

SUR LE COMPTAGE DES FIBRÉS DE HITCHIN NILPOTENTS

PIERRE-HENRI CHAUDOUARD¹ ET GÉRARD LAUMON²

¹*Université Paris Diderot (Paris 7), Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche, UMR 7586, Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, F-75205 Paris Cedex 13, France* (Pierre-Henri.Chaudouard@imj-prg.fr)

²*CNRS et université Paris-Sud, UMR 8628, Mathématique, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex, France* (Gerard.Laumon@math.u-psud.fr)

(Reçu le 21 septembre 2013; révisé le 20 juillet 2014; accepté le 20 juillet 2014; première publication en ligne le 7 août 2014)

Résumé Cet article est une contribution à la fois au calcul du nombre de fibrés de Hitchin sur une courbe projective et à l'explicitation de la partie nilpotente de la formule des traces d'Arthur-Selberg pour une fonction test très simple. Le lien entre les deux questions a été établi dans [Chaudouard, Sur le comptage des fibrés de Hitchin. À paraître aux actes de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon]. On décompose cette partie nilpotente en une somme d'intégrales adéliques indexées par les orbites nilpotentes. Pour les orbites de type « régulières par blocs », on explicite complètement ces intégrales en termes de la fonction zêta de la courbe.

Abstract This paper is concerned with two problems. One is to count Hitchin bundles on a projective curve and the other is to get an explicit formula for the nilpotent part of the Arthur–Selberg trace formula for a simple test function. The fact that the two problems are indeed related has been noticed in a previous paper cf. [Chaudouard, Sur le comptage des fibrés de Hitchin. À paraître aux actes de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon]. We expand the nilpotent part of the Arthur–Selberg trace formula in a sum of adelic integrals indexed by nilpotent orbits. For « regular by blocks » orbits, we get an explicit formula for these integrals in terms of the zeta function of the curve.

Keywords: Hitchin fibration; Arthur–Selberg trace formula; nilpotent cone

2010 *Mathematics subject classification:* Primary 14D20

Secondary 11F70; 11F72; 11R39; 22E55

Table des matières

1	Introduction	92
2	Combinatoire des (G, M)-cofamilles	96
3	Un calcul de séries	119
4	Induction de Lusztig-Spaltenstein	132
5	Quelques résultats auxiliaires	133
6	Asymptotique d'intégrales nilpotentes tronquées	139
7	Le calcul d'une intégrale nilpotente « régulière par blocs »	153
	Bibliographie	164

1. Introduction

1.1. Soit C une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k . Soit D un diviseur sur C . Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $e \in \mathbb{Z}$. Par fibré de Hitchin de rang n et degré e , on entend la donnée d'un couple (\mathcal{E}, θ) où

- \mathcal{E} est un fibré vectoriel de degré e et rang n ;
- $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(D)$ est un morphisme de \mathcal{O}_C -module.

Lorsque le rang n est premier au degré e et que le diviseur D est canonique, l'espace de modules des fibrés de Hitchin *stables* est une variété algébrique quasi projective et lisse sur k (cf. [13]). Un problème fondamental est le calcul de ses nombres de Betti. Hausel et Rodriguez-Villegas (cf. [9]) ont proposé une conjecture, plutôt sophistiquée, sur ce que devraient être ces nombres de Betti. Précisons que ces auteurs ne travaillent pas directement sur l'espace de modules en question, mais sur une certaine variété de caractères, qui est une variété algébrique affine complexe qui lui est diffeomorphe lorsque le corps de base k est le corps des nombres complexes. Ils ont su calculer le E -polynôme de la variété de caractères qu'ils considèrent ; sur la base de ce calcul, ils formulent une expression conjecturale pour son polynôme de Hodge mixte et donc, *ipso facto*, pour son polynôme de Poincaré. Par ailleurs, Garcia-Prada, Heinloth et Schmitt (cf. [7]) ont donné un algorithme pour calculer le motif de l'espace de modules des fibrés de Hitchin. Cela leur a permis de vérifier la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas en rang 4 et petit genre. Leur approche exploite la décomposition de Byalinicki-Birula sous l'action du groupe multiplicatif et la géométrie des espaces de chaînes. Toutefois, il ne semble pas évident d'obtenir en général la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas à partir de leur méthode. Notons que Mozgovoy, sur la base du travail de Hausel et Rodriguez-Villegas, a donné une formule conjecturale pour le motif (cf. [12]).

Dans cet article, nous suivons une autre stratégie, expliquée dans [6], pour (tenter de) démontrer les conjectures de Hausel et Rodriguez-Villegas.

1.2. **Comptage de points.** Supposons toujours que n est premier au degré e et que le diviseur est canonique ou de degré strictement supérieur à $2g_C - 2$, où g_C est le genre de la courbe C . Dans cette situation, Nitsure a construit l'espace de modules des fibrés de Hitchin stables, qui est encore une variété quasi projective et lisse, ainsi qu'un morphisme propre, dit de Hitchin, de cette variété vers un espace affine. Supposons de plus que le corps de base k est un corps fini. Un argument d'homotopie qui utilise une action du groupe multiplicatif montre que la cohomologie de cet espace de modules est pure. Dès lors, il suffit de calculer le nombre de points de l'espace de modules sur les corps finis pour obtenir ses nombres de Betti. Dans [6], on explique comment ce nombre de points s'exprime à l'aide d'une intégrale nilpotente, réminiscente de la partie unipotente de la formule des traces d'Arthur. Cette intégrale est une intégrale adélique de la forme suivante

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_D(g) dg \tag{1.2.1}$$

où F est le corps des fonctions de C , \mathbb{A} l'anneau des adèles de F et G le groupe $GL(n)$. L'ensemble $G(\mathbb{A})^e$ est l'ensemble des éléments adéliques de G de degré $-e$. Le quotient

$G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ est muni d'une mesure invariante convenablement normalisée pour laquelle le volume est fini. La fonction K_D est la valeur en $T = 0$ de la fonction suivante

$$K_{D,T}(g) = \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T) K_D^P(\delta g)$$

où P parcourt les sous-groupes paraboliques standards de G et

$$K_D^P(g) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X + U)g) dU.$$

On a noté $P = M_P N_P$ la décomposition de Levi standard de P où N_P est le radical unipotent de P et M_P son facteur de Levi standard, $\mathcal{N}^{M_P} \subset \mathfrak{m}_P(F)$ est l'ensemble des éléments nilpotents F -rationnels de l'algèbre de Lie \mathfrak{m}_P de M_P et dU est une mesure de Haar sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})$ de $N_P(\mathbb{A})$. La fonction $\mathbf{1}_D$ est une fonction caractéristique liée au diviseur D . Pour le lecteur peu familier des travaux d'Arthur, les notations a_P^G , $\hat{\tau}_P$ et H_P se trouvent aux §§ 2.2, 2.3 et 3.3. Soit (\mathcal{N}^G) l'ensemble fini des $G(F)$ -orbites nilpotentes dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(F)$ de $G(F)$. Pour tout $\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)$, on introduit la fonction suivante de la variable $g \in G(\mathbb{A})$

$$K_{D,\mathcal{O}}^P(g) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X + U)g) dU,$$

où la somme porte sur les $X \in \mathcal{N}^{M_P}$ dont l'induite de Lusztig-Spaltenstein selon P (cf. § 4) est l'orbite \mathcal{O} . On a évidemment

$$K_D^P(g) = \sum_{\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)} K_{D,\mathcal{O}}^P(g).$$

On pose aussi

$$K_{D,T,\mathcal{O}}(g) = \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_B(\delta g) - T) K_{D,\mathcal{O}}^P(\delta g),$$

de sorte que l'on a

$$K_{D,T}(g) = \sum_{\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)} K_{D,T,\mathcal{O}}(g).$$

Voici le premier résultat de notre article. Par quasi-polynôme, on entend polynôme à coefficients périodiques.

Théorème 1.2.1 (cf. corollaire 6.2.2). *Pour tout paramètre T , l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}(g) dg$$

converge absolument. De plus, la dépendance en le paramètre T de l'intégrale est quasi polynomiale.

En particulier, on a le développement suivant

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T}(g) dg = \sum_{\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}(g) dg.$$

Le mérite du théorème précédent est de ramener le problème du comptage des fibrés de Hitchin au calcul orbite par orbite \mathcal{O} de l'intégrale

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}(g) dg$$

en $T = 0$. On a une interprétation en termes de comptage de cette intégrale. C'est l'objet du théorème suivant. On y utilise les notions de cardinal d'un groupoïde et de T -semi-stabilité d'un fibré vectoriel pour lesquelles on renvoie simplement à [6].

Théorème 1.2.2 (cf. théorème 6.2.1). *Pour T assez profond dans la chambre de Weyl positive et assez loin des murs, la partie quasi-polynomiale en T du cardinal du groupoïde des fibrés de Hitchin (\mathcal{E}, θ) de rang n et degré e , dont le fibré vectoriel sous-jacent \mathcal{E} est T -semi-stable et l'endomorphisme θ est génériquement dans l'orbite \mathcal{O} , est donnée par l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}(g) dg. \tag{1.2.2}$$

Pour faire le lien avec le théorème 6.2.1 du corps de l'article, le cardinal dudit groupoïde s'exprime à l'aide du dictionnaire adèles-fibrés de Weil par l'intégrale suivante :

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} F^G(g, T) \sum_{X \in \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg) dg \tag{1.2.3}$$

où $F^G(g, T)$ est la fonction caractéristique du compact de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ formé des g tels que le fibré correspondant est T -semi-stable (pour plus de détails sur ces aller-retours entre adèles et fibrés, comptage et intégrales, on renvoie encore une fois le lecteur à [6]). En particulier, l'intégrale ci-dessus est évidemment convergente. L'existence d'un quasi-polynôme en T asymptotique à (1.2.3) est l'analogie d'un résultat d'Arthur sur les corps de nombres (cf. [3], théorème 4.2).

Pour certaines orbites \mathcal{O} , il est possible de donner la valeur de l'intégrale (1.2.2). C'est l'autre résultat majeur de cet article. Ces orbites sont de la forme suivante : on fixe un diviseur $d \geq 1$ de n et soit $r = n/d$; ce sont les orbites des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}(F)$ dont la décomposition de Jordan possède d blocs de taille r . Parmi celles-là, on trouve l'orbite nulle qui correspond à $d = n$ et l'orbite régulière qui correspond à $d = 1$. La réponse obtenue s'exprime en termes du groupe $\widehat{G}' = SL(n, \mathbb{C})$ dont l'apparition n'est pas surprenante : c'est le dual complexe de Langlands du groupe $PGL(n)$ et ce dernier intervient naturellement car la notion de stabilité est invariante par tensorisation par un fibré en droites. Soit $\widehat{M} \subset \widehat{G}'$ le sous-groupe de Levi « standard » de \widehat{G}' , qui stabilise les r sous-espaces de \mathbb{C}^n de dimension d en somme directe engendrés par les d -uplets de vecteurs « consécutifs » de la base canonique de \mathbb{C}^n . Pour $\widehat{P} \subset \widehat{G}'$ sous-groupe parabolique standard de \widehat{G}' de facteur de Levi \widehat{M} , on définit une fonction rationnelle sur le tore $Z_{\widehat{M}}^0$ (composante neutre du centre de \widehat{M}) par

$$\Phi_{C,D}^d(t) = \prod_{\varpi} Z_{C,D}^d(t^{\varpi}),$$

où le produit est pris sur l'ensemble des poids fondamentaux \widehat{P} -dominants et où l'on introduit la fraction rationnelle de la variable formelle X

$$Z_{C,D}^d(X) = X^{-d \deg(D)} Z_C(q^{-1}X) Z_C(q^{-2}X) \dots Z_C(q^{-d}X),$$

où Z_C est la fonction zêta de la courbe C et q est le cardinal du corps de base k . On pose aussi pour tout $e \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in Z_{\widehat{M}}^0$

$$\Psi_{C,D}^{d,e}(t) = \frac{1}{n \cdot r!} \sum_{z \in \mu_n} \sum_{w \in \mathfrak{S}_r} z^{-de} \Phi_{C,D}^d(w \cdot (tz)).$$

Ici, on identifie $Z_{\widehat{M}}^0$ à $(\mathbb{C}^\times)^r$ sur lequel agit naturellement le groupe de permutation \mathfrak{S}_r d'ordre $r!$. Le groupe μ_n des racines n -ièmes de l'unité s'identifie naturellement au centre de \widehat{G}' . *A priori*, la fonction rationnelle $\Psi_{C,D}^{d,e}(t)$ a un pôle en $t = 1$ sauf si $d = n$, auquel cas $\widehat{P} = \widehat{G}$ et $\Psi_{C,D}^{d,e}(t) = 1$.

Théorème 1.2.3 (cf. théorème 7.1.1).

1. La fonction rationnelle $\Psi_{C,D}^{d,e}(t)$ n'a pas de pôle en $t = 1$.
2. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}(F)$ l'orbite nilpotente des éléments dont la décomposition de Jordan est formée de d blocs de taille r . Lorsque e est premier à r , l'intégrale (1.2.2) ci-avant associée à \mathcal{O} et à $T = 0$ est égale à

$$q^{n(n-d) \deg(D)/2} q^{nd(g_C-1)} Z_C^*(q^{-1}) Z_C(q^{-2}) \dots Z_C(q^{-d}) \Psi_{C,D}^{d,e}(1)$$

où $Z_C^*(X) = (1 - qX) Z_C(X)$.

Lorsque $d = n$, l'intégrale (1.2.2) est égale au volume de $G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e$, on a $\Psi_{C,D}^{d,e}(1) = 1$ et la formule

$$q^{n^2(g_C-1)} Z_C^*(q^{-1}) Z_C(q^{-2}) \dots Z_C(q^{-n})$$

n'est autre que la formule de Siegel pour ce volume.

1.3. Cet article résout donc partiellement le problème du comptage des fibrés de Hitchin : il manque encore le calcul des intégrales (1.2.2) pour les orbites restantes (c'est-à-dire non régulières par blocs). Mentionnons que dans [6], un raffinement des conjectures de Hausel–Rodriguez-Villégas et Mozgovoy est énoncé, qui donne conjecturalement la valeur des intégrales (1.2.2) en $T = 0$. Dans [6], il est également vérifié que le théorème 1.2.3 est compatible en rang ≤ 3 avec cette conjecture raffinée.

Comme on l'a compris, notre méthode consiste à expliciter l'intégrale arthurienne (1.2.1) qui est essentiellement la partie nilpotente de la formule des traces pour la fonction $\mathbf{1}_D$. De fait, les méthodes employées ici doivent certainement s'adapter à des fonctions tests autres que les fonctions $\mathbf{1}_D$ et également au cas où F est un corps de nombres. Signalons que dans les cas d'un corps de nombres et de l'orbite régulière, une formule du même type que celle du théorème 1.2.3 était connue indépendamment de E. Lapid et T. Finis qui en a parlé lors d'un exposé à Orsay.

1.4. Organisation de l'article. Le cœur de l'article se trouve à la section 6 où est prouvé le théorème 1.2.2. Une fois ce résultat en poche, on peut dans le cas d'une orbite régulière

par blocs « renormaliser » l'intégrale (1.2.2). C'est l'objet de la section 7 dans laquelle on trouve la démonstration du théorème 1.2.3. L'intégrale apparaît alors comme une valeur spéciale d'une série que l'on a calculée auparavant dans la section 3. Cependant, pour obtenir une expression raisonnablement simple pour cette valeur spéciale, il nous a fallu développer à la section 2 une variante des résultats combinatoires qu'Arthur utilise dans ses développements sur la formule des traces. Cette section est aussi d'un intérêt indépendant : nous l'avons donc rédigée dans le cadre d'un groupe réductif quelconque. Les sections restantes 4 et 5 sont consacrées à quelques rappels utiles.

2. Combinatoire des (G, M) -cofamilles

2.1. Introduction. Dans cette section, on développe la notion de (G, M) -cofamille, très proche de celle de (G, M) -famille d'Arthur (cf. définitions 2.10.1 et 2.18.1). Les résultats de cette section seront utilisés ensuite pour obtenir des formules explicites pour certaines intégrales adéliques. Bien que notre article se focalise sur le groupe $GL(n)$, les méthodes employées doivent pouvoir s'adapter à d'autres groupes réductifs. À des fins de référence future, nous avons rédigé cette section dans le cadre général d'un groupe réductif sur un corps quelconque. Les principaux résultats de cette section sont formulés dans les théorèmes 2.12.1 et 2.19.1.

Les notations sont, à quelques variantes près, celles qui se sont imposées depuis les travaux d'Arthur sur la formule des traces (cf. [1, 2] ou encore [5]). Nous les rappelons brièvement dans les prochains paragraphes.

2.2. Notations. Soit G un groupe réductif sur un corps F quelconque. On fixe un sous-tore déployé maximal de G dont on note T le centralisateur. Sauf indication contraire, par « sous-groupe parabolique de G », on entend un sous-groupe parabolique de G au sens usuel qui, de plus, est défini sur F et contient T . Un tel sous-groupe parabolique possède alors un unique facteur de Levi défini sur F et contenant T . On appelle simplement sous-groupes de Levi de tels sous-groupes de G . Pour un sous-groupe H de G , on note $\mathcal{L}^G(H)$, respectivement $\mathcal{F}^G(H)$, l'ensemble des sous-groupes de Levi, respectivement sous-groupes paraboliques, de G qui contiennent H . Lorsque H est un sous-groupe de Levi, on note $\mathcal{P}^G(H)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de facteur de Levi H . Ces notations valent encore si l'on remplace G par un sous-groupe de Levi de G ou par un sous-groupe parabolique Q de G (dans ce dernier cas, l'exposant Q signifie que l'on se limite à des sous-groupes inclus dans Q). Lorsque le contexte est clair, l'omission de l'exposant (resp. du groupe H) signifie que l'on considère une situation relative à G (resp. que l'on prend $H = T$). Par exemple, l'ensemble des sous-groupes de Levi de G est noté simplement \mathcal{L} au lieu de $\mathcal{L}^G(T)$.

Pour tout $P \in \mathcal{F}$, on a la décomposition de Levi $P = M_P N_P$ où M_P est le facteur de Levi de P qui contient T et N_P est le radical unipotent de P . Soit A_P le tore central déployé maximal de M_P et $X^*(A_P)$ le groupe des caractères rationnels de ce tore. Ce dernier est un réseau dans l'espace vectoriel réel

$$a_{P, \mathbb{R}}^* = X^*(A_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Soit $X^*(M_P)$ le groupe des caractères rationnels de M_P définis sur F . Le morphisme de restriction $X^*(M_P) \rightarrow X^*(A_P)$ induit un isomorphisme $X^*(M_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow a_{P,\mathbb{R}}^*$. Comme cet espace ne dépend que de M_P , il sera aussi noté $a_{M_P,\mathbb{R}}^*$. Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset Q$, on a un morphisme de restriction $X^*(A_P) \rightarrow X^*(A_Q)$ d'où une projection $a_{P,\mathbb{R}}^* \rightarrow a_{Q,\mathbb{R}}^*$. En utilisant l'inclusion $M_P \subset M_Q$ et dualement la restriction des groupes de caractères correspondants, on a également une inclusion $a_{Q,\mathbb{R}}^* \rightarrow a_{P,\mathbb{R}}^*$. On note sans exposant $*$ les espaces vectoriels réels duaux. L'orthogonal de $a_{Q,\mathbb{R}}$ dans $a_{P,\mathbb{R}}^*$ est noté indifféremment $a_{P,\mathbb{R}}^{Q,*}$ ou $a_{M_P,\mathbb{R}}^{M_Q,*}$. On a des décompositions en somme directe

$$a_{P,\mathbb{R}}^* = a_{P,\mathbb{R}}^{Q,*} \oplus a_{Q,\mathbb{R}}^*,$$

et de même pour les espaces duaux. Finalement, on réserve la notation sans indice \mathbb{R} pour les \mathbb{C} -espaces obtenus par extension des scalaires, par exemple

$$a_P^* = a_{P,\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

On a donc une décomposition en \mathbb{R} -espaces $a_P^* = a_{P,\mathbb{R}}^* \oplus ia_{P,\mathbb{R}}^*$ où $i \in \mathbb{C}$ vérifie $i^2 = -1$, et on note $\Re(\lambda)$ et $\Im(\lambda)$ les parties réelle et imaginaire de $\lambda \in a_P^*$.

Le groupe de Weyl de (G, T) agit sur $a_{P,\mathbb{R}}^*$ et on fixe sur cet espace un produit euclidien invariant par W . La décomposition ci-dessus est alors orthogonale. On met sur $a_{P,\mathbb{R}}^*$ la mesure euclidienne.

Pour tout $P \in \mathcal{P}(T)$ et tout $Q \in \mathcal{F}(P)$, soit Δ_P^Q , respectivement $\Delta_P^{Q,\vee}$, l'ensemble des racines, respectivement des coracines, simples de T dans $N_P \cap M_Q$. Ces ensembles forment des bases respectivement de $a_P^{Q,*}$ et a_P^Q . Soient $\hat{\Delta}_P^Q$ et $\hat{\Delta}_P^{Q,\vee}$ les bases duales, respectivement bases de a_P^Q et $a_P^{Q,*}$. Lorsque l'on omet l'exposant Q , cela sous-entend que l'on prend $Q = G$.

On obtient des bases Δ_Q et Δ_Q^\vee de $a_Q^{G,*}$ et a_Q^G par projection des ensembles $\Delta_P - \Delta_P^Q$ et $\Delta_P^\vee - \Delta_P^{Q,\vee}$. Comme la notation le suggère, ces bases ne dépendent pas du choix de $P \in \mathcal{P}^Q(T)$. Par dualité, on obtient des bases $\hat{\Delta}_Q$ et $\hat{\Delta}_Q^\vee$ de a_Q^G et $a_Q^{G,*}$. Plus généralement, par le même procédé, pour tout $R \in \mathcal{F}(Q)$, on définit des ensembles Δ_Q^R , $\hat{\Delta}_Q^R$, etc., le cas $R = G$ redonnant la construction précédente. On observera que l'on a par construction $\Delta_Q^R = \Delta_{Q \cap M_R}^{M_R}$, où dans le membre de droite, la construction est relative au groupe réductif M_R .

Soit $\mathbb{Z}(\Delta_P^{Q,\vee})$, respectivement $\mathbb{Z}(\Delta_P^Q)$, le sous- \mathbb{Z} -module de a_P^Q , respectivement $a_P^{Q,*}$ engendré par $\Delta_P^{Q,\vee}$, respectivement Δ_P^Q .

2.3. Fonctions τ et $\hat{\tau}$. Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset Q$, soient τ_P^Q et $\hat{\tau}_P^Q$ les fonctions caractéristiques respectives des ensembles

$$\{H \in a_{T,\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_P^Q\}$$

et

$$\{H \in a_{T,\mathbb{R}} \mid \langle \varpi, H \rangle > 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P^Q\}.$$

Soit $a_P^{Q,+} \subset a_{P,\mathbb{R}}^Q$ la chambre de Weyl ouverte définie par la condition $\tau_P^Q = 1$. Soit

$$(a_P^{Q,*})^+ \subset a_{P,\mathbb{R}}^{Q,*}$$

la chambre de Weyl ouverte définie par la condition $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee}$. On note $\overline{a_P^{Q,+}}$ la chambre de Weyl fermée, donc définie par des inégalités larges.

Les fonctions τ et $\hat{\tau}$ vérifient « les relations d'orthogonalité » suivantes où $H \in a_T$ et où l'on somme sur les sous-groupes paraboliques R tels que $P \subset R \subset Q$ (cf. [5], formules (8.10) et (8.11))

$$\sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_P^R)} \tau_P^R(H) \hat{\tau}_R^Q(H) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \subsetneq Q \\ 1 & \text{si } P = Q \end{cases} \tag{2.3.1}$$

et

$$\sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_P^R)} \hat{\tau}_P^R(H) \tau_R^Q(H) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \subsetneq Q \\ 1 & \text{si } P = Q. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

2.4. Projection. Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset Q$ et tout $\lambda \in a_T^*$, soit λ_P^Q la projection de λ sur $(a_P^Q)^*$ selon la décomposition $a_T^* = a_T^{P,*} \oplus (a_P^Q)^* \oplus a_Q^*$. Cette décomposition ne dépend que des facteurs de Levi de P et Q ; il en est de même pour la projection. L'omission de l'exposant (resp. de l'indice) signifie que l'on prend $Q = G$, respectivement $P \in \mathcal{P}(T)$.

2.5. Fractions rationnelles θ_P et $\hat{\theta}_P$. Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset Q \subset G$, on introduit les fractions rationnelles de la variable $\lambda \in a_T^*$

$$\hat{\theta}_P^Q(\lambda) = \frac{\hat{v}_P^Q}{\prod_{\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^Q} \langle \lambda, \varpi^\vee \rangle}$$

où \hat{v}_P^Q est le covolume dans a_P^Q du réseau engendré par $\hat{\Delta}_P^Q$ et

$$\theta_P^Q(\lambda) = \frac{v_P^Q}{\prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}$$

où v_P^Q est le covolume dans a_P^Q du réseau engendré par Δ_P^Q .

Remarque 2.5.1 Ces fonctions $\hat{\theta}_P^Q(\lambda)$ et $\theta_P^Q(\lambda)$ sont en fait les inverses de celles introduites et notées de la même façon par Arthur (cf. [2] p. 15). Par ailleurs, elles ne dépendent que de λ_P^Q . On a

$$\hat{\theta}_P^Q(\lambda) = \hat{\theta}_{P \cap M_Q}^{M_Q}(\lambda_P^Q) \quad \text{et} \quad \theta_P^Q(\lambda) = \theta_{P \cap M_Q}^{M_Q}(\lambda_P^Q). \tag{2.5.1}$$

À l'instar des fonctions τ et $\hat{\tau}$, les fonctions $\hat{\theta}_P^Q(\lambda)$ et $\theta_P^Q(\lambda)$ vérifient le lemme suivant.

Lemme 2.5.2 (Arthur).

$$\sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_P^R)} \hat{\theta}_P^R(\lambda) \theta_R^Q(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \subsetneq Q \\ 1 & \text{si } P = Q \end{cases} \tag{2.5.2}$$

et

$$\sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_P^R)} \theta_P^R(\lambda) \hat{\theta}_R^Q(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \subsetneq Q \\ 1 & \text{si } P = Q. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Démonstration. La relation (2.5.2) se déduit de (2.3.1) par une transformation de Fourier (cf. la formule (6.1) p. 33 de [2]). De même, (2.5.3) se déduit de (2.3.2). \square

2.6. Fonctions $c_P^Q(\varphi, \lambda)$. Soient P_0 un sous-groupe parabolique et φ une fonction sur $a_{P_0}^*$. Soit φ^P la fonction sur $a_{P_0}^*$ définie par

$$\varphi^P(\lambda) = \varphi(\lambda^P).$$

Cette fonction ne dépend que de la projection λ^P de λ sur $a_{P_0}^{P,*}$. Pour tous sous-groupes paraboliques $P_0 \subset P \subset Q \subset G$, on pose

$$c_P^Q(\varphi, \lambda) = \sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_R^Q)} \hat{\theta}_P^R(\lambda) \varphi^R(\lambda) \theta_R^Q(\lambda). \tag{2.6.1}$$

Remarque 2.6.1 Cette définition est formellement très proche de la définition (6.3) p. 33 de [2]. Hormis un signe, la seule différence notable est que l'on considère la fonction $\varphi(\lambda^R)$ et non $\varphi(\lambda_R)$ comme chez Arthur. On prendra garde cependant que nos fonctions θ sont les inverses de celles d'Arthur. Lorsque l'on prend la fonction 1 (constante égale à 1), on a $c_P^Q(1, \lambda) = 0$ sauf si $P = Q$, auquel cas on a $c_Q^Q(1, \lambda) = 1$ (c'est une conséquence immédiate du lemme 2.5.2).

Dans la suite, en s'inspirant de [2], section 6, on développe les propriétés de ces fonctions.

Lemme 2.6.2 On a

$$c_P^Q(\varphi, \lambda) = c_{M_Q \cap P}^{M_Q}(\varphi^Q, \lambda^Q).$$

Démonstration. Elle découle immédiatement de (2.5.1). \square

Lemme 2.6.3 Pour tous sous-groupes paraboliques $P_0 \subset P \subset Q \subset G$, on a la formule d'inversion suivante

$$\varphi^Q(\lambda) \hat{\theta}_P^Q(\lambda) = \sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} c_P^R(\varphi, \lambda) \hat{\theta}_R^Q(\lambda).$$

Démonstration. En utilisant la formule (2.6.1), on obtient que le second membre vaut

$$\begin{aligned} & \sum_{P \subset S \subset R \subset Q} (-1)^{\dim(a_S^R)} \hat{\theta}_P^S(\lambda) \varphi^S(\lambda) \theta_S^R(\lambda) \hat{\theta}_R^Q(\lambda) \\ &= \sum_{P \subset S \subset Q} (-1)^{\dim(a_S^Q)} \hat{\theta}_P^S(\lambda) \varphi^S(\lambda) \sum_{S \subset R \subset Q} (-1)^{\dim(a_R^Q)} \theta_S^R(\lambda) \hat{\theta}_R^Q(\lambda). \end{aligned}$$

Par (2.5.3), la somme intérieure vaut 0 si $S \subsetneq Q$ et 1 si $S = Q$. On trouve donc

$$\hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi^Q(\lambda)$$

qui est bien le premier membre. \square

Théorème 2.6.4 *Pour tous sous-groupes paraboliques $P_0 \subset P \subset Q \subset G$ et toute fonction φ holomorphe sur un voisinage de 0 dans $a_{P_0}^*$, la fonction $c_P^Q(\varphi, \lambda)$ est également holomorphe sur un voisinage de 0 dans $a_{P_0}^*$.*

La démonstration du théorème 2.6.4, qui sera donnée au § 2.8, s’inspire de la preuve du lemme 6.1 de [2]. Auparavant, nous aurons besoin des constructions auxiliaires du paragraphe suivant.

