, droites ou V_3 de certaines des $Q^{(i)}$, interviennent dans des expressions telles que $p \cap q$, $p \in q$, etc., ils doivent alors être interprétés comme ensembles de points de $Q^{(0)}$; si, par exemple, p et q sont des points de $Q^{(1)}$, $p \cap q$ désigne l'intersection des $V_3{}^{(1)}$ de $Q^{(0)}$ qu'ils représentent, c'est-à-dire l'ensemble des points de $Q^{(0)}$ incidents simultanément à p et à q.

3. 2. *La forme trilinéaire fondamentale.*

Soit $P^{(i)}$ l'espace projectif à 7 dimensions contenant $Q^{(i)}$. Il existe une forme trilinéaire

$$T(p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}) \qquad (p^{(i)} \in P^{(i)})$$

jouissant de la propriété suivante : la forme linéaire obtenue à partir de T en fixant deux des points $p^{(i)}$ s'annule identiquement si, et seulement si, les deux points choisis appartiennent aux $Q^{(i)}$ correspondantes, et sont incidents entre eux. Cette propriété définit T (à un facteur près). Réciproquement, la donnée de T caractérise les hyperquadriques $Q^{(i)}$ et la T-correspondance (3. 1. 1).

Les systèmes de coordonnées $x^{(i)}, y^{(i)}_\alpha$ utilisés dans les $P^{(i)}$ seront toujours supposés tels que les $Q^{(i)}$ aient pour équations

$$\sum_\alpha x^{(i)}_\alpha . y^{(i)}_\alpha = 0$$

et que (¹)

$$\text{(3. 2. 1)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{T} = {} & |x_j{}^{(i)}| + |y_j{}^{(i)}| - x_3{}^{(0)} . x_3{}^{(1)} . x_3{}^{(2)} - y_3{}^{(0)} . y_3{}^{(1)} . y_3{}^{(2)} + \\ & \sum_i \sum_j (x_3{}^{(i)} . y_j{}^{([i+1])} . x_j{}^{([i+2])} + y_3{}^{(i)} . x_j{}^{([i+1])} . y_j{}^{([i+2])}) \end{aligned}$$

où $|x^{(i)}_j|$ $(|y^{(i)}_j|)$ représente le déterminant des $x^{(i)}_j$ (des $y^{(i)}_j$). Le système de coordonnées $x^{(0)}_\alpha$, $y^{(0)}_\alpha$ peut être choisi arbitrairement (à condition que $Q^{(0)}$ ait la bonne équation) et les deux autres sont alors parfaitement déterminés par la condition précédente.

On notera encore deux conséquences des conventions précédentes.

3. 2. 2. *Les points* $X^{(1)}_3$, $Y^{(1)}_3$, $X^{(2)}_3$ *et* $Y^{(2)}_3$ *correspondent respectivement aux* V_3 *de* $Q^{(0)}$ *d'équations* $x^{(0)}_\alpha = 0$, $y^{(0)}_\alpha = 0$, $y^{(0)}_i = x^{(0)}_3 = 0$ *et* $x^{(0)}_i = y^{(0)}_3 = 0$.

Traitons, à titre d'exemple, le cas du point $X_3{}^{(1)}$. En posant dans (3. 2. 1) $x_i{}^{(1)} = y_\alpha{}^{(1)} = 0$, il vient,

$$\mathrm{T} = x_3{}^{(1)} . (-x_3{}^{(0)} . x_3{}^{(2)} + \sum_i x_i{}^{(0)} . y_i{}^{(2)})$$

expression identiquement nulle en les $x_\alpha{}^{(2)}$, $y_\alpha{}^{(2)}$ si $x_\alpha{}^{(0)} = 0$.

(¹) Cf. [5], p. 51. Le passage des notations de E. Cartan aux nôtres peut être réalisé par les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll}
x^1 = x_0{}^{(0)} & \xi_{23} = x_0{}^{(1)} & \xi_1 = -y_0{}^{(2)} \\
x^2 = x_1{}^{(0)} & \xi_{31} = x_1{}^{(1)} & \xi_2 = -y_1{}^{(2)} \\
x^3 = x_2{}^{(0)} & \xi_{12} = x_2{}^{(1)} & \xi_3 = -y_2{}^{(2)} \\
x^4 = x_3{}^{(0)} & \xi_{14} = y_0{}^{(1)} & \xi_4 = x_3{}^{(2)} \\
x^{1'} = y_0{}^{(0)} & \xi_{24} = y_1{}^{(1)} & \xi_{234} = -x_0{}^{(2)} \\
x^{2'} = y_1{}^{(0)} & \xi_{34} = y_2{}^{(1)} & \xi_{314} = -x_1{}^{(2)} \\
x^{3'} = y_2{}^{(0)} & \xi_0 = -x_3{}^{(1)} & \xi_{124} = -x_2{}^{(2)} \\
x^{4'} = y_3{}^{(0)} & \xi_{1234} = y_3{}^{(1)} & \xi_{123} = -y_3{}^{(2)}
\end{array}$$

3. 2. 3. *Le point $p^{(0)}$ de coordonnées $x_i^{(0)}$, $x_3^{(0)}=y_\alpha^{(0)}=0$, et le point $p^{(1)}$ de coordonnées $x_i^{(1)}$, $x_3^{(1)}=y_\alpha^{(1)}=0$ sont incidents si, et seulement si, les $x_i^{(0)}$ et les $x_i^{(1)}$ sont proportionnels.*

En effet, $T(p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)})=|x_i^{(j)}|$ est identiquement nul en les $x_i^{(2)}$ si, et seulement si, la condition énoncée est remplie.

3. 3. *T-collinéations, trialités.*

On appellera *T-collinéation* ou *collinéation du triple* $(P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)})$, un ensemble $\varphi=(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ de trois collinéations des espaces $P^{(i)}$ sur ces mêmes espaces, pris éventuellement dans un ordre différent, appliquant les $Q^{(i)}$ sur les $Q^{(i)}$, et respectant l'incidence. On dira que φ *appartient à un automorphisme* σ de K (resp. est *linéaire*) s'il en est ainsi de chacune des $\varphi^{(i)}$, auquel cas φ transforme T en T^σ (resp. conserve T). Enfin, on réservera le nom de *T-projectivités* — ou simplement de *projectivités* — aux T-collinéations linéaires conservant chaque $P^{(i)}$, et celui de *trialités* aux T-collinéations cycliques de période 3, permutant circulairement $P^{(0)}$, $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$, dans l'ordre indiqué.

Toute collinéation $\varphi^{(i)}$ de $P^{(i)}$ sur $P^{(i')}$ $(i'=\text{ou}\neq i)$ appliquant $Q^{(i)}$ sur $Q^{(i')}$ s'étend en une T-collinéation bien déterminée. En effet, soit (i, j, k) une permutation de $(1, 2, 3)$, et disons que les $V_3^{(j)}$ et les $V_3^{(k)}$ de $Q^{(i)}$ sont appliquées par $\varphi^{(i)}$ respectivement sur les $V_3^{(j')}$ et les $V_3^{(k')}$ de $Q^{(i')}$. $\varphi^{(i)}$ induit une application de l'ensemble des $V_3^{(j)}$ de $Q^{(i)}$ sur l'ensemble des $V_3^{(j')}$ de $Q^{(i')}$, donc une application de $Q^{(j)}$ sur $Q^{(j')}$, qui transforme toute $V_3^{(i)}$ de $Q^{(j)}$ en une $V_3^{(i')}$ de $Q^{(j')}$ et qui s'étend par conséquent, d'après un théorème bien connu de W. L. Chow [**9**], en une collinéation (unique) $\varphi^{(j)} : P^{(j)}\to P^{(j')}$. De même, $\varphi^{(i)}$ induit une application de $Q^{(k)}$ sur $Q^{(k')}$ qui s'étend en une collinéation $\varphi^{(k)} : P^{(k)}\to P^{(k')}$. $\varphi=(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ est alors la T-collinéation en question.

Des systèmes de coordonnées $x_j^{(i)}$, $y_j^{(i)}$ étant choisis dans les $P^{(i)}$, soit φ une T-collinéation conservant les six points $X_3^{(i)}$, $Y_3^{(i)}$. Il résulte de la proposition 3. 2. 2 que φ opère séparément sur les quatre groupes de variables $x_i^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, $y_i^{(0)}$, $y_3^{(0)}$. La même conclusion est évidemment valable lorsqu'on remplace l'indice supérieur (0) par un autre. En exprimant alors que φ transforme T en T^σ, on voit que ces équations doivent avoir la forme

$$(3.\ 3.\ 1)\qquad \begin{cases} \mathbf{x}'^{(0)}=\mathbf{x}^{(0)\sigma}.\mathbf{a} & \mathbf{x}'^{(1)}=\mathbf{x}^{(1)\sigma}.\dfrac{\mathbf{a}}{k} & \mathbf{x}'^{(2)}=\mathbf{x}^{(2)\alpha}.\dfrac{k.\mathbf{a}}{a} \\ x'^{(0)}_3=x_3^{(0)\sigma} & x'^{(1)}_3=x_3^{(1)\sigma} & x'^{(2)}_3=x_3^{(2)\sigma} \\ \mathbf{y}'^{(0)}=\mathbf{y}^{(0)\sigma}.k.\mathbf{a}^* & \mathbf{y}'^{(1)}=\mathbf{y}^{(1)\sigma}.\dfrac{a.\mathbf{a}^*}{k} & \mathbf{y}'^{(2)}=\mathbf{y}^{(2)\sigma}.\mathbf{a}^* \\ y'^{(0)}_3=y_3^{(0)\sigma}.k & y'^{(1)}_3=y_3^{(1)\sigma}.\dfrac{a}{k^2} & v'^{(2)}_3=y_3^{(2)\sigma}.\dfrac{k}{a} \end{cases}$$

où $\mathbf{x}^{(i)}=(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $\mathbf{y}^{(i)}=(y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$, $\mathbf{a}=(a_{ij})$ est une matrice inversible à 9 éléments, $a=|\mathbf{a}|$ est son déterminant, $\mathbf{a}^*=(\mathbf{a}^{-1})^t$, $k\ (\neq 0)\in K$, et σ est un automorphisme de K. On représentera par $\varphi_{\mathbf{a},k,\sigma}$ la T-collinéation d'équations (3. 3. 1). Lorsque σ est l'identité, on écrira encore $\varphi_{\mathbf{a},k,\sigma}=\varphi_{\mathbf{a},k}$.

La trialité τ_0 d'équations

$$(3.3.2)\qquad \begin{cases} \mathbf{x}'^{(i)} = \mathbf{x}^{([i-1])} \\ \mathbf{y}'^{(i)} = \mathbf{y}^{([i-1])} \end{cases}$$

permute cycliquement les points $X_3^{(i)}$ et les points $Y_3^{(i)}$. Il en résulte que toute T-collinéation jouissant de cette dernière propriété est de la forme $\varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \tau_0$.

Les identités suivantes seront utiles :

$$(3.3.3)\qquad \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \varphi_{\mathbf{b},l,\rho} = \varphi_{\mathbf{a}^\rho.\mathbf{b},k^\rho.l,\sigma.\rho}$$

$$(3.3.4)\qquad \tau_0 \cdot \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \tau_0^{-1} = \varphi_{\frac{\mathbf{a}.k}{|\mathbf{a}|},\frac{k}{|\mathbf{a}|},\sigma}$$

$$(3.3.5)\qquad \begin{cases} \varphi^{-1}{}_{\mathbf{b},l} \cdot (\varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \tau_0) \cdot \varphi_{\mathbf{b},l} = \varphi_{\mathbf{a}',k',\sigma} \cdot \tau_0, \text{ avec} \\ \mathbf{a}' = (\mathbf{b}^\sigma)^{-1}.\mathbf{a}.\mathbf{b}.\dfrac{l}{|\mathbf{b}|} \quad \text{et} \quad k' = k.\dfrac{(l^\sigma)^{-1}.l}{|\mathbf{b}|} \end{cases}$$

Chapitre II

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET CLASSIFICATION DES TRIALITÉS

§ 4. Points, droites et plans remarquables.

4. 1. *Points autoconjugués, droites fixes, points et plans spéciaux.*

Soient $Q^{(i)}$ les hyperquadriques du § 3, et τ une trialité donnée.

p et q étant deux points quelconques de $Q^{(0)}$, les relations $p \in q\tau$ et $q \in p\tau^2$ sont équivalentes, la seconde étant transformée de la première par τ^2 (qui respecte l'incidence). On dira qu'un point $p \in Q^{(0)}$ est *autoconjugué (ac.) par rapport à* τ si $p \in p\tau$, ou, ce qui revient au même, si $p \in p\tau^2$.

Puisque τ respecte l'incidence, la transformée $d\tau$ d'une droite d est contenue dans toutes les V_3 $p\tau$ correspondant aux points $p \in d$; deux quelconques de ces V_3 ont d'ailleurs $d\tau$ pour intersection. En particulier, *si d est une droite fixe de τ, c'est-à-dire si $d = d\tau$, tout point de d est ac.*

4. 1. 1. *Soient p et p' deux points ac. distincts. Si p' est contenu dans $p\tau$ ou dans $p\tau^2$, il est contenu dans $p\tau \cap p\tau^2$, et la droite $d = pp'$ est fixe, c'est-à-dire que $d = p\tau \cap p'\tau = p\tau^2 \cap p'\tau^2$.*

En effet, soit par exemple $p' \in p\tau$. Alors, $p \in p'\tau^2$. D'autre part, $d = pp' \subset p\tau$, donc $d\tau \subset p\tau^2$. Mais $d \subset p'\tau^2$, donc $p' \in d\tau \subset p\tau^2$ et $p' \in p\tau \cap p\tau^2$. De plus, $d = pp' \subset p\tau^2$, donc $p \in d\tau$ et $d\tau = pp' = d$, c.q.f.d.

Quel que soit $p \in Q^{(0)}$, on désignera par $p_\tau\omega$, ou simplement par $p\omega$, l'intersection $p\tau \cap p\tau^2$. Lorsque p est ac., p et $p\tau$ sont incidents ; il en est donc de même de $p\tau$ et $p\tau^2$, puisque τ préserve l'incidence, et $p\omega = p\tau \cap p\tau^2$ est un plan. Dans le cas contraire, $p\omega$ est un point.

On appellera *plans spéciaux* les plans $p\omega$ correspondant aux points p ac., et *point spécial* tout point appartenant à un plan spécial.

4. 1. 2. *Pour un point p non ac., les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *p est spécial ;*

(ii) *$p\omega$ est ac. ;*

(iii) *p et $p\omega$ sont alignés.*

4. 1. 3. *Un point spécial non ac., p, est contenu dans un seul plan spécial, à savoir $(p\omega)\,\omega$.*

4. 1. 4. *Si p n'est pas spécial, $(p\omega)\,\omega = p$. En d'autres termes, ω définit une involution sur l'ensemble des points non spéciaux.*

Soit p un point spécial non ac., contenu dans le plan spécial $q\omega$. On a $p \in q\tau$ et $p \in q\tau^2$, donc $q \in p\tau^2$ et $q \in p\tau$, par conséquent $q = p\omega$, ce qui démontre 1. 3. 4. et l'implication (i) $\rightarrow$ (ii).

Soit maintenant p quelconque, non ac. On a $p\omega \in p\tau$ et $p\omega \in p\tau^2$, donc $p \in (p\omega)\tau^2$ et $p \in (p\omega)\tau$, par conséquent $p \in (p\omega)\omega$, ce qui démontre 4. 1. 4 et les implications (ii) $\rightarrow$ (i) et (ii) $\rightarrow$ (iii).

Supposons enfin que p soit un point non ac. aligné avec $p\omega$. $p\tau^2$ ne contient pas p (puisque celui-ci n'est pas ac.) ; par conséquent, $(p\omega)\tau$, qui est incidente à p et à $p\tau^2$, contient tous les points de $p\tau^2$ alignés avec p, et en particulier $p\omega$, lequel est donc ac., ce qui démontre l'implication (iii) $\rightarrow$ (ii), la seule qui restait à établir.

4. 1. 5. *Si p est ac., les seuls points spéciaux contenus dans $p\tau$ (ou dans $p\tau^2$) sont ceux de $p\omega$.*

Soit $q \in p\tau$ un point spécial. Si q est ac., il appartient à $p\omega$ en vertu de 4. 1. 1. Supposons donc que q ne soit pas ac. q et $p\tau$ étant incidents, il en est de même de $q\tau$ et $p\tau^2$. Dans la V_3 $p\tau^2$, le plan $q\tau \cap p\tau^2$ et la droite $(pq)\tau^2 = p\tau^2 \cap q\tau^2$ se coupent en un point qui ne peut être que $q\omega$. Il faut montrer que $q\omega = p$. Supposons qu'il en soit autrement. Puisque $q\omega$ est un point ac. (d'après 4. 1. 2), ce point appartient à $p\omega$ et la droite joignant p à $q\omega$ est fixe (cf. 4. 1. 1). Cette droite ne passe donc pas par q. Mais alors, les $V_3^{(1)}$ $p\tau$ et $(q\omega)\tau$ ont en commun les trois points non alignés p, q, $q\omega$ et elles doivent être confondues, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $p \neq q\omega$.

4. 1. 6. *Il existe des points non spéciaux et ils ne sont pas tous contenus dans un hyperplan de $P^{(0)}$.*

Supposons que tous les points non spéciaux soient contenus dans un hyperplan η de $P^{(0)}$. Soit $p \in Q^{(0)}$ un point extérieur à η. p est spécial, donc soit p soit $p\omega$ est un point ac. ; posons $q = p$ ou $p\omega$ suivant le cas. D'après 4. 1. 5, tous les points de la V_3 $q\tau$, à l'exception de ceux appartenant à $q\omega$, sont non spéciaux, donc contenus dans η. Par conséquent, $q\tau \subset \eta$, ce qui est absurde puisque $p \in q\tau$.

Remarque. — On démontre de la même façon que si le corps K est infini, l'ensemble des points non spéciaux est partout dense dans $Q^{(0)}$ (pour la topologie de Zariski), c'est-à-dire n'est contenu dans aucune sous-variété propre de $Q^{(0)}$.

4. 1. 7. *Les plans $\pi \subset Q^{(0)}$ contenant une droite fixe donnée d sont mis en correspondance biunivoque avec les couples ordonnés (q, q') de points de d, par la relation $\pi = q\tau \cap q'\tau^2$. Lorsque $q \neq q'$, tous les points de π, à l'exception de ceux qui appartiennent à d, sont non spéciaux.*

Tout plan $\pi \subset Q^{(0)}$ est l'intersection d'une $V_3^{(1)}$, soit $q\tau$, et d'une $V_3^{(2)}$, soit $q'\tau^2$. Puisque d est une droite fixe, si $\pi \supset d$, q et q' appartiennent à d, et réciproquement. La seconde partie de la proposition est une conséquence immédiate de 4. 1. 5.

4. 2. *Les plans $p\pi_1$ et $p\pi_2$; la collinéation ${}_p\tau$.*

Soit $p \in Q^{(0)}$ un point non ac. $p\tau$ et $p\omega$ étant incidents, il en est de même de $p\tau^2$ et $(p\omega)\tau$; nous désignerons par $p_\tau\pi_1$ — ou simplement par $p\pi_1$ — le plan $p\tau^2 \cap (p\omega)\tau$. De façon analogue, nous poserons $p\tau \cap (p\omega)\tau^2 = p_\tau\pi_2\ (= p\pi_2)$.

4. 2. 1. *$p\pi_1$ (resp. $p\pi_2$) est aussi l'ensemble des points de $p\tau^2$ (resp. $p\tau$) alignés avec p.*

En effet, puisque $p\omega = p\tau \cap p\tau^2$ est incident simultanément à $p\tau$ et à $p\tau^2$, la V_3 $(p\omega)\tau$ (resp. $(p\omega)\tau^2$) contient p et est incidente à $p\tau^2$ (resp. $p\tau$).

4. 2. 2. *Tout point ac. contenu dans $p\tau$ (resp. dans $p\tau^2$) est contenu dans $p\pi_2$ (resp. dans $p\pi_1$).*

En effet, tout point ac. q contenu dans $p\tau$ (dans $p\tau^2$) est aligné avec p puisque p et q sont tous deux contenus dans $q\tau^2$ (dans $q\tau$).

4. 2. 3. *Toute droite fixe coplanaire avec p rencontre $p\pi_1$ et $p\pi_2$.*

Soient d la droite en question et $q\tau \cap q'\tau^2$ $(q, q' \in d)$ le plan qu'elle détermine avec p (cf. 4. 1. 7). Puisque $p \in q\tau$, $q \in p\tau^2$, or p et q sont alignés, donc $q \in p\pi_1$ (d'après 4. 2. 1). De même, $q' \in p\pi_2$.

Dans la suite de ce numéro, nous supposerons que p n'est pas spécial ; il est clair qu'on a alors

$$(p\omega)\pi_1 = p\pi_2 \qquad \text{et} \qquad (p\omega)\pi_2 = p\pi_1$$

4. 2. 4. *La plus petite variété linéaire contenant les points p et $p\omega$ et les plans $p\pi_1$ et $p\pi_2$, est l'espace $P^{(0)}$ lui-même.*

En effet, soit η la V_4 déterminée par p, $p\omega$ et $p\pi_1$, c'est-à-dire par $p\tau^2$ et $(p\omega)\tau$. On a $\eta \cap Q^{(0)} = p\tau^2 \cup (p\omega)\tau$. La variété $\eta \cap p\tau$ est contenue dans $\eta \cap Q^{(0)}$; or, $p\tau^2 \cap p\tau = p\omega$ et $(p\omega)\tau \cap p\tau$ est vide, car si cette dernière intersection était une droite, p et $p\omega$ seraient alignés et p serait spécial (cf. 4. 1. 2). Par conséquent, $\eta \cap p\tau$ se réduit au point $p\omega$ et un simple calcul de dimension montre alors que $P^{(0)}$ est la plus petite variété linéaire contenant η et $p\tau$.

τ induit une collinéation de la gerbe des droites passant par $p\omega$ et contenues dans $p\tau^2$ sur la gerbe des droites contenues dans $(p\omega)\tau$ et passant par p. En faisant la section de ces gerbes par le plan $p\pi_1$, on obtient dans celui-ci une collinéation qui sera désignée par ${}_p\tau$. En d'autres termes, on posera pour tout $q \in p\pi_1$

$$q_p\tau = p\pi_1 \cap (q.p\omega)\tau$$

où $(q.p\omega)$ désigne la droite joignant q et $p\omega$. En intervertissant p et $p\omega$, on définit de même la collinéation ${}_{p\omega}\tau$ de $p\pi_2$.

q étant un point de $p\pi_1$, l'ensemble des points de $p\pi_2$ alignés avec q est une droite qu'on notera $q_p\delta$. Ainsi, ${}_p\delta$ est une collinéation de $p\pi_1$ sur le dual de $p\pi_2$. On représentera encore par le même symbole ${}_p\delta$ la collinéation qui lui correspond, du dual de $p\pi_1$ sur $p\pi_2$; celle-ci a pour inverse la collinéation ${}_{p\omega}\delta$.

4. 2. 5. *La transformée par τ d'une droite rencontrant $p\pi_1$ et $p\pi_2$ respectivement en des points q et r, est la droite joignant les points $q_p\tau$ et $r_{p\omega}\tau$.*

Soient d la droite en question et v la $V_3^{(2)}$ contenant le plan déterminé par d et $p\omega$. v est incidente à $p\tau$ (puisque v et $p\tau$ contiennent toutes deux les points r et $p\omega$), et contient la droite $p\omega.q$ (droite joignant les points $p\omega$ et q). Donc le point $v\tau$ appartient à $p\tau^2$ et à la droite $(p\omega.q)\tau$, c'est-à-dire que $v\tau = q_p\tau$. Puisque v contient d, $d\tau$ contient $v\tau = q_p\tau$, et aussi, par raison de symétrie, $r_{p\omega}\tau$, ce qui démontre notre proposition.

La proposition précédente a pour conséquences immédiates les trois suivantes.

4. 2. 6. *${}_p\tau$ est cyclique de période* 3.

4. 2. 7. Si on convient de représenter par ${}_p\tau$, non seulement la collinéation de $p\pi_1$ définie plus haut, mais aussi la collinéation du dual de $p\pi_1$ induite par celle-là, alors ${}_{p\omega}\tau$ *est la transformée de ${}_p\tau$ par ${}_p\delta$, c'est-à-dire qu'on a :*

$${}_{p\omega}\tau = {}_{p\omega}\delta \cdot {}_p\tau \cdot {}_p\delta$$

4. 2. 8. *La transformée par τ d'un point $q \in p\pi_1$ est la V_3 déterminée par les points p et $q_p\tau$, et par la droite $(q_p\tau)_p\delta$.*

De cette dernière proposition et de 4. 2. 2, il résulte que

4. 2. 9. *Les points ac. contenus dans $p\tau^2$ (resp. dans $p\tau$) sont les points fixes de la collinéation ${}_p\tau$ (resp. ${}_{p\omega}\tau$). Si q désigne un tel point, $q\omega$ est le plan déterminé par q et par la droite $q_p\delta$ (resp. $q_{p\omega}\delta$).*

Si la collinéation ${}_p\tau$ a un point fixe, elle laisse aussi une droite invariante, donc ${}_{p\omega}\tau$ a un point fixe, en vertu de 4. 2. 7. Il en résulte que, pour un point non spécial p, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$p\tau$ renferme (au moins) un point ac. ;
$p\tau^2$ renferme (au moins) un point ac. ;
${}_p\tau$ possède (au moins) un point fixe.

Un point non spécial p qui jouit de ces propriétés sera dit *extérieur à τ* (ou *point extérieur de τ*), par analogie avec la définition des points extérieurs à une conique, points dont la polaire rencontre la conique. La proposition 4. 1. 5. peut alors être précisée comme suit :

4. 2. 10. *Si q est un point ac., tous les points de $q\tau$ (ou de $q\tau^2$), à l'exception de ceux contenus dans $q\omega$, sont des points extérieurs.*

Enfin,

4. 2. 11. *Si q désigne un point fixe de ${}_p\tau$ (et donc un point ac. de τ), on peut établir une correspondance biunivoque entre l'ensemble des droites passant par q et contenues dans le plan $q\omega$, et l'ensemble des droites passant par q et contenues dans le plan $p\pi_1$, telle que l'action de τ sur le premier ensemble corresponde à l'action de ${}_p\tau$ sur le second. En particulier, les droites fixes de τ qui passent par q sont ainsi mises en correspondance avec les droites fixes de ${}_p\tau$ qui passent par q.*

C'est une conséquence immédiate des propositions 4. 2. 7. et 4. 2. 9. Si $d \subset q\omega$ est une droite passant par q, la droite correspondante dans $p\pi_1$ est $(d \cap p\pi_2)_{p\omega}\delta$.

4. 3. *Paires de points ac. Points ac. et droites fixes.*

Soient q et q' deux points ac. distincts donnés. L'énoncé qui suit concerne deux espèces de points :

(i) Les points p non ac. tels que $q \in p\pi_1$ et $q' \in p\pi_2$;
(ii) Les points p ac. tels que pq et pq' soient des droites fixes.

Remarquons d'emblée que les points de l'une et l'autre espèce appartiennent à l'intersection $q\tau \cap q'\tau^2$.

4. 3. 1. *Si q et q' ne sont pas alignés, il existe un et un seul point d'espèce (i) et il n'existe aucun point d'espèce (ii).*

Si q et q' sont alignés, qq' n'étant pas une droite fixe, il existe un et un seul point d'espèce (ii) et il n'en existe pas d'espèce (i).

Si $d = qq'$ est une droite fixe, les seuls points d'espèce (ii) sont les points de d, ce qui signifie que trois droites fixes ne peuvent jamais former triangle. Tous les points d'un certain plan (le plan $q\tau \cap q'\tau^2$) contenant d, à l'exception des points de d eux-mêmes, sont d'espèce (i). Un quelconque de ces points, soit p, peut être caractérisé par la donnée des droites $e = p\pi_1 \cap q'\omega$ et $e' = p\pi_2 \cap q\omega$, droites soumises aux seules conditions d'être distinctes de d, d'être contenues respectivement dans $q'\omega$ et $q\omega$, et de passer respectivement par q et q'.

Les points d'espèce (i) ne sont jamais spéciaux.

Démonstration. — Supposons tout d'abord que l'intersection $q\tau \cap q'\tau^2$ soit réduite à un point, soit p. Puisque $p \in q\tau$ et $p \in q'\tau^2$, on a aussi $q \in p\tau^2$ et $q' \in p\tau$. Si p est ac., pq et pq' sont des droites fixes (cf. 4. 1.1), donc p est d'espèce (ii), q et q' sont alignés, puisque tous deux contenus dans $p\omega$ *(loc. cit.)*, et qq' n'est pas une droite fixe puisque $q\tau \cap q'\tau^2$ est réduite à un point. Si p n'est pas ac., $q \in p\pi_1$ et $q' \in p\pi_2$ (cf. 4. 2. 2) donc p est d'espèce (i) ; p n'est pas spécial, sinon il serait contenu simultanément dans $q\omega$ et $q'\omega$ (cf. 4. 1. 5) ce qui est absurde (cf. 4. 1. 3) ; enfin, q et q', qui sont respectivement points fixes de ${}_p\tau$ et ${}_{p\omega}\tau$, ne peuvent être alignés, sinon qq' serait une droite fixe (cf. 4. 2. 5) et $q\tau \cap q'\tau^2$ serait un plan.

Supposons à présent que $q\tau \cap q'\tau^2$ soit un plan π, c'est-à-dire que $q\tau$ et $q'\tau^2$ soient incidentes. Alors, q et $q'\tau$ sont incidents et $d = qq'$ est une droite fixe (cf. 4. 1. 1). Tout point de d est d'espèce (ii). Soit $p \in \pi$ un point n'appartenant pas à d. p n'est pas spécial (cf. 4. 1. 7). Puisque $p \in q\tau$ et $p \in q'\tau^2$, $q \in p\tau^2$ et $q' \in p\tau$, donc (d'après 4. 2. 2), $q \in p\pi_1$ et $q' \in p\pi_2$, et p est d'espèce (i). La droite pq' est incidente à p, à q' et à $q'\tau^2$, donc la droite $e = (pq')\tau^2$ est incidente à $p\tau^2$, $q'\tau^2$ et $q'\tau$; en particulier, elle est contenue dans $q'\omega$. De plus, puisque p et e sont tous deux contenus dans $q'\tau^2$, tous les points de e sont alignés avec p, et e est contenu dans $p\pi_1$ (cf. 4. 2. 1). Il en résulte que $e = q'\omega \cap p\pi_1$. On montre de même que $e' = (pq)\tau = q\omega \cap p\pi_2$. Le point p, intersection de pq et pq', est évidemment caractérisé par la donnée des droites e et e'. Réciproquement, si e et e' désignent deux droites distinctes de d, contenues respectivement dans $q'\omega$ et $q\omega$ et passant respectivement par q et q', les droites $e\tau$ et $e'\tau^2$ sont contenues dans π et passent respectivement par q' et q ; elles se coupent donc en un point p de π, et on a $e = q'\omega \cap p\pi_1$ et $e' = q\omega \cap p\pi_2$. La proposition est ainsi démontrée.

4. 3. 2. *Soient q un point ac. et d une droite fixe ne passant pas par q. Si q et d sont coplanaires (sur $Q^{(0)}$; cf. n° 1. 3), il existe un et un seul point $q' \in d$ tel que la droite qq' soit fixe. Sinon,*

il existe un point $q'' \in d$ *et un point* q', *bien déterminés eux aussi, tels que les deux droites* qq' *et* $q'q''$ *soient fixes.*

Supposons d'abord que d et q soient coplanaires, et soit v la $V_3^{(1)}$ contenant le plan qu'ils déterminent. Le point $q' = v\tau^2$ appartient à d (puisque d est fixe), et qq' est fixe puisque $v = q'\tau$ contient q (cf. 4. 1. 1). L'unicité résulte de la proposition 4. 3. 1.

Si d et q ne sont pas coplanaires, l'hyperplan tangent à $Q^{(0)}$ en q coupe d en un point q'', seul point de d aligné avec q. qq'' ne peut être une droite fixe, sinon d et q, appartenant au plan $q''\omega$, seraient coplanaires. D'après 4. 3. 1, il existe donc un point ac. q', et un seul, tel que qq' et $q'q''$ soient des droites fixes. Réciproquement, si les droites qq' et $q'q''$ sont fixes, q et q'' appartiennent à $q'\omega$, et sont donc alignés, ce qui démontre l'unicité de q' et q''.

4. 3. 3. *Si une trialité possède une droite fixe, il passe au moins une telle droite par tout point ac.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

§ 5. Équations. Classifications.

5. 1. *Systèmes de coordonnées associés à une paire (trialité* τ, *point non spécial* p*). Classification des paires* (τ, p).

Soient τ une trialité donnée et $p \in Q^{(0)}$ un point non spécial (par rapport à τ). On appellera *système de coordonnées associé à la paire* (τ, p), tout système de coordonnées $x_\alpha^{(i)}$, $y_\alpha^{(i)}$ (cf. le nº 3. 2) tel que $X_3^{(0)} = p$, $Y_3^{(0)} = p\omega$, $X_i^{(0)} \in p\pi_1$ et $Y_i^{(0)} \in p\pi_2$; l'existence de tels systèmes est assurée par la proposition 4. 2. 4. Il résulte des conditions imposées aux points fondamentaux $X_\alpha^{(0)}$ et $Y_\alpha^{(0)}$, que les points $X_3^{(1)}$, $Y_3^{(1)}$, $X_3^{(2)}$, $Y_3^{(2)}$ représentent respectivement les V_3 $p\tau$, $(p\omega)\tau$, $p\tau^2$, $(p\omega)\tau^2$, c'est-à-dire que τ permute cycliquement les $X_3^{(i)}$ et les $Y_3^{(i)}$; on a donc (cf. le nº 3. 3),

$$\tau = \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \tau_0$$

où τ_0 est la trialité d'équations (3. 3. 2). En outre, il résulte des propositions 4. 2. 8 et 3. 2. 3 que la collinéation ${}_p\tau$ a pour équations

$$\mathbf{x}'^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)\sigma} . \mathbf{a}$$

Réciproquement, cherchons à quelles conditions doivent satisfaire $\mathbf{a}$, k et σ pour que la T-collinéation $\tau = \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \tau_0$ soit une trialité. Des identités (3. 3. 3) et (3. 3. 4), on tire :

$$(\varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \tau_0)^3 = \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma} \cdot \varphi_{\frac{\mathbf{a}.k}{|\mathbf{a}|}, \frac{k}{|\mathbf{a}|}, \sigma} \cdot \varphi_{\frac{\mathbf{a}}{k}, \frac{|\mathbf{a}|}{k^2}, \sigma} \cdot \tau_0{}^3 = \varphi_{\mathbf{a}',k',\sigma'}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{a}' = \mathbf{a}^{\sigma^2} . \mathbf{a}^{\sigma} . \mathbf{a} . \dfrac{k^\sigma}{|\mathbf{a}|^\sigma . k} \\ k' = \dfrac{k^{\sigma^2} . k^\sigma}{k^2} \cdot \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|^\sigma} \\ \sigma' = \sigma^3 \end{cases}$$

τ est une trialité si, et seulement si, $\mathbf{a}' = \mathbf{1} =$ matrice unité, $k' = 1$, et $\sigma' =$ l'identité, c'est-à-dire, si

$$(5.1.1)\qquad \begin{cases} \mathbf{a}^{\sigma^2}.\mathbf{a}^{\sigma}.\mathbf{a} = \mathbf{1}.|\mathbf{a}|^{\sigma}.\dfrac{k}{k^{\sigma}} \\ \dfrac{k^2}{k^{\sigma^2}.k^{\sigma}} = \dfrac{|\mathbf{a}|^{\sigma}}{|\mathbf{a}|} \\ \sigma^3 = \text{l'identité.} \end{cases}$$