2.7. Quelques constructions auxiliaires. Dans ce paragraphe, on fixe $P_0 \in \mathcal{F}(T)$ un sous-groupe parabolique et φ une fonction holomorphe sur un voisinage de 0 dans $a_{P_0}^*$.

Soit P un sous-groupe parabolique contenant P_0 . Soit $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha \in \Delta_P^G}$ la base de a_P^G duale de Δ_P^G . Pour tout $\lambda \in a_T^*$, on a

$$\lambda - \lambda^P - \sum_{\alpha \in \Delta_P^G} \langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle \alpha \in a_G^*.$$

Pour tout sous-groupe parabolique Q de G contenant P , on pose

$$\tilde{\lambda}^{Q/P} = \lambda^P + \sum_{\alpha \in \Delta_P^Q} \langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle \alpha.$$

Si $\lambda \in (a_T^Q)^*$, on a $\tilde{\lambda}^{Q/P} = \lambda$. L’application $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}^{Q/P}$ est donc un projecteur de a_T^* sur $(a_T^Q)^*$ que l’on ne confondra pas avec le projecteur $\lambda \mapsto \lambda^Q$. On a cependant

$$\tilde{\lambda}^{P/P} = \lambda^P.$$

Dualement, on définit un opérateur analogue sur les fonctions par

$$\tilde{\varphi}^{Q/P}(\lambda) = \varphi(\tilde{\lambda}^{Q/P}). \tag{2.7.1}$$

On introduit également la fonction

$$\tilde{c}^{Q/P}(\varphi, \lambda) = \hat{\theta}_P^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P}) \sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_R^Q)} \tilde{\varphi}^{R/P}(\lambda). \tag{2.7.2}$$

Lemme 2.7.1 *La fonction $\tilde{c}^{Q/P}(\varphi, \lambda)$ est holomorphe sur un voisinage de 0 dans $a_{P_0}^*$.*

Démonstration. Il s’agit de prouver que la somme alternée

$$\sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_R^Q)} \tilde{\varphi}^{R/P}(\lambda)$$

s’écrit comme le produit d’une fonction holomorphe sur un voisinage de 0 dans $a_{P_0}^*$ par

$$\prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} \langle \tilde{\lambda}^{Q/P}, \varpi_\alpha^\vee \rangle.$$

Par la formule de Taylor, il faut et il suffit de montrer que cette somme alternée s’annule pour les λ tels qu’il existe $\alpha \in \Delta_P^Q$

$$\langle \tilde{\lambda}^{Q/P}, \varpi_\alpha^\vee \rangle = 0, \tag{2.7.3}$$

où $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha \in \Delta_P^Q}$ est la base duale de a_P^Q duale de Δ_P^Q . On a

$$\tilde{\lambda}^{Q/P} = \lambda^P + \sum_{\beta \in \Delta_P^Q} \langle \lambda, \varpi_\beta^\vee \rangle \beta$$

et la condition (2.7.3) implique

$$\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle = 0. \tag{2.7.4}$$

Soient $\alpha \in \Delta_P^Q$ et $\lambda \in a_T$ tel que $\langle \tilde{\lambda}^{Q/P}, \varpi_\alpha^\vee \rangle = 0$. Les sous-groupes paraboliques R tels que $P \subset R \subset Q$ vont par paires (R, R') caractérisées par $\Delta_P^{R'} = \Delta_P^R \cup \{\alpha\}$. On a

$$\tilde{\lambda}^{R'/P} = \lambda^P + \sum_{\beta \in \Delta_P^R} \langle \lambda, \varpi_\beta^\vee \rangle \beta + \langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle \alpha.$$

Par conséquent, (2.7.4) implique que l'on a

$$\tilde{\lambda}^{R'/P} = \tilde{\lambda}^{R/P}$$

et donc

$$\tilde{\varphi}^{R'/P}(\lambda) = \tilde{\varphi}^{R/P}(\lambda)$$

d'où l'annulation recherchée. □

Lemme 2.7.2 *Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset R \subset Q$, on a*

$$\hat{\theta}_P^R(\tilde{\lambda}^{R/P})\hat{\theta}_R^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P}) = \hat{\theta}_P^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P}).$$

Démonstration. Il résulte des définitions du §2.5 et de l'inclusion $\hat{\Delta}_R^Q \subset \hat{\Delta}_P^Q$ que pour prouver l'égalité recherchée, il suffit de vérifier l'égalité

$$\prod_{\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^R} \langle \tilde{\lambda}^{R/P}, \varpi^\vee \rangle = \prod_{\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^Q - \hat{\Delta}_R^Q} \langle \tilde{\lambda}^{Q/P}, \varpi^\vee \rangle. \tag{2.7.5}$$

L'ensemble $\hat{\Delta}_P^Q - \hat{\Delta}_R^Q$ se décrit encore comme $\{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_P^R\}$. Comme on a

$$\tilde{\lambda}^{Q/P} = \lambda^P + \sum_{\alpha \in \Delta_P^Q} \langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle \alpha$$

et

$$\tilde{\lambda}^{R/P} = \lambda^P + \sum_{\alpha \in \Delta_P^R} \langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle \alpha$$

on a

$$\prod_{\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^R} \langle \tilde{\lambda}^{R/P}, \varpi^\vee \rangle = \prod_{\beta \in \Delta_P^R} \langle \lambda, \varpi_\beta^\vee \rangle$$

ce qui donne bien l'égalité (2.7.5). □

Lemme 2.7.3 *On a la formule d'inversion*

$$\hat{\theta}_P^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P})\tilde{\varphi}^{Q/P}(\lambda) = \sum_{\{R \mid P \subset R \subset Q\}} \hat{\theta}_R^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P})\tilde{c}^{R/P}(\varphi, \lambda)$$

où la somme est prise sur les sous-groupes paraboliques R .

Démonstration. Le second membre s'écrit

$$\sum_{\{R|P \subset S \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_S^R)} \tilde{\varphi}^{S/P}(\lambda) \hat{\theta}_P^R(\tilde{\lambda}^{R/P}) \hat{\theta}_R^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P}). \tag{2.7.6}$$

En utilisant le lemme 2.7.2, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{\{R|P \subset S \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_S^R)} \tilde{\varphi}^{S/P}(\lambda) \hat{\theta}_P^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P}) \\ &= \hat{\theta}_P^Q(\tilde{\lambda}^{Q/P}) \sum_{\{R|P \subset S \subset Q\}} \tilde{\varphi}^{S/P}(\lambda) \sum_{\{S|S \subset R \subset Q\}} (-1)^{\dim(a_S^R)}. \end{aligned}$$

Comme la somme alternée sur S est nulle sauf si $S = Q$, on obtient bien le second membre recherché. \square

2.8. Démonstration du théorème 2.6.4. En raisonnant par récurrence sur la dimension de G , on peut supposer que l'énoncé est vrai pour les sous-groupes de Levi propres de G . En utilisant le lemme 2.6.2, on en déduit que la fonction $c_P^Q(\varphi, \lambda)$ est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $a_{p_0}^*$ pour $Q \subsetneq G$. Il reste donc à prouver que la fonction $c_P^G(\varphi, \lambda)$ est holomorphe au voisinage de 0. On a $c_G^G(\varphi, \lambda) = \varphi(\lambda)$ et là encore par récurrence, on peut supposer que pour $P \subsetneq Q$, la fonction $c_Q^G(\varphi, \lambda)$ est holomorphe au voisinage de 0 pour toute fonction φ holomorphe au voisinage de 0.

Soit Q un sous-groupe parabolique contenant P . Soit $\mu = \lambda^Q$. Comme on a $\tilde{\mu}^{Q/P} = \mu$, on obtient

$$\hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi^Q(\lambda) = \hat{\theta}_P^Q(\mu) \varphi(\mu) = \hat{\theta}_P^Q(\tilde{\mu}^{Q/P}) \tilde{\varphi}^{Q/P}(\mu).$$

Le lemme 2.7.3 implique que l'on a

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi^Q(\lambda) &= \hat{\theta}_P^Q(\tilde{\mu}^{Q/P}) \tilde{\varphi}^{Q/P}(\mu) \\ &= \sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} \hat{\theta}_R^Q(\tilde{\mu}^{Q/P}) \tilde{c}^{R/P}(\varphi, \mu) \\ &= \sum_{\{R|P \subset R \subset Q\}} \hat{\theta}_R^Q(\lambda) \tilde{c}^{R/P}(\varphi, \lambda^Q). \end{aligned}$$

Si l'on insère cette dernière expression dans l'égalité

$$c_P^G(\varphi, \lambda) = \sum_{\{Q|P \subset Q \subset G\}} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi^Q(\lambda) \theta_Q^G(\lambda),$$

on obtient

$$c_P^G(\varphi, \lambda) = \sum_{\{R, Q|P \subset R \subset Q \subset G\}} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \hat{\theta}_R^Q(\lambda) \tilde{c}^{R/P}(\varphi, \lambda^Q) \theta_Q^G(\lambda). \tag{2.8.1}$$

Le terme $\tilde{c}^{P/P}(\varphi, \lambda^Q) = \tilde{\varphi}^{P/P}(\lambda^Q) = \varphi^P(\lambda^Q) = \varphi(\lambda^P)$ ne dépend pas de Q . Par conséquent, la contribution de $R = P$ vaut

$$\sum_{\{Q|P \subset Q \subset G\}} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \hat{\theta}_P^Q(\lambda^Q) \tilde{c}^{P/P}(\varphi, \lambda^Q) \theta_Q^G(\lambda) = \varphi(\lambda^P) c_P^G(1, \lambda) = 0$$

par le lemme 2.5.2. Pour tout R , on peut poser $\psi_R(\lambda) = \tilde{c}^{R/P}(\varphi, \lambda)$. Par le lemme 2.7.1, c'est une fonction holomorphe au voisinage de 0. On a alors l'égalité

$$c_P^G(\varphi, \lambda) = \sum_{\{R|P \subsetneq R \subset G\}} c_R^G(\psi_R, \lambda)$$

qui est bien holomorphe au voisinage de 0 puisque par hypothèse de récurrence, chaque $c_R^G(\psi_R, \lambda)$ l'est.

2.9. Sous-groupes paraboliques co-adjacents. Soit $M \in \mathcal{L}$ un sous-groupe de Levi. Introduisons la définition suivante.

Définition 2.9.1 On dit que deux éléments P_1 et P_2 de $\mathcal{P}(M)$ sont coadjacents si l'on a

$$|\Delta_{P_1} \cap \Delta_{P_2}| = |\Delta_{P_1}| - 1 = |\Delta_{P_2}| - 1.$$

Remarque 2.9.2 Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $\alpha \in \Delta_P$, on peut montrer qu'il existe une unique racine β de A_P dans N_P telle que l'ensemble

$$\{-\beta\} \cup (\Delta_P - \{\alpha\})$$

soit de la forme $\Delta_{P'}$ pour $P' \in \mathcal{P}(M)$. En particulier, P et P' sont coadjacents.

Par exemple, si P est un sous-groupe de Borel d'un groupe G déployé, on a $P' = {}^{w'}P$ où w est l'élément le plus long du groupe de Weyl de G et w' est l'élément le plus long du groupe de Weyl du sous-groupe de Levi maximal L de G défini par $\Delta_{P \cap L}^L = \Delta_P - \{\alpha\}$. La racine β est la plus grande racine qui a pour coefficient 1 sur α . Pour $G = GL(n)$, la racine β est simplement la plus grande racine¹.

Lemme 2.9.3 Soit P_1 et P_2 deux éléments distincts de $\mathcal{P}(M)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Les sous-groupes paraboliques P_1 et P_2 sont coadjacents.
2. Il existe un unique sous-groupe de Levi maximal $L \in \mathcal{L}(M)$ tel que
 - (a) $P_1 \cap L = P_2 \cap L$
 - (b) $\mathcal{P}(L) = \{LP_1, LP_2\}$.
3. Il existe un unique copoids $\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_{P_1}^\vee \cap (-\hat{\Delta}_{P_2}^\vee)$ tel que les ensembles respectifs des restrictions des éléments de $\hat{\Delta}_{P_1}^\vee - \{\varpi^\vee\}$ et $\hat{\Delta}_{P_2}^\vee - \{-\varpi^\vee\}$ à l'hyperplan de a_M défini par ϖ^\vee coïncident.

Démonstration. Montrons que 1 implique 2. Soient Q_1 et Q_2 les sous-groupes paraboliques maximaux Q_1 et Q_2 qui contiennent respectivement P_1 et P_2 , et qui sont déterminés par la condition

$$\Delta_{P_1}^{Q_1} = \Delta_{P_1} \cap \Delta_{P_2} = \Delta_{P_2}^{Q_2}.$$

Les groupes Q_1 et Q_2 ont le même facteur de Levi standard que l'on note L . Ce Levi L est maximal. Par le lemme 2.9.4 assertion 1 ci-dessous, les groupes Q_1 et Q_2 sont distincts donc nécessairement opposés au sens où $Q_1 \cap Q_2 = L$. On a par

¹Nous remercions le rapporteur pour ces remarques.

construction $P_1 \cap L = P_2 \cap L$. Le lemme 2.9.4, assertion 2, montre que l'on a $P_1 = (P_1 \cap L)N_{Q_1}$, d'où $Q_1 = LN_{Q_1} = LP_1$; de même pour P_2 . L'unicité de L résulte du fait que l'on a

$$\Delta_{P_1}^{LP_1} = \Delta_{L \cap P_1}^L = \Delta_{L \cap P_2}^L \subset \Delta_{P_1} \cap \Delta_{P_2}$$

et pour des raisons de cardinalité, cette inclusion est une égalité.

Montrons que 2 implique 3. Soit $Q_i = LP_i$ pour $i = 1, 2$. Les sous-groupes paraboliques maximaux et distincts Q_1 et Q_2 ont même facteur de Levi L : ils sont donc opposés. On a donc l'égalité de singleton $\Delta_{Q_1} = -\Delta_{Q_2}$ et dualement $\hat{\Delta}_{Q_1}^\vee = -\hat{\Delta}_{Q_2}^\vee$. Soit $\varpi_0^\vee \in \hat{\Delta}_{P_1}^\vee$ tel que $\hat{\Delta}_{Q_1}^\vee = \{\varpi_0^\vee\}$.

Pour $i = 1, 2$, on a

$$\hat{\Delta}_{Q_i}^\vee = \{\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_{P_i}^\vee \mid \langle \alpha, \varpi^\vee \rangle = 0 \ \forall \alpha \in \Delta_{P_i}^{Q_i}\} \tag{2.9.1}$$

de sorte que $\varpi_0^\vee \in \hat{\Delta}_{P_1}^\vee \cap (-\hat{\Delta}_{P_2}^\vee)$. L'hyperplan de a_M défini par ϖ_0^\vee est le sous-espace a_M^L . La projection de $\hat{\Delta}_{P_i}^\vee - \hat{\Delta}_{Q_i}^\vee$ sur $a_M^{L,*}$ n'est autre que la base duale de la base $\Delta_{P_i}^{Q_i}$. Comme cette dernière ne dépend pas de i (c'est simplement $\Delta_{P_i \cap L}^L$), la projection en question ne dépend pas non plus de i . L'unicité sera démontrée un peu plus bas.

Enfin 3 implique 1. Soit

$$\Delta'_{P_i} = \{\alpha \in \Delta_{P_i} \mid \langle \alpha, \varpi^\vee \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-ensemble de Δ_{P_i} de complémentaire un singleton. Cet ensemble de racines est une base de l'hyperplan $\langle \lambda, \varpi^\vee \rangle = 0$, duale des restrictions des éléments de $\hat{\Delta}_{P_i} - \{\pm\varpi^\vee\}$. Comme ces restrictions ne dépendent pas de i , il en est de même de Δ'_{P_i} . L'assertion 1 s'en déduit.

Revenons à la question de l'unicité dans l'assertion 3. Supposons que l'on ait un autre copoids $\pi^\vee \neq \varpi^\vee$ qui satisfait à la partie existence de l'assertion 3. Dans ce cas, on peut lui associer comme ci-dessus un sous-ensemble $\Delta''_{P_i} \subset \Delta_{P_i}$ distinct de Δ'_{P_i} et qui ne dépend pas de i . On a donc $\Delta_{P_i} = \Delta'_{P_i} \cup \Delta''_{P_i}$ ne dépend pas de i , d'où $\hat{\Delta}_{P_1}^\vee = \hat{\Delta}_{P_2}^\vee$, ce qui n'est pas possible sous l'hypothèse $\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_{P_1}^\vee \cap (-\hat{\Delta}_{P_2}^\vee)$. □

Dans la démonstration précédente, on a utilisé le lemme suivant dont on laisse la preuve au lecteur.

Lemme 2.9.4 *Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. Alors*

1. *les ensembles $\mathcal{P}^Q(M)$, pour $Q \in \mathcal{P}(L)$, sont deux à deux disjoints ;*
2. *pour tout $Q \in \mathcal{P}(L)$, l'application*

$$P \mapsto P \cap L$$

induit une bijection de $\mathcal{P}^Q(M)$ sur $\mathcal{P}^L(M)$ d'inverse $P' \mapsto P'N_Q$.

2.10. Les (G, M) -cofamilles. Arthur a introduit la notion de (G, M) -famille : ce sont des familles de fonctions qui sont indexées par les sous-groupes paraboliques de même facteur de Levi M et qui vérifient certaines conditions de recollement pour des sous-groupes

paraboliques adjacents (cf. [2] p. 36). Dans la suite de l'article, nous aurons besoin de la notion suivante, qui s'inspire de la définition d'Arthur et qui est relative à la coadjacence.

Définition 2.10.1 Soit M un sous-groupe de Levi de G . Une (G, M) -cofamille sur un ouvert Ω de \mathfrak{a}_M^* est une famille $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ de fonctions holomorphes sur Ω , qui est indexée par les sous-groupes paraboliques P de Levi M et qui vérifie la condition de recollement suivante :

pour tout couple $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}(M)^2$ formé d'éléments coadjacents, on a

$$\varphi_{P_1}(\mu) = \varphi_{P_2}(\mu)$$

pour tout $\mu \in \mathfrak{a}_M^{L,*} \cap \Omega$, où $L \in \mathcal{L}(M)$ est le sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{L}^G(M)$ maximal déterminé par P_1 et P_2 (cf. assertion 2 du lemme 2.9.3).

Remarque 2.10.2 On peut reformuler la condition de recollement ainsi : pour tout couple $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}(M)^2$ de sous-groupes coadjacents, la fonction $\varphi_{P_1} - \varphi_{P_2}$ est divisible par $\langle \lambda, \varpi^\vee \rangle$ dans l'anneau des fonctions holomorphes sur Ω , où ϖ^\vee est le copoids donné par l'assertion 3 du lemme 2.9.3.

Lemme 2.10.3 Soit φ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, soit φ_P la fonction sur \mathfrak{a}_M^* définie par

$$\varphi_P(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} \varphi(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle).$$

La famille $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ est une (G, M) -cofamille sur l'ouvert des $\lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ tels que $\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle \in \Omega$.

Démonstration. Soient P et P' coadjacents. Soit $\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^\vee \cap (-\hat{\Delta}_{P'}^\vee)$ qui satisfait l'assertion 3 du lemme 2.9.3. Il s'agit de vérifier que les fonctions φ_P et $\varphi_{P'}$ coïncident sur l'hyperplan défini par ϖ^\vee . C'est évident pour les facteurs associés à $\pm \varpi^\vee$ qui valent tous deux $\varphi(0)$. Les autres facteurs sont indexés par des coracines qui ont même restriction à l'hyperplan défini par ϖ^\vee et sont donc égaux deux à deux. \square

Lemme 2.10.4 Soit $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille. Soient $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$. Pour tout $P \in \mathcal{P}^L(M)$ et $\lambda \in (\mathfrak{a}_M^L)^*$, on pose

$$\varphi_P^Q(\lambda) = \varphi_{PN_Q}(\lambda).$$

La famille $\varphi^Q = (\varphi_P^Q)_{P \in \mathcal{P}^L(M)}$ est une (L, M) -cofamille. Elle ne dépend pas du choix de $Q \in \mathcal{P}(L)$. On la note φ^L dans la suite.

Démonstration. Soient P_1 et P_2 deux éléments de $\mathcal{P}^L(M)$ coadjacents. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\tilde{P}_i = P_i N_Q$. On a l'égalité

$$\Delta_{\tilde{P}_1} - \Delta_{\tilde{P}_1}^Q = \Delta_{\tilde{P}_2} - \Delta_{\tilde{P}_2}^Q.$$

Comme $\Delta_{\tilde{P}_i}^Q = \Delta_{P_i}$, les sous-groupes paraboliques \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 sont co-adjacents. Soit \tilde{S} le Levi maximal qu'ils définissent. Alors $S = \tilde{S} \cap L$ est le Levi maximal défini par P_1 et P_2 . Pour tout $\mu \in a_M^{S,*} \subset a_M^{\tilde{S},*}$, on a

$$\varphi_{P_1}^Q(\mu) = \varphi_{\tilde{P}_1}(\mu) = \varphi_{\tilde{P}_2}(\mu) = \varphi_{P_2}^Q(\mu),$$

les égalités extrêmes résultent des définitions alors que l'égalité du milieu est la condition de recollement pour la cofamille de départ. La famille φ^Q est donc une (L, M) -cofamille.

Montrons ensuite qu'elle ne dépend pas du choix de Q . Pour tout couple (Q, Q') d'éléments de $\mathcal{P}(L)$, il existe une suite finie d'éléments Q_1, \dots, Q_r de $\mathcal{P}(L)$ tels que $Q_1 = Q, Q_2 = Q'$ et Q_i et Q_{i+1} sont adjacents (au sens usuel : les chambres aiguës dans a_L^G associées à Q_i et Q_{i+1} ont un mur en commun). Il suffit donc de traiter le cas où Q et Q' sont adjacents. Dans ce cas, il existe $R \in \mathcal{F}(L)$ tel que

1. L est un sous-groupe de Levi maximal de M_R ;
2. les sous-groupes $S = M_R \cap Q$ et $S' = M_R \cap Q'$ sont les deux éléments distincts (et donc opposés) de $\mathcal{P}^{M_R}(L)$;
3. $Q = SN_R$ et $Q' = S'N_R$.

Soit $P \in \mathcal{P}^L(M)$. Les sous-groupes Q et Q' déterminent les éléments PN_Q et $PN_{Q'}$ dans $\mathcal{P}^G(M)$. Il s'agit de voir l'égalité, pour tout $\mu \in a_M^{L,*}$,

$$\varphi_{PN_Q}(\mu) = \varphi_{PN_{Q'}}(\mu). \tag{2.10.1}$$

On a aussi $N_Q = N_S N_R$ et $N_{Q'} = N_{S'} N_R$ et donc $PN_Q = PN_S N_R$ et $PN_{Q'} = PN_{S'} N_R$. Les sous-groupes PN_S et $PN_{S'}$ sont deux éléments de $\mathcal{P}^{M_R}(M)$. Par conséquent, l'égalité (2.10.1) est équivalente à l'égalité suivante pour la (M_R, M) -cofamille φ^R et $\mu \in a_M^{L,*}$

$$\varphi_{PN_S}^R(\mu) = \varphi_{PN_{S'}}^R(\mu). \tag{2.10.2}$$

Les éléments PN_S et $PN_{S'}$ sont en fait deux éléments coadjacents de $\mathcal{P}^{M_R}(M)$. L'égalité (2.10.2) ne fait donc que traduire une condition de recollement pour la (M_R, M) -cofamille φ^R . □

2.11. Fonctions associées à une (G, M) -cofamille. Arthur a donné une méthode pour construire une fonction lisse à partir d'une (G, M) -famille et des fonctions θ_P (cf. [2] p. 37). Dualement, on a l'énoncé suivant pour une (G, M) -cofamille et les fonctions $\hat{\theta}_P$.

Lemme 2.11.1 *Soit $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille sur un ouvert Ω de a_M^* . La fonction*

$$\varphi_M(\lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \hat{\theta}_P^G(\lambda) \varphi_P(\lambda)$$

est holomorphe sur Ω .

Démonstration. On utilise de manière répétée le lemme suivant, qui se démontre à l'aide de la formule de Taylor.

Lemme 2.11.2 Soient Φ une fonction méromorphe sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}^n$ et l_1, \dots, l_r des fonctions affines sur \mathbb{C}^n telles que les hyperplans affines H_i définis par $l_i = 0$ soient deux à deux distincts et la fonction

$$\Psi : z \mapsto l_1(z) \dots l_r(z) \Phi(z)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}^n$.

Supposons que, pour tout indice i tel que H_i contient z_0 , la restriction de Ψ à H_i est nulle dans un voisinage de z_0 . Alors Φ est holomorphe au voisinage de z_0 .

Soit Π un système de représentants du quotient de $\cup_{P \in \mathcal{P}(M)} \hat{\Delta}_P^\vee$ par la relation de colinéarité. Introduisons les fonctions polynomiales sur \mathfrak{a}_M^*

$$F_\Pi(\lambda) = \prod_{\varpi^\vee \in \Pi} \langle \lambda, \varpi^\vee \rangle$$

et pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$

$$\hat{\Theta}_P(\lambda) = F_\Pi(\lambda) \cdot \hat{\theta}_P(\lambda).$$

D'après le lemme 2.11.2, il suffit de voir que la fonction

$$\psi_M(\lambda) = F_\Pi(\lambda) \varphi_M(\lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \hat{\Theta}_P(\lambda) \varphi_P(\lambda),$$

qui est clairement holomorphe sur Ω , s'annule sur les hyperplans d'équation $\langle \lambda, \varpi^\vee \rangle = 0$ lorsque ϖ^\vee décrit Π . Soient $\varpi^\vee \in \Pi$ et \mathfrak{h} l'hyperplan associé. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^\vee$. Soient Q le sous-groupe parabolique maximal Q de Levi L défini par $P \subset Q$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_M^{L,*}$.

Soit $P' \in \mathcal{P}(M)$. Le polynôme $\hat{\Theta}_{P'}(\lambda)$ s'annule de manière évidente sur \mathfrak{h} sauf si ϖ^\vee est proportionnel à un élément de $\hat{\Delta}_{P'}^\vee$. Dans ce cas, on définit un sous-groupe parabolique Q' contenant P' par la condition

$$\Delta_{P'}^{Q'} = \{\alpha \in \Delta_{P'} \mid \langle \alpha, \varpi^\vee \rangle = 0\}.$$

On a $Q' \in \mathcal{P}(L)$. Comme $\mathcal{P}(L)$ est formé de la paire de sous-groupes paraboliques opposés $\{Q, \bar{Q}\}$, l'ensemble des P' tels que ϖ^\vee est proportionnel à un élément de $\hat{\Delta}_{P'}^\vee$, se décrit à l'aide du lemme 2.9.4. C'est la réunion disjointe sur $P_0 \in \mathcal{P}^L(M)$ des paires $\{P_0 N_Q, P_0 N_{\bar{Q}}\}$ de sous-groupes paraboliques coadjacents. Soient $P_0 \in \mathcal{P}^L(M)$ et $\{P_1, P_2\}$ la paire associée. Pour prouver la nullité de ψ_M sur \mathfrak{h} , il suffit de prouver celle de

$$\lambda \mapsto (\hat{\Theta}_{P_1}(\lambda) \varphi_{P_1}(\lambda) + \hat{\Theta}_{P_2}(\lambda) \varphi_{P_2}(\lambda)).$$

Par le lemme 2.9.3 assertion 3, on a pour $\lambda \in \Omega \cap \mathfrak{h}$

$$\hat{\Theta}_{P_1}(\lambda) \varphi_{P_1}(\lambda) = -\hat{\Theta}_{P_2}(\lambda) \varphi_{P_1}(\lambda).$$

Il suffit donc de prouver la nullité sur $\mathfrak{h} \cap \Omega$ de

$$\varphi_{P_1}(\lambda) - \varphi_{P_2}(\lambda)$$

qui est précisément la condition de recollement des (G, M) -cofamilles. □

Soit $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille. Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout sous-groupe parabolique Q contenant P , soit φ_P^Q la fonction sur $a_M^{G,*}$ définie par

$$\varphi_P^Q(\lambda) = \varphi_P(\lambda^Q),$$

où, rappelons-le, $\lambda^Q = \lambda^{M_Q}$ est la projection de λ sur $a_M^{Q,*}$.

Lemme 2.11.3 *Soit $\varphi = (\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille. Soient $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$. La fonction de la variable $\lambda \in a_M^{G,*}$*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi_P^Q(\lambda)$$

ne dépend que du sous-groupe de Levi L . Elle est égale à

$$\varphi_M^L(\lambda^L).$$

Remarque 2.11.4 Dans l'énoncé du lemme 2.11.3 ci-dessus, on note φ^L la (L, M) -cofamille déduite de φ par la méthode du lemme 2.10.4 et φ_M^L la fonction qui s'en déduit par le lemme 2.11.1.