Lorsque σ est l'identité, la première de ces relations s'écrit

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{1}.|\mathbf{a}|$$

d'où il résulte (cf. 2.2.1) que ${}_p\tau$ ne peut être une homologie non spéciale (c'est-à-dire, ne peut être une homologie si K n'est pas un corps de caractéristique 3). Réciproquement, nous avons vu (cf. 2.2.1) que toute collinéation de période 3 dans le plan est projectivement équivalente à une collinéation de la forme $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{\sigma}.\mathbf{a}$, avec $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\sigma}$ et $\mathbf{a}^3 = \mathbf{1}.|\mathbf{a}|$; mais lorsque $\mathbf{a}$ satisfait à ces conditions, les deux premières relations (5.1.1) se réduisent à $k = k^{\sigma}$, c'est-à-dire que $\tau = \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma}.\tau_0$ est une trialité dès que k est un élément fixe de σ. En particulier, on voit que

5.1.2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une trialité τ et un point p non spécial (par rapport à τ) tels que la collinéation ${}_p\tau$ soit projectivement équivalente à une collinéation de période 3 donnée, est que cette dernière ne soit pas une homologie non spéciale.*

Considérons à présent deux paires (τ, p) et (τ', p') formées chacune d'une trialité et d'un point non spécial par rapport à celle-ci, supposons que les collinéations ${}_p\tau$ et ${}_{p'}\tau'$ soient projectivement équivalentes, et cherchons à quelles conditions il en est de même de (τ, p) et (τ', p'). En transformant (τ', p') par une projectivité convenable, on peut s'arranger pour que $p', p'_{\tau'}\omega, p'_{\tau'}\pi_1, p'_{\tau'}\pi_2$ et ${}_{p'}\tau'$ coïncident respectivement avec p, $p_{\tau}\omega, p_{\tau}\pi_1, p_{\tau}\pi_2$ et ${}_p\tau$. Tout système de coordonnées associé à (τ, p) est alors associé aussi à (τ', p'), et on a, dans un tel système,

$$\tau = \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma}.\tau_0$$
$$\tau' = \varphi_{\mathbf{a}',k',\sigma}.\tau_0$$

avec $\mathbf{a}'$ proportionnel à $\mathbf{a}$. De l'identité (3.3.5), il résulte qu'en transformant encore τ' par une projectivité convenablement choisie de la forme $\varphi_{\mathbf{1},l}$, on peut faire en sorte que $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, c'est-à-dire que

$$\tau' = \varphi_m.\tau$$

où on a posé

$$\varphi_m = \varphi_{\mathbf{1},m}$$
$$m = (k'.k^{-1})^{\sigma^2}.$$

φ_m est la projectivité biaxiale d'axes $p\tau$ et $(p\omega)\tau$, et d'invariant m. Ce dernier n'est pas quelconque ; en effet, il résulte des relations (5.1.1) que le produit $\varphi_m.\tau$ de la projectivité φ_m par une trialité τ est lui-même une trialité si, et seulement si, $m^{\sigma} = m$. En conclusion :

5.1.3. *Soient τ, τ' deux trialités, et p, $p' \in Q^{(0)}$ deux points, non spéciaux respectivement par rapport à τ et τ'. Si les collinéations ${}_p\tau$ et ${}_{p'}\tau'$ sont projectivement équivalentes, il existe un élément* *non nul* $m \in K$, *invariant pour l'automorphisme* σ *de* K *auquel appartient* τ, *tel que les paires* (τ', p') *et* $(\varphi_m . \tau, p)$ *soient projectivement équivalentes,* φ_m *désignant la projectivité biaxiale d'axes* $p\tau$ *et* $(p_\tau \omega)\tau$, *et d'invariant* m.

Nous compléterons cette proposition en montrant que

5. 1. 4. *Les notations étant celles de l'énoncé précédent, les paires* (τ, p) *et* $(\varphi_m . \tau, p)$ *sont projectivement équivalentes si, et seulement si,* m *appartient au groupe* $({}_p\tau)\Delta$ (*cf. le n*° 1. 2).

La condition est suffisante car si $\mathbf{b}$ est une matrice de déterminant $|\mathbf{b}| = m$ telle que $(\mathbf{b}^\sigma)^{-1} . \mathbf{a} . \mathbf{b} = \mathbf{a}$, la transformée de $\varphi_m . \tau = \varphi_{\mathbf{a}, k.m, \sigma} . \tau_0$ par $\varphi_{\mathbf{b}, m}$ est, en vertu de l'identité (3. 3. 5), $\varphi_{\mathbf{a}, k, \sigma} . \tau_0 = \tau$.

Réciproquement, supposons que (τ, p) et $(\varphi_m . \tau, p)$ soient projectivement équivalentes. Toute projectivité transformant l'une de ces paires en l'autre conserve les points $X_3^{(i)}$ et $Y_3^{(i)}$ (car $X_3^{(0)} = p$, $X_3^{(1)} = p\tau^2 = p(\varphi_m . \tau)^2$, etc.), et doit donc être de la forme $\varphi_{\mathbf{b}, l}$ (cf. le n° 3. 3). Soit

$$\varphi_{\mathbf{b}, l}^{-1} . \varphi_m . \tau . \varphi_{\mathbf{b}, l} = \tau$$

ce qui peut encore s'écrire, en vertu de l'identité (3. 3. 5),

$$\begin{cases} (\mathbf{b}^\sigma)^{-1} . \mathbf{a} . \mathbf{b} . \dfrac{l}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{a} \\ m . \dfrac{(l^\sigma)^{-1} . l}{|\mathbf{b}|} = 1. \end{cases}$$

La première de ces relations exprime que l'image de $\dfrac{|\mathbf{b}|}{l}$ dans l'homomorphisme $({}_p\tau)H$ est la classe mod. $({}_p\tau)\Delta$ de $|\mathbf{b}|$. Mais on sait (cf. 2. 2. 2) que cette image est aussi la classe mod. $({}_p\tau)\Delta$ de $\dfrac{|\mathbf{b}| . l^{\sigma^2}}{|\mathbf{b}|^{\sigma^2} . l}$. Il en résulte que

$$m = m^{\sigma^2} = \frac{|\mathbf{b}|^{\sigma^2}}{l^{-1} . l^{\sigma^2}} = |\mathbf{b}| . \left(\frac{|\mathbf{b}| . l^{\sigma^2}}{|\mathbf{b}|^{\sigma^2} . l} \right)^{-1} \in ({}_p\tau)\Delta,$$

ce qui démontre notre proposition.

Des propositions 5. 1. 3 et 5. 1. 4, il suit que

5. 1. 5. *Un système complet d'invariants projectifs de la paire* (τ, p) *est constitué par un système complet d'invariants projectifs de la collinéation* ${}_p\tau$, *et par un élément du groupe* $({}_p\tau)\Gamma = \mathrm{K}_\sigma^* / ({}_p\tau)\Delta$, *quotient du groupe multiplicatif des éléments fixes de* σ *par le groupe* $({}_p\tau)\Delta$.

5. 2. *Classification des polarités à points autoconjugués, et des points extérieurs.*

Lorsque τ est une trialité à points ac. et p un point extérieur, ${}_p\tau$ a des points fixes et le groupe $({}_p\tau)\Gamma$ défini dans l'énoncé précédent est réduit à l'élément neutre (cf. 2. 1. 4). Par conséquent, la classification projective des paires (τ, p) du type envisagé se ramène à la classification projective des collinéations planes cycliques de période 3 à points fixes, qui ne sont pas des homologies spéciales. En se référant à la proposition 2. 1. 2, on pourra parler de paires (τ, p) de type I_σ, II, ou III, selon le type de ${}_p\tau$, les paires de type III n'existant que quand K est un corps de caractéristique 3. On dira qu'un point p, extérieur à une trialité τ, est de type I_σ (II, III) (par rapport à τ) si la paire (τ, p) est de type I_σ (II, III), et qu'une trialité est de type I_σ (II, III) si elle possède des points extérieurs de type I_σ (II, III).

Toute trialité à points ac. possédant des points extérieurs (cf. 4. 2. 10), la classification projective de ces trialités se ramène à la détermination des équivalences projectives entre les types de trialités I_σ, II et III. Deux trialités appartenant à des automorphismes σ distincts étant évidemment projectivement distinctes, les seuls types à comparer sont $\mathrm{I}_{\mathrm{id.}}$ (id. = identité), II et III.

Dans ce but, commençons par rechercher quel est l'ensemble des points ac. de la trialité τ_0, d'équations (3. 3. 2), qui est de type $\mathrm{I}_{\mathrm{id.}}$. La condition pour qu'un point $q \in Q^{(0)}$ de coordonnées $x_\alpha^{(0)}$, $y_\alpha^{(0)}$ soit ac. s'obtient, à l'aide de la forme trilinéaire T (cf. le n° 3. 2), en exprimant que

$$T(q, q\tau_0, r) = 0 \tag{5. 2. 1}$$

est une identité en $r \in P^{(3)}$. Soient $\xi_\alpha^{(3)}$ et $\eta_\alpha^{(3)}$ les coordonnées de r. Pour alléger les notations, on supprimera les indices supérieurs des x, y, ξ, η.

Des équations (3. 3. 2) de τ_0 et de l'expression (3. 2. 1) de T, on déduit que

$$T(q, q\tau_0, r) = (\xi_3 + \eta_3)\Big(\sum_\alpha x_\alpha . y_\alpha\Big) + (x_3 + y_3)\Big(\sum_j (x_j . \eta_j + y_j . \xi_j) - x_3 . \xi_3 - y_3 . \eta_3\Big)$$

On voit que (5. 2. 1) est une identité en r si, et seulement si,

$$\sum_\alpha x_\alpha . y_\alpha = x_3 + y_3 = 0$$

c'est-à-dire si q appartient à l'intersection de $Q^{(0)}$ et l'hyperplan d'équation $x_3 + y_3 = 0$. Par conséquent

5. 2. 2. *L'ensemble des points ac. d'une trialité de type $I_{\mathrm{id.}}$ est l'intersection de $Q^{(0)}$ et d'un hyperplan de $P^{(0)}$.*

Il s'ensuit que

5. 2. 3. *Par rapport à une trialité de type $I_{\mathrm{id.}}$, tout point spécial est ac. et tout point non spécial est extérieur, de type $I_{\mathrm{id.}}$.*

En effet, soit $p \in Q^{(0)}$ un point quelconque. La $V_3\, p\tau^2$ coupe l'hyperplan dont il est question dans la proposition 5. 2. 2 suivant un plan π dont tous les points sont ac. Si p est ac., $\pi = p\omega$ (cf. 4. 1. 1), donc tout point appartenant à $p\omega$ (et par conséquent tout point spécial) est ac. Si p est non spécial, $\pi = p\pi_1$ (cf. 4. 2. 2), et ${}_p\tau$ est l'identité (cf. 4. 2. 9).

Il résulte de la proposition précédente qu'une trialité de type $\mathrm{I}_{\mathrm{id.}}$ ne peut être aussi de type II ou de type III. Il nous reste donc à comparer ces deux derniers types, K étant un corps de caractéristique 3. Considérons la trialité de type III, $\tau = \varphi_{\mathbf{a},1} . \tau_0$, avec

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5. 2. 4}$$

et cherchons à nouveau l'ensemble des points ac. de τ. On a cette fois, avec les mêmes notations que plus haut,

$$T(q, q\tau, r) = (\xi_3 + \eta_3) \cdot \left(\sum_\alpha x_\alpha \cdot y_\alpha\right) + (x_3 + y_3) \cdot \left(\sum_j (x_j \cdot \eta_j + y_j \cdot \xi_j) - x_3 \cdot \xi_3 - y_3 \cdot \eta_3\right) +$$
$$x_0^2 \cdot \xi_2 + y_1^2 \cdot \eta_2 + x_0 \cdot y_1 \cdot (\xi_3 - \eta_3) - \xi_0 \cdot (x_0 \cdot x_2 + y_1 \cdot x_3) + \eta_1 \cdot (x_0 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2)$$

On suppose que $q \in Q^{(0)}$, par conséquent, le premier terme de cette expression s'annule identiquement. Pour que q soit ac., il faut et il suffit que $T(q, q\tau, r)$ soit nul quels que soient les ξ_α et les η_α. Posons successivement

$$\xi_i = \eta_i = 0,\ \xi_3 = \eta_3 = 1$$
$$\xi_0 = \xi_1 = \xi_3 = \eta_\alpha = 0,\ \xi_2 = 1$$
$$\xi_\alpha = \eta_0 = \eta_1 = \eta_3 = 0,\ \eta_2 = 1$$

il vient

$$(x_3 + y_3)^2 = 0$$
$$x_0^2 + y_2 \cdot (x_3 + y_3) = 0$$
$$y_1^2 + x_2 \cdot (x_3 + y_3) = 0$$

d'où

(5. 2. 5) $$x_3 + y_3 = x_0 = y_1 = 0$$

Réciproquement, ces dernières équations ont pour conséquence $T(q, q\tau, r) = 0$. Par conséquent, l'ensemble des points ac. de τ est l'hyperquadrique de dimension 3, intersection de $Q^{(0)}$ avec la V_4 v d'équations (5. 2. 5). Cette hyperquadrique $Q^{(0)} \cap v$, qui est définie dans v par l'équation

$$x_3^2 - x_2 \cdot y_2 = 0$$

a une droite double d d'équations

(5. 2. 6) $$x_0 = y_1 = x_2 = y_2 = x_3 = y_3 = 0.$$

Le point $p = X_3^{(0)}$, qui est de type III, appartient à la V_5 polaire de d par rapport à $Q^{(0)}$; il en est donc de même de tous les points extérieurs à τ de type III, en vertu de l'équivalence projective des paires (τ, p) de type donné. Soit p' un point non spécial par rapport à τ, et n'appartenant pas à la V_5 en question ; de tels points existent d'après la proposition 4. 1. 6. La V_3 $p'\tau^2$ rencontre la V_4 v, donc p' est un point extérieur, nécessairement de type II. Par conséquent :

5. 2. 7. *K étant un corps de caractéristique 3, il n'y a pas de différence projective entre les trialités de type II et les trialités de type III. L'ensemble des points ac. d'une trialité τ de type II est une hyperquadrique à 3 dimensions (intersection de $Q^{(0)}$ avec une V_4) possédant une droite double d. Un point non spécial par rapport à τ est toujours extérieur, et de type III ou II selon qu'il appartient ou non à la V_5 polaire de d par rapport à $Q^{(0)}$.*

En résumé, on a le

THÉORÈME 5. 2. 8. *Le corps de base K étant donné, toutes les trialités à points ac. appartenant à un automorphisme donné σ de K, de période 3 et différent de l'identité, sont projectivement équiva-*

lentes entre elles (trialités de type I_σ). Les trialités linéaires (c'est-à-dire appartenant à l'automorphisme identique) à points ac. sont de deux types, type $I_{\text{id.}}$ et type II ; les trialités de type $I_{\text{id.}}$ ont pour ensemble de points ac. une hyperquadrique à 5 dimensions, intersection de $Q^{(0)}$ et d'un hyperplan de $P^{(0)}$. Les points extérieurs d'une trialité τ à points ac. sont tous projectivement équivalents, c'est-à-dire que le groupe des projectivités conservant τ est transitif sur l'ensemble des points extérieurs, sauf si τ est de type II, K étant un corps de caractéristique 3, auquel cas les points extérieurs sont de deux espèces (type II et type III). Dans ce dernier cas, tout point non spécial est extérieur, et il en est de même dans le cas des trialités de type $I_{\text{id.}}$.

Les divers types de trialités se distinguent encore par les propriétés de leurs droites fixes.

5. 2. 9. *Soient τ une trialité à points ac. et q un point ac. de τ.*

Si τ est de type $I_{\text{id.}}$, toute droite passant par q et contenue dans le plan $q\omega$ est fixe. Plus généralement, si τ est de type I_σ, le nombre des droites fixes passant par q est égal au nombre d'éléments de K fixes pour σ augmenté d'une unité ; géométriquement, les droites fixes passant par q peuvent être mis en correspondance biunivoque naturelle avec les points d'une droite projective définie sur le corps des éléments fixes de σ.

Si τ est de type II, K n'étant pas un corps de caractéristique 3, il passe deux droites fixes par tout point ac. ou τ ne possède pas de droite fixe selon que K contient ou non les racines cubiques de l'unité.

Enfin, si τ est de type II, K étant un corps de caractéristique 3, toute droite passant par q et contenue dans le plan $q\omega$ est fixe, ou bien il passe une et une seule droite fixe par q, selon que q appartient ou non à la droite double d de l'hyperquadrique des points ac. de τ (cf. 5. 2. 7).

Cette proposition résulte de la proposition 4. 2. 11 et du fait que tout point ac. q appartient à un plan $p\pi_1$, où p est non spécial (en effet, si p est un point non spécial quelconque appartenant à $q\tau$, $q \in p\tau^2$, donc $q \in p\pi_1$). Seule la démonstration de la dernière partie demande quelques développements.

Soit K un corps de caractéristique 3. Considérons la trialité de type II $\tau = \tau_{\mathbf{a},1} . \tau_0$ définie par (5. 2. 4), et soit p un point de type III par rapport à τ. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $p = X_3^{(0)}$. $p\pi_1$ et $p\pi_2$ sont alors respectivement les plans déterminés par les $X_i^{(0)}$ et par les $Y_i^{(0)}$. Il en résulte que d, qui est définie par les équations (5. 2. 6), rencontre ces deux plans, et est donc une droite fixe de τ (en vertu de 4. 2. 9 et 4. 2. 5). D'autre part, il suit des propositions 4. 2. 9 et 4. 2. 11, et de la forme de $\mathbf{a}$, que si q est un point ac. contenu dans $p\pi_1$ (c'est-à-dire un point fixe de ${}_p\tau$) il passe une et une seule droite fixe de τ par q, sauf si q est le point $X_1^{(0)}$, c'est-à-dire le point de rencontre de d et $p\pi_1$, auquel cas toute droite passant par q et contenue dans $q\omega$ est fixe.

Considérons à présent un point ac. quelconque, q, et soit p' un point non spécial contenu dans $q\omega$. $q \in p'\pi_1$. Si $q \in d$, $d \subset q\tau$ (puisque d est fixe) donc $q\tau$ est contenue dans la V_5 polaire de d par rapport à $Q^{(0)}$, p' est de type III, et la proposition résulte des remarques faites plus haut. Lorsque $q \notin d$, la proposition est une conséquence de ces mêmes remarques si p' est de type III, et une conséquence de 4. 2. 11 si p' est de type II.

CHAPITRE III

GROUPES DES TRIALITÉS DE TYPE I

§ 6. Définitions. Quelques sous-groupes.

6. 1. *Notations.*

On désignera par K un corps commutatif, σ un automorphisme de K tel que $\sigma^3 =$ l'identité, L le corps des éléments fixes de σ, K^* et L^* les groupes multiplicatifs de K et L, τ une trialité de type I_σ sur K, $G_{K,\sigma}$ — ou simplement G — le groupe des projectivités conservant τ, $G^+_{K,\sigma}$ — ou G^+ — le sous-groupe formé par celles de ces projectivités qui conservent (à un facteur carré près) la forme quadratique définissant l'hyperquadrique Q où est donnée τ, ${}_eG$ (resp. ${}_eG^+$) le groupe des projectivités appartenant à G (resp. G^+) et conservant un point ou un ensemble de points donné e. Pour le reste, les notations utilisées sans explication sont celles introduites dans les chapitres précédents.

6. 2. *Système de coordonnées normal. Simplexe normal.*

Un système de coordonnées $x_\alpha^{(i)}$, $y_\alpha^{(i)}$ sera dit *normal* (par rapport à τ) si, dans ce système, τ est la trialité $\varphi_{1,1,\sigma}.\tau_0$ d'équations

$$\begin{cases} x'{}_\alpha^{(i)} = x_\alpha^{([i-1])\sigma} \\ y'{}_\alpha^{(i)} = y_\alpha^{([i-1])\sigma} \end{cases}$$

Dans la suite de ce chapitre, l'indice supérieur $^{(0)}$ sera généralement omis, c'est-à-dire qu'on écrira P, Q, x, etc., au lieu de $P^{(0)}$, $Q^{(0)}$, $x^{(0)}$, etc.

On appellera *simplexe normal* (par rapport à τ) le simplexe $\Sigma = (X_\alpha, Y_\alpha)$ des points fondamentaux (dans P) d'un système de coordonnées normales. Il est clair que

6. 2. 1. *Le groupe G est transitif sur l'ensemble des simplexes normaux.*

6. 2. 2. *Étant donné une droite fixe d, et un point non spécial p coplanaires, il existe un simplexe normal tel que $p = X_3$ et $d = X_1 Y_0$.*

Démonstration. — Soit $q\tau \cap q'\tau^2$ le plan déterminé par d et p (cf. 4. 1. 7). On a $q \in p\pi_1$ et $q' \in p\pi_2$. En vertu des propositions 4. 2. 9 et 4. 2. 7, la collinéation ${}_p\tau$, définie dans le plan $p\pi_1$, laisse invariants le point q et la droite $q'{}_p\delta$. Soient $X_0 \notin q'{}_p\delta$, $X_1 = q$, $X_2 \in q'{}_p\delta$ trois points fixes de ${}_p\tau$, distincts deux à deux, et Y_0, Y_1, $Y_2 \in p\pi_2$ les transformés par ${}_p\delta$ des droites $X_1 X_2$, $X_2 X_0$, $X_0 X_1$. Posons encore $X_3 = p$ et $Y_3 = p\omega$.

Choisissons à présent dans P un système de coordonnées x_α, y_α, ayant pour points fondamentaux X_α, Y_α, tel que Q soit représentée par $\Sigma x_\alpha . y_\alpha = 0$, et que ${}_p\tau$ ait pour équation $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^\sigma$ (ce qu'on réalise en s'arrangeant pour que le point de $p\pi_1$ de coordonnées $x_i = 1$ soit un point fixe de ${}_p\tau$). Dans ce système, $\tau = \varphi_{\mathbf{a},k,\sigma}.\tau_0$, où **a** est une matrice scalaire. En reprenant, dans le cas particulier qui nous occupe, la démonstration des propositions (5. 1. 3) et (5. 1. 4), on voit qu'il existe une projectivité $\varphi_{\mathbf{b},l}$ conservant les points X_α et Y_α (ce qui signifie que **b** est une matrice diagonale) et transformant τ en la trialité $\varphi_{1,1,\sigma}.\tau_0$. $\Sigma = (X_\alpha, Y_\alpha)$ est donc un simplexe normal, ce qui démontre notre proposition.

6. 2. 3. *Étant donnés trois points ac. q, q', q'', tels que qq' et $q'q''$ soient des droites fixes distinctes, il existe un simplexe normal tel que $q = X_0$, $q' = Y_2$, $q'' = X_1$.*

On choisit dans le plan $q\tau \cap q'\tau^2$ un point non spécial p tel que $p\pi_1 \cap q'\omega$ soit la droite qq'' (cf. 4. 3. 1), et on reproduit alors la démonstration précédente en prenant pour X_1 le point q''.

Tenant compte de 6. 2. 1, on peut encore exprimer les deux propositions précédentes en termes de transitivité du groupe G :

6. 2. 4. *Le groupe G est transitif sur l'ensemble des couples (d, p) formés d'une droite fixe et d'un point non spécial coplanaires.* Autrement dit, *G est transitif sur l'ensemble des triples (q, q', p) formés de deux points ac. q, q', tels que la droite qq' soit fixe, et d'un point non spécial appartenant au plan $q\tau \cap q'\tau^2$. En particulier, G est transitif sur l'ensemble des points ac., sur l'ensemble des droites fixes, et sur l'ensemble des points extérieurs* (ce qu'on savait déjà : cf. 5. 2. 8).

6. 2. 5. *Le groupe G est transitif sur l'ensemble des triples de points ac. (q, q', q'') tels que qq' et $q'q''$ soient des droites fixes distinctes.*

Remarque. — Les propositions 6. 2. 2 et 6. 2. 3 sont des cas particuliers de la proposition générale suivante, qui se démontre par un procédé analogue, en tenant compte des résultats établis au § 4 (et principalement au n° 4. 3).

6. 2. 6. *Pour que $n \leqslant 8$ points, linéairement indépendants et représentés par n des 8 symboles X_α, Y_α, soient les sommets correspondants d'un simplexe normal, il faut et il suffit qu'ils remplissent celles des conditions suivantes qui les concernent :*

X_3 et Y_3 sont extérieurs à τ ; $Y_3 = X_3\omega$;
X_i et Y_i sont ac. ;
$X_i \in X_3\tau^2$, $Y_i \in X_3\tau$, $X_i \in Y_3\tau$, $Y_i \in Y_3\tau^2$;
X_i et Y_i ne sont pas alignés ; si $i \neq j$, X_i et Y_j sont alignés et la droite qu'ils déterminent est fixe ;
les X_i (et de même les Y_i) sont alignés deux à deux et les droites qu'ils déterminent ne sont pas fixes ;
les plans $X_0X_1X_2$ et $Y_0Y_1Y_2$ ne sont pas spéciaux.

Comme les propositions 6. 2. 2 et 6. 2. 3, celle-ci peut être exprimée sous forme de propriétés de transitivité du groupe G. On notera, par exemple, que

6. 2. 7. *G est transitif*

— *sur les couples de points ac. non alignés,*
— *sur les triples de points ac. coplanaires déterminant un plan non spécial,*

— *sur les hexagones ayant pour côtés des droites fixes, et dont les couples de sommets opposés sont non alignés.*

6. 3. *Les groupes de stabilité ${}_pG$ et ${}_pG^+$ d'un point extérieur p.*

Soient p un point extérieur et x_α, y_α un système de coordonnées normal tel que $p=X_3$. Les projectivités appartenant à G sont de la forme $\varphi_{\mathbf{b},l}$ (cf. le n° 5. 1). Réciproquement, en exprimant, à l'aide de l'identité (3. 3. 5), que $\varphi_{\mathbf{b},l}$ conserve τ, on trouve les conditions

$$(6.\ 3.\ 1)\qquad \begin{cases} \mathbf{b}^\sigma = l^\sigma . \mathbf{b} \\ |\mathbf{b}| = l.(l^\sigma)^{-1} \end{cases}$$

De la première relation, il résulte que l^σ est de la forme m^σ/m. Si on pose

$$(6.\ 3.\ 2)\qquad \begin{cases} l = m : m^{\sigma^2} \\ \mathbf{b} = \mathbf{c}.m, \end{cases}$$

les conditions (6. 3. 1) s'écrivent

$$(6.\ 3.\ 3)\qquad \begin{cases} \mathbf{c}^\sigma = \mathbf{c} \\ |\mathbf{c}| = \dfrac{1}{m.m^\sigma.m^{\sigma^2}}. \end{cases}$$

Quel que soit m, il existe au moins une matrice $\mathbf{c}$ vérifiant les relations (6. 3. 3). Par conséquent, l'application $\varphi_{\mathbf{b},l} \to l$ $(\varphi_{\mathbf{b},l} \in {}_pG)$ est un homomorphisme de G_p *sur* le groupe des éléments de K^* de la forme k^σ/k. Le noyau N de cet homomorphisme se compose des projectivités $\varphi_{\mathbf{b},1}$, avec $|\mathbf{b}|=1$ et $\mathbf{b}^\sigma = \mathbf{b}$; il est donc isomorphe au groupe $SL_3(L)$ [1]. Ce dernier étant son propre dérivé (cf. [**12**]), N est le dérivé $({}_pG)'$ du groupe ${}_pG$. En conclusion

6. 3. 4. *Le groupe dérivé $({}_pG)'$ du groupe ${}_pG$ se compose des projectivités $\varphi_{\mathbf{b},1}$, où $\mathbf{b}$ est une matrice de déterminant 1 ayant ses éléments dans L ; $({}_pG)'$ est donc isomorphe à $SL_3(L)$. Le quotient $\Gamma_p = {}_pG/({}_pG)'$ est canoniquement isomorphe au groupe des éléments de K^* de la forme k^σ/k, donc aussi au groupe quotient K^*/L^*.*

La projectivité $\varphi_{\mathbf{b},l}$ multiplie la forme $\sum_\alpha x_\alpha . y_\alpha$ par l. Donc, en supposant qu'elle appartienne à G, elle sera contenue dans G^+ si, et seulement si, l est le carré d'un élément l' de K. Mais alors, l est aussi le carré d'un élément de la forme k^σ/k. Un simple calcul montre en effet que si $l = m/m^{\sigma^2} = l'^2$, et si on pose $k = 1/(m.l'^\sigma)$, on a $l = (k^\sigma/k)^2$. Par conséquent,

6. 3. 5. *Le groupe ${}_pG^+$ est l'image réciproque, dans ${}_pG$, du sous-groupe $({}_p\Gamma)^2$ de ${}_p\Gamma$, c'est-à-dire qu'il se compose des éléments de ${}_pG$ dont la classe mod. $({}_pG)'$ est un carré dans ${}_p\Gamma$. En particulier, ${}_pG/{}_pG^+ = {}_p\Gamma/({}_p\Gamma)^2 = (K^*/L^*)/(K^*/L^*)^2$.*

6. 3. 6. *Le centre $C({}_pG)$ du groupe ${}_pG$, qui se compose des projectivités $\varphi_{m.1,l}$, avec $l = m/m^{\sigma^2}$, $m.m^\sigma.m^{\sigma^2} = 1$, est aussi le centralisateur de $({}_pG)'$ (et* a fortiori *de ${}_pG^+$ et de ${}_pG$) dans G.*

[1] Les notations sont celles de J. Dieudonné [**12**].

En effet, soit q un point quelconque du plan $p\pi_1 = X_0X_1X_2$, dont les coordonnées x_i appartiennent à L (ce qui signifie que q est ac.). On montre sans difficulté que les projectivités $\varphi_{b,1} \in ({}_pG)'$ qui conservent q n'ont sur Q aucun point fixe commun en dehors de q, $p = X_3$ et $p\omega = Y_3$. De ces trois points, seul q est ac. Il s'ensuit que toute projectivité ψ appartenant au centralisateur de $({}_pG)'$ dans G conserve q. En faisant varier q, on voit que ψ conserve le plan $p\pi_1$, donc aussi le point p, et induit sur $p\pi_1$ l'identité. Par conséquent, $\psi = \varphi_{m.1,l}$, et ψ appartient à $C({}_pG)$.

6. 3. 7. *Si une projectivité appartenant à $C({}_pG)$ laisse invariants tous les points d'une droite fixe coplanaire avec p, ce ne peut être que l'identité.*

En effet, la droite en question rencontre les plans $p\pi_1 = X_0X_1X_2$ et $p\pi_2 = Y_0Y_1Y_2$ (cf. 4. 2. 3). Or, l'examen des équations de la projectivité $\varphi_{m.1,l}$, déduites de (3. 3. 1), montre que si cette projectivité laisse invariants tous les points d'une droite rencontrant les plans $X_0X_1X_2$ et $Y_0Y_1Y_2$ (auquel cas elle laisse invariants tous les points de la V_5 $X_0X_1X_2Y_0Y_1Y_2$), on doit avoir $l = m^2$, d'où, en tenant compte des relations $l = m/m^{\sigma}$, et $m.m^{\sigma}.m^{\sigma^2} = 1$, $l = m = 1$.

6. 4. *Les glissements. Le groupe G'.*

Soient d une droite de Q et v la V_5 polaire de d par rapport à Q. On appellera *glissement d'axe d*, ou *d-glissement*, toute projectivité biaxiale (spéciale) d'axes d et v conservant Q. Il est évident que

6. 4. 1. *Toute projectivité permutable avec un glissement (distinct de l'identité) conserve l'axe de celui-ci.*

6. 4. 2. *Si γ est un d-glissement et si p est un point quelconque de P, non invariant par γ ($p \notin v$), la droite joignant p et $p\gamma$ rencontre d. Si, en particulier, p appartient à Q, p et $p\gamma$ sont alignés (sur Q).*

La première partie de cette proposition exprime une propriété générale des projectivités spéciales. Si $p \in Q$, la droite e joignant p et $p\gamma$ est contenue dans Q parce qu'elle contient trois points de Q, p, $p\gamma$ et $d \cap e$.

6. 4. 3. *Soient d, $e \subset Q$ deux droites coplanaires (sur Q), p leur point d'intersection, et $\pi \subset Q$ un plan contenant e. Tout d-glissement γ conserve π et induit sur π une homologie spéciale d'axe e et de centre q.*

En effet, soit p un point quelconque de π. Si p et d sont coplanaires, p appartient à la V_5 v, polaire de d par rapport à Q, et est donc invariant par γ. Sinon, q est le seul point de d aligné avec p, et il résulte de la proposition précédente que p, $p\gamma$ et q sont alignés. On voit donc que pour tout point $p \in \pi$, la droite pq est invariante par γ. D'autre part, la droite e appartient à v, puisqu'elle est coplanaire avec d, donc ses points sont fixes pour γ.

6. 4. 4. *Étant donnée une droite $d \subset Q$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un d-glissement permutable avec τ (i.e. appartenant à G) est que d soit une droite fixe de τ, auquel*

cas les d-glissements en question forment avec l'identité un groupe isomorphe au groupe additif de L, *contenu dans tous les groupes* $({}_pG)'$ *correspondant aux points extérieurs* p *coplanaires avec* d. *Lorsque* $\sigma = id.$ $(K = L)$, *tout glissement dont l'axe est une droite fixe de* τ *appartient à* G.

Si un d-glissement γ conserve τ, τ conserve γ $(\tau^{-1}.\gamma.\tau = \gamma)$, donc d est une droite fixe de τ.

Inversement, soient d une droite fixe de τ, γ un d-glissement quelconque, p un point extérieur coplanaire avec d, et x_α, y_α un système de coordonnées normal tel que $d = X_1 Y_0$ et $p = X_3$ (cf. 6. 2. 2). La V_5 v, polaire de d par rapport à Q, est la V_5 $X_1X_2X_3Y_0Y_2Y_3$. La droite joignant X_0 et $X_0\gamma$ rencontre d en un point qui ne peut être que X_1, seul point de d aligné avec X_0. Il en résulte que γ conserve le plan $X_0X_1X_2$, et de même, par raison de symétrie, le plan $Y_0Y_1Y_2$; γ est donc une projectivité de la forme $\varphi_{\mathbf{b},l}$. En exprimant que $\varphi_{\mathbf{b},l}$ conserve tous les points de v, on trouve les conditions

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l = 1.$$

Mais alors, $\gamma = \varphi_{\mathbf{b},l}$ appartient à G si, et seulement si, b est un élément de L (cf. 6. 3. 1), auquel cas $\gamma \in ({}_pG)'$ (cf. 6. 3. 4), ce qui démontre notre proposition.

6. 4. 5. *Le groupe* $({}_pG)'$ *est engendré par les glissements qu'il contient.*

En effet, les glissements contenus dans $({}_pG)'$ engendrent un sous-groupe invariant de $({}_pG)'$, non contenu dans le centre (celui-ci ne renfermant aucun glissement non trivial), donc confondu avec le groupe lui-même (puisque $({}_pG)' \cong SL_3(L)$).

6. 4. 6. d *étant une droite fixe de* τ, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une autre droite fixe soit invariante par un d-glissement est qu'elle rencontre* d, *auquel cas chacun de ses points est invariant par le glissement. Si une projectivité appartenant à* G *laisse fixes tous les points de toutes les droites fixes rencontrant* d, *c'est un d-glissement.*

Si une droite fixe rencontre d en un point q, elle appartient au plan $q\omega$, donc aussi à la V_5 v, polaire de d par rapport à Q, et chacun de ses points est invariant par tout d-glissement. Supposons qu'il existe une droite fixe e, invariante par un d-glissement γ, et ne rencontrant pas d. En vertu de 6. 4. 2, tous les points de e devraient être fixes pour γ, e serait contenu dans v, et déterminerait avec d une $V_5^{(1)}$ $q\tau$ ou une $V_5^{(2)}$ $q\tau^2$; dans les deux cas, q devrait appartenir simultanément à d et à e, contrairement à l'hypothèse.