Démonstration. Pour chaque terme de la somme considérée, on a

$$\hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi_P^Q(\lambda) = \hat{\theta}_{P \cap L}^L(\lambda) \varphi_{P \cap L}^L(\lambda)$$

par le lemme 2.10.4. L'application $P \mapsto P \cap L$ induit une bijection de $\mathcal{P}^Q(M)$ sur $\mathcal{P}^L(M)$. Le lemme s'en déduit. □

2.12. Cofamilles et fonctions c_P . L'énoncé suivant est un analogue du corollaire 6.4 de [2].

Théorème 2.12.1 *Soit $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille. On a l'égalité suivante pour tout $\lambda \in a_M^*$*

$$\varphi_M(\lambda^G) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} c_P^G(\varphi_P, \lambda).$$

Démonstration. On explicite le membre de droite à l'aide de (2.6.1), ce qui donne

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sum_{P \subset Q \subset G} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi_P^Q(\lambda) \theta_Q^G(\lambda).$$

Pour éviter toute ambiguïté, précisons que $\varphi_P^Q(\lambda)$ est la fonction définie par

$$\varphi_P^Q(\lambda) = \varphi_P(\lambda^Q).$$

En intervertissant les deux sommes, on obtient

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}^G(M)} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \theta_Q^G(\lambda) \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \hat{\theta}_P^Q(\lambda) \varphi_P^Q(\lambda).$$

Par le lemme 2.11.3, on reconnaît dans la somme intérieure la fonction $\varphi_M^{M_Q}(\lambda^{M_Q})$. L'expression précédente devient

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}^G(M)} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \theta_Q^G(\lambda) \varphi_M^{M_Q}(\lambda^{M_Q}) = \sum_{L \in \mathcal{L}^G(M)} (-1)^{\dim(a_L^G)} \varphi_M^L(\lambda^L) \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} \theta_Q^G(\lambda).$$

D'après [2] pp. 36 et 39, preuve du corollaire 6.4, on a

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} \theta_Q^G(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } L \subsetneq G \\ 1 & \text{si } L = G. \end{cases}$$

Il s'ensuit que dans la somme précédente ne subsiste que le terme $L = G$ qui donne bien $\varphi_M(\lambda^G)$. □

2.13. Point ξ . Soit $\xi \in a_{T, \mathbb{R}}$. Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset Q$, on définit un point

$$[\xi]_P^Q \in a_{P, \mathbb{R}}^Q$$

de la manière suivante. Soit ξ_P^Q le projeté de ξ sur a_P^Q que l'on écrit dans la base $\Delta_P^{Q, \vee}$:

$$\xi_P^Q = \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q, \vee}} \langle \varpi_{\alpha^\vee}, \xi_P^Q \rangle \alpha^\vee.$$

On pose alors

$$[\xi]_P^Q = \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q, \vee}} [\langle \varpi_{\alpha^\vee}, \xi_P^Q \rangle] \alpha^\vee,$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$, le symbole $[x]$ désigne le plus petit entier i tel que $i > x$.

Lemme 2.13.1 *Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset R \subset Q$, la projection de $[\xi]_P^Q$ sur a_R^Q est égale à $[\xi]_R^Q$.*

Démonstration. Pour tout $X \in a_P^Q$, on a

$$X = \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q, \vee}} \langle \varpi_{\alpha^\vee}, X \rangle \alpha^\vee.$$

Soit p_R^Q la projection sur a_R^Q . Pour tout $\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q, \vee} - \Delta_R^{R, \vee}$, on a $\varpi_{\alpha^\vee} \in \hat{\Delta}_R^Q$ et

$$\langle \varpi_{\alpha^\vee}, X \rangle = \langle \varpi_{\alpha^\vee}, p_R^Q(X) \rangle.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_R^Q(X) &= \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q, \vee} - \Delta_R^{R, \vee}} \langle \varpi_{\alpha^\vee}, X \rangle p_R^Q(\alpha^\vee) \\ &= \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_R^{Q, \vee}} \langle \varpi_{\alpha^\vee}, X \rangle \alpha^\vee. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 p_R^Q([\xi]_P^Q) &= \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee} - \Delta_P^{R,\vee}} \langle \varpi_{\alpha^\vee}, [\xi]_P^Q \rangle p_R^Q(\alpha^\vee) \\
 &= \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee} - \Delta_P^{R,\vee}} [(\varpi_{\alpha^\vee}, \xi_P^Q)] p_R^Q(\alpha^\vee) \\
 &= \sum_{\alpha^\vee \in \Delta_R^{Q,\vee}} [(\varpi_{\alpha^\vee}, \xi_R^Q)] \alpha^\vee \\
 &= [\xi]_R^Q. \quad \square
 \end{aligned}$$

2.14. Fonctions $\hat{\vartheta}$ et ϑ^ξ . Dans toute la suite, on fixe q , un entier > 1 . Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subsetneq Q$, on définit les fonctions méromorphes de la variable $\lambda \in a_T^*$

$$\vartheta_P^{Q,\xi}(\lambda) = q^{-\langle \lambda, [\xi]_P^Q \rangle} \prod_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee}} \frac{1}{1 - q^{-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}} \tag{2.14.1}$$

et

$$\hat{\vartheta}_P^Q(\lambda) = \prod_{\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_P^{Q,\vee}} \frac{1}{1 - q^{-\langle \lambda, \varpi^\vee \rangle}}. \tag{2.14.2}$$

On complète ces définitions en posant $\vartheta_P^{P,\xi}(\lambda) = 1$ et $\hat{\vartheta}_P^P(\lambda) = 1$.

Lemme 2.14.1 Soient $P \subset Q$ des sous-groupes paraboliques. La série de Fourier de la variable $\lambda \in a_T^*$

$$\sum_{H \in \mathbb{Z}(\Delta_P^{Q,\vee})} \hat{\tau}_P^Q(H - \xi) q^{-\langle \lambda, H \rangle}$$

converge pour $\Re(\lambda_P^Q) \in (a_P^{Q,*})^+$. Sur ce domaine de convergence, sa somme coïncide avec la fonction $\vartheta_P^{Q,\xi}(\lambda)$.

Démonstration. Comme la famille $\Delta_P^{Q,\vee}$ est duale de $\hat{\Delta}_P^Q$, la série est égale au produit sur $\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee}$ des séries géométriques

$$\sum_{n_\alpha} q^{-n_\alpha \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}$$

où $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ satisfait l'inégalité $n_\alpha > \langle \varpi_\alpha, \xi \rangle$, ou encore $n_\alpha \geq [(\varpi_\alpha, \xi)]$. En particulier, elle converge absolument pour $\Re(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle) > 0$ pour tout $\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee}$, c'est-à-dire pour $\lambda \in (a_P^{Q,*})^+$.

Ces séries géométriques ont pour somme, suivant $\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee}$,

$$\frac{q^{-[(\varpi_\alpha, \xi)] \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}}{1 - q^{-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}}.$$

Le résultat s'en déduit étant donné que l'on a $\langle \varpi_\alpha, \xi \rangle = \langle \varpi_\alpha, \xi_P^Q \rangle$ et

$$\sum_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q,\vee}} -[\langle \varpi_\alpha, \xi \rangle](\lambda, \alpha^\vee) = -\langle \lambda, [\xi]_P^Q \rangle. \quad \square$$

Lemme 2.14.2 Soient $\xi \in a_{P,\mathbb{R}}^*$ en position générale, Q un sous-groupe parabolique et $M \in \mathcal{L}^Q$. On a

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \vartheta_P^{Q,\xi}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \subsetneq M_Q \\ 1 & \text{si } M = M_Q. \end{cases}$$

Démonstration. Le cas $M_Q = M$ est évident. On suppose donc $M \subsetneq M_Q$. Quitte à remplacer G par M_Q , il suffit de traiter le cas $Q = G$. La démonstration repose sur des lemmes combinatoires dus à Langlands et Arthur (cf. [4] p. 22). Soit $\Lambda \in a_{M,\mathbb{R}}^*$ en position générale et pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ soit

$$\Delta_P^\Lambda = \{\alpha \in \Delta_P \mid \langle \Lambda, \alpha^\vee \rangle < 0\}.$$

Soient $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}$ la base de $a_P^{G,*}$ duale de Δ_P^\vee et χ_P^Λ la fonction caractéristique des $H \in a_{M,\mathbb{R}}$ tels que $\langle \varpi_\alpha, H \rangle > 0$ si $\alpha \in \Delta_P^\Lambda$ et $\langle \varpi_\alpha, H \rangle \leq 0$ si $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^\Lambda$. D'après Arthur (*loc. cit.*), la fonction de la variable $H \in a_{M,\mathbb{R}}^G$

$$\sigma_M(H) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \chi_P^\Lambda(H)$$

ne dépend pas de Λ et vérifie

$$\sigma_M(H) = \begin{cases} 0 & \text{si } H \neq 0 \\ 1 & \text{si } H = 0. \end{cases} \quad (2.14.3)$$

Soit $P_0 \in \mathcal{P}(M)$ défini par la condition $\Lambda \in (a_{P_0}^*)^+$. Pour tout $\lambda \in a_T^*$ tel que $\Re(\lambda_P) \in -(a_{P_0}^*)^+$ et tout $P \in \mathcal{P}(M)$, la série

$$(-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \sum_{H \in \mathbb{Z}(\Delta_P^\vee)} \chi_P^\Lambda(H - \xi) q^{-\langle \lambda, H \rangle}$$

converge absolument. Cette série, qui est un produit de séries géométriques, a pour somme

$$\begin{aligned} & (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \prod_{\alpha \in \Delta_P^\Lambda} \frac{q^{-[\langle \varpi_\alpha, \xi \rangle](\lambda, \alpha^\vee)}}{1 - q^{-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}} \prod_{\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^\Lambda} \frac{q^{(-[\langle \varpi_\alpha, \xi \rangle] + 1)(\lambda, \alpha^\vee)}}{1 - q^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}} \\ &= (-1)^{|\Delta_P|} \prod_{\alpha \in \Delta_P} \frac{q^{-[\langle \varpi_\alpha, \xi \rangle](\lambda, \alpha^\vee)}}{1 - q^{-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}} = (-1)^{|\Delta_P|} \vartheta_P^\xi(\lambda). \end{aligned}$$

Ni le cardinal $|\Delta_P|$ ni le réseau $\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee)$ ne dépendent du choix de $P \in \mathcal{P}(M)$. Il s'ensuit que pour tout $\lambda \in a_T^*$ tel que $\Re(\lambda_P) \in -(a_{P_0}^*)^+$, on a

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \vartheta_P^\xi(\lambda) = (-1)^{|\Delta_{P_0}|} \sum_{H \in \mathbb{Z}(\Delta_{P_0}^\vee)} \sigma_M(H - \xi) q^{-\langle \lambda, H \rangle}. \quad (2.14.4)$$

Puisque ξ est en position générale, on a $\xi \notin \mathbb{Z}(\Delta_{P_0}^\vee)$. Par (2.14.3), le membre de droite de (2.14.4) est nul, ce qu'il fallait démontrer. Par prolongement analytique, il est aussi nul pour tout $\lambda \in a_T^*$. □

2.15. Fonctions $\Gamma_P^Q(\cdot, X, \xi)$. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}(T)$, on introduit, en suivant Arthur (cf. [2] p. 13), la fonction de variables H et $X \in a_{P,\mathbb{R}}$

$$\Gamma_P^Q(H, X, \xi) = \sum_{R \in \mathcal{F}^Q(P)} (-1)^{\dim(a_R^Q)} \tau_P^R(H - X) \hat{\tau}_R^Q(H - \xi). \tag{2.15.1}$$

Cette fonction ne dépend que des projetés de H et X sur $a_{P,\mathbb{R}}^G$. Le lemme suivant précise un lemme d'Arthur (cf. [2] lemme 2.1).

Lemme 2.15.1 *Il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de ξ) telle que pour tout H et tout X dans $a_{P,\mathbb{R}}$ tels que*

$$\Gamma_P^G(H, X, \xi) \neq 0$$

on a, pour tout $\alpha \in \Delta_P^G$,

$$|\langle \alpha, H \rangle| \leq C \left(1 + \sum_{\beta \in \Delta_P^G} |\langle \beta, X \rangle| \right).$$

En particulier, la fonction $\Gamma_P^G(\cdot, X, \xi)$ est à support compact sur $a_{P,\mathbb{R}}^G$.

Démonstration. Il s'agit d'une variante de la preuve du lemme 2.1 de [2]. Pour tous sous-groupes paraboliques $Q \subset R$ contenant P , soit $\tilde{\tau}_Q^R$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{H \in a_{P,\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_P^R - \Delta_P^Q\}.$$

On a $\tilde{\tau}_P^R = \tau_P^R$ et pour tout sous-groupe parabolique S contenant R

$$\tilde{\tau}_Q^R \tilde{\tau}_R^S = \tilde{\tau}_Q^S.$$

On introduit alors, pour $P \subset R$, des sous-groupes paraboliques, la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_P^R(H, X) &= \sum_{Q \in \mathcal{F}^R(P)} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \tau_P^Q(H - X) \tilde{\tau}_Q^R(H) \\ &= \prod_{\alpha \in \Delta_P^R} (\tau_\alpha(H) - \tau_\alpha(H - X)) \end{aligned}$$

où τ_α est la fonction caractéristique des $H \in a_{P,\mathbb{R}}$ tels que $\langle \alpha, H \rangle > 0$. Cette fonction ne prend que les valeurs 0, 1 ou -1 . De plus, on a $\tilde{\Gamma}_P^R(H, X) \neq 0$ seulement si on a, pour tout $\alpha \in \Delta_P^R$,

$$|\langle \alpha, H \rangle| \leq |\langle \alpha, X \rangle|.$$

Par ailleurs, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{P \subset R \subset S} (-1)^{\dim(a_P^R)} \tilde{\Gamma}_P^R(H, X) \tilde{\tau}_R^S(H) \\
 &= \sum_{P \subset Q \subset R \subset S} (-1)^{\dim(a_P^R)} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \tau_P^Q(H - X) \tilde{\tau}_Q^R(H) \tilde{\tau}_R^S(H) \\
 &= \sum_{P \subset Q \subset R \subset S} (-1)^{\dim(a_Q^R)} \tau_P^Q(H - X) \tilde{\tau}_Q^R(H) \tilde{\tau}_R^S(H) \\
 &= \sum_{P \subset Q \subset R \subset S} (-1)^{\dim(a_Q^R)} \tau_P^Q(H - X) \tilde{\tau}_Q^S(H) \\
 &= \sum_{P \subset Q \subset S} \tau_P^Q(H - X) \tilde{\tau}_Q^S(H) \sum_{Q \subset R \subset S} (-1)^{\dim(a_Q^R)} \\
 &= \tau_P^S(H - X).
 \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que la somme alternée dans la ligne précédente est nulle sauf si $Q = S$. En utilisant l'expression précédente pour $\tau_P^S(H - X)$, il vient

$$\begin{aligned}
 \Gamma_P^G(H, X, \xi) &= \sum_{P \subset S \subset G} (-1)^{\dim(a_S^G)} \tau_P^S(H - X) \hat{\tau}_S^G(H - \xi) \\
 &= \sum_{P \subset R \subset S \subset G} (-1)^{\dim(a_P^R)} (-1)^{\dim(a_S^G)} \tilde{\Gamma}_P^R(H, X) \tilde{\tau}_R^S(H) \hat{\tau}_S^G(H - \xi) \\
 &= \sum_{P \subset R \subset G} (-1)^{\dim(a_P^R)} \tilde{\Gamma}_P^R(H, X) \sum_{R \subset S \subset G} \tilde{\tau}_R^S(H) \hat{\tau}_S^G(H - \xi).
 \end{aligned}$$

On va prouver que chaque terme indexé par R dans la somme ci-dessus vérifie la conclusion du lemme.

Lorsque $R = P$, on a $\tilde{\Gamma}_P^P(H, X) = 1$ et la contribution correspondante ne dépend pas de X : elle vaut $\Gamma_P^G(H, 0, \xi)$. La conclusion est alors claire car on sait (cf. [2], lemme 2.1) que si $H \in a_{P, \mathbb{R}}^G$ et $\Gamma_P^G(H, 0, \xi) \neq 0$, alors H appartient à un compact qui ne dépend que de ξ .

Pour un terme $R \subsetneq P$, on raisonne par récurrence. Soit H tel que

$$\tilde{\Gamma}_P^R(H, X) \sum_{R \subset S \subset G} \tilde{\tau}_R^S(H) \hat{\tau}_S^G(H - \xi) \neq 0. \tag{2.15.2}$$

En particulier, on a $\tilde{\Gamma}_P^R(H, X) \neq 0$ et donc, pour tout $\alpha \in \Delta_P^R$, on a $|\langle \alpha, H \rangle| \leq |\langle \alpha, X \rangle|$. Il reste à majorer $|\langle \alpha, H \rangle|$ pour $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^R$. Écrivons $H = H_R + H^R$ suivant la décomposition $a_P^G = a_R^G + a_P^R$. On a donc, pour tout $\alpha \in \Delta_P^R$,

$$|\langle \alpha, H^R \rangle| = |\langle \alpha, H \rangle| \leq |\langle \alpha, X \rangle|. \tag{2.15.3}$$

Soit

$$l(H^R) = \sum_{\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^R} \langle \alpha, H^R \rangle \pi_\alpha \in a_P^G$$

où $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^R}$ est la base de a_R^G duale de la base obtenue par projection sur $a_R^{G,*}$ de $\Delta_P - \Delta_P^R$. On a par conséquent, pour tout $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^R$, l'égalité

$$\langle \alpha, l(H^R) \rangle = \langle \alpha, H^R \rangle \tag{2.15.4}$$

et donc l'égalité

$$\tilde{\tau}_R^S(H) = \tau_R^S(H_R + l(H^R)).$$

En tenant compte de cette dernière égalité, on voit que la condition (2.15.2) devient

$$\tilde{\Gamma}_P^R(H^R, X) \cdot \Gamma_R^G(H_R, -l(H^R), \xi) \neq 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence sur Γ_R^G , il existe $C > 0$ tel que tout H qui vérifie la condition précédente satisfait pour tout $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^R$ l'inégalité

$$|\langle \alpha, H_R \rangle| \leq C \left(1 + \sum_{\beta \in \Delta_P - \Delta_P^R} |\langle \beta, l(H^R) \rangle| \right).$$

Pour conclure, on a, par (2.15.4), $|\langle \beta, l(H^R) \rangle| = |\langle \beta, H^R \rangle|$ que l'on majore à une constante près par $\sum_{\gamma \in \Delta_P^R} |\langle \gamma, H^R \rangle|$, donc par $\sum_{\gamma \in \Delta_P^R} |\langle \gamma, X \rangle|$, cf. (2.15.3). □

2.16. Les triplets duaux. La définition suivante nous sera utile dans la suite.

Définition 2.16.1 Soit $M \in \mathcal{L}$. Un *triplet dual* pour M est un triplet (\mathfrak{N}, b, b') formé d'une partie finie \mathfrak{N} de $\frac{2\pi i}{\log(q)}\mathbb{Z}(\Delta_P)$, où P est un élément quelconque de $\mathcal{P}(M)$, et d'entiers b et $b' \geq 1$ qui vérifient les deux conditions suivantes

1. pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout sous-groupe parabolique R contenant P , on a

$$\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee) \subset \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^{R,\vee}) \oplus \frac{1}{b}\mathbb{Z}(\Delta_R^\vee) \subset \frac{1}{b'}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee); \tag{2.16.1}$$

2. pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, l'ensemble \mathfrak{N} est un système de représentants du quotient

$$\frac{2\pi i}{\log(q)}\mathbb{Z}(\Delta_P) \Big/ \frac{2\pi i b'}{\log(q)}\mathbb{Z}(\Delta_P).$$

Remarques 2.16.2 De tels triplets existent. Les projections respectives sur a_P^R de $\hat{\Delta}_P^\vee - \hat{\Delta}_R^\vee$ et $\hat{\Delta}_R^\vee$ sont les ensembles $\hat{\Delta}_P^{R,\vee}$ et $\{0\}$. Comme toutes les projections sont « définies sur \mathbb{Q} », l'existence de b et b' dans (2.16.1) est alors claire. Enfin, la condition 2 ne pose pas de problème puisque le réseau $\mathbb{Z}(\Delta_P)$ ne dépend que de M .

Tout triplet dual (\mathfrak{N}, b, b') vérifie la propriété suivante : pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $H \in \frac{1}{b'}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)$, on a

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{v \in \mathfrak{N}} q^{-\langle v, H \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{si } H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.16.2}$$

2.17. Une variante de la construction du § 2.6. Soient $M \in \mathcal{L}$ et (\mathfrak{N}, b, b') un triplet dual pour M . Soient $P \in \mathcal{P}(M)$ et φ une fonction sur a_p^* . Pour tout $\lambda \in a_p^*$, on pose

$$c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \sum_{\{R|P \subset R \subset G\}} (-1)^{\dim(a_R^G)} \hat{\vartheta}_P^R(\lambda + \nu) \varphi^R(\lambda + \nu) \vartheta_R^{G, b\xi}((\lambda + \nu)/b). \tag{2.17.1}$$

La construction dépend réellement du triplet (\mathfrak{N}, b, b') , mais pour ne pas alourdir davantage la notation, on omet la dépendance en b et b' .

Lemme 2.17.1 Soient $X \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_p^\vee)$ et $X' = X - \sum_{\alpha \in \Delta_p} \varpi_\alpha^\vee$.

1. La série de Fourier

$$\sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_p^\vee)} \Gamma_P^G(H, X', \xi) q^{-\langle \lambda, H \rangle}$$

est un polynôme de Laurent en les $q^{-\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle}$ pour $\alpha \in \Delta_p$. En particulier, elle est holomorphe sur a_p^* .

2. Cette série est égale à $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$ pour la fonction $\varphi(\lambda) = q^{-\langle \lambda, X \rangle}$ et pour tout triplet (\mathfrak{N}, b, b') dual pour M .

Démonstration. L'assertion 1 est une conséquence immédiate de la compacité du support de $H \in a_p^G \mapsto \Gamma_P^G(H, X', \xi)$ (cf. lemme 2.15.1). L'assertion 2 est un calcul analogue à celui du lemme 2.2 p. 15 de [2]. Pour la commodité du lecteur, nous donnons quelques détails. Soit (\mathfrak{N}, b, b') un triplet dual pour M . La fonction $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$ est au moins méromorphe. Pour montrer qu'elle coïncide avec la série de Fourier de $\Gamma_P^G(H, X', \xi)$ sur a_p^* , il suffit donc de le vérifier sur l'ouvert défini par $\mathfrak{N}(\lambda^G) \in (a_p^{G,*})^+$. Sur ce domaine, on peut calculer la série de Fourier terme à terme selon la définition (2.15.1). Il s'agit donc de calculer pour $\mathfrak{N}(\lambda^G) \in (a_p^{G,*})^+$ et $R \in \mathcal{F}(P)$ la série de Fourier de l'expression

$$(-1)^{\dim(a_R^G)} \tau_P^R(H - X') \hat{\tau}_R^G(H - \xi). \tag{2.17.2}$$

Soit \mathfrak{N} un ensemble dual de $\mathbb{Z}(\Delta_p^\vee)$. Par l'inclusion (2.16.1) et l'égalité (2.16.2) de la remarque 2.16.2, la série de Fourier de (2.17.2) s'écrit

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_p^{R, \nu}) \oplus \frac{1}{b} \mathbb{Z}(\Delta_p^\vee)} (-1)^{\dim(a_R^G)} \tau_P^R(H - X') \hat{\tau}_R^G(H - \xi) q^{-\langle \lambda + \nu, H \rangle}.$$

La série intérieure est alors un produit de séries géométriques qui convergent pour $\lambda \in a_p^+$ et dont la somme se calcule aisément : on trouve ainsi

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} (-1)^{\dim(a_R^G)} \prod_{\alpha \in \Delta_p^R} \frac{q^{-\langle \alpha, X \rangle \langle \lambda + \nu, \varpi_\alpha^\vee \rangle}}{1 - q^{-\langle \lambda + \nu, \varpi_\alpha^\vee \rangle}} \prod_{\alpha \in \Delta_R^G} \frac{q^{-[\langle \varpi_\alpha, b\xi \rangle] \langle \frac{\lambda + \nu}{b}, \alpha^\vee \rangle}}{1 - q^{-\langle \frac{\lambda + \nu}{b}, \alpha^\vee \rangle}}.$$

En observant que l'on a

$$\prod_{\alpha \in \Delta_p^R} q^{-\langle \alpha, X \rangle \langle \lambda + \nu, \varpi_\alpha^\vee \rangle} = q^{-\langle (\lambda + \nu)^R, X \rangle},$$

on obtient

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} (-1)^{\dim(a_R^G)} \hat{\vartheta}_P^R(\lambda + \nu) q^{-\langle (\lambda + \nu)^R, X \rangle} \vartheta_R^{G, b\xi}((\lambda + \nu)/b)$$

ce qui conclut. □

Le théorème suivant est une variante du théorème 2.6.4.

Théorème 2.17.2 Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}$ une famille de fonctions méromorphes sur le disque ouvert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < q^r\}$$

avec $r > 0$ et holomorphes en dehors de l'origine $z = 0$ et

$$\varphi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} \varphi_\alpha(q^{-\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle}). \tag{2.17.3}$$

Soit P un sous-groupe parabolique de G . La fonction $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$ ne dépend pas du choix du triplet dual pour M_P qui intervient dans sa définition. De plus, cette fonction est holomorphe pour λ tel que $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -r$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$.

Remarque 2.17.3 Pour une fonction φ comme dans le théorème ci-dessus, on définit

$$c_P^{G, \xi}(\varphi, \lambda) = c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda) \tag{2.17.4}$$

pour un triplet (\mathfrak{N}, b, b') dual pour M_P quelconque, puisque le membre de droite ne dépend pas de ce choix.

Démonstration. Soient P un sous-groupe parabolique de G et (\mathfrak{N}, b, b') un triplet dual pour M_P . Pour tout $\varepsilon > 0$, soit Ω_ε le voisinage ouvert de $ia_{P, \mathbb{R}}^*$ défini par la condition $|\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle)| < \varepsilon$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. La fonction $\varphi(\lambda)$ est holomorphe sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -r$. La fonction $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$ est donc méromorphe sur cet ouvert. De plus, ses singularités éventuelles sont simples et portées par des hyperplans qui coupent tout $ia_{P, \mathbb{R}}^*$. À l'aide du lemme 2.11.2, on voit que pour obtenir l'holomorphie de $c_P^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$, il suffit de la prouver sur un ouvert Ω_ε pour $\varepsilon > 0$.

Introduisons le développement en série de Laurent de φ_α

$$\varphi_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_\alpha(n) z^n$$

où $\hat{\varphi}_\alpha(n) = 0$ dès que n est assez négatif. On a donc aussi

$$\varphi(\lambda) = \sum_{X \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)} \hat{\varphi}(X) q^{-\langle \lambda, X \rangle}$$

où l'on pose pour toute famille $(k_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P} \in \mathbb{Z}^{\Delta_P}$

$$\hat{\varphi}\left(\sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \varpi_\alpha^\vee\right) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} \hat{\varphi}_\alpha(k_\alpha).$$

Par conséquent, on a

$$c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda) = \sum_{X \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)} \hat{\varphi}(X) \cdot c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(q^{-\langle \lambda, X \rangle}, \lambda).$$

D'après le lemme 2.17.1, la fonction $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(q^{-\langle \lambda, X \rangle}, \lambda)$ ne dépend pas du choix du triplet dual (\mathfrak{N}, b, b') . Il en est donc de même pour $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$. En outre, $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(q^{-\langle \lambda, X \rangle}, \lambda)$ est holomorphe sur a_P^* . Pour prouver l'holomorphie de $c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(\varphi, \lambda)$ sur Ω_ε , il suffit de prouver que cette série converge uniformément sur cet ouvert. Toujours par le lemme 2.17.1, on a, avec les notations de ce lemme, pour tout $X \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)$

$$c_{P, \mathfrak{N}}^{G, \xi}(q^{-\langle \lambda, X \rangle}, \lambda) = \sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)} \Gamma_P^G(H, X', \xi) q^{-\langle \lambda, H \rangle}.$$

À l'aide du lemme 2.15.1, on voit qu'il existe des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que pour tout X et tout H tels que $\Gamma_P^G(H, X', \xi) \neq 0$ et tout $\lambda \in \Omega_\varepsilon$, on ait

$$\begin{aligned} |q^{-\langle \lambda, H \rangle}| &\leq q^{\sum_{\alpha \in \Delta_P} |\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) - \langle \alpha, H \rangle|} \\ &\leq c_1 \prod_{\alpha \in \Delta_P} q^{\varepsilon c_2 |\Delta_P| \cdot |\langle \alpha, X \rangle|}. \end{aligned}$$

Le lemme 2.15.1 implique aussi qu'il existe un polynôme en $|\Delta_P|$ variables à coefficients réels positifs tel que le nombre de $H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)$ qui vérifient $\Gamma_P^G(H, X', \xi) \neq 0$ est borné par

$$A_X = p(|\langle \alpha, X \rangle|_{\alpha \in \Delta_P}).$$

Ainsi, on a la convergence uniforme recherchée si la série

$$\sum_{X \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)} |\hat{\varphi}(X)| A_X q^{\varepsilon c_2 |\Delta_P| \cdot |\langle \alpha, X \rangle|}$$

converge. Il suffit de traiter le cas d'un polynôme p qui est un monôme. On est alors ramené à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série suivante converge

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_\alpha(n)| |n|^k (q^{\varepsilon c_2 |\Delta_P|})^{|n|}.$$

C'est le cas à condition que $\varepsilon c_2 |\Delta_P| < r$. □

2.18. Les (G, M) -cofamilles périodiques. Introduisons la définition suivante qui est une variante de la définition 2.10.1.

Définition 2.18.1 Soient M un sous-groupe de Levi de G et Ω un voisinage ouvert de $ia_{M, \mathbb{R}}^*$ invariant par le $\frac{2\pi i}{\log(q)} \mathbb{Z}(\Delta_P)$, où P est un élément quelconque de $\mathcal{P}(M)$.

Une (G, M) -cofamille $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ sur Ω est dite *périodique* si chaque fonction φ_P est invariante par le réseau $\frac{2\pi i}{\log(q)} \mathbb{Z}(\Delta_P)$.

Voici le pendant du lemme 2.11.1.

Lemme 2.18.2 *Soit $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille périodique sur Ω . La fonction*

$$\varphi_M(\lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \hat{\vartheta}_P^G(\lambda) \varphi_P(\lambda)$$

est périodique et holomorphe sur Ω .