Considérons à présent une projectivité ψ appartenant à G et laissant invariants tous les points de toutes les droites fixes rencontrant une droite fixe donnée d. ψ laisse alors invariants les points de tout plan $\pi \subset Q$ contenant d (si π est spécial, i.e. $\pi = q\omega$, c'est évident ; sinon, cela résulte de la proposition 4. 3. 1), donc aussi tous les points de v. En transformant ce résultat par polarité par rapport à Q, on voit encore que ψ laisse invariants tous les hyperplans contenant d. C'est donc une projectivité biaxiale spéciale d'axes v et d, c.q.f.d.

6. 4. 7. *Il existe toujours dans G un glissement non trivial laissant invariants deux points ac. donnés quelconques.*

Soient q et q' les deux points en question. En vertu de 4. 3. 2, on a de trois choses l'une : qq' est une droite fixe, il existe un point q'' tel que qq'' et $q'q''$ soient des droites fixes, ou bien il existe deux points q'' et q''' tels que qq'', $q''q'''$ et $q'''q'$ soient des droites fixes. En posant suivant le cas $d=qq'$, $q'q''$ ou $q''q'''$, on voit, d'après 6. 4. 6, que tout d-glissement conserve q et q'.

6. 4. 8. *Si q, q', q'' désignent trois points ac. tels que qq' et qq'' soient des droites fixes distinctes, il existe dans G un glissement conservant q et amenant q' en q''.*

Soient γ un d-glissement quelconque appartenant à G, r un point ac. invariant par γ mais n'appartenant pas à d, e une droite fixe passant par r, mais ne rencontrant pas d — et par conséquent non invariante par γ (cf. 6. 4. 6) — $r' \neq r$ un point de e, et r'' son transformé par γ. Il existe (cf. 6. 2. 5) une projectivité appartenant à G et amenant r, r' et r'' respectivement sur q, q' et q''. Le transformé de γ par cette projectivité satisfait aux conditions de l'énoncé.

On désignera par G' le sous-groupe invariant du groupe G engendré par les glissements qu'il contient. En vertu des propositions 6. 4. 4 et 6. 4. 5, G' est aussi engendré par les sous-groupes $({}_pG)'$ correspondant aux divers points extérieurs p. La notation G' sera justifiée *a posteriori* lorsqu'on verra (cf. 7. 2. 2) que G' est le groupe dérivé de G. *Tous les glissements dont il sera question dans la suite de ce chapitre seront supposés appartenir à G.*

§ 7. Structure des groupes G et G⁺.

7. 1. *Structure des groupes G/G' et G^+/G'.*

7. 1. 1. *p désignant un point extérieur, on a $G' \cap {}_pG = {}_pG^+$.*

Démonstration. — Lorsque σ est l'identité, on a ${}_pG = {}_pG^+ = ({}_pG)' \subset G'$, et la proposition est évidente. On supposera donc que σ diffère de l'identité.

Introduisons dans les $P^{(i)}$ un système de coordonnées *non normal*, $x_\alpha^{(i)}$, $y_\alpha^{(i)}$, tel que le point X_3 coïncide avec p et que $\tau = \varphi_{\mathbf{a},1,\sigma} \cdot \tau_0$, avec

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La permutation des coordonnées $x_\alpha^{(i)}$, $y_\alpha^{(i)}$ définie par les cycles

$$(7.\ 1.\ 2) \qquad (x_3^{(i)}, x_{[-i]}^{(i)}, y_3^{(i)}, y_{[-i]}^{(i)}) \ (x_{[2-i]}^{(i)}, x_{[1-i]}^{(i)}, y_{[2-i]}^{(i)}, y_{[1-i]}^{(i)})$$

conserve la forme trilinéaire fondamentale T et les équations de τ ; elle définit donc une projectivité appartenant à G. Cette projectivité, et la projectivité analogue obtenue en remplaçant i par $i+1$ dans les indices inférieurs de (7. 1. 2), engendrent un groupe d'ordre 8 qui permute transitivement les 8 points fondamentaux $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$ du système de coordonnées dans $P^{(i)}$. En bref, on peut dire que ces points jouent un rôle symétrique par rapport à τ.

On désignera par χ_{h_0,h_1,h_2,h_3} la projectivité d'équations

$$x'_\alpha = h_\alpha . x_\alpha, \qquad y'_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} . y_\alpha$$

qui n'est autre que la projectivité $\varphi_{\mathbf{h},h}$ avec

$$\begin{cases} h = 1/h_3^2 \\ \mathbf{h} = \frac{1}{h_3} . \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Les conditions pour que χ_{h_α} appartienne à G se déduisent de l'identité (3. 3. 5) ; elles peuvent s'écrire

$$(7.\ 1.\ 3) \qquad h_\alpha . h_\alpha^\sigma . h_\alpha^{\sigma^2} = h_3^{\sigma^2} . h_i . (h_{[i+1]}^\sigma)^{-1} = \pm 1 \quad (^1)$$

On démontre exactement comme au n° 6. 3 qu'un élément $\varphi_{\mathbf{b},l}$ de ${}_pG$ appartient à $({}_pG)'$ (resp. à ${}_pG^+$) si et seulement si $l = 1$ (resp. si $l \in K^{*2}$). En particulier, une projectivité χ_{h_α} satisfaisant à (7. 1. 3) appartient à $({}_pG)'$ si $h_3 = \pm 1$. Par raison de symétrie, elle appartient à $({}_{x_i}G)'$ si $h_i = \pm 1$.

Soit $\varphi_{\mathbf{b},l}$ un élément quelconque de ${}_pG^+$. On a $l = l'^2$, et aussi (d'après la première des relations (6. 3. 2), qui reste valable ici) $l . l^\sigma . l^{\sigma^2} = (l' . l'^\sigma . l'^{\sigma^2})^2 = 1$. On peut supposer, après multiplication éventuelle de l' par -1, que $l' . l'^\sigma . l'^{\sigma^2} = 1$. La projectivité $\psi = \chi_{h_0,h_1,h_2,h_3}$ où $h_0 = 1$, $h_1 = l'^\sigma$, $h_2 = (l'^{\sigma^2})^{-1}$, $h_3 = l'$ appartient à $({}_{x_0}G)'$, donc à G'. Or, $\varphi_{\mathbf{b},l} . \psi = \varphi_{\mathbf{c},1} \in ({}_pG)'$. Par conséquent, $\varphi_{\mathbf{b},l} = \varphi_{\mathbf{c},1} . \psi^{-1} \in G'$, et, plus généralement, ${}_pG^+ \subseteq G'$. Mais il est clair, d'autre part, que $G' \cap {}_pG \subseteq {}_pG^+$ (puisque $G' \subseteq G^+$). Donc $G' \cap {}_pG = {}_pG^+$, c.q.f.d.

7. 1. 4. *G' est transitif sur l'ensemble des points ac.*

En effet, soient q et q' deux points ac. distincts.

Si q et q' sont alignés, la droite qq' n'étant pas fixe, il existe un point q'' tel que les droites $q''q$ et $q''q'$ soient fixes (cf. 4. 3. 2), donc aussi un glissement amenant q en q' (cf. 6. 4. 8).

Si qq' est une droite fixe, et si $r \neq q$, q' et q'' désignent respectivement un point quelconque de cette droite et un point ac. appartenant au plan $r\omega$ mais non à la droite qq', q'' est aligné avec q et q', et aucune des deux droites qq'' et $q'q''$ n'est fixe. Il existe donc, d'après ce qu'on vient de voir, un glissement amenant q en q'' et un autre amenant q'' en q' ; leur produit amène q en q'.

Enfin, si q et q' ne sont pas alignés, et si d et q'' désignent respectivement une droite fixe passant par q et le point de cette droite aligné avec q', il existe, d'après ce qu'on vient de voir, un produit de deux glissements, amenant q en q'', et un glissement amenant q'' en q' ; il existe donc un produit de trois glissements amenant q en q'.

(1) Les h_α étant donnés à un facteur ± 1 près, on peut toujours les normaliser de telle sorte que le dernier membre de cette relation soit $+ 1$.

7. 1. 5. *G' est transitif sur l'ensemble des couples (q, q') de points ac., tels que qq' soit une droite fixe.*

C'est une conséquence immédiate des propositions (7. 1. 4) et (6. 4. 8) et de la remarque suivante : Si q, q' et q'' sont trois points ac. situés sur une même droite fixe d, il est possible, en vertu de 6. 4. 8, d'amener q' en q'' par un produit de deux glissements conservant q, le premier transformant q' en un point de $q\omega$ non situé sur d, et le second transformant ce point en q''.

7. 1. 6. *Soient d une droite fixe, π un plan non spécial contenant cette droite et ${}_\pi G'$ le groupe des éléments de G' qui conservent π. Si $K \neq F_2$ (corps de 2 éléments), le groupe induit sur π par ${}_\pi G'$ renferme toutes les homologies spéciales d'axe d; il s'ensuit, en particulier, que ${}_\pi G'$ est transitif sur l'ensemble des points de π n'appartenant pas à d. Si $K = F_2$, le groupe induit sur π par ${}_\pi G'$ se compose de l'identité et d'une seule homologie spéciale d'axe d.*

Démonstration pour $K \neq F_2$ (pour $K = F_2$, cf. le n° 7. 3).

On a $\pi = q\tau \cap q'\tau^2$. Soit x_α, y_α un système de coordonnées normal tel que $q = X_0$ et $q' = Y_1$. Alors, $\pi = X_0 Y_1 X_3$. Introduisons dans π le système de coordonnées non homogènes $x = x_0/x_3$, $y = y_1/x_3$. La projectivité $\varphi_{m.1,l}$ avec $1 \neq m \in K^{*2}$ et $l = m/m^{\sigma^2}$, appartient à ${}_{X_3}G^+$, donc à G' (cf. 7. 1. 1), et induit sur π la projectivité d'équations

$$\begin{cases} x' = m.x \\ y' = (m^{\sigma^2})^{-1}.y \end{cases}$$

Soient ξ et η deux éléments quelconques de K, et ψ une projectivité appartenant à G, conservant X_0 et Y_1, et transformant X_3 en le point de π de coordonnées $x = \xi/(m-1)$ $y = \eta/((m^{\sigma^2})^{-1}-1)$ (l'existence d'une telle projectivité est assurée par la proposition 6. 2. 4). Un simple calcul montre que le commutateur $\psi^{-1}.\varphi^{-1}_{m.1,l}.\psi.\varphi_{m.1,l}$, qui appartient à ${}_\pi G'$, induit sur π l'homologie spéciale d'équations

$$\begin{cases} x' = x + \xi \\ y' = y + \eta \end{cases}$$

ce qui démontre notre proposition.

7. 1. 7. *Si $K \neq F_2$, G' est transitif sur l'ensemble des points extérieurs. Si $K = F_2$, les orbites de G' dans cet ensemble sont au nombre de 2.*

Si $K \neq F_2$, c'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes. Le cas $K = F_2$ sera envisagé au n° 7. 3.

Les propositions 7. 1. 7, 7. 1. 1 et 6. 3. 5 entraînent le

THÉORÈME 7. 1. 8. *Si $K \neq F_2$, $G' = G^+$ et le quotient, G/G' est canoniquement isomorphe au groupe $(K^*/L^*)/(K^*/L^*)^2$. Si $K = F_2$, G' est un sous-groupe d'indice 2 de $G = G^+$.*

7. 2. *Structure du groupe G'.*

THÉORÈME 7. 2. 1. *G' est simple.*

Démonstration pour $K \neq F_2$.

On désignera par H un sous-groupe invariant de G' renfermant au moins une transformation ψ distincte de l'identité. Il faut montrer que $H = G'$.

Soit q un point ac. quelconque. Il existe un glissement non trivial conservant q et $q\psi$. Le commutateur de ψ et de ce glissement appartient à H et conserve q ; s'il est l'identité, ψ conserve l'axe du glissement. Par conséquent, H contient au moins une transformation différente de l'identité et conservant soit un point ac. soit une droite fixe. On supposera que ψ elle-même est dans le cas.

Si ψ conserve un point ac. q, le commutateur de ψ et d'un glissement quelconque dont l'axe passe par q conserve toutes les droites fixes passant par q ; s'il est l'identité, ψ conserve l'axe du glissement. On pourra donc, sans nuire à la généralité, supposer que ψ conserve une droite fixe d.

Envisageons successivement diverses hypothèses.

a) ψ *laisse invariants tous les points de* d *et au moins un point extérieur* p, *coplanaire avec* d.

ψ appartient alors à $H \cap {}_pG^+$, qui est un sous-groupe invariant de ${}_pG^+$. Mais d'après la structure de ${}_pG^+$ et les propriétés connues de $SL_3(L)$ (cf. [**12**]), tout sous-groupe invariant de ${}_pG^+$ contient $({}_pG)'$ ou est contenu dans le centre de ${}_pG^+$, qui est lui-même contenu dans $C({}_pG)$ (cf. 6. 3. 6). Or ψ ne peut appartenir à $C({}_pG)$ (cf. 6. 3. 7). Donc H contient $({}_pG)'$ et aussi, en vertu de 7. 1. 7, les groupes analogues correspondant aux autres points extérieurs. On a par conséquent $H = G'$, et le théorème est démontré dans ce cas.

b) ψ *laisse invariants tous les points de* d *et il existe au moins une droite fixe* e *rencontrant* d *et non invariante par* ψ.

Soit π un plan non spécial contenant d. Si l'homologie ${}_\pi\psi$ induite par ψ sur π n'est pas spéciale, elle possède un point fixe p en dehors de d, et on se trouve dans le cas de l'hypothèse a). Si ${}_\pi\psi$ est spéciale, le commutateur de ψ et d'un e-glissement quelconque induit l'identité sur π (en vertu de 6. 4. 3). Ce commutateur est distinct de l'identité, puisque ψ ne conserve pas e (cf. 6. 4. 1), et on est ramené à l'hypothèse a) en le substituant à ψ.

c) ψ *ne laisse pas invariants tous les points de* d.

Soit e une droite fixe rencontrant d en un point qui n'est pas invariant pour ψ. Les droites e et $e\psi$ ne se rencontrent pas, en vertu de 4. 3. 1. Le commutateur de ψ et d'un e-glissement γ quelconque, qui est aussi le produit du e-glissement γ^{-1} et du $(e\psi)$-glissement $\psi^{-1}.\gamma.\psi$, conserve tous les points de d mais ne laisse pas invariante la droite e (d'après 6. 4. 6). On se ramène donc à l'hypothèse b) en substituant ce commutateur à ψ.

d) ψ *laisse invariants tous les points de* d *et toutes les droites fixes rencontrant* d.

S'il existe une droite fixe rencontrant d sur laquelle ψ n'induise pas la transformation identique, on se ramène à l'hypothèse c) en substituant cette droite à d. Si, par contre, ψ laisse invariants tous les points de toutes les droites fixes rencontrant d, c'est un d-glissement (cf. 6. 4. 6), et en substituant à d l'une quelconque de ces droites, soit d', on se ramène à l'hypothèse b) ; en effet, une droite fixe quelconque rencontrant d' en un point distinct du point d'intersection $d \cap d'$, ne peut être invariante par ψ en vertu de 6. 4. 6 et du fait que trois droites fixes ne peuvent former triangle (cf. 4. 3. 1).

Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 7. 2. 2. *G' est le groupe dérivé de G.*

7. 3. *Le cas $K=F_2$.*

Lorsque $K=F_2$, σ est l'identité et G est le groupe de type G_2 sur K, considéré par Dickson [**11**] et Chevalley [**8**] (cf. 8. 1. 1). On sait que ce groupe possède un sous-groupe invariant simple d'indice 2, H, isomorphe à $PU_3(F_9)$ (1). Les groupes $({}_pG)'$ correspondant aux divers points extérieurs p étant simples, ils sont contenus dans H qui doit donc coïncider avec G', ce qui démontre le théorème 7. 2. 1.

Étant donné que $({}_pG)'={}_pG$, G' ne peut être transitif sur l'ensemble des points extérieurs, sinon G' serait confondu avec G. La proposition 7. 1. 7 s'ensuit immédiatement.

Il reste à démontrer la proposition 7. 1. 6. Soient $\pi=q\tau \cap q'\tau^2$ le plan en question dans cette proposition, et q, q', q'' les trois points de la droite d. Toute projectivité appartenant à ${}_\pi G'$ laisse invariants ces points, et induit donc sur π soit l'identité, soit une homologie spéciale. Il n'est cependant pas possible que toute homologie spéciale d'axe e soit la restriction à π d'une projectivité appartenant à ${}_\pi G'$, car on en déduirait, comme dans le cas $K\neq F_2$, que G' est transitif sur l'ensemble des points extérieurs. D'autre part, si e est une droite fixe distincte de d et passant par q'', l'unique e-glissement non trivial induit sur π une homologie spéciale (distincte de l'identité). La proposition 7. 1. 6 est ainsi démontrée.

N. B. En dépit de son manque d'élégance, le recours au n° 8. 1 et aux propriétés connues du groupe de type G_2 sur $K=F_2$ a semblé préférable à un traitement direct qui aurait conduit à donner au cas particulier envisagé un développement sans rapport avec la grandeur du corps !

§ 8. Deux cas particuliers.

8. 1. *σ est l'identité. Les groupes de type G_2.*

THÉORÈME 8. 1. 1. *Les groupes $G_{K,\mathrm{id.}}$ ne sont autres que les groupes « exceptionnels » de type G_2, de Engel-Killing-Cartan-Dickson-Chevalley* (2). Dans ce cas particulier, les théorèmes 7. 1. 8 et 7. 2. 1 redonnent le résultat connu : *ces groupes sont simples sauf si $K=F_2$.*

Nous montrerons pour commencer (cf. 8. 1. 8) l'identité entre les $G_{K,\mathrm{id.}}$ et les groupes G_2 de E. Cartan [**3**], [**4**] et L. E. Dickson [**10**] [**11**] (pour les corps K particuliers envisagés par ces auteurs). Ensuite, nous indiquerons, sans toutefois entrer dans le détail des calculs et des raisonnements, le lien avec la définition de C. Chevalley [**8**]. L'équivalence des définitions de Dickson et de Chevalley a d'ailleurs été établie par R. Ree [**15**].