Démonstration. La périodicité est évidente. Quant à l’holomorphie au voisinage de $\mu \in \Omega$, elle résulte du lemme 2.11.1 appliqué à la (G, M) -cofamille au voisinage de $\lambda = 0$ définie par

$$\left[\prod_{\alpha \in \Delta_P} \frac{\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle}{1 - q^{-\langle \lambda + \mu, \varpi_\alpha^\vee \rangle}} \right] \varphi_P(\lambda + \mu). \tag{2.18.1}$$

Vérifions qu’il s’agit bien d’une (G, M) -cofamille. Soient P_1 et P_2 deux éléments de $\mathcal{P}(M)$ coadjacents et soit $\varpi^\vee \in \Delta_{P_1}^\vee \cap (-\Delta_{P_2}^\vee)$ donné par l’assertion 3 du lemme 2.9.3. Il s’agit de voir que les expressions (2.18.1) pour $P = P_1$ et $P = P_2$ sont égales sur l’hyperplan $\langle \lambda, \varpi^\vee \rangle = 0$. Si $\langle \mu, \varpi^\vee \rangle \neq 0$, les deux sont nulles sur cet hyperplan. Si $\langle \mu, \varpi^\vee \rangle = 0$, on a $\varphi_{P_1}(\lambda + \mu) = \varphi_{P_2}(\lambda + \mu)$ sur l’hyperplan $\langle \lambda, \varpi^\vee \rangle = 0$ puisque $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ est une (G, M) -cofamille. Par le lemme 2.9.3, les produits des facteurs associés à un copoids distinct de $\pm \varpi^\vee$ dans le crochet sont égaux sur cet hyperplan. Il reste à voir l’égalité des facteurs associés à $\pm \varpi^\vee$: ceux-là sont tous deux égaux à $(\log(q))^{-1}$. \square

2.19. Le principal théorème pour les (G, M) -cofamilles périodiques. Le théorème suivant est l’analogie du théorème 2.12.1.

Théorème 2.19.1 *Soit $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ une (G, M) -cofamille périodique telle que chaque φ_P satisfait les hypothèses du théorème 2.17.2 (en particulier, φ_P est de la forme (2.17.3)). Pour tout ξ en position générale, on a l’égalité suivante entre fonctions holomorphes au voisinage de ia_M^**

$$\varphi_M(\lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} c_P^{G, \xi}(\varphi_P, \lambda).$$

Démonstration. Elle est similaire à la démonstration du théorème 2.12.1. Pour mener la preuve, on fixe un triplet (\mathfrak{N}, b, b') dual pour M . D’après (2.17.4) et la définition (2.17.1), le membre de droite s’écrit

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{v \in \mathfrak{N}} \sum_{\{R \mid P \subset R \subset G\}} (-1)^{\dim(a_R^G)} \hat{\vartheta}_P^R(\lambda + v) \varphi_P^R(\lambda + v) \vartheta_R^{G, b\xi}((\lambda + v)/b).$$

Par interversion des sommes, on obtient

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{v \in \mathfrak{N}} \sum_{R \in \mathcal{F}^G(M)} (-1)^{\dim(a_R^G)} \vartheta_R^{G, b\xi}((\lambda + v)/b) \sum_{P \in \mathcal{P}^R(M)} \hat{\vartheta}_P^R(\lambda + v) \varphi_P^R(\lambda + v).$$

Par une variante du lemme 2.11.3, la dernière somme ne dépend que de M_R : on la note

$$\varphi_M^{M_R}((\lambda + v)^{M_R}).$$

Avec cette observation et par une nouvelle interversion de sommes, l'expression précédente devient

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \sum_{L \in \mathcal{L}^G(M)} (-1)^{\dim(a_L^G)} \varphi_M^L((\lambda + \nu)^L) \sum_{R \in \mathcal{P}(L)} \vartheta_R^{G, b^\xi}((\lambda + \nu)/b).$$

Le lemme 2.14.2 indique que pour ξ en position générale, la somme intérieure est nulle sauf si $L = G$, auquel cas elle vaut 1. La ligne précédente se simplifie en

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \varphi_M(\lambda + \nu).$$

Comme φ_M est invariante par le réseau $\frac{2\pi i}{\log(q)} \mathbb{Z}(\Delta_P)$ qui contient \mathfrak{N} , on trouve $\varphi_M(\lambda)$ comme désiré. □

3. Un calcul de séries

3.1. Adèles et mesures. Soit C une courbe projective, lisse, géométriquement connexe, de corps des constantes un corps fini \mathbb{F}_q de cardinal q . Soient g_C son genre, F son corps de fonctions, \mathbb{A} l'anneau des adèles de F et $\mathcal{O} \subset \mathbb{A}$ le sous-anneau de \mathbb{A} ouvert, compact et maximal pour ces propriétés. Soit D un diviseur sur C que l'on écrit

$$D = \sum_{c \in |F|} n_c [c]$$

comme somme formelle, à coefficients n_c entiers et presque tous nuls, sur l'ensemble $|F|$ des places de F . Son degré est défini par

$$\text{deg}(D) = \sum_{c \in |F|} n_c \text{deg}(c)$$

où le degré de c est défini comme le degré sur \mathbb{F}_q du corps résiduel du complété F_c de F en c . Pour tout $c \in |F|$, soit ϖ_c une uniformisante du complété F_c . Soit

$$\varpi_D = \prod_{c \in |F|} \varpi_c^{-n_c} \in \mathbb{A}^\times.$$

On a un morphisme degré surjectif

$$\text{deg} : \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$$

normalisé par $\text{deg}(\mathcal{O}^\times) = 0$ et $\text{deg}(\varpi_c) = \text{deg}(c)$ pour tout $c \in |F|$. On a $\text{deg}(F^\times) = 0$. On utilise sur le groupe \mathbb{A}^\times des idéles de F la valeur absolue $|\cdot| = q^{-\text{deg}(\cdot)}$.

Soient $n \geq 1$ un entier et $G = GL(n)$ sur le corps fini \mathbb{F}_q . Soit \mathfrak{g} son algèbre de Lie; plus généralement, les algèbres de Lie des groupes algébriques que l'on considère sont notées par la lettre gothique correspondante. Dans cette section, on utilise librement les notations de la section 2 pour le groupe G et son sous-tore maximal T formé des matrices diagonales.

Soit $\mathbf{1}_D$ la fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ caractéristique de $\varpi_D \mathfrak{g}(\mathcal{O})$. Le \mathcal{O} -module $\varpi_D \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ ne dépend pas des choix des uniformisantes ϖ_c .

La composition du déterminant avec le morphisme degré fournit un morphisme degré surjectif

$$\text{deg} : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, on note $G(\mathbb{A})^e$ la fibre de ce morphisme en e .

On fixe sur $G(\mathbb{A})$ la mesure de Haar à gauche normalisée par $\text{vol}(G(\mathcal{O})) = 1$. La mesure de Haar sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ est normalisée par $\text{vol}(\mathfrak{g}(F)\backslash\mathfrak{g}(\mathbb{A})) = 1$. Les mêmes normalisations sont utilisées pour les sous-groupes de G . Ces conventions de mesure donnent lieu au lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 3.1.1 *Soient N le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G et \mathfrak{n} l'algèbre de Lie. On a*

$$\text{vol}(N(F)\backslash N(\mathbb{A})) = q^{\dim(N)(g_C-1)}$$

et

$$\int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(U) dU = q^{\dim(\mathfrak{n})(1-g_C+\text{deg}(D))}.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$, soit $\zeta(s)$ la fonction zêta de la courbe C . C'est une fraction rationnelle en q^{-s} qui coïncide sur l'ouvert $\Re(s) > 1$ avec la série convergente en q^{-s}

$$\int_{\mathbb{A}^\times \cap \mathcal{O}} |x|^s dx,$$

la mesure utilisée étant la mesure de Haar sur \mathbb{A}^\times normalisée suivant nos conventions : $\text{vol}(\mathcal{O}^\times) = 1$.

3.2. Choix d'un élément nilpotent « régulier par blocs ». Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{F}_q^n . Soient $d \geq 1$ un entier qui divise n et $r = n/d$ le quotient. Pour $1 \leq j \leq r$, soit V_j le sous-espace de dimension d engendré par $\{e_{(j-1)d+1}, \dots, e_{jd}\}$. On a donc une décomposition en somme directe

$$\mathbb{F}_q^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Soit P_0 le stabilisateur du drapeau $V_1 \subset V_1 \oplus V_2 \subset \dots \subset V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Il s'agit d'un sous-groupe parabolique de G dont le facteur de Levi $M_0 = M_{P_0}$ (cf. § 2.2) s'identifie à $GL(V_1) \times \dots \times GL(V_r)$. Soit

$$X = X^G \in \mathfrak{n}_{P_0}(\mathbb{F}_q)$$

l'endomorphisme nilpotent de \mathbb{F}_q^n défini par $X^G(e_{jd+i}) = e_{(j-1)d+i}$ pour $2 \leq j \leq r$ et $1 \leq i \leq d$, et X^G est nul sur V_1 . L'orbite de X est dite « régulière par blocs ». Lorsque $d = n$, on obtient l'orbite nulle et lorsque $d = 1$, on obtient l'orbite régulière au sens usuel. En général, l'orbite obtenue est celle d'un élément nilpotent dont la décomposition de Jordan possède d blocs de taille r . On a donc dans la base canonique de \mathbb{F}_q^n

$$X^G = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & I & 0 & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & I \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.1}$$

Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant P_0 . Comme $X^G \in \mathfrak{p}(\mathbb{F}_q)$, il se décompose en $X^G = X^P + X_P$ avec $X^P \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{F}_q)$ et $X_P \in \mathfrak{n}_P(\mathbb{F}_q)$. Pour chaque bloc GL de M_P , la matrice de X_P est de la forme (3.2.1). On a $X^{P_0} = 0$ pour $P = P_0$.

Soit M_{X^P} le centralisateur de X^P dans M_P . Le centralisateur de X^G dans G est le sous-groupe de $GL(n)$ formé des matrices du type suivant

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & & A_r \\ & A_1 & A_2 & \ddots & \\ & & A_1 & \ddots & A_3 \\ & & & A_1 & A_2 \\ & & & & A_1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

où A_i est une matrice carrée de taille d et de surcroît inversible si $i = 1$. Il y a une description similaire pour M_{X^P} dans chaque bloc GL de M . On observera que l'on a $G_{X^G} \subset P_0$ et $M_{X^P}N_P \subset P_0$. Le groupe G_X a pour radical unipotent $N_0 \cap G_X$ et pour facteur de Levi $M_0 \cap G_X$ (ce dernier groupe est isomorphe à $GL(d)$).

3.3. Application H_0 et réseaux de copoids. On continue avec les notations du paragraphe précédent. Pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P de G , l'espace $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}$, qui est par définition $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}^*, \mathbb{R})$, cf. § 2.2, s'identifie aussi à $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(P), \mathbb{R})$, où $X^*(P)$ est le groupe des caractères algébriques de P . Dans cet espace, on distingue le réseau

$$\mathfrak{a}_P = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(P), \mathbb{Z}).$$

On a un morphisme surjectif, trivial sur $N_P(\mathbb{A})$

$$H_P : P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_P$$

donné pour tout $p \in P(\mathbb{A})$ et tout $\chi \in X^*(P)$ par $\langle \chi, H_P(p) \rangle = -\text{deg}(\chi(p))$. La décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})G(\mathcal{O})$ permet de prolonger H_P en une application

$$H_P : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_P$$

telle que pour tout $p \in P(\mathbb{A})$ et tout $k \in G(\mathcal{O})$, on ait $H_P(pk) = H_P(p)$. On utilisera aussi l'application

$$H_P^G : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}^G$$

obtenue par composition de H_P avec la projection de $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}$ sur $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}^G$ selon la décomposition $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}^G = \mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}^G \oplus \mathfrak{a}_{G,\mathbb{R}}$.

Ces notations s'appliquent en particulier au sous-groupe parabolique P_0 du paragraphe précédent. Par abus, on notera parfois H_0 et H_0^G les applications H_{P_0} et $H_{P_0}^G$. On notera que si $P'_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ est distinct de P_0 , alors les applications H_{P_0} et $H_{P'_0}$ ne sont pas égales. Elles ont cependant même image, à savoir

$$\mathfrak{a}_{M_0} = \text{Hom}(X^*(M_0), \mathbb{Z}) = \mathfrak{a}_{P_0}.$$

En prenant comme base de $X^*(M_0)$ les caractères donnés par le déterminant des blocs GL de M_0 , on identifie $X^*(M_0)$ à \mathbb{Z}^r . De même, on identifie $X^*(T)$ à \mathbb{Z}^n . Dualement au

morphisme de restriction $X^*(M_0) \rightarrow X^*(T)$, on a un morphisme $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_{M_0}$ surjectif qui, par extension des scalaires à \mathbb{R} , redonne la projection $a_{T,\mathbb{R}} \rightarrow a_{M_0,\mathbb{R}}$ (cf. § 2.2). Comme au § 2.2, on identifie $a_{M_0,\mathbb{R}}$ à un sous-espace de $a_{T,\mathbb{R}}$ et cette identification est concrètement donnée par l'application suivante

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto \frac{1}{d}(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_r, \dots, x_r)$$

(chaque entrée est répétée d fois). La projection $a_{T,\mathbb{R}} \rightarrow a_{M_0,\mathbb{R}}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace $a_{M_0,\mathbb{R}}$ où $a_{T,\mathbb{R}}$ est identifié à \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Pour $1 \leq i \leq r-1$, soit $\alpha_i \in \Delta_0 = \Delta_{P_0}$ la racine obtenue par restriction de la racine $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_{id} t_{id+1}^{-1}$ du tore T . On a alors

$$\hat{\Delta}_0^\vee = \{\varpi_1^\vee, \dots, \varpi_{r-1}^\vee\}$$

où $\langle \alpha_j, \varpi_i^\vee \rangle = \delta_{i,j}$.

L'hyperplan $a_{T,\mathbb{R}}^G$ de $a_{T,\mathbb{R}}$ est formé des points dont la somme des coordonnées est nulle. La projection orthogonale sur $a_{T,\mathbb{R}}^G$ du réseau \mathfrak{a}_{M_0} (vu comme sous-groupe de $a_{T,\mathbb{R}}$) est le groupe $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_0^\vee)$.

Soient $e \in \mathbb{Z}$ et $M_0(\mathbb{A})^e = M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e$. Dans l'identification de \mathfrak{a}_{M_0} avec \mathbb{Z}^r , l'ensemble $H_0(M_0(\mathbb{A})^e)$ s'identifie aux éléments de \mathbb{Z}^r dont la somme des coordonnées vaut $-e$. L'ensemble $H_0^G(M_0(\mathbb{A})^e)$, c'est-à-dire la projection de $H_0(M_0(\mathbb{A})^e)$ sur $a_{T,\mathbb{R}}^G$, s'identifie au sous-ensemble de $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_0^\vee)$ formé des éléments

$$H = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{r-1} n_j \varpi_j^\vee$$

qui vérifient

$$\sum_{j=1}^{r-1} j n_j \equiv -e \pmod{r}.$$

Soit W_0 le groupe de Weyl de M_0 . Il s'agit du quotient du normalisateur de M_0 dans le groupe de Weyl de (G, T) par le groupe de Weyl de (M_0, T) . Ce groupe s'identifie au groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$. Il agit sur M_0 et donc sur l'espace $a_{M_0}^*$ via l'action sur \mathbb{F}_q^n qui permute les sous-espaces V_i . De même, ce groupe agit simplement transitivement sur $\mathcal{P}(M_0)$. Soit $(\varpi_1, \dots, \varpi_{r-1})$ la base de $a_{M_0}^{G,\mathbb{R}}$ duale de Δ_0^\vee . On observe que pour tout $w \in W_0$ et tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$, on a $w \cdot \varpi_i - \varpi_i \in d\mathbb{Z}(\Delta_0)$ et, en particulier, pour l'élément γ défini en (3.3.2) ci-dessous

$$w \cdot \gamma - \gamma \in \frac{2\pi i}{\log q} \mathbb{Z}(\Delta_0). \tag{3.3.1}$$

Lemme 3.3.1 *Soit*

$$\gamma = \frac{2\pi i}{r \log q} \sum_{j=1}^{r-1} j \alpha_j = \frac{2\pi i}{d \log q} \varpi_{r-1}. \tag{3.3.2}$$

Pour tout $H \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_{P_0}^\vee)$, on a

$$\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \exp(-2\pi i k e / r) q^{-kd\langle \gamma, H \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{si } H \in H_0^G(M_0(\mathbb{A})^e) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.3.3}$$

3.4. Fonctions zêta $Z_{d,D}$ et $\tilde{Z}_{d,D}$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$Z_{d,D}(s) = \int_{GL(d, \mathbb{A})} \mathbf{1}_D(X) |\det(X)|^s dX = \sum_{e \in \mathbb{Z}} \int_{GL(d, \mathbb{A})^e} \mathbf{1}_D(X) dX q^{-es}$$

et

$$\tilde{Z}_{d,D}(s) = q^{sd \deg(D)} (1 - q^{-s}) q^{d^2(gc-1)} \zeta(s+1) \zeta(s+2) \dots \zeta(s+d).$$

La première expression est une série de Laurent en q^{-s} alors que la seconde est une fraction rationnelle en q^{-s} .

Lemme 3.4.1

1. La série qui définit $Z_{d,D}(s+d)$ converge absolument pour $\Re(s) > 0$. Sur ce domaine, c'est une fraction rationnelle en q^{-s} qui vaut

$$Z_{d,D}(s+d) = \frac{q^{d^2(\deg(D)+1-gc)}}{1 - q^{-s}} \tilde{Z}_{d,D}(s).$$

2. La fraction rationnelle $\tilde{Z}_{d,D}(s)$ en q^{-s} est holomorphe pour $\Re(s) > -1$.
3. On a

$$\tilde{Z}_{d,D}(0) = \text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0).$$

Démonstration. Par un changement de variables suivi de la décomposition d'Iwasawa, on obtient

$$\begin{aligned} Z_{d,D}(s+d) &= q^{d(s+d) \deg(D)} \int_{GL(d, \mathbb{A})} \mathbf{1}_{\mathfrak{gl}(d, \mathcal{O})}(X) |\det(X)|^{s+d} dX \\ &= q^{d(s+d) \deg(D)} \zeta(s+1) \zeta(s+2) \dots \zeta(s+d). \end{aligned}$$

Les assertions 1 et 2 se déduisent alors des propriétés classiques de la fonction ζ . L'assertion 3 n'est autre que la formule classique pour le volume de $GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0$. □

3.5. Fonctions $K_{D,X}^P$. On poursuit avec les mêmes notations qu'avant. Soit $P \in \mathcal{F}(P_0)$. Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, soit

$$K_{D,X}^P(g) = \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X^P + U)g) dU. \tag{3.5.1}$$

Lemme 3.5.1 La fonction $K_{D,X}^P$ est invariante à gauche par $M_{X^P}(F)N_P(\mathbb{A})$ et à droite par $G(\mathcal{O})$. De plus, pour tout $m \in M(\mathbb{A})$, on a

$$K_{D,X}^P(m) = q^{(1-gc+\deg(D)) \dim(N)} q^{(2\rho_P, H_P(m))} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^P m).$$

Démonstration. Pour alléger les notations, on omet l'indice P dans M_P et N_P . Pour $g = nmk$, selon la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})G(\mathcal{O})$, on a

$$\begin{aligned} K_{D,X}^P(g) &= \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X^P + U)m) dU \\ &= \mathbf{1}_D(m^{-1}X^P m) \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}Um) dU \\ &= \mathbf{1}_D(m^{-1}X^P m) q^{(2\rho_P, H_P(m))} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(U) dU \\ &= q^{(1-g_C + \deg(D)) \dim(N)} q^{(2\rho_P, H_P(m))} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^P m). \end{aligned}$$

Le lemme en résulte. □

3.6. Intégrales $\hat{I}_{D,X}^P(H)$. Soient $H \in H_0(M_0(\mathbb{A}))$ et $P \in \mathcal{F}(P_0)$. Soit $G(\mathbb{A})^H$ l'ensemble des $g \in G(\mathbb{A})$ tels que $H_{P_0}(g) = H$ et

$$\hat{I}_{D,X}^P(H) = \int_{N_P(F)M_{X^P}(F)\backslash G(\mathbb{A})^H} K_{D,X}^P(g) dg. \tag{3.6.1}$$

Lemme 3.6.1 *Pour tout $H \in H_0(M_0(\mathbb{A}))$, l'intégrale $\hat{I}_{D,X}^P(H)$ est convergente et égale à*

$$\begin{aligned} &\text{vol}(GL(d, F)\backslash GL(d, \mathbb{A})^0)^{|\Delta_P|+1} q^{\deg(D) \dim(N_0)} \\ &\times \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \left[q^{d^2(g_C - 1 - \deg(D))} \int_{GL(d, \mathbb{A})^{(\alpha, dH)}} \mathbf{1}_D(X_\alpha) |\det(X_\alpha)|^d dX_\alpha \right]. \end{aligned}$$

De plus, l'intégrale $\hat{I}_{D,X}^P(H)$ ne dépend que de la projection de H sur $a_{P_0}^G$.

Démonstration. Pour alléger les notations, on omet l'indice P dans M_P et N_P . Soit $M(\mathbb{A})^H = M(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^H$. On utilise la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A})^H = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^H G(\mathcal{O})$ pour dévisser l'intégrale. Cela fait apparaître au niveau des mesures la puissance $q^{-(2\rho_P, H_P(m))}$. En tenant compte des volumes $\text{vol}(G(\mathcal{O})) = 1$ et $\text{vol}(N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})) = q^{(g_C - 1) \dim(N_P)}$ ainsi que du (3.5.1), on obtient

$$\hat{I}_{D,X}^P(H) = q^{\dim(N) \deg(D)} \int_{M_{X^P}(F)\backslash M(\mathbb{A})^H} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^P m) dm.$$

On a $M_{X^P} \subset M \cap P_0$ et si l'on pose $M_1 = M_0 \cap M_{X^P}$ et $N_1 = M_{X^P} \cap N_{P_0}$, on a une décomposition de Levi $M_{X^P} = N_1 M_1$. On peut donc encore appliquer la décomposition d'Iwasawa pour descendre l'intégrale ci-dessus au sous-groupe parabolique $M \cap P_0$ de M . On pose $N_0^P = M \cap N_{P_0}$ et $M_0(\mathbb{A})^H = M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^H$. On note $2\rho_0^P$ la somme des racines du tore diagonal dans \mathfrak{n}_0^P . On obtient

$$\begin{aligned} \hat{I}_{D,X}^P(H) &= q^{\dim(N) \deg(D)} \times q^{-(2\rho_0^P, H)} \\ &\times \int_{M_1(F)\backslash M_0(\mathbb{A})^H} \int_{N_1(F)\backslash N_0^P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}X^P n^{-1}m) dn dm. \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Calculons l'intégrale intérieure. Pour cela, on note $(\mathfrak{n}_0^P)'$ l'algèbre dérivée de \mathfrak{n}_0^P et $2(\rho_0^P)'$ la somme des racines du tore diagonal dans $(\mathfrak{n}_0^P)'$. Par le lemme 3.6.2 ci-dessous, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{N_1(F)\backslash N_0^P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}X^Pn^{-1}m) \, dn \\ &= q^{(g_C-1)\dim(N_0^P)} \int_{(\mathfrak{n}_0^P)'(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X^P + U)m) \, dU \\ &= q^{(g_C-1)\dim(N_0^P)} q^{(2(\rho_0^P)', H_0(m))} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^Pm) \int_{(\mathfrak{n}_0^P)'(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(U) \, dU \\ &= q^{(g_C-1)\dim(N_0^P)} q^{\dim((\mathfrak{n}_0^P)')(1-g_C+\deg(D))} q^{(2(\rho_0^P)', H_0(m))} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^Pm). \end{aligned}$$

Soit $M_1(\mathbb{A})^0 = M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^H$ pour $H = 0$. On observera que le quotient $M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A})^0$ est de volume fini. On a alors

$$\begin{aligned} \hat{I}_{D,X}^P(H) &= q^{(g_C-1)(\dim(N_0^P)-\dim((\mathfrak{n}_0^P)'))+\deg(D)(\dim(N)+\dim(\mathfrak{n}_0^P)')} \times \text{vol}(M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A})^0) \\ &\quad \times q^{-(2\rho_0^P-2(\rho_0^P)', H)} \int_{M_1(\mathbb{A})^0\backslash M_0(\mathbb{A})^H} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^Pm) \, dm. \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

On a $2\rho_0^P - 2(\rho_0^P)' = \sum_{\alpha \in \Delta_0^P} d^2\alpha$. Traitons ensuite l'intégrale dans (3.6.3). Soit r_1d, \dots, r_sd la taille des blocs GL de M avec $r_1 + \dots + r_s = r$. Le groupe M_0 s'identifie au produit $GL(d)^r$. Le centralisateur M_1 de X^P dans M_0 s'identifie au groupe $GL(d)^s$ par le plongement qui envoie diagonalement le i -ème facteur $GL(d)$ dans le facteur $GL(d, \mathbb{A})^{r_i}$. On écrit suivant cette identification $m = (x_1, \dots, x_r)$, un élément m de $M_0(\mathbb{A})$. Alors l'application

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1^{-1}x_2, \dots, x_{r_1-1}^{-1}x_{r_1}, x_{r_1+1}^{-1}x_{r_1+2}, \dots, x_{r_s-1}^{-1}x_{r_s})$$

induit une bijection

$$M_1(\mathbb{A})^0\backslash M_0(\mathbb{A})^H \simeq \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} GL(d, \mathbb{A})^{\langle \alpha, dH \rangle},$$

où $GL(d, \mathbb{A})^{\langle \alpha, dH \rangle}$ désigne l'ensemble des éléments de $GL(d, \mathbb{A})$ de degré $\langle \alpha, dH \rangle \in \mathbb{Z}$. Cette bijection préserve les mesures de sorte que l'on a

$$q^{-(2\rho_0^P-2(\rho_0^P)', H)} \int_{M_1(\mathbb{A})^0\backslash M_0(\mathbb{A})^H} \mathbf{1}_D(m^{-1}X^Pm) \, dm = \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \int_{GL(d, \mathbb{A})^{\langle \alpha, dH \rangle}} \mathbf{1}_D(x_\alpha) |\det(x_\alpha)|^d dx_\alpha.$$

Dans ce produit, les intégrales sont convergentes : ce sont des coefficients des séries $Z_{d,D}$ (cf. lemme 3.4.1). On en déduit que l'intégrale $\hat{I}_{D,X}^P(H)$ est convergente. L'égalité du lemme se déduit de ce qui précède et des égalités suivantes

$$\begin{aligned} (g_C - 1)(\dim(N_0^P) - \dim((\mathfrak{n}_0^P)')) &= (g_C - 1)d^2|\Delta_0^P|, \\ \deg(D)(\dim(N) + \dim(\mathfrak{n}_0^P)') &= \deg(D)(\dim(N_0) - d^2|\Delta_0^P|) \end{aligned}$$

et

$$\text{vol}(M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A})^0) = \text{vol}(GL(d, F)\backslash GL(d, \mathbb{A})^0)^{|\Delta_P|+1}.$$

Enfin, la dernière assertion est une conséquence immédiate du calcul précédent. □

Dans la preuve précédente, on a utilisé le lemme suivant.

Lemme 3.6.2 *Soient N_X le centralisateur de X dans N_0 et \mathfrak{n}'_0 la sous-algèbre dérivée de \mathfrak{n}_0 . On a l'égalité suivante pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{n}'_0(\mathbb{A}))$*

$$\int_{N_X(F)\backslash N_0(\mathbb{A})} \varphi(n^{-1}Xn - X) \, dn = q^{(gc-1)\dim(N_0)} \int_{\mathfrak{n}'_0(\mathbb{A})} \varphi(U) \, dU.$$

Démonstration. On a tout d'abord

$$\begin{aligned} \int_{N_X(F)\backslash N_0(\mathbb{A})} \varphi(n^{-1}Xn - X) \, dn &= \text{vol}(N_X(F)\backslash N_X(\mathbb{A})) \int_{N_X(\mathbb{A})\backslash N_0(\mathbb{A})} \varphi(n^{-1}Xn - X) \, dn \\ &= q^{(gc-1)\dim(N_X)} \int_{N_X(\mathbb{A})\backslash N_0(\mathbb{A})} \varphi(n^{-1}Xn - X) \, dn. \end{aligned}$$

On introduit ensuite l'isomorphisme de variétés algébriques sur \mathbb{F}_q

$$\Phi : \begin{array}{l} N_X \backslash N_0 \rightarrow \mathfrak{n}'_0 \\ n \mapsto n^{-1}Xn - X. \end{array}$$

Par un dévissage usuel, on montre que le changement de variables $n \mapsto \Phi^{-1}(\Phi(n) + U_0)$ pour $U_0 \in \mathfrak{n}'_0(\mathbb{A})$ préserve la mesure sur $N_X(\mathbb{A})\backslash N_0(\mathbb{A})$. L'intégrale

$$\int_{N_X(\mathbb{A})\backslash N_0(\mathbb{A})} \varphi(n^{-1}Xn - X) \, dn$$

définit donc une mesure de Haar sur $\mathfrak{n}'_0(\mathbb{A})$. Il suffit donc de vérifier l'égalité recherchée pour une fonction d'intégrale non nulle. On va évaluer les deux membres en la fonction $\varphi_0 = \mathbf{1}_{\mathfrak{n}'_0(\mathcal{O})}$. Le membre de gauche vaut

$$\begin{aligned} q^{(gc-1)\dim(N_X)} \int_{N_X(\mathbb{A})\backslash N_0(\mathbb{A})} \varphi_0(n^{-1}Xn - X) \, dn &= q^{(gc-1)\dim(N_X)} \cdot \text{vol}(N_X(\mathcal{O})\backslash N_0(\mathcal{O})) \\ &= q^{(gc-1)\dim(N_X)}. \end{aligned}$$

Alors que, pour le second membre, on a

$$\begin{aligned} q^{(gc-1)\dim(N_0)} \int_{\mathfrak{n}'_0(\mathbb{A})} \varphi_0(U) \, dU &= q^{(gc-1)\dim(N_0)} \cdot \text{vol}(\mathfrak{n}'_0(\mathcal{O})) \\ &= q^{(gc-1)(\dim(N_0) - \dim(\mathfrak{n}'_0))}. \end{aligned}$$

L'égalité s'ensuit puisque l'on a $\dim(N_X) + \dim(\mathfrak{n}'_0) = \dim(N_0)$. □

3.7. Les séries $I_{P,D}^\xi(X, \lambda)$ et $I_D^\xi(X, \lambda)$. Soient $\xi \in a_{P_0, \mathbb{R}}$ et $P \in \mathcal{F}(P_0)$. Pour tout $\lambda \in a_0^*$, on introduit la série

$$I_{P,D}^\xi(X, \lambda) = \sum_{H \in H_0^G(M_0(\mathbb{A}))} \hat{\tau}_P(H - \xi) \hat{I}_{D,X}^P(H) q^{-\langle d\lambda, H \rangle}. \tag{3.7.1}$$

On définit alors la série

$$\begin{aligned}
 I_D^\xi(X, \lambda) &= \sum_{P \in \mathcal{F}(P_0)} (-1)^{\dim(a_P^G)} I_{P,D}^\xi(X, \lambda) \\
 &= \sum_{H \in H_0^G(M_0(\mathbb{A}))} \left[\sum_{P \in \mathcal{F}(P_0)} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H - \xi) \hat{I}_{D,X}^P(H) \right] q^{-\langle d\lambda, H \rangle}. \quad (3.7.2)
 \end{aligned}$$

3.8. Un calcul des séries $I_{P,D}^\xi(X, \lambda)$ et $I_D^\xi(X, \lambda)$. On introduit la fonction suivante de la variable $\lambda \in a_{P_0}^*$

$$\psi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_0} \tilde{Z}_{d,D}(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle).$$

D'après le lemme 3.4.1, c'est une fraction rationnelle en les $q^{\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle}$ pour $\alpha \in \Delta_0$. De plus, cette fonction est holomorphe sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -1$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$.