Soient τ une trialité de type $I_{\mathrm{id.}}$, x_α, y_α un système de coordonnées normal, et $P'\equiv x_3+y_3=0$ l'hyperplan de P contenant les points ac. de τ (cf. le n° 5. 2). On utilisera, dans cet hyperplan, le système de coordonnées $x_i, y_i, z=x_3=-y_3$. L'hyper-

(1) Cf. [**11**] et (pour la notation) [**12**]. On trouvera au § 11. 5 des indications sur une nouvelle démonstration de cette proposition.

(2) Cf. [**13**], [**14**], [**3**], [**4**], [**10**], [**11**], [**9**]. Lorsque K est le corps des nombres réels, G est la forme réelle non compacte de G_2, c'est-à-dire, avec la terminologie de E. Cartan, la forme de caractère $\delta=2$.

quadrique $Q' = Q \cap P'$ a pour équation $z^2 - \Sigma x_i . y_i = 0$. A tout point $q \in Q'$ est associé le plan $q\omega \subset Q'$. On dira que deux points q, $q' \in Q'$ sont *conjugués* si $q' \in q\omega$; cette relation est réflexive et symétrique.

Une projectivité de l'hyperquadrique $Q = Q^{(0)}$ sur elle-même, (resp. sur l'hyperquadrique $Q^{(1)}$) conservant chaque famille de V_3 (resp. appliquant les $V_3^{(1)}$ de Q sur les $V_3^{(2)}$ de $Q^{(1)}$) est entièrement caractérisée par sa restriction à la section hyperplane Q'. Il s'ensuit que :

le groupe G est isomorphe à sa restriction à P', laquelle sera encore désignée par G ;
la trialité τ est entièrement caractérisée par sa restriction à Q'.

Tenant compte du fait que la $V_3^{(1)}$ $q\tau$ $(q \in Q')$ est elle-même déterminée par le plan $q\omega$, on voit donc que

8. 1. 2. *La trialité τ est entièrement caractérisée par la correspondance $q \to q\omega$, ou encore par la relation de conjugaison dans Q'. G est le groupe de toutes les projectivités de P' conservant cette correspondance (cette relation).*

Soient q $(x_i, y_i, x_3 = -y_3 = z)$, q' $(x'_i, y'_i, x'_3 = -y'_3 = z')$ deux points quelconques de P' et r $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ un point quelconque de P. Si on remplace dans la forme trilinéaire fondamentale (3. 2. 1) les $x_\alpha^{(0)}, y_\alpha^{(0)}$, les $x_\alpha^{(1)}, y_\alpha^{(1)}$ et les $x_\alpha^{(2)}, y_\alpha^{(2)}$ respectivement par les coordonnées de q, q', et r, il vient

$$T(q, q'\tau, r\tau^2) = \Sigma \Xi_\alpha . \xi_\alpha + \Sigma H_\alpha . \eta_\alpha$$

ou on a posé

$$\begin{aligned}
\Xi_i &= z . y'_i - y_i . z' + x_{[i+1]} . x'_{[i+2]} - x_{[i+2]} . x'_{[i+1]}\\
H_i &= x_i . z' - z . x'_i + y_{[i+1]} . y'_{[i+2]} - y_{[i+2]} . y'_{[i+1]}\\
\Xi_3 &= -z . z' + \Sigma y_i . x'_i\\
H_3 &= -z . z' + \Sigma x_i . y'_i
\end{aligned}$$

Lorsque r appartient à P', d'où $\xi_3 = -\eta_3 = \zeta$, cette expression devient

$$\Sigma \Xi_i . \xi_i + \Sigma H_i . \eta_i + Z . \zeta \tag{8. 1. 3}$$

où

$$Z = \Xi_3 - H_3 = \Sigma (y_i . x'_i - x_i . y'_i).$$

Si on considère les ξ_i, η_i, ζ comme des indéterminées, (8. 1. 3) apparaît comme un système linéaire à 7 paramètres de formes bilinéaires antisymétriques, invariant par G.

8. 1. 4. *Deux points distincts, q, $q' \in P'$ sont conjugués (ce qui implique en particulier qu'ils appartiennent à Q') si, et seulement si, ils annulent simultanément les formes Ξ_i, H_i et Z, c'est-à-dire toutes les formes du système* (8. 1. 3).

Si q et q' sont conjugués, $q \in q'\tau$, donc la forme $T(q, q'\tau, r\tau^2)$ — et *a fortiori* l'expression (8. 1. 3) — est nulle quels que soient les ξ_α, η_α. Réciproquement, soient q, $q' \in P'$ deux points, solutions du système d'équations

$$\Xi_i = H_i = Z = 0 \tag{8. 1. 5}$$

En considérant ce dernier comme un système d'équations linéaires en les x'_i, y'_i, z', et en exprimant qu'il possède au moins deux solutions linéairement indépendantes *(q* et *q')*, c'est-à-dire que le rang de la matrice des coefficients est au plus égal à 5, on trouve l'unique condition

(8. 1. 6) $$-z^2+\Sigma x_i.y_i=0$$

exprimant que q appartient à Q' (ce qui est vrai aussi de q', par raison de symétrie). Mais un simple calcul montre qu'on a l'identité

$$\Sigma\Xi_\alpha.H_\alpha=(-z^2+\Sigma x_i.y_i).(-z'^2+\Sigma x'_i.y'_i).$$

Il résulte donc des relations (8. 1. 5) et (8. 1. 6) que $\Xi_3.H_3=0$. Et comme, d'autre part, $\Xi_3-H_3=Z=0$, on a $\Xi_3=H_3=0$. Par conséquent $T(q,\, q'\tau,\, r\tau^2)$ est nul quel que soit r, et $q\in q'\tau$, c.q.f.d.

Des propositions 8. 1. 2 et 8. 1. 4, il suit que

8. 1. 7. *G est le groupe de toutes les projectivités conservant le système* (8. 1. 3), *ou, ce qui revient au même, le système linéaire engendré par les 2-formes* $z\wedge y_i+x_{[i+1]}\wedge x_{[i+2]}$, $x_i\wedge z+y_{[i+1]}\wedge y_{[i+2]}$ *et* $\Sigma x_i\wedge y_i$. En d'autres termes, *G est le groupe de toutes les projectivités de P' conservant le système* (8. 1. 5) *ou, ce qui revient au même, le système d'équations*

(8. 1. 8) $$\begin{cases} z\wedge y_i+x_{[i+1]}\wedge x_{[i+2]}=0\\ x_i\wedge z+y_{[i+1]}\wedge y_{[i+2]}=0\\ \Sigma x_i\wedge y_i=0\end{cases}$$

C'est essentiellement la définition des groupes de type G_2 de E. Cartan et L. E. Dickson [1].

La description des liens entre le groupe $G=G_{K,\mathrm{id.}}$ et le groupe de type G_2 sur K, selon C. Chevalley **[8]**, sera basée sur la considération de certains éléments particuliers de G, à savoir, la projectivité cyclique d'ordre 6, ω, définie par la permutation de coordonnées

(8. 1. 9) $$(x_0, y_2, x_1, y_0, x_2, y_1)\ (x_3, y_3)$$

la projectivité $(t)\alpha_0$ $(t\in K)$ d'équations

(8. 1. 10) $$\begin{cases} x'_0=x_0-t.(x_3-y_3)+t^2.y_0\\ x'_1=x_1\\ x'_2=x_2\\ x'_3=x_3-t.y_0\\ y'_0=y_0\\ y'_1=y_1+t.x_2\\ y'_2=y_2-t.x_1\\ y'_3=y_3+t.y_0\end{cases}$$

(1) C'est exactement, aux notations près, la définition de E. Cartan [**4**, p. 297] dans le cas réel. On notera par contre une petite différence avec les indications données aux pp. 146 et 147 de **[3]**, et avec les définitions de L. E. Dickson **[10]**, **[11]**. Dickson prend pour point de départ, non le système (8. 1. 8), mais le système de 6 équations

(8. 1. 8') $$\Xi_i=H_i=0$$

dont il montre que l'équation $Z=0$ est une conséquence. Son raisonnement n'est cependant pas absolument correct. En fait, la famille de droites définie par (8. 1. 8') se compose des droites définies par (8. 1. 8) (droites fixes de τ), et de toutes les droites s'appuyant sur les plans $X_0X_1X_2$ et $Y_0Y_1Y_2$; les deux systèmes ne sont équivalents que si on se borne à considérer les droites appartenant à Q. De même, dans **[3]**, p. 146, les équations de la dernière ligne ne sont conséquences des équations (32), que par restriction au cône $J=0$.

le glissement $(t)\beta_0 = \varphi_{(t)\mathbf{b},1}$, avec

$$(t)\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

la projectivité $(t, u)\gamma = \varphi_{(t,u)\mathbf{c},1}$ $(t, u \in K^*)$, avec

$$(t, u)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{t.u} \end{pmatrix}$$

et enfin les projectivités $(t)\alpha_n$ et $(t)\beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots, 5)$, transformées respectives de $(t)\alpha_0$ et $(t)\beta_0$ par ω^n. On montre (sans grande difficulté) que

8. 1. 11. *Le groupe G est engendré par les projectivités $(t)\alpha_n$, $(t)\beta_n$ $(n = 0, 1, \ldots, 5)$, et $(t, u)\gamma$.*

Considérons à présent un espace vectoriel à 8 dimensions V ayant P pour espace projectif quotient, et soit x_α, y_α un système de coordonnées dans V dont l'image dans P soit le système normal utilisé jusqu'ici. Si, dans les équations de ω, $(t)\alpha_n$, $(t)\beta_n$ et $(t, u)\gamma$ déduites naturellement de (8. 1. 9), (8. 1. 10) et (3. 3. 1), on considère les x_α, y_α comme des coordonnées affines, et non plus projectives, ces équations définissent des transformations linéaires de V, ω^*, $(t)\alpha_n^*$, $(t)\beta_n^*$ et $(t, u)\gamma^*$, qui induisent respectivement sur P les projectivités ω, $(t)\alpha_n$, $(t)\beta_n$ et $(t, u)\gamma$. Les transformations $(t)\alpha_n^*$, $(t)\beta_n^*$ et $(t, u)\gamma^*$ engendrent un groupe G^*, et il résulte de la proposition 8. 1. 11 que *G est isomorphe au quotient de G^* par son centre.*

On désignera par X_α^*, Y_α^* la base de V associée au (i.e. duale du) système de coordonnées x_α, y_α, V' l'hyperplan de V correspondant à l'hyperplan P' de P, x_i, y_i, $z = x_3 = -y_3$, le système de coordonnées dans V' correspondant au système de coordonnées projectives utilisé précédemment dans P', X_i^*, Y_i^*, $Z^* = X_3^* - Y_3^*$ la base associée, W le sous-espace à 14 dimensions de l'espace $V' \wedge V'$ défini par les équations (8. 1. 8), et enfin A_n, B_n, C_n^a et $C_n^b (n = 0, 1, \ldots, 5)$ les éléments de W, transformés respectifs de

$$\begin{aligned} A_0 &= Y_1^* \wedge Y_2^* + X_0^* \wedge Z^* \\ B_0 &= X_1^* \wedge Y_2^* \\ C_0^a &= X_1^* \wedge Y_1^* + X_2^* \wedge Y_2^* - 2 . X_0^* \wedge Y_0^* \\ C_0^b &= X_2^* \wedge Y_2^* - X_1^* \wedge Y_1^* \end{aligned}$$

par la transformation induite sur W par ω^{*n}. Les transformations linéaires de $V' \wedge V'$ induites par les éléments de G^* laissent invariant W (en vertu de 8. 1. 7) ; leurs restrictions à W constituent un groupe, isomorphe à G^*, qu'on désignera encore par G^*, les éléments de ce groupe correspondant à $(t)\alpha_n^*$, $(t)\beta_n^*$ et $(t, u)\gamma^*$ étant, eux aussi, représentés par les mêmes symboles $(t)\alpha_n^*$, $(t)\beta_n^*$ et $(t, u)\gamma^*$.

Selon la définition de Chevalley, le groupe de type G_2 est un groupe de transformations linéaires d'un espace vectoriel à 14 dimensions sur K dans lequel sont définis certains éléments distingués H_r, X_r, où r parcourt l'ensemble des 12 racines de G_2. Les H_r sont tous combinaisons linéaires de deux d'entre eux qui constituent, avec les X_r, une base de l'espace. Le groupe est engendré par certaines transformations $x_r(t)$, $h(\chi)$, où $t \in K$, et χ est un homomorphisme dans K^* du groupe additif P_r engendré par les racines de G_2. L'action de ces transformations sur les H_r, X_r est donnée explicitement (cf. [**8**], p. 36).

On démontre alors, par simple vérification, que si $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$ désignent les racines de G_2 disposées comme sur la fig. 8. 1. 12, et si $\chi(t,u) : P_r \to K^*$ est l'homomorphisme qui

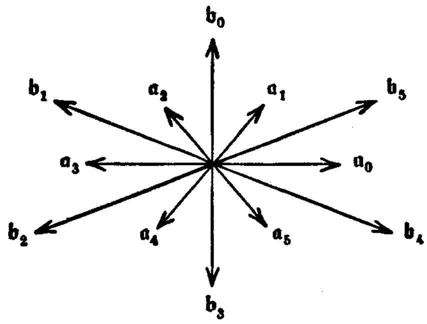

Fig. 8. 1. 12

applique $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_2$ respectivement sur t et u,

8. 1. 13. *La correspondance*

$$\begin{array}{ll} A_n \longleftrightarrow X_{\mathfrak{a}_n} & (t)\,\alpha_n{}^* \longleftrightarrow x_{\mathfrak{a}_n}(t) \\ B_n \longleftrightarrow X_{\mathfrak{b}_n} & (t)\,\beta_n{}^* \longleftrightarrow x_{\mathfrak{b}_n}(t) \\ C^a{}_n \longleftrightarrow H_{\mathfrak{a}_n} & (t,u)\,\gamma^* \longleftrightarrow h(\chi(t,u)) \\ C^b{}_n \longleftrightarrow H_{\mathfrak{b}_n} & \end{array}$$

établit un isomorphisme (de groupes linéaires) entre le groupe G^*, opérant sur W, et le groupe de type G_2, selon la définition de Chevalley.

Le centre de ce dernier étant réduit à l'élément neutre, on voit que

8. 1. 14. *G est isomorphe à G^*.*

8. 2. *K est un corps fini.*

Soient $\varkappa$ et λ les nombres d'éléments de K et L. $\varkappa = \lambda$ ou λ^3 selon que σ est ou non l'identité. A un isomorphisme près, *la trialité τ, de type I_σ, et le groupe $G = G_{K,\sigma}$ sont entièrement déterminés par la donnée des nombres $\varkappa$ et λ.*

Dans le cas particulier envisagé, les théorèmes 7. 1. 8 et 7. 2. 1 deviennent :

8. 2. 1. *Si $\varkappa \neq 2$, $G = G^+ = G'$ est un groupe (fini) simple.*

En effet, K^*/L^* est un groupe cyclique dont l'ordre $\dfrac{\varkappa - 1}{\lambda - 1} = 1$ ou $\lambda^2 + \lambda + 1$ est toujours impair.

On établira à présent divers résultats de caractère énumératif sur lesquels on s'appuiera pour calculer l'ordre du groupe G (cf. 8. 2. 8).

8. 2. 2. *Les points ac. appartenant à une droite fixe donnée sont au nombre de* $\varkappa+1$.
C'est évident.

8. 2. 3. *Les droites fixes passant par un point ac. donné sont au nombre de* $\lambda+1$.
C'est une conséquence immédiate de 5. 2. 9.

8. 2. 4. *Les points ac. sont au nombre de* $(\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa.\lambda+1).(\varkappa+1)$.

En effet, soit d une droite fixe donnée. Partageons l'ensemble des points ac. en trois parties disjointes : E_1, E_2, E_3 formées respectivement des points de d, des points ac. n'appartenant pas à d mais coplanaires avec elle, et des points ac. non coplanaires avec d. En vertu de la proposition 4. 3. 2, par tout point de E_3 (resp. de E_2) passe une et une seule droite fixe rencontrant E_2 (resp. E_1). D'autre part, si q désigne un point quelconque de E_2 (resp. E_1), une des droites fixes passant par q est contenue dans $E_2 \cup E_1$ (resp. dans E_1), et les λ autres sont contenues entièrement — à l'exception du point q lui-même — dans E_3 (resp. E_2). Par conséquent, si n_i est le nombre de points de E_i $(i=1,2,3)$, on a $n_2=\varkappa.\lambda.n_1=\varkappa.\lambda.(\varkappa+1)$ et $n_3=\varkappa.\lambda.n_2=\varkappa^2.\lambda^2.(\varkappa+1)$. Au total,

$$n_1+n_2+n_3=(\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa.\lambda+1).(\varkappa+1), \text{ c.q.f.d.}$$

8. 2. 5. *Les droites fixes sont au nombre de* $(\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa.\lambda+1).(\lambda+1)$.
C'est une conséquence immédiate des trois propositions précédentes.

Notons que les propositions 8. 2. 4 et 8. 2. 5 sont, en un certain sens, duales l'une de l'autre (cf. l'appendice), et qu'on pourrait aussi démontrer 8. 2. 5 en intervertissant dans la démonstration de 8. 2. 4 le rôle des points ac. et des droites fixes.

8. 2. 6. *Les points ac. non alignés avec un point ac. donné sont au nombre de* $\varkappa^3.\lambda^2$.