L'énoncé ci-dessous fait intervenir les notations de la section 2. On note $\dim(\mathcal{O}_X)$ la dimension de l'orbite de X sous G .

Proposition 3.8.1 *Soit (\mathfrak{N}, b, b') un triplet dual pour M_0 au sens de la définition 2.16.1. Pour tout $P \in \mathcal{F}(P_0)$, la série $I_{P,D}^\xi(X, \lambda)$ est absolument convergente sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -1$ pour $\alpha \in \Delta_0^P$ et $\Re(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle) > 0$ pour $\alpha \in \Delta_P$. De plus, sur cet ouvert, elle est égale au produit de*

$$\text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0) q^{\deg(D) \dim(\mathcal{O}_X)/2} \quad (3.8.1)$$

et

$$\frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \hat{\nu}_{P_0}^P(\lambda + \nu) \psi^P(\lambda + \nu) \vartheta_P^{G, bd\xi}((\lambda + \nu)/b). \quad (3.8.2)$$

Démonstration. Pour alléger les notations, on omet l'indice P dans M_P et N_P . En tenant compte du lemme 3.6.1 et des égalités

$$\dim(\mathcal{O}_X) = \dim(N_0)/2$$

et

$$\psi^P(\lambda) = \psi(\lambda^P) = \text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0)^{|\Delta_P|} \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \tilde{Z}_d(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle),$$

(cf. lemme 3.4.1, assertion 3), il suffit de prouver la convergence de la série

$$\sum_{H \in H_0^G(M_0(\mathbb{A}))} \hat{\tau}_P(H - \xi) \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \left[q^{d^2(g_C - 1 - \deg(D))} \int_{GL(d, \mathbb{A})^{(\alpha, dH)}} \mathbf{1}_D(X_\alpha) |\det(X_\alpha)|^d dX_\alpha \right] q^{-\langle d\lambda, H \rangle} \quad (3.8.3)$$

sur l'ouvert et de montrer qu'elle est égale à l'expression (3.8.2) où l'on remplace ψ^P par le produit $\prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \tilde{Z}_d(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle)$.

On a vu à la fin du § 3.3 que le réseau $H_{P_0}^G(M_0(\mathbb{A}))$ n'est autre que $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_0^\vee)$. Par un changement de variables évident, la série (3.8.3) se réécrit

$$\sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_0^\vee)} \hat{\tau}_P \left(\frac{H}{d} - \xi \right) \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \left[q^{d^2(g_C - 1 - \deg(D))} \int_{GL(d, \mathbb{A})^{(\alpha, H)}} \mathbf{1}_D(X_\alpha) |\det(X_\alpha)|^d dX_\alpha \right] q^{-\langle \lambda, H \rangle}. \tag{3.8.4}$$

En utilisant les propriétés d'un triplet dual (\mathfrak{N}, b, b') pour M_0 , on écrit (3.8.4) sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\mathfrak{N}|} \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_0^{P, \vee}) \oplus \frac{1}{b}\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee)} \hat{\tau}_P \left(\frac{H}{d} - \xi \right) \\ & \times \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \left[q^{d^2(g_C - 1 - \deg(D))} \int_{GL(d, \mathbb{A})^{(\alpha, H)}} \mathbf{1}_D(X_\alpha) |\det(X_\alpha)|^d dX_\alpha \right] q^{-\langle (\lambda + \nu), H \rangle}. \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

Dans (3.8.5), on va calculer la somme intérieure sur H . Pour cela, on décompose $\lambda + \nu$ ainsi

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta_0^P} \langle \lambda + \nu, \varpi_\alpha^\vee \rangle \alpha + \sum_{\alpha \in \Delta_P} \langle \lambda + \nu, \alpha^\vee \rangle \varpi_{\alpha^\vee}.$$

En observant que la famille $(\alpha, H)_{\alpha \in \Delta_0^P}$ parcourt $\mathbb{Z}^{\Delta_0^P}$ et que la famille $(\langle \varpi_{\alpha^\vee}, H \rangle)_{\alpha \in \Delta_P}$ parcourt $(\frac{1}{b}\mathbb{Z})^{\Delta_P}$, on s'aperçoit que la somme sur H s'exprime comme un produit dont certains facteurs donnent une fonction zêta, alors que les autres sont des sommes géométriques que nous avons déjà rencontrées. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \left[q^{d^2(g_C - 1 - \deg(D))} Z_{d, D}(d + \langle \lambda + \nu, \varpi_\alpha^\vee \rangle) \right] \times q^{-\langle \lambda, [bd\xi] \rangle} \prod_{\alpha \in \Delta_P} \frac{1}{1 - q^{-\langle (\lambda + \nu), b, \alpha^\vee \rangle}} \\ & = \hat{\vartheta}_{P_0}^P(\lambda + \nu) \left[\prod_{\alpha \in \Delta_0^P} \tilde{Z}_{d, D}(\langle \lambda + \nu, \varpi_\alpha^\vee \rangle) \right] \vartheta_P^{G, bd\xi}(\langle \lambda + \nu \rangle / b). \end{aligned} \tag{3.8.6}$$

Cela donne l'égalité recherchée. Au passage, on obtient aussi la convergence sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -1$ pour $\alpha \in \Delta_0^P$ et $\Re(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle) > 0$ pour $\alpha \in \Delta_P$. \square

Dans l'énoncé suivant, on utilise la définition (2.17.4) de la remarque 2.17.3.

Proposition 3.8.2 *La série qui définit $I_D^\xi(X, \lambda)$ est absolument convergente sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -1$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Sur cet ouvert, elle est égale à*

$$\text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0) \cdot q^{\deg(D) \dim(\mathcal{O}_X)/2} \cdot c_{P_0}^{G, d\xi}(\psi, \lambda).$$

Démonstration. D'un point de vue formel, l'égalité recherchée est une conséquence de la proposition 3.8.1 et des définitions (2.17.1) et (2.17.4). D'après la proposition 3.8.1, la série $I_D^\xi(X, \lambda)$ est au moins absolument convergente sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. D'après le théorème 2.17.2, la fonction $c_{P_0}^{G, d\xi}(\psi, \lambda)$ est holomorphe sur l'ouvert défini par $\Re(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle) > -1$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. La proposition en résulte. \square

3.9. La série $I_D^{e,\xi}(X, \lambda)$. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, on introduit la variante suivante de la série $I_D^\xi(X, \lambda)$ du § 3.7

$$I_D^{e,\xi}(X, \lambda) = \sum_{H \in H_0^G(M_0(\mathbb{A})^e)} \left[\sum_{P \in \mathcal{F}(P_0)} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H - \xi) \hat{I}_{D,X}^P(H) \right] q^{-\langle d\lambda, H \rangle}.$$

On a le corollaire suivant de la proposition 3.8.2.

Corollaire 3.9.1 *La série qui définit $I_D^{e,\xi}(X, \lambda)$ a les mêmes propriétés de convergence que la série $I_D^\xi(X, \lambda)$. De plus, sur son ouvert de convergence, elle est égale à*

$$\text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0) \cdot q^{\deg(D) \dim(\mathcal{O}_X)/2} \cdot \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \exp(-2\pi i k e / r) c_{P_0}^{G,d\xi}(\psi, \lambda + k\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \frac{2\pi i}{r \log q} \mathbb{Z}(\Delta_0)$ qui vérifie la relation (3.3.3) du lemme 3.3.1.

Démonstration. Pour tout γ comme ci-dessus, la relation (3.3.3) implique que l'on a

$$I_D^{e,\xi}(X, \lambda) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \exp(-2\pi i k e / r) I_D^\xi(X, \lambda + k\gamma).$$

Le corollaire est alors une conséquence immédiate de la proposition 3.8.2. □

3.10. Calcul de la moyenne des séries. La construction de la série $I_D^\xi(X, \lambda)$ dépend du choix de $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ et de X . Tout autre sous-groupe parabolique $P'_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ est de la forme $w \cdot P_0$ pour un unique élément de W_0 , le groupe de Weyl de M_0 (cf. § 3.3). Soit $I_D^\xi(\lambda, P'_0)$ la série précédente construite pour les données $(w \cdot P_0, w \cdot X)$. On observe que pour tout $w \in W_0$, on a

$$I_D^\xi(\lambda, P'_0) = I_D^{w \cdot \xi}(X, w \cdot \lambda).$$

On définit alors la moyenne de ces séries sur $\mathcal{P}(M_0)$:

$$S^\xi(\lambda) = \frac{1}{|\mathcal{P}(M_0)|} \sum_{P \in \mathcal{P}(M_0)} I_D^\xi(\lambda, P).$$

Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, on définit de même $I^{e,\xi}(\lambda, P)$ pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$ et $S^{e,\xi}(\lambda)$. On a d'ailleurs

$$S^{e,\xi}(\lambda) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \exp(-2\pi i k e / r) S^\xi(\lambda + k\gamma) \tag{3.10.1}$$

pour tout $\gamma \in \frac{2\pi i}{r \log q} \mathbb{Z}(\Delta_0)$ qui vérifie la relation (3.3.3) du lemme 3.3.1.

Pour formuler nos résultats, il est commode d'introduire les notations suivantes :

– la fraction rationnelle en q^{-s}

$$\varphi(s) = q^{d^2(gc-1)} q^{sd \deg(D)} \zeta(s+1) \zeta(s+2) \cdots \zeta(s+d);$$

– la famille $(\varphi_P)_{P \in \mathcal{P}(M_0)}$

$$\varphi_P(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} \varphi(\langle \lambda, \varpi_\alpha^\vee \rangle).$$

Proposition 3.10.1 *Pour tout $\xi \in a_{P_0, \mathbb{R}}$, la série $S^\xi(\lambda)$ est convergente et holomorphe sur un voisinage de $ia_{M_0, \mathbb{R}}^*$. Si, de plus, ξ est en position générale, la somme de cette série ne dépend pas de $\xi \in a_{P_0, \mathbb{R}}$ et, sur ce voisinage de convergence, elle est égale à*

$$\text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0) \cdot q^{\text{deg}(D) \cdot \dim(\mathcal{O}_X)/2} \cdot \frac{1}{|\mathcal{P}(M_0)|} \sum_{P \in \mathcal{P}(M_0)} \varphi_P(\lambda).$$

Démonstration. La proposition 3.8.2 donne la convergence de $S^\xi(\lambda)$, ainsi que l’expression suivante pour sa somme privée de facteurs évidents

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M_0)} c_P^{G, d\xi}(\psi_P, \lambda)$$

où l’on définit la (G, M_0) -cofamille $(\psi_P)_{P \in \mathcal{P}(M_0)}$ par

$$\psi_P(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} \tilde{Z}_{d, D}(\langle \varpi_\alpha^\vee, \lambda \rangle).$$

Supposons, de plus, ξ en position générale. Le théorème 2.19.1 implique que l’expression précédente est égale à

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M_0)} \hat{\vartheta}_P^G(\lambda) \psi_P(\lambda).$$

Le résultat vient alors de l’égalité suivante

$$\hat{\vartheta}_P^G(\lambda) \psi_P(\lambda) = \varphi_P(\lambda). \quad \square$$

Théorème 3.10.2 *Prenons $\xi = 0$ et supposons que le degré $e \in \mathbb{Z}$ soit premier à l’entier r (rappelons que r est le rang du centre de M_0). Alors la valeur en $\lambda = 0$ de la série $I_D^{e, 0}(X, \lambda)$ est égale à la valeur en $\lambda = 0$ de l’expression holomorphe dans un voisinage de $ia_{M_0, \mathbb{R}}^*$*

$$\begin{aligned} & \text{vol}(GL(d, F) \backslash GL(d, \mathbb{A})^0) \cdot q^{\text{deg}(D) \cdot \dim(\mathcal{O}_X)/2} \\ & \times \frac{1}{r|\mathcal{P}(M_0)|} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(M_0)} \exp(-2\pi i k e / r) \varphi_P(\lambda + k\gamma) \end{aligned}$$

pour tout $\gamma \in \frac{2\pi i}{r \log q} \mathbb{Z}(\Delta_0)$ qui vérifie la relation (3.3.3) du lemme 3.3.1. De plus, cette valeur ne dépend pas de l’entier e premier à r .

Démonstration. L’hypothèse que le degré de e soit premier à r entraîne que pour tout $H \in H_0(M_0(\mathbb{A})^e)$ et tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{P_0}$, on a $\langle \varpi, H \rangle \neq 0$. Montrons-le. Dans le cas contraire, le poids ϖ détermine un sous-groupe parabolique maximal $P \in \mathcal{F}(P)$ par la condition $\hat{\Delta} = \{\varpi\}$. Il existe $1 \leq r' < r$ tel que P soit le stabilisateur du sous-espace $V_1 \oplus \dots \oplus V_{r'}$ (avec les notations du § 3.2). La dimension de ce sous-espace est $r'd$. Pour tout $H \in H_0(M_0(\mathbb{A})^e)$, il existe un entier $e' \in \mathbb{Z}$ tel que l’on ait

$$\langle \varpi, H \rangle = e' - \frac{r'd}{n} e = e' - \frac{r'}{r} e$$

où $n = rd$ est le rang de G . Par conséquent, l’égalité $\langle \varpi, H \rangle = 0$ entraîne $re' = r'e$ et donc r divise r' , ce qui contredit $1 \leq r' < r$.

Il s'ensuit que pour $P \in \mathcal{F}(P_0)$, tout $H \in H_0(M_0(\mathbb{A})^e)$, tout $w \in W_0$ et tout élément $\xi \in a_{M_0, \mathbb{R}}$ assez proche de 0, on a

$$\hat{\tau}_P(H) = \hat{\tau}_P(H - w \cdot \xi).$$

Prenons alors ξ proche de 0 pour que vaille l'égalité précédente. On en déduit que pour un tel ξ , on a $I_D^{e,0}(X, \lambda) = I_D^{e,\xi}(X, \lambda)$. On a même pour tout $P \in \mathcal{P}(M_0)$ et tout $w \in W_0$ tels que $P = w \cdot P_0$

$$I_D^{e,0}(\lambda, P) = I_D^{e,0}(X, w \cdot \lambda) = I_D^{e,w \cdot \xi}(X, w \cdot \lambda) = I_D^{e,\xi}(\lambda, P).$$

Il s'ensuit que les valeurs en $\lambda = 0$ de $I_D^{e,0}(X, \lambda)$ et $S^{e,\xi}(\lambda)$ sont égales. Comme on peut supposer de plus ξ en position générale, le théorème se réduit à une simple combinaison de l'égalité (3.10.1) et de la proposition 3.10.1. □

Remarque 3.10.3 Bien que nous ne l'ayons pas vérifié, nous nous attendons à ce que la valeur de la série $I_D^{e,0}(X, \lambda)$ en $\lambda = 0$ soit indépendante de l'entier e premier à r . Du moins, elle ne dépend que de la réduction de e modulo r . Lorsque r est premier, on peut esquisser une preuve de cette indépendance. Avec les notations ci-dessus, il s'agit de vérifier que la limite pour $\lambda \rightarrow 0$ de la somme suivante est indépendante de e premier à r :

$$\sum_{k=0}^{r-1} \sum_{w \in W_0} \exp(-2\pi i k e / r) \prod_{\alpha \in \Delta_0} \varphi(\langle w \cdot (\lambda + k\gamma), \varpi_\alpha^\vee \rangle).$$

Il est commode de prendre γ défini par (3.3.2). Avec les notations du § 3.3 et en tenant compte de la relation (3.3.1), on voit que l'expression précédente se réécrit

$$\sum_{k=0}^{r-1} \sum_{w \in W_0} \exp(-2\pi i k e / r) \prod_{j=1}^{r-1} \varphi\left(\langle w \cdot \lambda, \varpi_j^\vee \rangle + \frac{2\pi i k j}{r \log q}\right).$$

La contribution de $k = 0$ s'écrit

$$\sum_{w \in W_0} \prod_{j=1}^{r-1} \varphi(\langle w \cdot \lambda, \varpi_j^\vee \rangle)$$

qui a une limite en $\lambda = 0$, évidemment indépendante de e . La contribution de $k \neq 0$ a aussi une limite en $\lambda = 0$ qui est à un coefficient $|W_0|$ près

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r-1} \exp(-2\pi i k e / r) \prod_{j=1}^{r-1} \varphi\left(\frac{2\pi i k j}{r \log q}\right) &= \prod_{j=1}^{r-1} \varphi\left(\frac{2\pi i j}{r \log q}\right) \sum_{k=1}^{r-1} \exp(-2\pi i k e / r) \\ &= - \prod_{j=1}^{r-1} \varphi\left(\frac{2\pi i j}{r \log q}\right) \end{aligned}$$

et qui est donc indépendante de e premier au nombre premier r .

4. Induction de Lusztig-Spaltenstein

4.1. Dans cette section, on rassemble quelques résultats utiles sur l’induction de Lusztig-Spaltenstein (cf. [11]). Le groupe G est le groupe $GL(n)$ sur un corps quelconque. Les autres notations sont celles utilisées dans les sections 2 et 3.

4.2. Induite de Lusztig-Spaltenstein. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique et $P = MN_P$ sa décomposition de Levi standard. Soient $X \in \mathfrak{p}$ et \mathcal{O}^P la P -orbite de X . La variété $\mathcal{O}^P \oplus \mathfrak{n}_P$ est irréductible et est formée d’éléments nilpotents de \mathfrak{g} . Comme il n’y a qu’un nombre fini de G -classes de conjugaison nilpotentes dans \mathfrak{g} , il existe une unique orbite nilpotente \mathcal{O} telle que l’intersection

$$\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}^P \oplus \mathfrak{n}_P)$$

soit un ouvert dense de $\mathcal{O}^P \oplus \mathfrak{n}_P$. Cette intersection est une unique classe de P -conjugaison. On pose alors

$$I_P^G(X) = \mathcal{O}.$$

On dit que \mathcal{O} est l’induite de X de P à G . Elle ne dépend par construction que de la P -orbite de X . On voit aussi qu’elle ne dépend que de P/M_P -orbite de la projection de X sur $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}_P$. En particulier, si \mathcal{O}^M est une M -orbite nilpotente dans \mathfrak{m} , l’induite $I_P^G(X)$ ne dépend pas du choix du représentant $X \in \mathcal{O}^M$. Aussi on la note

$$I_P^G(\mathcal{O}^M).$$

4.3. Transitivité. Soient $P_1 \subset P_2 \subset G$ des sous-groupes paraboliques et $X \in \mathfrak{p}_1(F)$. On définit une M_2 -orbite nilpotente dans \mathfrak{m}_2 par

$$I_{P_1}^{P_2}(X) = I_{P_1 \cap M_2}^{M_2}(X_2)$$

où $X = X_2 + U$ avec $X_2 \in \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{p}_1$ et $U \in \mathfrak{n}_2$.

Lemme 4.3.1 *Pour tout $Y \in I_{P_1}^{P_2}(X)$, on a*

$$I_{P_2}^G(Y) = I_{P_1}^G(X).$$

Démonstration. Écrivons $X = X_1 + U + V$ avec $X_1 \in \mathfrak{m}_1$, $U \in \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ et $V \in \mathfrak{n}_2$. Soient $\mathcal{O}^{P_1}(X)$, $\mathcal{O}^{M_1}(X_1)$ et $\mathcal{O}^{P_1 \cap M_2}(X_1 + U)$ les orbites respectivement de X sous P_1 , X_1 sous M_1 et $X_1 + U$ sous $P_1 \cap M_2$. On a $\mathcal{O}^{P_1}(X) \oplus \mathfrak{n}_1 = \mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus \mathfrak{n}_1$. Soit $\mathcal{O} = I_{P_1}^G(X)$. Donc $\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus \mathfrak{n}_1)$ est un ouvert dense de $\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus \mathfrak{n}_1$. Soit $\mathcal{O}' = I_{P_1}^{P_2}(X)$. Comme on a $\mathcal{O}^{P_1 \cap M_2}(X_1 + U) \oplus (\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2) = \mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus (\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$, on en déduit que $\mathcal{O}' \cap [\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus (\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2)]$ est un ouvert dense de $\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus (\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$. Ainsi

$$[\mathcal{O}' \cap [\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus (\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2)]] \oplus \mathfrak{n}_2$$

est un ouvert dense de $\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus \mathfrak{n}_1$. Par conséquent,

$$\mathcal{O} \cap [[\mathcal{O}' \cap [\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus (\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{m}_2)]] \oplus \mathfrak{n}_2]$$

est aussi un ouvert dense de $\mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus \mathfrak{n}_1$. Donc $\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}' \oplus \mathfrak{n}_2)$ est non vide et c’est un ouvert de $\mathcal{O}' \oplus \mathfrak{n}_2$ vu que l’on a $\mathcal{O}' \oplus \mathfrak{n}_2 \subset \mathcal{O}^{M_1}(X_1) \oplus \mathfrak{n}_1$. D’où le résultat. □

4.4. Croissance de l'induite selon les sous-groupes paraboliques. On note $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence d'une orbite nilpotente \mathcal{O} .

Lemme 4.4.1 Soient $P_1 \subset P_2$ des sous-groupes paraboliques de G . On a alors pour tout $X \in \mathfrak{p}_1(F)$,

$$I_{P_2}^G(X) \subset \overline{I_{P_1}^G(X)}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}^1(X)$ l'orbite de X sous P_1 . Soit $Y \in I_{P_2}^G(X)$. Quitte à conjuguer Y , on peut supposer que l'on a $Y \in X + \mathfrak{n}_2$. Mais on a

$$X + \mathfrak{n}_2 \subset X + \mathfrak{n}_1 \subset \mathcal{O}^1(X) \oplus \mathfrak{n}_1 \subset \overline{I_{P_1}^G(X)},$$

d'où le résultat. □

Lemme 4.4.2 Soient $X \in \mathfrak{p}_1(F)$ et $P_1 \subset P_2$ des sous-groupes paraboliques de G tels que $I_{P_1}^G(X) = I_{P_2}^G(X)$. Alors pour tout sous-groupe parabolique Q tel que $P_1 \subset Q \subset P_2$, on a

$$I_Q^G(X) = I_{P_1}^G(X) = I_{P_2}^G(X).$$

Démonstration. D'après le lemme 4.4.1, on a

$$\begin{cases} I_Q^G(X) \subset \overline{I_{P_1}^G(X)} \\ I_{P_1}^G(X) = I_{P_2}^G(X) \subset \overline{I_Q^G(X)} \end{cases}$$

d'où $I_Q^G(X) = I_{P_1}^G(X)$. □

5. Quelques résultats auxiliaires

5.1. Transformée de Fourier et formule sommatoire de Poisson. Les notations sont celles de la section 3. Soit $\psi_0 : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère additif non trivial. Soit ω_C une forme différentielle rationnelle non nulle sur la courbe C . Pour toute place c de C , on associe à ω_C et à ψ_0 un caractère additif ψ du corps F_c complété de F en c par

$$\psi(x) = \psi_0(\text{trace}_{k_c/\mathbb{F}_q}(\text{Res}(x \cdot \omega_C))).$$

Cela détermine un caractère additif, noté encore ψ , du groupe \mathbb{A} des adèles de F qui est trivial sur F .

Soient \mathfrak{n} et $\bar{\mathfrak{n}}$ des espaces vectoriels sur \mathbb{F}_q en dualité *via* un accouplement parfait $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les groupes $\mathfrak{n}(\mathbb{A})$ et $\bar{\mathfrak{n}}(\mathbb{A})$ sont munis des mesures de Haar qui donnent le volume 1 à $\mathfrak{n}(F) \backslash \mathfrak{n}(\mathbb{A})$ et $\bar{\mathfrak{n}}(F) \backslash \bar{\mathfrak{n}}(\mathbb{A})$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{n}(\mathbb{A}))$ (c'est-à-dire localement constante et à support compact), on définit une fonction $\hat{f} \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{n}}(\mathbb{A}))$ par

$$\hat{f}(Y) = \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} f(X) \psi(\langle X, Y \rangle) dX.$$

La formule sommatoire de Poisson est alors l'égalité

$$\sum_{X \in \mathfrak{n}(F)} f(X) = \sum_{Y \in \bar{\mathfrak{n}}(F)} \hat{f}(Y).$$

Soit Ω_C le diviseur de ω_C . On a $\deg(\Omega_C) = 2g_C - 2$. Pour tout diviseur D sur C , on dispose de la fonction $\mathbf{1}_D \in C_c^\infty(\mathfrak{n}(\mathbb{A}))$ qui est la fonction caractéristique de $\varpi_D \mathfrak{n}(\mathcal{O})$. On a la formule suivante

$$\hat{\mathbf{1}}_D = q^{\dim(\mathfrak{n})(1-g_C+\deg(D))} \mathbf{1}_{\Omega_C-D}. \tag{5.1.1}$$

Lemme 5.1.1 *Dans le cas $\mathfrak{n} = \mathbb{F}_q$, il existe une constante $c \geq 1$ telle que pour $a \in \mathbb{A}^\times$ et tout diviseur D , on ait*

$$\sum_{X \in F} \mathbf{1}_D(a^{-1}X) \leq c \sup(q^{\deg(D)-\deg(a)}, 1).$$

Démonstration. On a $\deg(\varpi_D) = -\deg(D)$. En remplaçant a par $\varpi_D a$, on voit qu'il suffit de traiter le cas $D = 0$. Soit $\mathbf{1}$ la fonction caractéristique de \mathcal{O} . Si $\deg(a) > 0$, on a $\mathbf{1}(a^{-1}X) = 1$ si et seulement si $X = 0$. Supposons ensuite $\deg(a) < 2 - 2g_C$. Par la formule sommatoire de Poisson, on a

$$\sum_{X \in F} \mathbf{1}(a^{-1}X) = q^{1-g_C-\deg(a)} \sum_{X \in F} \mathbf{1}_{\Omega_C}(aX)$$

et seul $X = 0$ intervient non trivialement dans le membre de droite. On a donc dans ce cas

$$\sum_{X \in F} \mathbf{1}(a^{-1}X) = q^{1-g_C-\deg(a)}.$$

Il reste à majorer notre expression pour $2 - 2g_C \leq \deg(a) \leq 0$ par une constante $c \geq 1$. L'existence d'un tel c résulte de la compacité de l'ensemble

$$\{a \in F^\times \setminus \mathbb{A}^\times \mid 2 - 2g_C \leq \deg(a) \leq 0\}. \quad \square$$

5.2. Théorie de la réduction et fonctions d'Arthur. On utilise les notations des sections 2 et 3. Le groupe G est le groupe $GL(n)$ sur le corps fini \mathbb{F}_q , muni de $B \subset G$ son sous-groupe de Borel standard et $T_0 \subset B$ son sous-tore maximal standard. On réserve la lettre T pour un paramètre de troncature; c'est pour cela que le sous-tore maximal de G se retrouve affublé d'un indice 0. On omet souvent les indices T_0 et B pour les constructions associées à T_0 et B . Par exemple, on note $\Delta = \Delta_B$ (l'ensemble des racines simples de T_0 dans B).

Soit $\eta \in \mathbb{A}^\times$ un idèle de degré 1. L'application

$$\begin{aligned} X_*(T_0) &\rightarrow T_0(\mathbb{A}) \\ \lambda &\mapsto \lambda(\eta)^{-1} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

induit une bijection du groupe $X_*(T_0)$ des cocaractères de T_0 sur un sous-groupe discret noté A de $T_0(\mathbb{A})$. On observera que si $a = \lambda(\eta)^{-1}$, l'accouplement canonique entre le cocaractère λ et un caractère $\alpha \in X^*(T_0)$ vaut $\langle \alpha, \lambda \rangle = \langle \alpha, H_B(a) \rangle$ (cf. § 3.3 pour la définition de H_B).