Soit q le point ac. donné et soit n_1 (resp. n_2) le nombre de points ac. $q'\neq q$, alignés avec q, et tels que la droite qq' soit (resp. ne soit pas) fixe. En vertu de 8. 2. 2. et 8. 2. 3, $n_1=\varkappa.(\lambda+1)$. D'autre part, il résulte de 4. 3. 1, par un raisonnement analogue à celui dont on a fait usage dans la démonstration de 8. 2. 4, que $n_2=\varkappa.\lambda.n_1=\varkappa^2.\lambda.(\lambda+1)$. Le nombre total de points ac. alignés avec q est donc

$$1+n_1+n_2=(\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa.\lambda+1).(\varkappa+1)-\varkappa^3.\lambda^2, \text{ c.q.f.d.}$$

8. 2. 7. *Les points extérieurs sont au nombre de* $\varkappa^3.(\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa.\lambda+1).(\varkappa+1).(\lambda^2+\lambda+1)^{-1}$.

En effet, à tout couple (q, q') de points ac. non alignés est associé naturellement un point extérieur $p=q\tau \cap q'\tau^2$ (cf. 4. 3. 1). Inversement, tout point extérieur p est associé à $(\lambda^2+\lambda+1).\lambda^2$ couples (q,q') distincts, q étant l'un quelconque des $\lambda^2+\lambda+1$ points ac. de $p\pi_1$, et q' étant l'un des λ^2 points ac. de $p\pi_2$ non alignés avec q. La proposition résulte alors du fait que le nombre total de couples (q,q') est, d'après 8. 2. 4 et 8. 2. 6,

$$\varkappa^3.\lambda^2.(\varkappa^2.\lambda^2+\varkappa.\lambda+1).(\varkappa+1)$$

8. 2. 8. *L'ordre du groupe G est*

$$g = \varkappa^3 . (\varkappa^2 - 1) . \lambda^3 . (\lambda^2 - 1) . (\varkappa^2 . \lambda^2 + \varkappa . \lambda + 1)$$

En effet, puisque G est transitif sur l'ensemble des points extérieurs (cf. 6. 2. 4), g est le produit du nombre de ceux-ci par l'ordre du groupe ${}_pG$ (p désignant un point extérieur quelconque) qui est, d'après 6. 3. 4,

$$(\varkappa - 1) . (\lambda - 1)^{-1} . \lambda^3 . (\lambda^2 - 1) . (\lambda^3 - 1) = \lambda^3 . (\varkappa - 1) . (\lambda^2 - 1) . (\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Lorsque $\varkappa = \lambda$ ($\sigma =$ l'identité) on retrouve la formule

$$g = \lambda^6 . (\lambda^2 - 1) . (\lambda^6 - 1)$$

donnant l'ordre des groupes de type G_2. Lorsque $\varkappa = \lambda^3$, on a

$$g = \lambda^{12} . (\lambda^2 - 1) . (\lambda^6 - 1) . (\lambda^8 + \lambda^4 + 1) \tag{8. 2. 9}$$

qui est aussi l'ordre des groupes trouvés par D. Hertzig et par R. Steinberg [**17**] (cf. l'Introduction).

8. 2. 10. *Les valeurs de g correspondant aux diverses valeurs de λ dans* (8. 2. 9) *sont distinctes deux à deux et diffèrent des ordres des autres groupes finis simples connus* (1). *Il s'ensuit en particulier que les groupes finis $G_{K, \sigma}$ ($\sigma \neq$ l'identité) sont deux à deux non isomorphes, et ne sont isomorphes à aucun autre groupe fini simple connu.*

La caractéristique de K est le nombre premier dont la contribution à g (à savoir λ^{12}) est la plus grande ; cela résulte immédiatement du fait que g divise

$$\lambda^{12} . (\lambda^{12} - 1) . (\lambda^6 - 1) = \lambda^{12} . (\lambda^6 - 1)^2 . (\lambda^6 + 1)$$

(qui est d'ailleurs l'ordre de $Sp_4(F_{\lambda^3})$, ce qui permet, si on y tient, de se référer au théorème 1 de [**1**]). La démonstration peut alors se faire par la méthode d'Artin [**1**]. Les six nombres figurant dans le tableau 2, p. 469 de [**1**], sont ici $12r$, $12r$, $6r$, $6r$, 1 et 0, où r est l'exposant de la caractéristique dans λ. Il s'ensuit que si λ est impair, les seuls groupes simples considérés dans [**1**] dont l'ordre pourrait égaler g sont $Sp_4(F_{\lambda^3})$ et $G_2(F_{\lambda^4})$ (dans les notations d'Artin : $S_4(\lambda^3)$ et $E_2(\lambda^4)$). La même conclusion est d'ailleurs valable lorsque λ est pair ; en effet, si $r > 1$, le groupe G est de première classe (cf. [**1**], p. 471), et si $r = 1$ ($\lambda = 2$) cela résulte de l'examen du tableau 3 *(ibid.)*. Enfin un simple calcul montre que $Sp_4(F_{\lambda^3})$ et $G_2(F_{\lambda^4})$ n'ont jamais l'ordre g.

La comparaison avec les formes non normales des groupes de type E_6, considérées dans [**18**], est immédiate, les nombres du tableau 2 étant, pour ceux-ci, $36r$, $18r$, $12r$, $6r$, 2 et -1.

---

(1) Cf. par exemple la liste donnée dans [**1**], à laquelle il faut ajouter les groupes de type E_6, formes non normales, définis dans [**18**] (cf. aussi [**17**]).

CHAPITRE IV

LES TRIALITÉS DE TYPE II

§ 9. Corps de caractéristique différente de 3.

9. 1. *Le corps contient les racines cubiques de l'unité.*

Soient K un corps de caractéristique différente de 3 renfermant les racines cubiques de l'unité, 1, ε, ε^2, Π un plan projectif sur K, et P l'espace projectif à 7 dimensions des tenseurs homogènes (i. e. donnés à un facteur près) une fois contravariants et une fois covariants, de trace nulle, définis dans Π. A tout système de coordonnées u^i donné dans Π est associé dans P un système de coordonnées t^i_j, avec $t^i_i = 0$ (on fera constamment usage dans ce chapitre de la convention de sommation sur les indices muets). Les tenseurs dont l'invariant quadratique $\frac{1}{2}.t^i_j.t^j_i$ est nul forment dans P une hyperquadrique dont l'indice est maximum par suite de l'hypothèse faite sur K (lorsque $2=0$, on donne un sens à l'expression $\frac{1}{2}.t^i_j.t^j_i$ en la développant, compte tenu de $t^i_i = 0$, et en simplifiant formellement par 2).

Soient $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $t_j^{i(k)}$ trois répliques de P, Q, t^i_j. Comme précédemment, l'indice supérieur (0) sera éventuellement omis. La forme trilinéaire

$$T = \varepsilon^2 . t_i^{j(0)} . t_j^{k(1)} . t_k^{i(2)} - \varepsilon . t_j^{i(0)} . t_k^{j(1)} . t_i^{k(2)}$$

qui est invariante pour les projectivités de Π, définit entre $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$ et $Q^{(2)}$ une T-correspondance ; en effet, elle se ramène à la forme (3. 2. 1) par la substitution

$$(9.\ 1.\ 1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t^{[i+2]}{}_{[i+1]}{}^{(k)} = \varepsilon^{-i.k} . x_i^{(k)} \\ t^{[i+1]}{}_{[i+2]}{}^{(k)} = -\varepsilon^{i.k} . y^{(k)} \\ t_i^{i(k)} = \frac{1}{3} . \varepsilon . (1-\varepsilon) . (\varepsilon^i . x_3^{(k)} + \varepsilon^{-i} . y_3^{(k)}) \end{array} \right.$$

La trialité τ d'équations

$$t_i^{j(k)\prime} = t_i^{j([k-1])}$$

est de type II ; en effet, elle n'est autre que la trialité $\varphi_{\mathbf{a},1} . \tau_0$, avec

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

ainsi qu'il résulte des formules de transformations (9. 1. 1). Un point de P de coordonnées t^j_i est ac. par rapport à τ si, et seulement si,

$$(\varepsilon^2 . t^j_i . t^k_j - \varepsilon . t^k_j . t^i_i) . t^{i\,(2)}_k = (\varepsilon^2 - \varepsilon) . t^j_i . t^k_j . t^{i\,(2)}_k = 0$$

quels que soient les $t_k^{i(2)}$ satisfaisant à $t_i^{i(2)} = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{cases} t^j_i . t^k_j = 0 \quad \text{pour } i \neq k \\ t^j_0 . t^0_j = t^j_1 . t^1_j = t^j_2 . t^2_j \end{cases}$$

ce qui exprime que t^j_i est un tenseur décomposable de la forme $t^j_i = u^j . v_i$. Par conséquent, les points ac. de τ correspondent biunivoquement aux *drapeaux* (u, v) constitués par un point $u \in \Pi$ et une droite v de Π passant par u. u et v seront nommés respectivement le *centre* et l'*axe* du drapeau (u, v).

Les combinaisons linéaires de deux tenseurs décomposables $t^j_i = u^j . v_i$ et $t'^j_i = u'^j . v'_i$ sont elles-mêmes des tenseurs décomposables si, et seulement si, $u'^j = \rho . u^j$ ou $v'_i = \rho . v_i$. Donc, par le point ac. représentant le drapeau (u, v) passent deux droites de points ac. représentant respectivement l'ensemble des drapeaux de centre u et l'ensemble des drapeaux d'axe v, et qui sont des droites fixes de τ en vertu de 5. 2. 9. Par conséquent, l'ensemble des droites fixes de τ est en correspondance biunivoque naturelle avec la somme de l'ensemble de points et de l'ensemble des droites de Π ; deux droites fixes se rencontrent si, et seulement si, elles correspondent respectivement à un point $u \in \Pi$ et à une droite v passant par u, auquel cas leur point d'intersection est le point ac. correspondant au drapeau (u, v).

Toute collinéation ou réciprocité φ de Π induit sur P une collinéation φ^* qui conserve Q et τ, et qui est linéaire ou non en même temps que φ. Réciproquement, toute collinéation φ^* de P conservant Q et τ induit une permutation des droites fixes de τ à laquelle correspond une permutation φ des points et droites de Π conservant l'incidence, c'est-à-dire une collinéation ou une réciprocité de Π. On montre aisément que les deux applications $\varphi \rightarrow \varphi^*$ et $\varphi^* \rightarrow \varphi$ ainsi décrites sont inverses l'une de l'autre.

En résumé :

THÉORÈME 9. 1. 2. *Soient K un corps de caractéristique différente de 3 contenant ε, et τ une trialité de type II sur K. L'ensemble F des droites fixes de τ, muni de la relation d'incidence : « deux droites fixes a et b sont incidentes si elles se rencontrent », peut être identifié à l'ensemble des points et des droites d'un plan projectif défini sur K, Π, muni de la relation d'incidence usuelle. Aux points ac. de τ correspondent les drapeaux de Π. Les permutations induites sur F par les collinéations (resp. les projectivités) de P qui conservent τ, sont les collinéations et les réciprocités (resp. les projectivités et les réciprocités linéaires) de Π. Le groupe des collinéations (des projectivités) de P conservant τ, qui opère effectivement sur F, est donc isomorphe au groupe des collinéations et des réciprocités (des projectivités et des réciprocités linéaires) d'un plan projectif défini sur K.*

9. 2. *Le corps ne contient pas les racines cubiques de l'unité.*

Soient K le corps en question, $\tilde{K} = K(\varepsilon)$ son extension par ε, P et Q définis comme précédemment, τ une trialité de type II de Q, $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ les extensions de P et Q à $\tilde{K}$.

τ étant définie par des équations algébriques, on peut parler de son extension $\tilde{\tau}$, qui est une trialité de type II de $\tilde{Q}$. Soit $\tilde{\Pi}$ le plan projectif sur $\tilde{K}$ associé à $\tilde{\tau}$ selon 9. 1. 2.

L'involution ϖ^* des couples de points de $\tilde{P}$ conjugués sur K, qui conserve $\tilde{\tau}$, induit sur $\tilde{\Pi}$ une collinéation involutive ou une polarité, soit ϖ. Puisque τ possède des points ac. et non des droites fixes (définies sur K), ϖ conserve des drapeaux, mais ne conserve aucun point ni aucune droite de $\tilde{\Pi}$; c'est donc une polarité, et plus précisément une polarité *hermitienne* (i.e. appartenant à l'automorphisme non trivial de $\tilde{K}/K$), possédant des points autoconjugués. Les points ac. de τ sont les points ac. de $\tilde{\tau}$ invariants pour ϖ^* ; ils correspondent aux drapeaux de $\tilde{\Pi}$ invariants pour ϖ, donc aussi aux points autoconjugués de ϖ (formant la « conique hermitienne » associée à ϖ). Les projectivités de P conservant τ deviennent, par extension à $\tilde{P}$, les projectivités conservant $\tilde{\tau}$ et ϖ^*, qui induisent sur $\tilde{\Pi}$ les projectivités et les réciprocités linéaires conservant ϖ.

En résumé :

THÉORÈME 9. 2. 1. *Si le corps K ne contient pas ε, le groupe des projectivités conservant une trialité τ de type II sur K est isomorphe au groupe des projectivités et des réciprocités linéaires d'un plan projectif $\tilde{\Pi}$ définit sur $\tilde{K}=K(\varepsilon)$, qui conservent une polarité hermitienne donnée ϖ, à points autoconjugués. Ces deux groupes induisent des groupes de permutations isomorphes (en tant que groupes de permutations) respectivement sur l'ensemble des points ac. de τ et sur l'ensemble des points autoconjugués de ϖ.*

Remarque. La même méthode peut être appliquée à l'étude des trialités linéaires sans points ac., et permet notamment de montrer que

9. 2. 2. *Si τ est une trialité sans points ac. sur un corps K de caractéristique différente de 3, le corps $K(\varepsilon)$ (éventuellement confondu avec K) possède une extension $\tilde{K}$ de degré 3 telle que le groupe des projectivités conservant τ soit isomorphe au groupe des projectivités et des réciprocités d'un plan projectif $\tilde{\Pi}$ défini sur $\tilde{K}$, qui conservent dans ce plan, soit une collinéation γ de période 3 sans point fixe appartenant à un automorphisme de $\tilde{K}/K(\varepsilon)$, soit simultanément une telle collinéation et une polarité hermitienne ϖ telle que $\gamma.\varpi.\gamma.\varpi=$ l'identité, selon que ε appartient ou non à K.*

§ 10. Corps de caractéristique 3.

THÉORÈME 10. 1. *Sur un corps K de caractéristique 3, le produit $\tau=\tau_0.\gamma$ d'une trialité τ_0 de type $I_{\mathrm{id.}}$ et d'un glissement γ permutables est une trialité de type II dont les droites fixes et les points ac. sont les droites fixes et les points ac. de τ_0 invariants par γ, c'est-à-dire, respectivement, les droites fixes de τ_0 rencontrant d et les points ac. de τ_0 coplanaires avec d. Toute trialité τ de type II possède une et une seule décomposition $\tau=\tau_0.\gamma$ du type indiqué.* Par conséquent, *le groupe G des projectivités conservant τ est le normalisateur du glissement γ dans le groupe de toutes les projectivités conservant τ_0 (groupe de type G_2).*

Démonstration. Soient τ_0 et γ une trialité de type $I_{\mathrm{id.}}$ et un glissement permutables, d l'axe de γ (qui est une droite fixe de τ_0), et $\tau=\tau_0.\gamma$. $\tau^3=\tau_0^3.\gamma^3=\gamma^3$ est l'identité, puisque K est de caractéristique 3, donc τ est une trialité.

Il est clair qu'un point ac. (resp. une droite fixe) de τ_0 invariant(e) par γ est ac. par rapport à τ (resp. est une droite fixe de τ).

Réciproquement, soit p un point ac. de τ. $p \in p\tau$ et $p \in p\tau^2$, donc $p\gamma \in p\tau^2_0$ et $p\gamma^2 \in p\tau_0$. En outre, p, $p\gamma$ et $p\gamma^2$ sont alignés (cf. 6. 4. 1). Il s'ensuit que p est ac. par rapport à τ_0, sinon $p\gamma$ ne serait pas ac. non plus, bien qu'appartenant au plan p_{τ},π_1, en vertu de 4. 2. 1. Supposons que $p\gamma \neq p \neq p\gamma^2$; alors la droite définie par ces trois points serait contenue dans $p\tau_0$ (qui contient en effet p et $p\gamma^2$) et dans $p\tau_0{}^2$ (qui contient p et $p\gamma$), et serait donc une droite fixe de τ_0, rencontrant d en vertu de 6. 4. 1, et non coplanaire avec elle puisqu'en vertu de l'hypothèse faite sur p, p n'appartient pas à la V_5 polaire de d par rapport à Q. L'hypothèse $p\gamma \neq p$ impliquant une contradiction, p est invariant par γ.

Toute droite fixe de τ, étant constituée de points ac., est invariante par γ, et est donc une droite fixe de $\tau_0 = \tau . \gamma^{-1}$.

L'ensemble des points ac. de τ étant un sous-ensemble propre de l'ensemble des points ac. de τ_0, τ ne peut être de type $I_{\text{id.}}$, et est donc de type II.

Soient enfin $\tau = \tau_0 . \gamma = \tau'_0 . \gamma'$ deux décompositions de τ en produits d'une trialité de type $I_{\text{id.}}$ et d'un glissement permutables. Il résulte de la partie déjà démontrée du théorème que γ et γ' ont même axe d (d peut par exemple être caractérisé comme l'unique droite fixe de τ rencontrant toutes les autres). $\gamma'' = \gamma . \gamma'^{-1}$ est donc aussi un d-glissement qui ne peut être que l'identité, sans quoi $\tau'_0 = \tau_0 . \gamma''$ serait de type II. Par conséquent $\gamma = \gamma'$ et $\tau_0 = \tau'_0$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque. On pourrait aussi démontrer aisément le théorème précédent par voie analytique, en se reportant au n° 5. 2. Notons par ailleurs que certaines conclusions de ce numéro relatives aux trialités de type II sur un corps de caractéristique 3 se retrouvent comme corollaires immédiats du théorème 10. 1.

La structure du groupe G des projectivités conservant une trialité de type II est donnée par le théorème suivant, *valable quelle que soit la caractéristique de* K.