Soit $T_1 \in a_{\mathbb{R}}$ tel que pour tout $\alpha \in \Delta$, on ait $\alpha(T_1) < -2g_C$. Soit

$$A^G(T_1)$$

l'image dans A de l'ensemble

$$\{\lambda \in X_*(T_0) \mid \forall \alpha \in \Delta \langle \alpha, \lambda - T_1 \rangle > 0\}.$$

On a alors l'égalité (on renvoie le lecteur à [8] pour une référence)

$$G(\mathbb{A}) = G(F) \cdot B(\mathbb{A})^0 \cdot A^G(T_1) \cdot G(\mathcal{O})$$

où

$$B(\mathbb{A})^0 = B(\mathbb{A}) \cap \text{Ker}(H_B).$$

Comme $B(F) \backslash B(\mathbb{A})^0$ est compact, il est loisible de fixer Ω_B , une partie compacte de $B(\mathbb{A})^0$ telle que

$$G(\mathbb{A}) = G(F) \cdot \Omega_B \cdot A^G(T_1) \cdot G(\mathcal{O}).$$

Soient $T \in \overline{a_B^+}$ et $A^G(T_1, T)$, l'image dans A de l'ensemble

$$\{\lambda \in X_*(T_0) \mid \forall \alpha \in \Delta \langle \alpha, \lambda - T_1 \rangle > 0 \text{ et } \forall \varpi \in \hat{\Delta} \langle \varpi, \lambda - T \rangle \leq 0\}.$$

Soit

$$F^G(\cdot, T)$$

la fonction caractéristique de l'ensemble $G(F) \cdot \Omega_B \cdot A^G(T_1, T) \cdot G(\mathcal{O})$. La fonction F^G est invariante à gauche par $G(F)$. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, l'ensemble

$$\{g \in G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e \mid F(g, T) = 1\}$$

est compact.

La même construction vaut pour tout sous-groupe de Levi M de G . La fonction $F^M(\cdot, T)$ sur $M(\mathbb{A})$ est la fonction caractéristique de $M(F)\Omega_B^M A^M(T_1, T)M(\mathcal{O})$ pour Ω_B^M , un certain compact de $B(\mathbb{A})^0 \cap M(\mathbb{A})$. Il est loisible de supposer que l'on a $\Omega_B^M = \Omega_B \cap M(\mathbb{A})$. Pour tout sous-groupe parabolique standard P , soit $F^P(\cdot, T)$ la fonction sur $N_P(\mathbb{A})M_P(F) \backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$ qui coïncide sur $M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A})/M_P(\mathcal{O})$ avec $F^{M_P}(\cdot, T)$, l'existence et l'unicité de F^P résultent de la décomposition d'Iwasawa.

Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, on a (pour une preuve, cf., par exemple, la proposition 10.3.12 de [10])

$$\sum_{P \in \mathcal{F}(B)} \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} F^P(\delta g, T) \tau_P(H_P(\delta g) - T) = 1. \tag{5.2.2}$$

Rappelons que la fonction H_P est définie au § 3.3; c'est aussi la composée de H_B avec la projection sur a_P .

Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, on a

$$F^G(g, T) = \sum_{P \in \mathcal{F}(B)} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T).$$

Cet énoncé est une version du lemme 2.1 de [3] pour les corps de fonctions; il se démontre comme *loc. cit.*, le point clef étant représenté dans notre situation par l'égalité (5.2.2).

Soient $P_1 \subset P_2$ des sous-groupes paraboliques standards de G . Pour tout $H \in a_{T_0, \mathbb{R}}$, soit

$$\sigma_{P_1}^{P_2}(H) = \sum_{P_2 \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_{P_2}^P)} \tau_{P_1}^P(H) \hat{\tau}_P(H).$$

Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $T \in \overline{a_B^+}$, soit

$$\chi_T^{P_1, P_2}(g) = F^{P_1}(g, T) \sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(g) - T).$$

Cette fonction est invariante à gauche par $N_{P_1}(\mathbb{A})M_{P_1}(F)$ et à droite par $G(\mathcal{O})$. On va en donner une description alternative. Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, soit $A^{P_1, P_2}(T_1, T) \subset A$ l'ensemble des $a = \lambda(\eta^{-1}) \in A$ pour $\lambda \in X^*(T_0)$ qui vérifie les cinq conditions suivantes

1. $\forall \alpha \in \Delta^{M_1} \langle \alpha, \lambda - T_1 \rangle > 0$;
2. $\forall \varpi \in \hat{\Delta}^{M_1} \langle \varpi, \lambda - T \rangle \leq 0$;
3. $\forall \alpha \in \Delta_{M_1}^{M_2} \langle \alpha, \lambda - T \rangle > 0$;
4. $\forall \alpha \in \Delta_{M_1} - \Delta_{M_1}^{M_2} \langle \alpha, \lambda - T \rangle \leq 0$;
5. $\forall \varpi \in \hat{\Delta}_{M_2} \langle \varpi, \lambda - T \rangle > 0$.

Remarques 5.2.1

- En vertu des conditions 1 et 2, on a $A^{P_1, P_2}(T_1, T) \subset A^{M_1}(T_1, T)$.
- Si $P_1 = P_2 = G$, les conditions 3 à 5 sont vides et on a $A^{G, G}(T_1, T) = A^G(T_1, T)$.
- Si $P_1 = P_2 \neq G$, la condition 3 est vide, mais les conditions 4 et 5 sont incompatibles : on a alors $A^{P_1, P_2}(T_1, T) = \emptyset$.
- Si $T \in \overline{a_B^+}$, on a $A^{P_1, P_2}(T_1, T) \subset A^{M_2}(T_1)$ (cela résulte du lemme ci-dessous).

Lemme 5.2.2 *Soit P un sous-groupe parabolique de G . Soient $T \in \overline{a_B^+}$ et $X \in a_{B, \mathbb{R}}$ qui vérifient*

1. $\forall \varpi \in \hat{\Delta}^P \langle \varpi, X - T \rangle \leq 0$;
2. $\forall \alpha \in \Delta_P \langle \alpha, X - T \rangle > 0$.

Alors pour tout $\alpha \in \Delta^G - \Delta^P$, on a $\langle \alpha, X - T \rangle > 0$.

Démonstration. Soit p la projection de a_B sur a_P . Soit $\hat{\Delta}^P = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta^P\}$ la base de $a_B^{P, *}$ duale de $(\alpha^\vee)_{\alpha \in \Delta^P}$. On a pour tout $X \in a_{B, \mathbb{R}}$

$$X = \sum_{\alpha \in \Delta^P} \langle \varpi_\alpha, X \rangle \alpha^\vee + p(X).$$

Pour tout $\beta \in \Delta^G - \Delta^P$, la projection β_P de β sur a_P^* appartient à Δ_P et

$$\langle \beta, X \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta^P} \langle \varpi_\alpha, X \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle + \langle \beta_P, X \rangle.$$

Or $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq 0$. Donc si X vérifie les conditions 1 et 2, on a

$$\langle \beta, X \rangle > \sum_{\alpha \in \Delta^P} \langle \varpi_\alpha, T \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle + \langle \beta_P, T \rangle = \langle \beta, T \rangle$$

d'où le résultat. □

Lemme 5.2.3 (Arthur). *La fonction*

$$m \in M_1(\mathbb{A}) \mapsto \chi_T^{P_1, P_2}(m)$$

est la fonction caractéristique de $M_1(F) \cdot \Omega_B^{M_1} \cdot A^{P_1, P_2}(T_1, T) \cdot M_1(\mathcal{O})$.

Remarque 5.2.4 Si $P_1 = P_2 \neq G$, la fonction $\chi_T^{P_1, P_1}$ est identiquement nulle (cf. remarque 5.2.1).

Démonstration. Il suffit de combiner [1], lemme 6.1, avec la description de la fonction F^{P_1} . □

La fonction $\chi_T^{P_1, P_2}$ va intervenir *via* le lemme suivant.

Lemme 5.2.5 (Arthur). *Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , soit K^P une fonction sur $P(F) \backslash G(\mathbb{A})$. On a l'égalité entre*

$$\sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T) K^P(\delta g)$$

et

$$\sum_{B \subset P_1 \subset P_2 \subset G} \sum_{\delta \in P_1(F) \backslash G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) K^{P_1, P_2}(\delta g)$$

où

– l'on pose

$$K^{P_1, P_2}(g) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} (-1)^{\dim(a_P^G)} K^P(g), \tag{5.2.3}$$

– dans la somme ci-dessus, les termes correspondant à $P_1 = P_2$ sont nuls sauf si $P_1 = P_2 = G$, auquel cas on obtient

$$F^G(g, T) K^G(g).$$

Démonstration. Elle repose sur les arguments formels utilisés pp. 41–43 dans [5]. □

5.3. Une majoration de sommes rationnelles. Soient $\alpha \in \Delta$ et Q le sous-groupe parabolique standard maximal de G défini par la condition

$$\Delta - \Delta^Q = \{\alpha\}.$$

Soit Σ_Q l'ensemble des racines de T_0 dans \mathfrak{n}_Q . On a une décomposition en espace poids

$$\mathfrak{n}_Q = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_Q} \mathfrak{n}_\alpha.$$

Pour tout $\Phi \subset \Sigma_Q$, on pose

$$\mathfrak{n}_\Phi = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{n}_\alpha.$$

Tout élément $U \in \mathfrak{n}_\Phi$ s'écrit $U = \sum_{\alpha \in \Phi} U_\alpha$ selon cette décomposition. Pour tout polynôme $g \in \mathbb{F}_q[\mathfrak{n}_\Phi]$ et tout $\alpha \in \Phi$, on note $\deg_\alpha(g)$ le degré de $g(U)$ en la variable U_α . On note $\mathcal{V}((g_i)_{i \in I})$ le fermé de \mathfrak{n}_Φ défini par une famille de polynômes $(g_i)_{i \in I}$.

Proposition 5.3.1 *Soit d un entier. Pour tout diviseur D sur C , il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute partie non vide $\Phi \subset \Sigma_Q$, tout $a \in A^G(T_1)$ et toute famille de polynômes non tous nuls $(g_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{F}_q[\mathfrak{n}_\Phi]$ qui vérifie*

$$\forall i \in I, \forall \beta \in \Phi, \quad \text{deg}_\beta(g_i) \leq d,$$

on a l'inégalité

$$\prod_{\beta \in \Phi} q^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle} \sum_{U \in \mathfrak{n}_\Phi(F) \cap \mathcal{V}((g_i)_{i \in I})} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ua) \leq c \cdot q^{-\langle \alpha, H_B(a) \rangle}.$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence sur le cardinal de Φ . Le cas d'un singleton $\Phi = \{\beta\}$ amorce la récurrence. Dans ce cas, le nombre de zéros d'un polynôme g_i non nul ne peut pas excéder d et on a donc

$$q^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle} \sum_{U \in \mathfrak{n}_\Phi(F) \cap \mathcal{V}((g_i)_{i \in I})} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ua) \leq dq^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle}.$$

Il existe $\Delta' \subset \Delta - \{\alpha\}$ tel que $\beta = \alpha + \sum_{\gamma \in \Delta'} \gamma$. La majoration $-\langle \gamma, H_B(a) \rangle < -\langle \gamma, T_1 \rangle$ pour $a \in A^G(T_1)$ et $\gamma \in \Delta'$ donne le résultat.

Supposons désormais $\Phi = \Phi' \amalg \{\beta\}$ et $|\Phi'| \geq 1$. Tout $U \in \mathfrak{n}_\Phi$ s'écrit $U = U' + U_\beta$ selon la décomposition $\mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{n}_{\Phi'} \oplus \mathfrak{n}_\beta$. Soit $I' = I \times \{0, 1, \dots, d\}$. On obtient une famille de polynômes $(g'_i)_{i \in I'}$ de $\mathbb{F}_q[\mathfrak{n}_{\Phi'}]$ non tous nuls en écrivant pour tout $i \in I$

$$g_i(U) = \sum_{k=0}^d g'_{i,k}(U') U_\beta^k.$$

Pour alléger les notations, on introduit $\mathcal{V} = \mathcal{V}((g_i)_{i \in I})$ et $\mathcal{V}' = \mathcal{V}((g'_i)_{i \in I'})$. Soit \mathcal{V}^0 l'ouvert de \mathcal{V} formé des U dont la projection U' n'appartient pas au fermé \mathcal{V}' de $\mathfrak{n}_{\Phi'}$. On a donc une réunion disjointe

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}' \oplus \mathfrak{n}_\beta) \cup \mathcal{V}^0.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que les contributions suivantes satisfont toutes deux la majoration recherchée

$$\prod_{\gamma \in \Phi'} q^{-\langle \gamma, H_B(a) \rangle} \sum_{U' \in \mathfrak{n}_{\Phi'}(F) \cap \mathcal{V}'} \mathbf{1}_D(a^{-1}U'a) \times q^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle} \sum_{U_\beta \in \mathfrak{n}_\beta(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}U_\beta a) \tag{5.3.1}$$

et

$$\prod_{\gamma \in \Phi} q^{-\langle \gamma, H_B(a) \rangle} \sum_{U \in \mathfrak{n}_\Phi(F) \cap \mathcal{V}^0} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ua). \tag{5.3.2}$$

Pour majorer (5.3.1), on utilise d'une part l'hypothèse de récurrence appliquée au facteur attaché à Φ' , et d'autre part le fait que l'expression $q^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle} \sum_{U_\beta \in \mathfrak{n}_\beta(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}U_\beta a)$ est bornée pour $a \in A^G(T_1)$ (cela résulte immédiatement du lemme 5.1.1).

Pour majorer (5.3.2), on commence par réécrire cette expression sous la forme

$$\prod_{\gamma \in \Phi'} q^{-\langle \gamma, H_B(a) \rangle} \sum_{U' \in \mathfrak{n}_{\Phi'}(F), U' \notin \mathcal{V}'} \mathbf{1}_D(a^{-1}U'a) \times q^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle} \sum_{U_\beta \in \mathfrak{n}_\beta(F), U' + U_\beta \in \mathcal{V}} \mathbf{1}_D(a^{-1}U_\beta a).$$

En utilisant le cas du singleton $\{\beta\}$ et de la famille de polynômes $(g_i(U' + \cdot))_{i \in I}$ (non tous nuls puisque $U' \notin \mathcal{V}'$), on a la majoration

$$q^{-\langle \beta, H_B(a) \rangle} \sum_{U_\beta \in \mathfrak{n}_\beta(F), U' + U_\beta \in \mathcal{V}'} \mathbf{1}_D(a^{-1}U_\beta a) \leq d \cdot q^{-\langle \alpha, H_B(a) \rangle}.$$

Il reste donc à borner

$$\prod_{\gamma \in \Phi'} q^{-\langle \gamma, H_B(a) \rangle} \sum_{U' \in \mathfrak{n}_{\Phi'}(F), U' \notin \mathcal{V}'} \mathbf{1}_D(a^{-1}U'a).$$

On majore trivialement cette expression par

$$\prod_{\gamma \in \Phi'} q^{-\langle \gamma, H_B(a) \rangle} \sum_{U' \in \mathfrak{n}_{\Phi'}(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}U'a)$$

qui est encore le produit sur $\gamma \in \Phi'$ de

$$q^{-\langle \gamma, H_B(a) \rangle} \sum_{U_\gamma \in \mathfrak{n}_\gamma(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}U_\gamma a).$$

Cette expression est bien bornée pour $a \in A^G(T_1)$ (cf. lemme 5.1.1). □

6. Asymptotique d'intégrales nilpotentes tronquées

6.1. Les notations sont celles en vigueur à la section 5.

6.2. **Énoncés des résultats.** Soit \mathcal{N}^G le cône nilpotent de $\mathfrak{g}(F)$. Soit (\mathcal{N}^G) l'ensemble (fini) des orbites de $G(F)$ dans \mathcal{N}^G . Pour toute orbite nilpotente $\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)$ et tout sous-groupe parabolique standard P de G , on introduit la fonction suivante de la variable $g \in M_P(F)N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$

$$K_{D, \mathcal{O}}^P(g) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X + U)g) dU.$$

Il se peut que l'ensemble de sommation soit vide, auquel cas on pose $K_{D, \mathcal{O}}^P(g) = 0$. C'est le cas, par exemple, si \mathcal{O} est l'orbite nulle et P est un sous-groupe parabolique propre.

Pour tout $g \in G(F) \backslash G(\mathbb{A})$, on pose

$$K_{D, T, \mathcal{O}}^G(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F) \backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_B(\delta g) - T) K_{D, \mathcal{O}}^P(\delta g). \tag{6.2.1}$$

On fixe une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $a_{B, \mathbb{R}}$ invariante par le groupe de Weyl de (G, T_0) . Voici les deux principaux résultats de cette section. La démonstration du corollaire 6.2.2 se trouve au § 6.3. La démonstration du théorème 6.2.1 débute au § 6.4 et occupe tout le reste de la section.

Théorème 6.2.1 *Soit $e \in \mathbb{Z}$. Soient $\mathcal{O} \in (\mathcal{N})$ et D un diviseur sur C . Il existe un point $T_D \in a_B^+$ tel que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe des constantes $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ telles que pour tout $T \in T_D + a_B^+$ qui vérifie pour tout $\alpha \in \Delta$*

$$\langle \alpha, T \rangle \geq \varepsilon' \|T\|,$$

on ait

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \left| F^G(g, T) \sum_{X \in \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg) - K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) \right| dg \leq c \cdot q^{-\varepsilon \|T\|}.$$

Corollaire 6.2.2 Les notations sont celles du théorème 6.2.1. Pour tout $T \in a_B$, l'intégrale

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) dg \tag{6.2.2}$$

converge absolument.

De plus, la fonction

$$T \in X_*(T_0) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) dg$$

est quasi polynomiale au sens où il existe un ensemble fini

$$\mathfrak{f} \subset \frac{2\pi i}{\log(q)} X^*(T_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

et pour tout $v \in \mathfrak{f}$ un polynôme p_v sur a_B tels que cette fonction coïncide sur $X_*(T_0)$ avec

$$T \mapsto \sum_{v \in \mathfrak{f}} p_v(T) q^{\langle v, T \rangle}.$$

Remarque 6.2.3 La combinaison du théorème 6.2.1 et de son corollaire 6.2.2 montre que l'intégrale

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} F^G(g, T) \sum_{X \in \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg) dg$$

est asymptotique au quasi-polynôme donné par (6.2.2). Ce résultat est un analogue d'un résultat d'Arthur sur les corps de nombres (cf. [3], théorème 4.2). C'est même un peu mieux au sens où l'on dispose de plus de la formule intégrale (6.2.2).

6.3. Démonstration du corollaire 6.2.2. Elle repose sur les méthodes d'Arthur. Elle est d'ailleurs très semblable aux preuves du corollaire 5.1.2 et du théorème 5.2.1 de [6]. D'après Arthur (cf. [2], section 2), on a, pour tout H et tout T dans a_B

$$\hat{\tau}_P(H - T) = \sum_{P \subset Q \subset G} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \hat{\tau}_P^Q(H) \Gamma'_Q(H, T) \tag{6.3.1}$$

où $\Gamma'_Q(H, T)$ est la fonction $\Gamma_Q^G(H, 0, T)$ définie en (2.15.1); pour $Q = G$, la fonction Γ'_G est identiquement égale à 1. Il s'ensuit que l'on a

$$K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) = \sum_{B \subset Q \subset G} \sum_{\delta \in Q(F)\backslash G(F)} \Gamma'_Q(H_Q(\delta g), T) K_{D,0,\mathcal{O}}^Q(\delta g) \tag{6.3.2}$$

où l'on pose, pour $g \in G(\mathbb{A})$,

$$K_{D,0,\mathcal{O}}^Q(g) = \sum_{B \subset P \subset Q} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \sum_{\eta \in P(F)\backslash Q(F)} \hat{\tau}_P^Q(H_B(\eta g)) K_{D,\mathcal{O}}^P(\eta g). \tag{6.3.3}$$

Pour $Q = G$, on retrouve $K_{D,T,\mathcal{O}}^G$ pour $T = 0$. Soient $P \subset Q$ des sous-groupes paraboliques standards. Soit $\mathcal{S}^Q \subset (\mathcal{N}^{M_Q})$ l'ensemble (fini) des orbites $\mathcal{O}^Q \in (\mathcal{N}^{M_Q})$ telles que $I_Q^G(\mathcal{O}^Q) = \mathcal{O}$. On a successivement les égalités pour tout $m \in M_Q(\mathbb{A})$ et tout $n \in N_Q(\mathbb{A})$ (on note $\mathfrak{n}_P^Q = \mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{n}_P$) :

$$\begin{aligned} K_{D,\mathcal{O}}^P(nm) &= \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}(X+U)nm) dU \\ &= \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X+U)m) dU \\ &= \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} \int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X+U+U')m) dU dU' \\ &= q^{(2\rho_Q, H_Q(m))} q^{\dim(N_Q)(1-g_C+\deg(D))} \\ &\quad \times \sum_{\mathcal{O}^Q \in \mathcal{S}^Q} \sum_{\{X \in \mathcal{N}^{M_P} \mid I_{P \cap M_Q}^{M_Q}(X) = \mathcal{O}^Q\}} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X+U)m) dU \\ &= q^{(2\rho_Q, H_Q(m))} q^{\dim(N_Q)(1-g_C+\deg(D))} \sum_{\mathcal{O}^Q \in \mathcal{S}^Q} K_{D,\mathcal{O}^Q}^{P \cap M_Q}(m). \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$K_{D,0,\mathcal{O}}^Q(nm) = q^{(2\rho_Q, H_Q(m))} q^{\dim(N_Q)(1-g_C+\deg(D))} \sum_{\mathcal{O}^Q \in \mathcal{S}^Q} K_{D,0,\mathcal{O}^Q}^{M_Q}(m). \tag{6.3.4}$$

Nous allons faire une série de manipulations formelles qui seront *a posteriori* justifiées. Nous avons d'après (6.3.2) et par l'utilisation de la décomposition d'Iwasawa

$$\begin{aligned} &\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} (K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) - K_{D,0,\mathcal{O}}^G(g)) dg \\ &= \sum_{B \subset Q \subsetneq G} \int_{Q(F) \backslash Q(\mathbb{A})^e} \Gamma'_Q(H_Q(g), T) K_{D,0,\mathcal{O}}^Q(g) dg \\ &= \sum_{B \subset Q \subsetneq G} q^{\dim(N_Q) \deg(D)} \sum_{\mathcal{O}^Q \in \mathcal{S}^Q} \int_{M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} \Gamma'_Q(H_Q(m), T) K_{D,0,\mathcal{O}^Q}^{M_Q}(m) dm \\ &= \sum_{B \subset Q \subsetneq G} q^{\dim(N_Q) \deg(D)} \sum_{\mathcal{O}^Q \in \mathcal{S}^Q} \sum_{H \in H_Q(M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e)} \Gamma'_Q(H, T) \int_{M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})^H} K_{D,0,\mathcal{O}^Q}^{M_Q}(m) dm \end{aligned}$$

où, dans la dernière ligne, $M_Q(\mathbb{A})^H$ est l'ensemble des $m \in M_Q(\mathbb{A})$ tels que $H_Q(m) = H$. Pour $Q \subsetneq G$, le sous-groupe de Levi M_Q est un produit de facteurs linéaires, chacun de rang strictement plus petit que celui de G . Les fonctions $K_{D,0,\mathcal{O}^Q}^{M_Q}$ et leurs intégrales sont aussi des produits indexés par ces facteurs. En raisonnant par récurrence sur le rang, on peut donc supposer que les intégrales $\int_{M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})^H} K_{D,0,\mathcal{O}^Q}^{M_Q}(m) dm$ sont absolument convergentes. Comme la fonction $H \mapsto \Gamma'_Q(H, T)$ est à support fini

sur $H_Q(M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e)$ (cf. lemme 2.15.1), cela justifie les manipulations précédentes et montre que l'intégrale $\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) dg$ est absolument convergente pour un $T \in a_B$ si et seulement elle l'est pour tout $T \in a_B$. Puisque l'intégrale

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} F^G(g, T) \sum_{X \in \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg) dg$$

est absolument convergente (l'intégrande est à support compact), le théorème 6.2.1 montre qu'il existe au moins un tel T .

La fonction $m \in M_Q(\mathbb{A}) \mapsto K_{D,0,\mathcal{O}^e}^{M_Q}(m)$ est invariante sous l'action du centre $Z_Q(\mathbb{A})$ de $M_Q(\mathbb{A})$. Il s'ensuit que l'application

$$H \in H_Q(M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e) \mapsto \int_{M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})^H} K_{D,0,\mathcal{O}^e}^{M_Q}(m) dm$$

est invariante sous le sous-groupe $H_Q(Z_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e)$. Finalement, pour tout $H \in H_Q(M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e)$, la fonction

$$T \mapsto \sum_{H' \in H_Q(Z_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e)} \Gamma'_Q(H + H', T)$$

est quasi polynomiale (cf. proposition 4.5.5 de [6]). Cela conclut.

6.4. Une première réduction. Le théorème 6.2.1 est une conséquence immédiate du lemme 5.2.5 et de la proposition 6.4.1 ci-dessous. La démonstration de cette dernière sera donnée au § 6.8 après de longs préparatifs.

Proposition 6.4.1 *Sous les hypothèses du théorème 6.2.1, on a pour tous sous-groupes paraboliques standards $P_1 \subsetneq P_2$ de G*

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta \in P_1(F) \backslash G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) |K_{D,\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(\delta g)| dg \leq c \cdot q^{-\varepsilon \|T\|}$$

où l'on pose

$$K_{D,\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(g) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} (-1)^{\dim(a_P^G)} K_{D,\mathcal{O}}^P(g). \tag{6.4.1}$$

6.5. Une première majoration dans la preuve de la proposition 6.4.1. Dans toute la suite, on fixe une orbite nilpotente $\mathcal{O} \in \mathcal{N}$ et des sous-groupes paraboliques standards $P_1 \subsetneq P_2$ de G . Pour tout $X \in \mathfrak{p}_1(F)$, on pose

$$\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2, I_P^G(X) = \mathcal{O}} (-1)^{\dim(a_P^G)}. \tag{6.5.1}$$

Cette expression est invariante par conjugaison par $M_1(F)$ et ne dépend que de la projection de X sur $\mathfrak{m}_1(F)$.

Pour alléger les notations, on note $P_1 = M_1 N_1$ (au lieu de $M_{P_1} N_{P_1}$) la décomposition de Levi standard du sous-groupe parabolique standard P_1 . Idem pour P_2 .

Proposition 6.5.1 *Pour tout diviseur D , il existe un point $T_D \in a_B^+$ tel que pour tous $T \in T_D + a_B^+$, $n \in N_1(\mathbb{A})$ et $m \in M_1(\mathbb{A})$ tels que*

$$\chi_T^{P_1, P_2}(nm) \neq 0$$

on ait

$$K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(nm) = q^{\dim(n_2)(1-g_C + \deg(D)) + (2\rho_2, H_2(m))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm) \xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 6.5.4 ci-dessous. □

Corollaire 6.5.2 *Pour tout diviseur D , il existe un point $T_D \in a_B^+$ tel que pour tout $T \in T_D + a_B^+$, on ait l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta \in P_1(F) \backslash G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) |K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(\delta g)| dg \\ & \leq q^{\dim(N_1)(g_C - 1) + \dim(n_2)(1 - g_C + \deg(D))} \\ & \quad \times \int_{M_1(F) \backslash M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} q^{-(2\rho_1^2, H_1(m))} \chi_T^{P_1, P_2}(m) \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)| dm. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta \in P_1(F) \backslash G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) |K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(\delta g)| dg = \int_{P_1(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} \chi_T^{P_1, P_2}(g) |K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(g)| dg.$$

Par la décomposition d'Iwasawa, on obtient

$$\int_{N_1(F) \backslash N_1(\mathbb{A})} \int_{M_1(F) \backslash M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} \int_{G(\mathcal{O})} q^{-(2\rho_{P_1}, H_{P_1}(m))} \chi_T^{P_1, P_2}(nmk) |K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(nmk)| dk dm dn.$$

La fonction $\chi_T^{P_1, P_2}$ est invariante à gauche par $N_1(\mathbb{A})$ et à droite par $G(\mathcal{O})$. L'expression $|K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(\cdot)|$ est invariante à droite par $G(\mathcal{O})$. En tenant compte du volume $\text{vol}(G(\mathcal{O})) = 1$, on obtient

$$\int_{N_1(F) \backslash N_1(\mathbb{A})} \int_{M_1(F) \backslash M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} q^{-(2\rho_{P_1}, H_{P_1}(m))} \chi_T^{P_1, P_2}(m) |K_{D, \mathcal{O}}^{P_1, P_2}(nm)| dm dn.$$

Pour terminer, on utilise la formule $\text{vol}(N_1(F) \backslash N_1(\mathbb{A})) = q^{\dim(N_1)(g_C - 1)}$ et l'expression donnée par la proposition 6.5.1 que l'on majore de manière évidente. □

Lemme 6.5.3 *Soit P un sous-groupe parabolique de G tel que $P_1 \subset P \subset P_2$. La fonction $g \in G(\mathbb{A}) \mapsto K_{D, \mathcal{O}}^P(g)$ est invariante à gauche par $N_P(\mathbb{A})$. De plus, pour tout $u \in M_P(\mathbb{A}) \cap N_1(\mathbb{A})$ et tout $m \in M_1(\mathbb{A})$, on a*

$$K_{D, \mathcal{O}}^P(um) = q^{\dim(n_P)(\deg(D) + 1 - g_C) + (2\rho_P, H_P(m))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \mathbf{1}_D((um)^{-1}Xum).$$

Démonstration. Soient $n \in N_P(\mathbb{A})$ et $g \in G(\mathbb{A})$. On a

$$K_{D,\mathcal{O}}^P(ng) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X)=\mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D((ng)^{-1}(X+U)ng) dU.$$

On effectue le changement de variable $U' = n^{-1}(X+U)n - X$, ce qui donne

$$K_{D,\mathcal{O}}^P(ng) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X)=\mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X+U)g) dU$$

et prouve l'invariance recherchée.

Soient $u \in M_P(\mathbb{A}) \cap N_1(\mathbb{A})$ et $m \in M_1(\mathbb{A})$. À l'aide du changement de variable $U' = (um)^{-1}Uum$, on obtient l'égalité

$$K_{D,\mathcal{O}}^P(um) = q^{(2\rho_P, H_P(m))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X)=\mathcal{O}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D((um)^{-1}Xum + U) dU.$$

Comme on a $(um)^{-1}Xum \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{A})$, l'expression $\mathbf{1}_D((um)^{-1}Xum + U)$ est le produit de $\mathbf{1}_D((um)^{-1}Xum)$ par $\mathbf{1}_D(U)$. En utilisant l'égalité

$$\int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(U) dU = q^{\dim(\mathfrak{n}_P)(\deg(D)+1-g_C)},$$

on obtient l'égalité recherchée. □

Lemme 6.5.4 *Soit P un sous-groupe parabolique de G tel que $P_1 \subset P \subset P_2$. Pour tout diviseur D , il existe un point $T_D \in a_B^+$ tel que pour tous $T \in T_D + a_B^+$, $n \in N_1(\mathbb{A})$ et $m \in M_1(\mathbb{A})$ tels que*

$$\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$$

on ait

$$K_{D,\mathcal{O}}^P(nm) = q^{\dim(\mathfrak{n}_2)(\deg(D)+1-g_C)+(2\rho_2, H_{P_2}(m))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F), I_P^G(X)=\mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm).$$

Démonstration. Par le lemme 6.5.3, on voit qu'il s'agit d'obtenir l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & q^{\dim(\mathfrak{n}_P)(\deg(D)+1-g_C)+(2\rho_P, H_P(m))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X)=\mathcal{O}} \mathbf{1}_D((nm)^{-1}Xnm) \\ &= q^{\dim(\mathfrak{n}_2)(\deg(D)+1-g_C)+(2\rho_2, H_{P_2}(m))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F), I_P^G(X)=\mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm) \end{aligned}$$

pour $n \in M_P(\mathbb{A}) \cap N_1(\mathbb{A})$ et $m \in M_1(\mathbb{A})$ tels que $\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$.

On va d'abord montrer que pour tout $n \in M_P(\mathbb{A}) \cap N_1(\mathbb{A})$ et tout $m \in M_1(\mathbb{A})$ tel que $\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$, on a

$$\sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X)=\mathcal{O}} \mathbf{1}_D((nm)^{-1}Xnm) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X)=\mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm). \tag{6.5.2}$$

Le résultat est tautologique si $P = P_1$. On suppose donc $P_1 \subsetneq P$. Puisque $\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$, on a $m \in M_1(F) \cdot \Omega_B^{M_1} \cdot A^{P_1, P_2}(T_1, T) \cdot M_1(\mathcal{O})$ (cf. lemme 5.2.3). Quitte à remplacer n par un conjugué sous $M_1(F)$, on peut supposer $m \in \Omega_B^{M_1} \cdot A^{P_1, P_2}(T_1, T) \cdot M_1(\mathcal{O})$. Les deux membres de (6.5.2) sont invariants par translations à droite de m par $M_1(\mathcal{O})$ et par translations à gauche de n par $M_P(F) \cap N_1(F)$. On peut donc supposer $m \in \Omega_B^{M_1} \cdot A^{P_1, P_2}(T_1, T)$ et n dans un compact fixé \mathfrak{C} de $M_P(\mathbb{A}) \cap N_1(\mathbb{A})$. Pour tout $a \in A^{P_1, P_2}(T_1, T)$ et toute racine α de T_0 dans $M_P \cap N_1$, il existe $\Phi^1 \subset \Delta^{P_1}$ et $\Phi_1^P \neq \emptyset \subset \Delta^P - \Delta^{P_1}$

$$\langle \alpha, H_B(a) \rangle > \sum_{\beta \in \Phi^1} \langle \beta, T_1 \rangle + \sum_{\beta \in \Phi_1^P} \langle \beta, T \rangle$$

(ici, on utilise le lemme 5.2.2). En prenant T_D convenablement, il s'ensuit que si $T \in T_D + a_B^+$, alors pour tout $a \in A^{P_1, P_2}(T_1, T)$, on a

$$a^{-1}(\Omega_B^{M_1})^{-1} \mathfrak{C} \Omega_B^{M_1} a \subset M_P(\mathcal{O}) \cap N_1(\mathcal{O})$$

et donc aussi $m^{-1} \mathfrak{C} m \subset M_P(\mathcal{O}) \cap N_1(\mathcal{O})$. L'égalité (6.5.2) s'ensuit.

Montrons ensuite que pour tout $m \in M_1(\mathbb{A})$ tel que $\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$, on a

$$\sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P}, I_P^G(X) = \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1} X m) = \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P} \cap \mathfrak{p}_1(F), I_P^G(X) = \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1} X m). \tag{6.5.3}$$

On peut supposer $m \in \Omega_B^{M_1} \cdot A^{P_1, P_2}(T_1, T)$. Si l'égalité (6.5.3) est en défaut, il existe $X \in \mathfrak{m}_P(F) - \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{m}(F)$ tel que $\mathbf{1}_D(m^{-1} X m) \neq 0$. Il existe alors une racine α de T_0 dans $M_P \cap \overline{N}_1$ (où \overline{N}_1 est le radical unipotent « opposé » à N_1) telle que la projection sur \mathfrak{n}_α de $m^{-1} X m$ soit non nulle. Si, de plus, α est minimale (pour l'ordre défini par B), on a nécessairement

$$-\deg(\langle \alpha, H_B(a) \rangle) \leq \deg(D).$$

Là encore, on peut trouver T_D tel que ce ne soit pas possible lorsque $T \in T_D + a_B^+$. Cela prouve (6.5.3).

Enfin, pour $m \in M_1(\mathbb{A})$, l'expression

$$\sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F), I_P^G(X) = \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1} X m)$$

est le produit de

$$\sum_{X \in \mathcal{N}^{M_P} \cap \mathfrak{p}_1(F), I_P^G(X) = \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(m^{-1} X m)$$

par

$$\sum_{Y \in (\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{m}_2)(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1} X m). \tag{6.5.4}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que pour $m \in M_1(\mathbb{A})$ tel que $\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$, l'expression (6.5.4) est égale à

$$q^{\dim(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{m}_2)(1-g_C + \deg(D)) + (2\rho_P^2, H_B(m))}.$$

Cette égalité se démontre à l'aide de la formule de Poisson et par des arguments semblables à ceux développés plus haut. □

6.6. Une deuxième majoration dans la preuve de la proposition 6.4.1. Pour tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$, soit

$$A_{Q,e}^{1,2}(T)$$

l'ensemble des $a \in A^{P_1, P_2}(T_1, T) \cap A^{M_Q}(T_1, 0) \cap G(\mathbb{A})^e$ qui vérifient $\tau_Q^{P_1}(H_Q(a)) = 1$.

Proposition 6.6.1 *Pour tout diviseur D , il existe*

- un diviseur D' sur C ,
- un point $T_D \in a_B^+$,
- pour tout $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$, une constante $c_Q > 0$

tels que pour tout $T \in T_D + a_B^+$, l'intégrale

$$\int_{M_1(F) \backslash M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} q^{-(2\rho_1^2, H_1(m))} \chi_T^{P_1, P_2}(m) \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)| \, dm \tag{6.6.1}$$

se majore par la somme sur $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$ et $a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)$ de

$$c_Q \cdot q^{-(2\rho_Q^2, H_Q(a))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_{D'}(a^{-1}Xa) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)|.$$

Démonstration. On rappelle que la somme

$$\sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)|$$

est comme fonction de $m \in M_1(\mathbb{A})$ invariante à gauche par $M_1(F)$. On insère dans l'intégrale (6.6.1) l'identité (5.2.2) pour le groupe $G = M_1$ et le paramètre $T = 0$. Par conséquent, l'intégrale (6.6.1) est égale à la somme sur $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$ de l'intégrale sur $m \in (Q \cap M_1)(F) \backslash M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e$ de

$$q^{-(2\rho_1^2, H_1(m))} F^Q(m, 0) \tau_Q^{P_1}(H_Q(m)) \chi_T^{P_1, P_2}(m) \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)|.$$

Fixons un tel Q . Par la décomposition d'Iwasawa pour M_1 et le choix de nos mesures, on obtient l'intégrale sur $m \in M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e$ et sur $n \in (N_Q \cap M_1)(F) \backslash (N_Q \cap M_1)(\mathbb{A})$ de

$$q^{-(2\rho_Q^2, H_Q(m))} F^{M_Q}(m, 0) \tau_Q^{P_1}(H_Q(m)) \chi_T^{P_1, P_2}(nm) \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D((nm)^{-1}Xnm) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)|.$$

On va majorer cette dernière expression. On peut supposer $F^{M_Q}(m, 0) \neq 0$. Il s'ensuit que l'on peut supposer $m \in \Omega_B^{M_Q} A^{M_Q}(T_1, 0)$ avec les notations de § 5.2. Comme $(N_Q \cap M_1)(F) \backslash (N_Q \cap M_1)(\mathbb{A})$ est compact, on va supposer que n appartient à un compact fixé, noté Ω_Q^1 , de $(N_Q \cap M_1)(\mathbb{A})$. Pour $a \in A^{M_Q}(T_1, 0)$ tel que $\tau_Q^{P_1}(H_Q(a)) = 1$, le lemme 5.2.2 montre que l'on a $\langle \alpha, H_B(a) \rangle > 0$ pour $\alpha \in \Delta^{P_1} - \Delta^Q$. Par ailleurs, pour $\alpha \in \Delta^Q$, on

a $\langle \alpha, H_B(a) \rangle > \langle \alpha, T_1 \rangle$. Il s'ensuit que pour $a \in A^{M_Q}(T_1, 0)$ tel que $\tau_Q^{P_1}(H_Q(a)) = 1$, l'ensemble $a^{-1}\Omega_Q^1\Omega_B^{M_Q}a$ reste dans un compact indépendant de a . Il existe donc un diviseur D' tel que pour $n \in \Omega_Q^1$, $m \in \Omega_B^{M_Q}$ et $a \in A^{M_Q}(T_1, 0)$, on ait

$$\mathbf{1}_D((nm)^{-1}Xnm) \leq \mathbf{1}_{D'}(a^{-1}Xa).$$

On a aussi $H_Q(ma) = H_Q(a)$ et $\chi_T^{P_1, P_2}(nma) = \sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(a) - T)F^{P_1}(nma, T)$. La condition $\chi_T^{P_1, P_2}(nma) \neq 0$ implique que l'on a $a \in A^{P_1, P_2}(T_1, T)$.

La proposition s'ensuit en prenant pour la constante c_Q le produit des volumes de $(N_Q \cap M_1)(F) \backslash (N_Q \cap M_1)(\mathbb{A})$ et de $M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})^0$ (l'exposant 0 signifie que l'on se limite au sous-ensemble des $m \in M_Q(\mathbb{A})$ qui vérifient $H_Q(m) = 0$). □

6.7. Une troisième majoration. Dans ce paragraphe, on fixe $P \subsetneq G$ un sous-groupe parabolique standard propre. Soit $P = MN$ sa décomposition de Levi standard.

Proposition 6.7.1 *Soient $\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)$ et D un diviseur sur C . Pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^P$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in A^G(T_1)$, on ait*

$$q^{-(2\rho_P, H_P(a))} \sum_{X \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) |\xi_{\mathcal{O}}^{P, G}(X)| \leq c \cdot q^{-\langle \alpha, H_B(a) \rangle} \cdot \sum_{X \in \mathcal{N}^M} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa).$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, mentionnons le corollaire suivant. Les notations sont celles des paragraphes précédents.

Corollaire 6.7.2 *Pour tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$, toute orbite nilpotente $\mathcal{O} \in (\mathcal{N}^G)$ et tout diviseur D sur C , il existe des constantes $c > 0$ et $r > 0$ telles que pour tout $a \in A^{M_2}(T_1)$, on ait la majoration suivante*

$$q^{-(2\rho_Q^2, H_Q(a))} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) |\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X)| \tag{6.7.1}$$

$$\leq c \cdot q^{-(2\rho_Q^1, H_Q(a))} \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r\langle \alpha, H_B(a) \rangle} \cdot \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_1}} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa). \tag{6.7.2}$$

Démonstration. Observons qu'il suffit de majorer, pour toute racine $\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1$, l'expression (6.7.1) par

$$c \cdot q^{-(2\rho_Q^1, H_Q(a))} q^{-\langle \alpha, H_B(a) \rangle} \cdot \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_1}} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa), \tag{6.7.3}$$

pour une constante $c > 0$. On en déduit immédiatement la majoration (6.7.2) pour $r^{-1} = |\Delta^2 - \Delta^1|$. On obtient le majorant (6.7.3) comme conséquence d'une part du lemme 6.7.3 ci-dessous, et d'autre part de la proposition 6.7.1 appliquée aux groupes $G = M_2$ et $P = P_1$. □

Lemme 6.7.3 *Soit $\mathcal{S} \subset (\mathcal{N}^{M_2})$ l'ensemble (éventuellement vide) formé des $M_2(F)$ -orbites des éléments $Y \in \mathfrak{m}_2(F)$ tels que $I_{P_2}^G(Y) = \mathcal{O}$. Pour tout $X \in \mathfrak{m}_2(F) \cap \mathfrak{p}_1(F)$ nilpotent, on a*

$$\xi_{\mathcal{O}}^{P_1, P_2}(X) = (-1)^{\dim(a_{P_2}^G)} \sum_{\mathcal{O}' \in \mathcal{S}} \xi_{\mathcal{O}'}^{P_1 \cap M_2, M_2}(X).$$

Démonstration. L'application $P \mapsto P \cap M_2$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques P de G tels que $P_1 \subset P \subset P_2$ et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de M_2 compris entre $P_1 \cap M_2$ et M_2 . Soient P un tel sous-groupe parabolique de G et $Y \in I_{P \cap M_2}^{P_2}(X)$. D'après le lemme 4.3.1, on a

$$I_P^G(X) = I_{P_2}^G(Y).$$

Il s'ensuit que $I_P^G(X) = \mathcal{O}$ si et seulement si $I_{P_2}^G(Y) = \mathcal{O}$. Donc on a $I_P^G(X) = \mathcal{O}$ si et seulement si $I_{P \cap M_2}^{P_2}(X) \in \mathcal{S}$. L'égalité recherchée s'en déduit. □

Démonstration. (de la proposition 6.7.1) Soit $\alpha \in \Delta - \Delta^P$. Nous allons démontrer la proposition 6.7.1 par récurrence sur la dimension de l'orbite \mathcal{O} . Le cas de l'orbite nulle (0) amorce la récurrence car, dans ce cas, $\xi_{(0)}^{P,G}(X) = 0$ sauf si $X = 0$, de sorte que l'expression à majorer se réduit à $q^{-(2\rho_P, H_P(a))}$ pour $a \in A^G(T_1)$. En se rappelant que $2\rho_P$ est la somme des racines de T_0 dans N_P , on voit que la majoration est obtenue pour la constante $c = q^{-(2\rho_P - \alpha, T_1)}$.

Soient $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence de l'orbite \mathcal{O} et

$$\begin{aligned} \xi_{\overline{\mathcal{O}}}^{P,G}(X) &= \sum_{\mathcal{O}' \in \mathcal{N}^G, \mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}}} \xi_{\mathcal{O}'}^{P,G}(X) \\ &= \sum_R (-1)^{\dim(a_R^G)} \end{aligned}$$

où la somme est prise sur les sous-groupes paraboliques R de G qui vérifient

- $P \subset R \subset G$,
- $I_P^G(X) \subset \overline{\mathcal{O}}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit qu'il suffit de majorer l'expression

$$q^{-(2\rho_P, H_P(a))} \sum_{X \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) |\xi_{\overline{\mathcal{O}}}^{P,G}(X)|. \tag{6.7.4}$$

On utilise ensuite le lemme d'annulation suivant.

Lemme 6.7.4 *Soit $X \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}(F)$. Supposons qu'il existe un sous-groupe parabolique maximal de G qui contienne tous les éléments minimaux pour l'inclusion de l'ensemble*

$$\{R \in \mathcal{F}^G(P) \mid I_P^G(X) \subset \overline{\mathcal{O}}\}. \tag{6.7.5}$$

Alors on a

$$\xi_{\overline{\mathcal{O}}}^{P,G}(X) = 0.$$

Démonstration. On suppose l'ensemble (6.7.5) non vide sinon l'annulation recherchée est évidente. D'après le lemme 4.4.1, si R appartient à l'ensemble (6.7.5), il en est de même de tout sous-groupe parabolique qui le contient. Donc si $\{R_1, \dots, R_n\}$ désigne l'ensemble des éléments minimaux de (6.7.5), celui-là se décrit comme l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G qui contiennent l'un des R_i . Par conséquent, on a

$$\xi_{\overline{\mathcal{O}}}^{P,G}(X) = \sum_{\{R \mid \exists i R_i \subset R\}} (-1)^{\dim(a_R^G)}.$$

Soit $Q \subset G$ un sous-groupe parabolique maximal de G qui contient tous les R_i . Prouvons par récurrence sur n que pour toute famille $\{R_1, \dots, R_n\}$ de sous-groupes paraboliques de G inclus dans Q , on a

$$\sum_{\{R|\exists i R_i \subset R\}} (-1)^{\dim(a_R^G)} = 0.$$

Le résultat est bien connu si $n = 1$ et résulte de la bijection entre les sous-groupes paraboliques R contenant R_1 et l'ensemble des parties de Δ_{R_1} . Si $n > 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\{R|\exists i R_i \subset R\}} (-1)^{\dim(a_R^G)} &= \sum_{R_n \subset R} (-1)^{\dim(a_R^G)} + \sum_{\{R|\exists i < n R_i \subset R\}} (-1)^{\dim(a_R^G)} \\ &\quad - \sum_{\{R|\exists i < 1 (R_i, R_n) \subset R\}} (-1)^{\dim(a_R^G)}, \end{aligned}$$

où l'on note (R_i, R_n) le plus petit sous-groupe parabolique contenant R_i et R_n . On a $(R_i, R_n) \subset Q$. L'hypothèse de récurrence implique que chaque somme dans le membre de droite est nulle. D'où le résultat. \square

Soit Q le sous-groupe parabolique maximal de G qui contient P défini par la condition $\Delta - \Delta^Q = \{\alpha\}$. Soit $X \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}(F)$ tel que $\xi_{\overline{O}}^{P,G}(X) \neq 0$. D'après le lemme 6.7.4, il existe un sous-groupe parabolique R tel que

$$P \subset R \not\subset Q$$

et qui est un élément minimal de l'ensemble (6.7.5). Soit $S = R \cap Q$.

Lemme 6.7.5 *On a $S \subsetneq R$. De plus, si l'on décompose*

$$X = X_S + U + V$$

avec $X_S \in \mathfrak{m}_S(F)$, $U \in (\mathfrak{m}_R \cap \mathfrak{n}_S)(F)$ et $V \in \mathfrak{n}_R(F)$, on a

$$X_S + U \notin I_S^R(X_S).$$

Démonstration. Si $S = R$, alors $R \subset Q$, ce qui n'est pas le cas. Supposons en raisonnant par l'absurde que l'on a $X_S + U \in I_S^R(X_S)$. La transitivité de l'induction (cf. lemme 4.3.1) implique que l'on a

$$I_S^G(X) = I_S^G(X_S) = I_R^G(I_S^R(X_S)) = I_R^G(X_S + U) = I_R^G(X).$$

Or, on a $I_R^G(X) \subset \overline{O}$ puisque R appartient à l'ensemble (6.7.5). On a ainsi prouvé que l'on a $I_S^G(X) \subset \overline{O}$, donc que S appartient à l'ensemble (6.7.5). Mais cela contredit la minimalité de R . \square

On observe que la fonction $|\xi_{\overline{O}}^{P,G}(X)|$ est toujours majorée par le nombre de sous-groupes paraboliques compris entre P et G . Il résulte alors des lemmes 6.7.4 et 6.7.5 que pour prouver la proposition 6.7.1, il suffit de majorer, pour tout sous-groupe

parabolique $R \not\subset Q$ qui contient P et toute orbite nilpotente $\mathcal{O}^S \in (\mathcal{N}^{M_S})$ (avec $S = R \cap Q$), l'expression suivante

$$q^{-(2\rho_P^S, H_P(a))} \sum_{X \in \mathcal{O}^S \cap \mathfrak{p}(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) \tag{6.7.6}$$

$$\times q^{-(2\rho_S^R, H_S(a))} \sum_U \mathbf{1}_D(a^{-1}Ua), \tag{6.7.7}$$

où la somme est prise sur les $U \in (\mathfrak{m}_R \cap \mathfrak{n}_S)(F)$ tels que $X + U \notin I_S^R(X)$, multipliée par

$$q^{-(2\rho_R, H_R(a))} \sum_{V \in \mathfrak{n}_R(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Va). \tag{6.7.8}$$

Le gain recherché du facteur $q^{-\langle \alpha, H(a) \rangle}$ va être apporté par l'expression (6.7.7). Pour cela, on fixe $X \in \mathcal{O}^S$ et on va majorer (6.7.7). L'induite $I_S^R(\mathcal{O}^S)$ est l'unique orbite dans (\mathcal{N}^{M_R}) telle que l'intersection

$$I_S^R(\mathcal{O}^S) \cap (\mathcal{O}^S \oplus (\mathfrak{n}_S \cap \mathfrak{m}_R))$$

soit un ouvert dense. Il existe un nombre fini de polynômes, disons f_1, \dots, f_r , dans $F[\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_R]$ tels que

$$(\mathcal{O}^S \oplus (\mathfrak{n}_S \cap \mathfrak{m}_R)) \cap \mathcal{V},$$

pour $\mathcal{V} = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, en soit le fermé complémentaire.

Lemme 6.7.6 *Pour tout $X \in \mathcal{O}^S$, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que le polynôme $f_i(X + \cdot) \in F[\mathfrak{n}_S \cap \mathfrak{m}_R]$ soit non nul.*

Démonstration. Supposons l'assertion en défaut. Il existe $X \in \mathcal{O}^S$ tel que pour tout $1 \leq i \leq r$, le polynôme $f_i(X + \cdot) \in F[\mathfrak{n}_S \cap \mathfrak{m}_R]$ soit nul. Prenons un point $Y \in I_S^R(\mathcal{O}^S)$. Quitte à conjuguer X par un élément de M_S , on peut supposer que $Y = X + U$ avec $U \in (\mathfrak{n}_S \cap \mathfrak{m}_R)(F)$. Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $f_i(Y) = f_i(X + U) = 0$. Donc $Y \in \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, ce qui est la contradiction recherchée. \square

Pour $X \in \mathcal{O}^S$ fixé, soit $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}(f_1(X + \cdot), \dots, f_r(X + \cdot))$. Les polynômes $f_i(X + \cdot)$ sont non tous nuls d'après le lemme 6.7.6 ci-dessus et leurs degrés partiels sont bornés par ceux des f_i , donc indépendamment de X . L'expression (6.7.7) se réécrit donc

$$q^{-(2\rho_S^R, H_S(a))} \sum_{U \in (\mathfrak{m}_R \cap \mathfrak{n}_S)(F) \cap \mathcal{V}_X} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ua).$$

Par la proposition 5.3.1, cette expression est bornée, à une constante près qui ne dépend pas de X , par $q^{-\langle \alpha, H(a) \rangle}$ lorsque $a \in A^G(T_1)$.

Pour conclure, il suffit de prouver les deux assertions suivantes :

- pour $a \in A^G(T_1)$, l'expression (6.7.8) est bornée indépendamment et la borne ne dépend que de D et T_1 ;
- il existe une constante $c > 0$ (qui ne dépend que de D et T_1) telle que l'expression (6.7.6) soit majorée par

$$c \cdot \sum_{X \in \mathcal{N}^M} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa).$$

Expliquons la seconde assertion (la première se traitant de la même façon). On a

$$\sum_{X \in \mathcal{O}^S \cap \mathfrak{p}(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) \leq \sum_{X \in \mathcal{N}^M} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) \cdot \sum_{Y \in \mathfrak{m}_S(F) \cap \mathfrak{n}_P(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya).$$

Puis, on a, par le lemme 5.1.1, l'existence de $c > 0$ tel que pour tout $a \in A^G(T_1)$

$$\begin{aligned} q^{-(2\rho_P^S, H_P(a))} \cdot \sum_{Y \in \mathfrak{m}_S(F) \cap \mathfrak{n}_P(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya) &\leq c \cdot \prod_{\beta \in \Sigma^{\mathcal{N}_P \cap M_S}} \sup(q^{\deg(D)}, q^{-\langle \beta, H(a) \rangle}) \\ &\leq c \cdot \prod_{\beta \in \Sigma^{\mathcal{N}_P \cap M_S}} \sup(q^{\deg(D)}, q^{-\langle \beta, T_1 \rangle}). \end{aligned}$$

Cela conclut. □

6.8. Démonstration de la proposition 6.4.1. Si l'on fait la synthèse du corollaire 6.5.2, de la proposition 6.6.1 et du corollaire 6.7.2, on voit qu'il suffit de majorer pour $T \in a_B^+$ l'expression suivante

$$\sum_{a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)} q^{-\langle 2\rho_Q^1, H_Q(a) \rangle} \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r\langle \alpha, H_B(a) \rangle} \cdot \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_1}} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa),$$

où D est un diviseur sur C , $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$ et $r > 0$, les autres notations sont celles des §§ 6.6 et 6.7.

Tout d'abord, on observe qu'il existe $c > 0$ qui ne dépend que de D et T_1 tel que pour tout $a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)$, on ait

$$q^{-\langle 2\rho_Q^1, H_Q(a) \rangle} \sum_{X \in \mathcal{N}^{M_1}} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) \leq c.$$

Pour cela, on majore le membre de gauche ci-dessus par

$$q^{-\langle 2\rho_Q^1, H_Q(a) \rangle} \sum_{X \in \mathfrak{m}_1(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa)$$

et cette dernière est le produit des trois expressions suivantes :

$$q^{-\langle 2\rho_Q^1, H_Q(a) \rangle} \sum_{X \in \mathfrak{m}_1(F) \cap \mathfrak{n}_Q(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa), \tag{6.8.1}$$

$$\sum_{X \in \mathfrak{m}_1(F) \cap \mathfrak{n}_{\bar{Q}}(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa) \tag{6.8.2}$$

et

$$\sum_{X \in \mathfrak{m}_Q(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Xa). \tag{6.8.3}$$

On majore ces expressions à l'aide du lemme 5.1.1. Les deux premières sont bornées pour $a \in A^{M_1}(T_1)$ (*a fortiori* pour $a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)$). La dernière l'est pour $a \in A^{M_Q}(T_1, 0)$ (donc *a fortiori* pour $a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)$).

On est ensuite ramené à majorer l'expression suivante

$$\sum_{a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)} \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r\langle \alpha, H_B(a) \rangle}.$$

Soit $H = H_B(a)$ pour $a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)$. On écrit

$$H = H^1 + H_1^2 + H_2^G + H_G$$

suivant la décomposition $a_B = a_B^{P_1} \oplus a_{P_1}^{P_2} \oplus a_{P_2}^G \oplus a_G$. De même, on écrit $T = T^1 + T_1^2 + T_2^G + T_G$. La composante H_G ne dépend pas de H (seulement de e). La composante sur $a_B^{P_1}$ s'écrit

$$H^1 = \sum_{\beta \in \Delta^{P_1}} \langle \varpi_\beta, H \rangle \beta^\vee.$$

Comme a appartient en particulier à $A^{M_1}(T_1)$, on a $\langle \beta, H \rangle > \langle \beta, T_1 \rangle$ pour tout $\beta \in \Delta^{P_1}$. *A fortiori*, on a $\langle \varpi_\beta, H \rangle > \langle \varpi_\beta, T_1 \rangle$ pour tout $\beta \in \Delta^{P_1}$. Par ailleurs, comme a appartient à $A^{P_1, P_2}(T_1, T)$, on a aussi $\langle \varpi_\beta, H \rangle \leq \langle \varpi_\beta, T \rangle$ pour tout $\beta \in \Delta^{P_1}$. Il s'ensuit que la composante H^1 vit dans un compact : il n'y en a donc qu'un nombre fini possible. De plus, pour tout $\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1$ et tout $\beta \in \Delta^{P_1}$, on a $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leq 0$ et donc

$$\begin{aligned} -\langle \alpha, H^1 \rangle &= - \sum_{\beta \in \Delta^{P_1}} \langle \varpi_\beta, H \rangle \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \\ &\leq - \sum_{\beta \in \Delta^{P_1}} \langle \varpi_\beta, T \rangle \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -\langle \alpha, T^1 \rangle. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $c > 0$ telle que pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, on ait

$$\sum_{H^1} \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r\langle \alpha, H^1 \rangle} \leq c \cdot \prod_{\beta \in \Delta^{P_1}} (1 + |\langle \varpi_\beta, T \rangle|) \cdot \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r\langle \alpha, T^1 \rangle}, \tag{6.8.4}$$

où la somme est prise sur l'ensemble (fini) des composantes H^1 possibles.

Fixons H_1^2 et regardons les contraintes qui pèsent sur H_2^G . Ce sont celles qui traduisent les conditions 4 et 5 précédant les remarques 5.2.1. On a donc, pour tout $\alpha \in \Delta_1 - \Delta_1^2$,

$$\langle \alpha, H_2^G \rangle \leq \langle \alpha, T - H_1^2 \rangle,$$

qui traduit l'inégalité $\langle \alpha, H \rangle \leq \langle \alpha, T \rangle$. Par ailleurs, pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_2$, on a

$$\langle \varpi, H_2^G \rangle = \langle \varpi, H \rangle > \langle \varpi, T \rangle.$$

La composante H_2^G est astreinte à rester dans un polyèdre compact qui dépend de H_1^2 et de T . En particulier, le nombre de tels H_2^G est borné par $|P(T, H_1^2)|$ pour un certain polynôme P .

Retenons des conditions sur H_1^2 la suivante (c'est la condition 3 qui précède les remarques 5.2.1) : pour tout $\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1$, on a $\langle \alpha, H_1^2 \rangle > \langle \alpha, T_1^2 \rangle$. On observera que

l'on a $\langle \alpha, T_1^2 \rangle \geq 0$ pour $T \in \overline{a_B^+}$. En rassemblant les majorations précédentes, on voit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\sum_{a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)} \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r(\alpha, H_B(a))} \leq c \cdot \prod_{\beta \in \Delta^{p_1}} (1 + |\langle \varpi_\beta, T \rangle|) \cdot \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r(\alpha, T^1)} \sum_{H_1^2} |P(T, H_1^2)| \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r(\alpha, H_1^2)},$$

où l'on somme sur l'ensemble des composantes H_1^2 possibles. La somme sur H_1^2 porte sur un réseau intersecté avec le cône défini $\langle \alpha, H_1^2 \rangle > \langle \alpha, T_1^2 \rangle$ pour tout $\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1$. On la majore alors par $|Q(T)| \cdot \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r(\alpha, T_1^2)}$ pour un certain polynôme Q . Finalement, on a prouvé qu'il existe un polynôme P tel que

$$\sum_{a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)} \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r(\alpha, H_B(a))} \leq |P(T)| \prod_{\alpha \in \Delta^2 - \Delta^1} q^{-r(\alpha, T)}.$$

Le résultat est alors évident.