THÉORÈME 10. 2. *Soient K un corps quelconque, τ_0 une trialité de type $I_{\text{id.}}$, d une droite fixe de τ_0, G_0 le groupe des projectivités conservant τ_0, et ${}_dG_0$ le sous-groupe de G_0 formé par les projectivités conservant τ_0 et d. Le groupe Γ des d-glissements est un sous-groupe invariant de ${}_dG_0$, isomorphe au groupe additif K^+ du corps K. Le normalisateur G d'un élément de Γ dans G_0 ne dépend pas de cet élément, et est donc aussi le centralisateur de Γ dans G_0 ; inversement, Γ est le centre de G. Le quotient ${}_dG_0/\Gamma$ est le produit semi-direct $R.H$ d'un sous-groupe invariant abélien $R = K^{*4}$, espace vectoriel à 4 dimensions sur K, et d'un sous-groupe H isomorphe à $GL_2(K)$, la représentation linéaire de H dans R définie par automorphismes intérieurs étant équivalente à la représentation linéaire de $GL_2(K)$ dans l'espace des tenseurs $b^i{}_{jk}$ $(i, j, k = 0, 1)$ symétriques $(b^i{}_{jk} = b^i{}_{kj})$, de trace nulle $(b^i{}_{ik} = 0)$. G/Γ est le produit $R.H'$ de R par le groupe $H' \cong SL_2(K)$, dérivé de H.*

Quand K est un corps de caractéristique 3, la représentation linéaire de $GL_2(K)$ dans l'espace des tenseurs $b^i{}_{jk}$ symétriques et de trace nulle est réductible, le plan d'équations $b^1{}_{00}=b^0{}_{11}=0$, étant, dans ce cas, invariant par les transformations de la représentation. Par conséquent,

10. 3. *Lorsque K est un corps de caractéristique 3, le groupe ${}_dG_0/\Gamma$ (resp. G/Γ) possède un sous-groupe invariant de la forme $R_1 . H$ (resp. $R_1 . H'$) ou $R_1 \subset R$ est un espace vectoriel à 2 dimensions.*

Le théorème 10. 2 est susceptible d'une vérification analytique directe. Les calculs peuvent être simplifiés par l'introduction de notations appropriées. Par exemple, si x_α, y_α est un système de coordonnées normal par rapport à τ_0, tel que $d=X_1Y_0$, et si l'on pose

$$\begin{array}{ll} x_0=u^0 & y_0=v_0 \\ x_1=v_1 & y_1=u^1 \\ x_2=-t^1{}_0 & y_2=t^0{}_1 \\ x_3=t^0{}_0 & y_3=t^1{}_1 \end{array}$$

les équations générales d'une projectivité appartenant à ${}_dG_0$ s'écrivent

$$(10.4) \qquad \left\{\begin{array}{l} u'^i=a^i{}_j . u^j \\ t'^i{}_j=a^i{}_k . a^{*m}{}_j . (b^k{}_{mn} . u^n+t^k{}_m) \\ v'_i=a^{*j}{}_i . (c_{jk} . u^k+b^m{}_{jk} . t^k{}_m+v_j) \end{array}\right. \qquad (i, j, k, m, n=0, 1)$$

où

$$\begin{array}{l} (a^i{}_j)=\mathbf{a} \text{ est une matrice inversible,} \\ (a^{*i}{}_j)=\mathbf{a}^{-1} \\ b^i{}_{jk}=b^i{}_{kj} \\ b^i{}_{ik}=0 \\ c_{00}=b^k{}_{10} . b^1{}_{k0}=(b^0{}_{00})^2-b^1{}_{11} . b^1{}_{00} \\ c_{01}+c_{10}=b^k{}_{00} . b^0{}_{k1}=b^1{}_{00} . b^0{}_{11}-b^0{}_{00} . b^1{}_{11} \\ c_{11}=b^k{}_{01} . b^0{}_{k1}=(b^1{}_{11})^2-b^0{}_{00} . b^0{}_{11} \end{array}$$

On recherchera encore la façon dont le groupe ${}_dG_0$ opère sur l'ensemble D des droites fixes de τ_0 qui rencontrent d (dans le cas particulier d'un corps de caractéristique 3, D est aussi l'ensemble des droites fixes de $\tau=\tau_0 . \gamma$: cf. 10. 1), ou encore, puisque les éléments de D sont tous invariants par les d-glissements, la façon dont ${}_dG_0/\Gamma$ opère sur D.

Les droites éléments de D sont contenues dans la V_4 $v \equiv u^0=u^1=t^i{}_i=0$, intersection de l'hyperplan $t^i{}_i=0$ qui renferme tous les points ac. de τ_0, et de la V_5 $u^0=u^1=0$, polaire de d par rapport à Q. La grassmannienne des droites de v est une variété de l'espace projectif $v \wedge v$ (on ne croit pas devoir expliquer le sens de cette notation). Au système de coordonnées $v^i, t^i{}_j$ $(i, j=0, 1 ;\ t^i{}_i=0)$ dans v est associé dans $v \wedge v$ le système de coordonnées « pluckériennes »

$$\begin{array}{l} p^k{}_{ij}=v_i \wedge t^k{}_j \\ p=v_0 \wedge v_1 \\ p^{ik}{}_{jm}=t^i{}_j \wedge t^k{}_m \end{array} \qquad (i, j, k, m=0, 1)$$

liées par les relations

$$p^j{}_{ij}=p^{ik}{}_{im}=p^{ik}{}_{jm}+p^{ki}{}_{mj}=0$$

Parmi les droites de v, celles qui sont fixes par τ_0 sont caractérisées par les relations (8.1.8) qui deviennent ici

$$\begin{cases} p^{ik}{}_{jm} = 0 \\ p^{k}{}_{ij} = p^{k}{}_{ji} \end{cases}$$

Ces équations définissent dans $v \wedge v$ une variété linéaire w à 4 dimensions. L'ensemble des points de w qui représentent des droites de v (intersection de w avec la grassmannienne) est le cône cubique d'équations paramétriques

$$\begin{cases} p^{1}{}_{00} = \lambda^3 \\ p^{0}{}_{00} = \lambda^2 . \mu \\ p^{1}{}_{11} = \lambda . \mu^2 \\ p^{0}{}_{11} = \mu^3 \\ p = \nu \end{cases}$$

La projectivité (10.4) induit sur w la projectivité d'équations

$$\begin{cases} p^{h}{}_{ij} = a^{h}{}_{k} . a^{*m}{}_{i} . a^{*n}{}_{j} . p^{k}{}_{mn} \\ p = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|} . (p + b^{0}{}_{11} . p^{1}{}_{00} + b^{1}{}_{00} . p^{0}{}_{11} + 3 . b^{0}{}_{00} . p^{1}{}_{11} - 3 . b^{1}{}_{11} . p^{0}{}_{00}) \end{cases}$$

On voit, en particulier, que

10.5. *Si K n'est pas de caractéristique 3, le groupe ${}_dG_0/\Gamma$ opère effectivement sur l'ensemble D des droites fixes de τ_0 qui rencontrent d. Ces droites peuvent être représentées dans un espace projectif à 4 dimensions par les points d'un cône cubique projetant une cubique gauche, de telle façon qu'au groupe de permutations de D induit par ${}_dG_0/\Gamma$ corresponde le groupe des projectivités de ce cône.*

Si K est de caractéristique 3, les éléments du groupe R_1 (cf. 10.3) *laissent invariantes les droites fixes de τ_0 qui rencontrent d, et le groupe $({}_dG_0/\Gamma)/R_1$ opère effectivement sur l'ensemble D de ces droites. D peut être mis en correspondance biunivoque rationnelle* (mais non birationnelle) *avec un sous-ensemble D_1 d'un plan projectif, qui est le plan tout entier si K est un corps parfait, de telle façon qu'au groupe de permutations de D induit par $({}_dG_0/\Gamma)/R_1$ corresponde le groupe des permutations de D_1 induites par les projectivités du plan qui conservent cet ensemble.*

Remarque. Les groupes de type G_2 présentent encore d'autres particularités remarquables dans le cas des corps de caractéristique 3, telles, par exemple, que l'existence d'isogénies exceptionnelles (cf. [**16**]). Ces diverses particularités sont toutes liées entre elles ; nous nous proposons de revenir ultérieurement sur cette question.

APPENDICE

§ 11. Les polygones généralisés.

11. 1. *Définitions, exemples.*

Considérons une « géométrie à incidence » (S, C, i) constituée par deux ensembles S et C, entre lesquels est donnée une correspondance i, l'« incidence », deux éléments $s \in S$ et $c \in C$ étant dits *incidents* s'ils se correspondent dans i *(sic)*.

Nous appellerons

— *points* ou *sommets* les éléments de S ;

— *côtés* les éléments de C ;

— *pinceau* associé à un élément de $S \cup C$ l'ensemble des éléments (de l'autre espèce) qui lui sont incidents ;

— *droites* les pinceaux associés aux côtés ;

— *étoiles* les pinceaux associés aux sommets ;

— *chaîne de longueur n joignant deux éléments e, $f \in S \cup C$* une suite $e = e_1, e_2, \ldots, e_n = f$ de n éléments appartenant alternativement à S et à C et tels que pour tout $m \geqslant 2$ e_m et e_{m-1} soient incidents ;

— *chaîne irréductible* une chaîne $e_1, \ldots, e_n$ telle que $e_m \neq e_{m-2}$ pour tout $m \geqslant 3$;

— géométrie *duale* de (S, C, i) la géométrie (C, S, i) obtenue en permutant S et C, c'est-à-dire en appelant sommets les éléments de C et côtés les éléments de S, et

— *automorphisme* de (S, C, i) toute permutation simultanée de S et C qui respecte i.

Si, étant donnés deux éléments de $S \cup C$, il existe toujours au moins une chaîne de longueur $\leqslant n$ et au plus une chaîne irréductible de longueur $< n$ qui les joint, nous dirons que (S, C, i) est un *n-gone généralisé* (ou simplement un n-gone) (1).

Exemples.

Les polygones ordinaires sont des cas particuliers de polygones généralisés.

(S, C, i) est un digone généralisé si i est triviale, c'est-à-dire si tout sommet est incident à tout côté.

Les plans projectifs sont des triangles généralisés ; il y a d'ailleurs essentiellement identité entre les deux notions (cf. le n° 11. 2).

Les points autoconjugués et les droites fixes d'une polarité dans un espace projectif à 3 dimensions, ou les points et les droites appartenant à une hyperquadrique ordinaire ou hermitienne quelconque ne contenant pas de plans, sont les sommets et les côtés d'un quadrangle généralisé.

Les points ac. et les droites fixes d'une trialité τ sont (en vertu des propositions 4. 3. 1 et 4. 3. 2) les sommets et les côtés d'un hexagone généralisé, que nous dirons *associé à* τ.

(1) On peut aussi définir les polygones généralisés en partant d'un ensemble S dont certaines parties, les droites, sont distinguées. Ce point de vue, moins symétrique (et un tant soit peu moins général) que le point de vue « abstrait », adopté ici dans un but de concision, a sur lui l'avantage d'être plus « géométrique ».

11.2. *Adjacence ; perspectivités et projectivités ; polygones dégénérés et polygones propres.*

(S, C, i) étant un n-gone généralisé, deux éléments de $S \cup C$ seront appelés *adjacents* s'ils peuvent être joints par une chaîne de longueur strictement inférieure à n. Si n est impair, deux éléments de même espèce (deux sommets ou deux côtés) sont toujours adjacents ; si n est pair, tout côté est adjacent à tout sommet. S'il y a dans $S \cup C$ un élément adjacent à tous les autres, le n-gone (S, C, i) sera dit *dégénéré*.

Soient d_1 et d_2 deux pinceaux associés à des éléments de $S \cup C$ non adjacents. Tout élément $e_1 \in d_1$ est adjacent à un et un seul élément $e_1\pi \in d_2$. Nous appellerons *perspectivité* l'application $\pi : d_1 \to d_2$ ainsi définie, *projectivité* le composé d'un nombre fini quelconque de perspectivités, et *pinceaux projectivement liés* deux pinceaux tels qu'il existe une projectivité de l'un d'eux sur l'autre. Un n-gone (S, C, i) sera dit *propre* si deux pinceaux de même espèce (deux droites ou deux étoiles) sont toujours projectivement liés ; lorsque n est impair, cela implique que deux pinceaux quelconques sont projectivement liés. Il est clair que dans un n-gone propre, toutes les droites et toutes les étoiles ont le même nombre d'éléments ; lorsque n est impair, ces deux nombres sont nécessairement égaux. Les n-gones impropres (i.e. non propres) sont en fait des cas d'exception, dont il est facile de donner une description complète.

Exemples.

Il y a identité entre les plans projectifs et les triangles non dégénérés. Les triangles propres sont les plans qui satisfont à l'axiome selon lequel il existe au moins trois points sur chaque droite (axiome Eo de [**19**]).

L'hexagone associé à une trialité de type II sur un corps de caractéristique 3 est dégénéré (cf. le théorème 10.1).

11.3. *Un « théorème de Chow »* [**9**] *pour les trialités.*

Soient P et Q définis comme dans les chapitres précédents, et τ une trialité de Q possédant des droites fixes. Si on exclut le cas d'une trialité de type II en caractéristique 3, tout automorphisme de l'hexagone associé à τ est induit par une collinéation de P conservant τ ou transformant τ en τ^{-1}. Cette collinéation est unique sauf si τ est de type $I_{\mathrm{id.}}$, auquel cas deux collinéations induisent l'automorphisme donné, l'une conservant τ et l'autre transformant τ en τ^{-1}.

11.4. *Dédoublement d'un polygone généralisé. Polygones dont les étoiles ont deux éléments.*

Soient (S, C, i) un n-gone généralisé, Γ l'ensemble $S \cup C$, Σ l'ensemble des « drapeaux » (s, c) formés d'un sommet s et d'un côté c incidents, et ι la correspondance entre Γ et Σ définie comme suit

$$\gamma\iota(s, c) \leftrightarrow \gamma = s \text{ ou } c \quad (\gamma \in \Gamma,\ (s, c) \in \Sigma).$$

Alors, (Σ, Γ, ι) est un $2n$-gone dont les étoiles ont deux éléments, et que nous nommerons le *double* du n-gone (S, C, i). La proposition suivante est facile à démontrer :

Un n-gone généralisé non dégénéré dont les étoiles ont deux éléments est un n-gone ordinaire si n est impair, et est isomorphe au double d'un $(n/2)$-gone généralisé si n est pair.

Lorsque $n=6$, cette proposition et le théorème 11. 3 redonnent l'essentiel du théorème 9. 1. 2.

11. 5. *Hexagones généralisés dont les pinceaux ont trois éléments.*

Un hexagone généralisé dont les pinceaux ont tous 3 éléments est isomorphe à l'hexagone associé à une trialité de type $I_{\text{id.}}$ sur le corps $K=F_2$, ou au dual de celui-là.

Un raisonnement simple permet de déduire de cette proposition et du théorème 11. 3 l'isomorphisme connu (cf. § 7. 3) entre le dérivé du groupe de type G_2 sur le corps F_2, et le groupe projectif unitaire $PU_3(F_9)$. Considérons en effet dans un plan projectif Π sur F_9 une polarité hermitienne π, et soient S l'ensemble des points de Π qui ne sont pas autoconjugués par rapport à π, C l'ensemble des triangles autopolaires par rapport à π, et i la correspondance qui associe à tout triangle $\in C$ ses trois sommets. On vérifie aisément que (S, C, i) est un hexagone dont les pinceaux ont trois éléments, et que tout automorphisme de cet hexagone est induit par une et une seule collinéation de Π conservant π. Il en résulte que

Le groupe des collinéations d'un plan projectif sur le corps F_9 qui conservent une polarité hermitienne donnée dans ce plan est isomorphe au groupe des projectivités conservant une trialité de type $I_{\text{id.}}$ (groupe de type G_2) définie sur le corps F_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Artin (E.), The orders of the classical simple groups, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 455-472.

[2] Bourbaki (N.), *Algèbre*, chapitres IV et V, « Actu. Sci. Ind. », n° 1102, Hermann, Paris, 1950.

[3] Cartan (E.), *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, thèse, Paris, Nony, 1894 (*Œuvres complètes*, partie I, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1952).

[4] — Les groupes réels simples finis et continus, *Ann. Ec. Norm.*, **31** (1914), 263-355 (*Œuvres complètes*, partie I, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1952).

[5] — *Leçons sur la théorie des spineurs*, II, « Actu. Sci. Ind. », n° 701, Hermann, Paris, 1938.

[6] Chevalley (C.), *Théorie des groupes de Lie, II (Groupes algébriques)*, « Actu. Sci. Ind. », n° 1152, Hermann, Paris, 1951.

[7] — *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.

[8] — Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.* (2), **7** (1955), 14-66.

[9] Chow (W. L.), On the geometry of algebraic homogeneous spaces, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 32-67.

[10] Dickson (L. E.), Theory of linear groups in an arbitrary field, *Trans. Amer. Mat. Soc.*, **2** (1901), 363-394.

[11] — A new system of simple groups, *Math. Ann.*, **60** (1905), 137-150.

[12] Dieudonné (J.), *La géométrie des groupes classiques*, « Ergebnisse der Mathematik », N. F. 5, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

[13] Killing (W.), Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, II, *Math. Ann.*, **33** (1889), 1-48.

[14] Lie (S.), *Theorie der Transformationsgruppen*, III, Teubner, Leipzig, 1893.

[15] Ree (R.), On some simple groups defined by C. Chevalley, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 392-400.

[16] Séminaire Chevalley, 1956-58, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Secrétariat mathématique, 11, rue P.-Curie, Paris, 1958.

[17] Steinberg (R.), Variations on a theme of Chevalley, *Notices Amer. Math. Soc.*, **34** (vol. 5, n° 6, nov. 1958), p. 672, abstract n° 550-5.

[18] Tits (J.), *Les « formes réelles » des groupes de type E_6*, Sém. Bourbaki, n° 162 (févr. 1958), Secrétariat mathématique, 11, rue P.-Curie, Paris, 1958.

[19] Veblen (O.) et Young (J. W.), *Projective geometry*, I, Ginn, Boston, 1910.

Reçu le 15 *avril* 1959.