7. Le calcul d'une intégrale nilpotente « régulière par blocs »

7.1. Énoncé du résultat principal. On continue avec les notations des sections précédentes. Soient $n \geq 1$ un entier et $G = GL(n)$ sur le corps fini \mathbb{F}_q . Soient $B_0 \subset G$ et $T_0 \subset G$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures et le sous-tore maximal diagonal respectivement. On identifie le groupe $X^*(T_0)$ des caractères de T_0 à \mathbb{Z}^n de la manière suivante : le caractère donné par la i -ème entrée correspond au i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^n . Soit $\widehat{G} = GL(n, \mathbb{C})$. Soient $\widehat{B}_0 \subset \widehat{G}$ et $\widehat{T}_0 \subset \widehat{G}$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures et le sous-tore maximal diagonal respectivement. Comme précédemment, on identifie le groupe $X^*(\widehat{T}_0)$ des caractères de \widehat{T}_0 à \mathbb{Z}^n . Dualement, on a donc une identification des groupes des caractères $X_*(T_0)$ et $X_*(\widehat{T}_0)$ avec \mathbb{Z}^n . On en déduit des isomorphismes

$$X^*(T_0) \simeq X_*(\widehat{T}_0) \text{ et } X_*(T_0) \simeq X^*(\widehat{T}_0)$$

qui envoient l'ensemble Δ des racines simples (resp. Δ^\vee des coracines simples) de T_0 dans B_0 dans celui des coracines simples (resp. des racines) de \widehat{T}_0 dans \widehat{B}_0 .

Soient $G' = SL(n)$ le groupe dérivé de G et $T'_0 = T_0 \cap G'$. On a une suite exacte courte entre groupes de caractères dont les flèches intermédiaires sont données par les restrictions

$$0 \longrightarrow X^*(G) \longrightarrow X^*(T_0) \longrightarrow X^*(T'_0) \longrightarrow 0.$$

Les groupes ci-dessus sont des \mathbb{Z} -modules libres et, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$, on obtient une nouvelle suite exacte

$$0 \longrightarrow X_*(T'_0) \longrightarrow X_*(T_0) \longrightarrow \mathfrak{a}_G \longrightarrow 0,$$

où $\mathfrak{a}_G = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G), \mathbb{Z})$ et $X_*(\cdot)$ désigne le groupe des cocaractères. Le groupe $X_*(T'_0)$ n'est autre que le sous-groupe $\mathbb{Z}(\Delta^\vee)$ de $X_*(T_0)$ engendré par l'ensemble Δ^\vee des coracines

simples. En utilisant l'isomorphisme $X_*(T_0) \simeq X^*(\widehat{T}_0)$ que l'on a fixé, on obtient une identification

$$\mathfrak{a}_G \simeq X^*(\widehat{T}_0)/\mathbb{Z}(\Delta^\vee)$$

où l'on interprète maintenant Δ^\vee comme l'ensemble des racines simples de \widehat{T}_0 dans \widehat{G} . Soit $Z_{\widehat{G}} \subset \widehat{T}_0$ le centre du groupe \widehat{G} . On a donc un accouplement naturel

$$Z_{\widehat{G}} \times \mathfrak{a}_G \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Le groupe $X^*(G)$ a un générateur canonique, à savoir le déterminant, ce qui permet d'identifier \mathfrak{a}_G à \mathbb{Z} . On a donc aussi un accouplement

$$Z_{\widehat{G}} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

que l'on note

$$(z, e) \mapsto z^e.$$

Soient d et r des entiers ≥ 1 tels que $n = rd$. Soit $\widehat{P} \subset \widehat{G}$ le sous-groupe parabolique dont le facteur de Levi standard \widehat{M} est isomorphe à $GL(d)^r$. Soient $\widehat{M}' = \widehat{M} \cap \widehat{G}'$ et $Z_{\widehat{M}'}^0$ la composante neutre du centre de \widehat{M}' . C'est un tore défini sur \mathbb{C} de rang $r - 1$.

Soit Z_C la fonction zêta de la courbe C définie par la série formelle

$$Z_C(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} |C(\mathbb{F}_{q^k})| t^k / k\right),$$

où \mathbb{F}_{q^k} désigne un corps fini à q^k éléments. Il est bien connu que Z_C est en fait une fraction rationnelle en t de dénominateur $(1-t)(1-qt)$. On a d'ailleurs

$$\zeta(s) = Z_C(q^{-s})$$

avec les notations du §3.1. On introduit aussi la fonction

$$Z_C^*(t) = (1-qt)Z_C(t)$$

qui n'a pas de pôle en $t = q^{-1}$.

Soient D un diviseur sur C et

$$Z_{C,D}^d(t) = t^{-d \deg(D)} Z_C(q^{-1}t) Z_C(q^{-2}t) \dots Z_C(q^{-d}t).$$

Soit la fraction rationnelle sur $\widehat{T}'_0 = \widehat{T}_0 \cap \widehat{G}'$ définie pour $t \in \widehat{T}'_0$ par

$$\Phi_{C,D}^d(t) = \prod_{\varpi \in \widehat{\Delta}_{\widehat{P}}} Z_{C,D}^d(t^{\varpi})$$

où $\widehat{\Delta}_{\widehat{P}}$ désigne l'ensemble des poids fondamentaux \widehat{P} -dominants de \widehat{T}'_0 : ce sont des caractères de \widehat{T}'_0 . Lorsque $\widehat{P} = \widehat{G}$ (i.e. lorsque $d = n$), l'ensemble $\widehat{\Delta}_{\widehat{G}}$ est vide et par convention, $\Phi_{C,D}^d(t) = 1$. Hormis le cas $\widehat{P} = \widehat{G}$, la fraction rationnelle $\Phi_{C,D}^d(t)$ a un pôle en $t = 1$.

Soit $W_{\widehat{M}}$ le groupe de Weyl de \widehat{M} : c'est le quotient du sous-groupe de \widehat{G} qui normalise à la fois \widehat{T}_0 et \widehat{M} par le normalisateur de \widehat{T}_0 dans \widehat{M} . Le groupe $W_{\widehat{M}}$ a pour ordre $r!$ et

il agit sur $Z_{\widehat{M}}$. On note $w \cdot t$ l'action de $w \in W_{\widehat{M}}$ sur un élément $t \in Z_{\widehat{M}}$. On observera que cette action est triviale sur le sous-groupe $Z_{\widehat{G}}$. Pour tout $t \in Z_{\widehat{M}}$ et tout $z \in Z_{\widehat{G}}$, on a donc

$$w \cdot (tz) = (w \cdot t)z$$

ce que l'on note simplement $w \cdot tz$. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in Z_{\widehat{M}}^0$, soit

$$\Psi_{C,D}^{d,e}(t) = \frac{1}{n \cdot |W_{\widehat{M}}|} \sum_{z \in Z_{\widehat{G}'}} \sum_{w \in W_{\widehat{M}}} z^{-ed} \Phi_{C,D}^d(w \cdot tz).$$

Cela définit une fraction rationnelle sur $Z_{\widehat{M}}^0$. Le groupe $Z_{\widehat{G}'}$ est cyclique d'ordre n . En particulier, pour tout $z \in Z_{\widehat{G}'}$, le nombre complexe z^{-ed} est une racine r -ième de l'unité qui ne dépend que de la classe de e modulo r . Lorsque $d = n$, on a $\Psi_{C,D}^{n,e}(t) = 1$ pour tout t .

Théorème 7.1.1

1. La fraction rationnelle $\Psi_{C,D}^{d,e}(t)$ n'a pas de pôle en $t = 1$.
2. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}(F)$ l'orbite nilpotente des éléments dont la décomposition de Jordan est formée de d blocs de taille r . Soit $K_{D,0,\mathcal{O}}^G$ la fonction sur $G(\mathbb{A})$ définie en (6.2.1) pour le paramètre $T = 0$.

Lorsque e est premier à r , l'intégrale ci-dessous, qui est absolument convergente par le corollaire 6.2.2,

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,0,\mathcal{O}}^G(g) dg$$

est égale à

$$q^{n(n-d) \deg(D)/2} q^{nd(gc-1)} Z_C^*(q^{-1}) Z_C(q^{-2}) \dots Z_C(q^{-d}) \Psi_{C,D}^{d,e}(1).$$

Remarque 7.1.2 Dans l'expression ci-dessous, on a $n(n-d) = \dim(\mathcal{O})$. L'intégrale et l'expression ci-dessus ne dépendent que de e modulo r . Lorsque $d = n$ (cas de l'orbite nulle), l'intégrande est identiquement 1 et l'intégrale n'est autre que le volume du quotient $G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e$. L'expression ci-dessus se réduit à

$$q^{n^2(gc-1)} Z_C^*(q^{-1}) Z_C(q^{-2}) \dots Z_C(q^{-n})$$

qui est la formule de Siegel pour le volume. La démonstration du théorème 7.1.1 utilise d'ailleurs cette formule sans la redémontrer.

Démonstration. Elle se trouve au paragraphe 7.4. □

7.2. L'élément $X \in \mathcal{O}$. On continue avec les entiers $n = dr$ et les notations sont celles de la section 3. Rappelons que l'on note $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}(F)$ l'orbite des éléments nilpotents qui possèdent d blocs de Jordan de taille r . C'est encore l'orbite de l'élément X défini au § 3.2. Rappelons aussi que le groupe parabolique P_0 est standard de quotient réductif $GL(d)^r$. Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , il existe une orbite $\mathcal{O}^P \in (\mathcal{N}^{M_P})$ telle que $I_P^G(\mathcal{O}^P) = \mathcal{O}$ si et seulement si $P_0 \subset P$. Dans ce cas, l'orbite \mathcal{O}^P est uniquement définie. On a d'ailleurs $\mathcal{O}^P = I_{P_0}^P(0)$. Avec les notations de § 3.2, c'est aussi l'orbite de X^P .

7.3. Fonctions $\tilde{K}_{D,X}^P$. Pour tout sous-groupe parabolique standard P de décomposition de Levi $P = MN$, on pose $\tilde{K}_{D,X}^P(g) = 0$ sauf si $P_0 \subset P$, auquel cas on définit

$$\tilde{K}_{D,X}^P(g) = \sum_{\delta \in M_{X^P}(F)N(F) \backslash P_0(F)} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D((\delta g)^{-1}(X^P + U)\delta g) dU. \tag{7.3.1}$$

On notera que, par construction, $\tilde{K}_{D,X}^P$ est une fonction sur le quotient $P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})$. Rappelons que le groupe M_{X^P} est le centralisateur dans M de l'élément $X^P \in \mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$ défini au § 3.2. On a $M_{X^P} \subset M \cap P_0$. Avec la notation (3.5.1) du § 3.5, on a

$$\tilde{K}_{D,X}^P(g) = \sum_{\delta \in M_{X^P}(F)N(F) \backslash P_0(F)} K_{D,X}^P(\delta g). \tag{7.3.2}$$

Soit \mathcal{O} l'orbite nilpotente $I_{P_0}^G(0)$. Pour faire le lien avec les objets du § 6.2, on observera la relation suivante :

$$K_{D,\mathcal{O}}^P(g) = \sum_{\delta \in P_0(F) \backslash P(F)} \tilde{K}_{D,X}^P(\delta g) \tag{7.3.3}$$

d'où l'on déduit, pour $T \in a_B$ et $g \in G(\mathbb{A})$,

$$K_{D,T,\mathcal{O}}^G(g) = \sum_{\delta \in P_0(F) \backslash P(F)} \left[\sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(\delta g) \right]. \tag{7.3.4}$$

Le théorème suivant sera utilisé dans la démonstration du théorème 7.1.1.

Théorème 7.3.1 *Soit $e \in \mathbb{Z}$. L'intégrale suivante est finie pour tout $T \in a_B$*

$$\int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} \left| \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(g) \right| dg < \infty.$$

Démonstration. Elle occupe entièrement le paragraphe 7.5 ci-dessous. □

7.4. Démonstration du théorème 7.1.1. Par le théorème 7.3.1 ci-dessous et la relation (7.3.4) ci-dessus, on a l'égalité

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} K_{D,0,\mathcal{O}}^G(g) dg = \int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) dg. \tag{7.4.1}$$

Bien sûr, dans l'intégrande ci-dessus, on peut et on va imposer dans la somme sur P de ne prendre que les sous-groupes paraboliques contenant P_0 . On peut montrer qu'il existe une constante c telle que si $g \in G(\mathbb{A})$ est tel que

$$\sum_{P_0 \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) \neq 0$$

alors pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_{P_0}$, on a $\langle \varpi, H_{P_0}(g) \rangle \geq c$ (en fait, cette propriété est déjà vraie pour chaque terme de la somme ; pour le voir, il suffit d'expliciter la fonction $\tilde{K}_{D,X}^P(g)$, cf. lemme 3.5.1 et la démonstration du lemme 3.6.1).

À l'aide du théorème 7.3.1, on en déduit que pour tout λ dans l'ouvert Ω de $a_{P_0}^*$ défini par $\Re(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_0}$, l'intégrale

$$\int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} q^{-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle} \sum_{P_0 \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) dg \tag{7.4.2}$$

est absolument convergente et que sa limite quand λ tend vers 0 est égale à l'intégrale (7.4.1). Par ailleurs, pour λ dans l'ouvert Ω , l'intégrale (7.4.2) se calcule terme à terme ainsi

$$\sum_{P_0 \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} q^{-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle} \hat{\tau}_P(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) dg.$$

L'interversion se justifie car, comme on va le voir, chaque intégrale ci-dessus est absolument convergente. Pour s'en convaincre, on écrit à l'aide de (7.3.2)

$$\begin{aligned} & \int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} q^{-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle} \hat{\tau}_P(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) dg \\ &= \int_{M_{X,P}(F) N_P(F) \backslash G(\mathbb{A})^e} q^{-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle} \hat{\tau}_P(H_P(g)) K_{D,X}^P(g) dg \\ &= \sum_{H \in H_{P_0}(G(\mathbb{A})^e)} \hat{\tau}_P(H) \cdot \hat{I}_{D,X}^P(H) \cdot q^{-\langle \lambda, H \rangle}. \end{aligned}$$

Si λ appartient de plus à $a_{P_0, \mathbb{R}}^*$, tous les termes sont positifs et l'interversion est justifiée. Pour conclure à la convergence absolue des intégrales et à validité de l'inversion, il suffit de montrer que la série converge absolument. Or, le coefficient $\hat{I}_{D,X}^P(H)$ est celui défini en (3.6.1). En particulier, on reconnaît dans la dernière expression ci-dessus la série $I_{P,D}^0(X, \lambda/d)$ définie en (3.7.1), dont on connaît la convergence absolue sur Ω par la proposition 3.8.1.

On en déduit que l'intégrale (7.4.2) est égale à la série $I_D^0(X, \lambda/d)$ définie en (3.7.2). Le théorème est alors une simple traduction du théorème 3.10.2 qui tient compte de la formule de Siegel rappelée dans la remarque 7.1.2. Il suffit d'identifier par l'exponentielle le tore $Z_{\hat{M}}$ à un quotient de $a_M^{G,*}$. La somme sur $\mathcal{P}(M)$ dans le théorème 3.10.2 est remplacée par la somme sur $w \in W_{\hat{M}}$. Il existe un générateur z de $Z_{\hat{G}}$ tel que l'on ait

$$z^{-d} = \exp(-2\pi i/r)$$

et que les accouplements de z et γ avec les poids \hat{P} -fondamentaux soient égaux. Ces accouplements sont des racines r -ièmes de l'unité. Ce générateur est bien défini modulo le sous-groupe d'ordre d de $Z_{\hat{G}}$. On peut alors remplacer la somme sur k par la somme des r premières puissances de z , puis, quitte à diviser par n au lieu de r , par la somme sur tous les éléments de $Z_{\hat{G}}$. Le résultat s'ensuit.

7.5. Preuve du théorème 7.3.1. Comme dans la preuve du corollaire 6.2.2, on a l'égalité entre

$$\sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(g)$$

et

$$\sum_{B \subset Q \subset G} \Gamma'_Q(H_Q(g), T) \sum_{B \subset P \subset Q} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g);$$

la fonction Γ'_Q ci-dessus est celle qui apparaît dans (6.3.1). On se restreint dans la somme ci-dessus aux sous-groupes paraboliques Q qui contiennent P_0 , sans quoi leur contribution est nulle. On a la formule suivante de descente pour $P_0 \subset P \subset Q$, $m \in M_Q(\mathbb{A})$ et $n \in N_Q(\mathbb{A})$

$$\tilde{K}_{D,X}^P(nm) = q^{(2\rho_Q, H_Q(m))} q^{\dim(N_Q)(1-g_C + \deg(D))} \tilde{K}_{D,X}^{P \cap M_Q}(m).$$

Ici, $\tilde{K}_{D,X}^{M_Q \cap P}$ est l'analogie évident de (7.3.1) pour le groupe M_Q . Il s'ensuit que l'on a pour $P_0 \subset Q$ par décomposition d'Iwasawa

$$\int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^\epsilon} \Gamma'_Q(H_Q(g), T) \left| \sum_{B \subset P \subset Q} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) \right| dg = q^{\dim(N_Q) \deg(D)} \\ \times \int_{(M_Q \cap P_0)(F) \backslash M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^\epsilon} \Gamma'_Q(H_Q(m), T) \left| \sum_{B \subset P \subset Q} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(m)) \tilde{K}_{D,X}^{M_Q \cap P}(m) \right| dm.$$

Si $Q \subsetneq G$, alors M_Q est un produit de groupes linéaires de rang strictement plus petit que celui de G . L'intégrale ci-dessus se décompose en une somme finie de produits. En raisonnant par récurrence comme dans la preuve du corollaire 6.2.2, on peut donc supposer que, pour $Q \subsetneq G$, l'intégrale

$$\int_{P_0(F) \backslash G(\mathbb{A})^\epsilon} \Gamma'_Q(H_Q(g), T) \left| \sum_{B \subset P \subset Q} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(g)) \tilde{K}_{D,X}^P(g) \right| dg$$

est absolument convergente. Il suffit alors de prouver le théorème 7.3.1 pour un seul élément T , par exemple un élément assez profond dans la chambre de Weyl positive, ce que l'on suppose dans la suite.

Lemme 7.5.1 *Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, on a l'égalité entre*

$$\sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(g)$$

et

$$\sum_{B \subset P_1 \subset P_2 \subset G} \sum_{\delta \in P_1(F) \backslash G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D,X}^P(g).$$

Démonstration. On utilise (5.2.2) pour avoir

$$\sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \\ \times \left[\sum_{B \subset P_1 \subset P} \sum_{\delta \in P_1(F) \backslash P(F)} F^{P_1}(\delta g, T) \tau_{P_1}^P(H_{P_1}(\delta g) - T) \right] \hat{\tau}_P(H_P(g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(g).$$

On a $\hat{\tau}_P(H_P(g) - T) = \hat{\tau}_P(H_B(\delta g) - T)$ pour $\delta \in P(F)$. Puis, on utilise la formule d'inversion d'Arthur $\tau_{P_1}^P \cdot \hat{\tau}_P = \sum_{P \subset P_2 \subset G} \sigma_{P_1}^{P_2}$ (cf. [5], formule (8.2)). On obtient

$$= \sum_{B \subset P_1 \subset P \subset P_2 \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P_1(F) \setminus P(F)} F^{P_1}(\delta g, T) \sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(\delta g) - T) \tilde{K}_{D,X}^P(g).$$

Pour obtenir le lemme, il suffit d'inverser les sommes sur P et sur δ . □

En tenant compte du lemme 7.5.1 ci-dessus, on voit que le théorème 7.3.1 résulte du lemme suivant.

Lemme 7.5.2 *Soient $e \in \mathbb{Z}$ et $P_1 \subset P_2$ des sous-groupes paraboliques standards de G . Il existe un point $T \in \overline{a_B^+}$ tel que l'intégrale ci-dessous soit finie*

$$\int_{P_0(F) \setminus G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta \in P_1(F) \setminus G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) \left| \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D,X}^P(g) \right| dg < \infty. \tag{7.5.1}$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas $P_1 = P_2$. Si $P_1 \neq G$, la fonction $\chi_T^{P_1, P_2}$ est nulle et le résultat évident. Si $P_1 = P_2 = G$, l'intégrale se réécrit

$$\int_{P_0(F) \setminus G(\mathbb{A})^e} F^G(g, T) \sum_{\delta \in G_X(F) \setminus P_0(F)} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg) dg$$

ou encore

$$\int_{G(F) \setminus G(\mathbb{A})^e} F^G(g, T) \sum_{Y \in \mathcal{O}} \mathbf{1}_D(g^{-1}Yg) dg.$$

Cette dernière est prise sur un ensemble compact ; la convergence est donc évidente. On suppose désormais $P_1 \subsetneq P_2$. Effectuons quelques manipulations sur l'intégrale (7.5.1). Elle s'écrit encore

$$\int_{G(F) \setminus G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta_0 \in P_0(F) \setminus G(F)} \sum_{\delta \in P_1(F) \setminus G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta \delta_0 g) \times \left| \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D,X}^P(\delta_0 g) \right| dg.$$

Par le changement de variables $\delta \mapsto \delta \delta_0$, elle est égale à

$$\int_{G(F) \setminus G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta \in P_1(F) \setminus G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) \sum_{\delta_0 \in P_0(F) \setminus G(F)} \times \left| \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta \delta_0^{-1} \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D,X}^P(\delta_0 g) \right| dg.$$

Rappelons que $\tilde{K}_{D,X}^P$ est invariante à gauche par P_0 et même nulle si $P_0 \not\subset P$. Dans ce cas, la condition $\delta \delta_0^{-1} \in P(F)$ ne dépend que de la classe modulo $P_0(F)$ de δ_0 .

Par un nouveau changement de variables $\delta_0 \mapsto \delta_0\delta^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta \in P_1(F)\backslash G(F)} \chi_T^{P_1, P_2}(\delta g) \sum_{\delta_0 \in P_0(F)\backslash G(F)} \\ & \times \left| \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta_0^{-1} \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D, X}^P(\delta_0 \delta g) \right| dg \\ & = \int_{P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \chi_T^{P_1, P_2}(g) \sum_{\delta_0 \in P_0(F)\backslash G(F)} \left| \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta_0 \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D, X}^P(\delta_0 g) \right| dg. \end{aligned}$$

À ce stade, on utilise la décomposition d’Iwasawa pour voir que (7.5.1) est égale à

$$\begin{aligned} & = \int_{M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^e} q^{-(2\rho_1, H_{P_1}(m))} \chi_T^{P_1, P_2}(m) \\ & \times \int_{N_1(F)\backslash N_1(\mathbb{A})} \sum_{\delta \in P_0(F)\backslash G(F)} \left| \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta \in P(F)\}} (-1)^{\dim(a_P^G)} \tilde{K}_{D, X}^P(\delta nm) \right| dndm. \end{aligned}$$

On utilise ensuite les deux lemmes suivants.

Lemme 7.5.3 *Pour tous $\delta \in P_0(F)\backslash P(F)$, $n \in N_P(\mathbb{A})$ et $m \in M_P(\mathbb{A})$, on a*

$$\tilde{K}_{D, X}^P(\delta nm) = q^{\dim(\mathfrak{n}_P)(\deg(D)+1-gc)+(2\rho_P, H_P(m))} \sum_{\{Y \in \mathfrak{m}_P(F) \cap \delta^{-1}\mathfrak{n}_0(F)\delta \mid I_P^G(X) = \mathcal{O}\}} \mathbf{1}_D(m^{-1}Ym).$$

Démonstration. On observera que les deux membres de l’égalité sont nuls si $P_0 \not\subset P$. On suppose dans la suite $P_0 \subset P$. Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on a

$$\tilde{K}_{D, X}^P(g) = \sum_{\delta \in M_{X^P}(F)\backslash (P_0 \cap M)(F)} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(\delta^{-1}X^P\delta + U)g) dU.$$

Pour $\delta \in M_{X^P}(F)\backslash (P_0 \cap M)(F)$, les éléments $\delta^{-1}X^P\delta$ sont précisément les éléments $Y \in \mathfrak{n}_0(F) \cap \mathfrak{m}(F)$ tels que $I_P^G(Y) = \mathcal{O}$ (cf. section 4). Par conséquent, pour tout $\delta \in P(F)$, on a

$$\tilde{K}_{D, X}^P(\delta g) = \sum_{\{Y \in \mathcal{N}^{M_P} \cap \delta^{-1}\mathfrak{n}_0(F)\delta \mid I_P^G(X) = \mathcal{O}\}} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(Y + U)g) dU.$$

Le lemme s’en déduit aisément (cf. la preuve du lemme 6.5.3). □

Lemme 7.5.4 *Il existe un point T_D tel que pour tous $T \in T_D + a_B^+$, $\delta \in P(F)$, $n \in N_1(\mathbb{A})$ et $m \in M_1(\mathbb{A})$ tels que $\chi_T^{P_1, P_2}(m) \neq 0$, on ait*

$$\tilde{K}_{D, X}^P(\delta nm) = q^{\dim(\mathfrak{n}_2)(\deg(D)+1-gc)+(2\rho_2, H_{P_2}(m))} \sum_{\{Y \in \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{m}_2(F) \cap \delta^{-1}\mathfrak{n}_0(F)\delta \mid I_P^G(Y) = \mathcal{O}\}} \mathbf{1}_D(m^{-1}Ym). \tag{7.5.2}$$

Démonstration. Elle est semblable à celle du lemme 6.5.4, le rôle du lemme 6.5.3 étant ici joué par le lemme 7.5.3. □

Posons

$$\xi_{\mathcal{O},\delta}^{P_1,P_2}(Y) = \sum_{\{P \in \mathcal{F}^{P_2}(P_1) \mid \delta \in P(F), I_P^G(Y) = \mathcal{O}\}} (-1)^{\dim(a_P^G)}$$

et

$$\Xi_{\mathcal{O}}^{P_1,P_2}(Y) = \sum_{\{\delta \in P_0(F) \setminus G(F) \mid Y \in \delta^{-1} \mathfrak{n}_0(F) \delta\}} |\xi_{\mathcal{O},\delta}^{P_1,P_2}(Y)|.$$

Des lemmes 7.5.3 et 7.5.4, on déduit la majoration suivante pour l'intégrale (7.5.1) (à une puissance de q près qu'il est inutile ici de préciser)

$$\int_{M_1(F) \setminus M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} q^{-(2\rho_1^2, H_{P_1}(m))} \chi_T^{P_1,P_2}(m) \sum_{Y \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1} Y m) \cdot \Xi_{\mathcal{O}}^{P_1,P_2}(Y) dm.$$

On utilise ensuite le lemme suivant dont la preuve (omise) est mot pour mot celle de la proposition 6.6.1 (les notations sont celles du § 6.6).

Lemme 7.5.5 *Pour tout diviseur D , il existe*

- un diviseur D' sur C ,
 - un point $T_D \in a_B^+$,
 - pour tout $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$, une constante $c_Q > 0$
- tels que pour tout $T \in T_D + a_B^+$, l'intégrale

$$\int_{M_1(F) \setminus M_1(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^e} q^{-(2\rho_1^2, H_1(m))} \chi_T^{P_1,P_2}(m) \sum_{Y \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1} Y m) \cdot \Xi_{\mathcal{O}}^{P_1,P_2}(Y) dm \tag{7.5.3}$$

se majore par la somme sur $Q \in \mathcal{F}^{P_1}(B)$ et $a \in A_{Q,e}^{1,2}(T)$ de

$$c_Q \cdot q^{-(2\rho_Q^2, H_Q(a))} \sum_{Y \in \mathcal{N}^{M_2} \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_{D'}(a^{-1} Y a) \cdot \Xi_{\mathcal{O}}^{P_1,P_2}(Y).$$

Comme dans la preuve de la proposition 6.4.1 (cf. § 6.8), ce qui précède montre que le lemme 7.5.2 est une conséquence du lemme 7.5.6 suivant. Cela conclut la preuve du lemme 7.5.2. □

Lemme 7.5.6 *Soit P_1 un sous-groupe parabolique standard de G . Pour tout diviseur D sur C et tout $\alpha \in \Delta - \Delta^{P_1}$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in A^G(T_1)$, on ait*

$$q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_{Y \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1} Y a) \cdot \Xi_{\mathcal{O}}^{P_1,G}(Y) \leq c \cdot q^{-(\alpha, H_B(a))} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{N}^{M_1}} \mathbf{1}_D(a^{-1} Y a).$$

Démonstration. Soit $Y \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}_1(F)$. Rappelons que l'on note P_0 le sous-groupe parabolique standard qui vérifie $I_{P_0}^G(0) = \mathcal{O}$. Son facteur de Levi est isomorphe à $GL(d)^r$. On a

$$\Xi_{\mathcal{O}}^{P_1, G}(Y) = \sum_{P'_0} \left| \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \right| \tag{7.5.4}$$

où la première somme porte sur les sous-groupes paraboliques P'_0 tels que P'_0 soit conjugué à P_0 et $Y \in \mathfrak{n}'_0(F)$. La seconde somme porte sur les sous-groupes paraboliques P qui contiennent P_1 et P'_0 , et tels que $I_P^G(Y) = \mathcal{O}$.

Soit P'_0 un sous-groupe parabolique conjugué à P_0 qui contient Y dans son radical unipotent. Soient M'_0 un facteur de Levi de P'_0 et A'_0 son centre. Soit Δ'_0 les « racines simples » de A'_0 dans \mathfrak{n}'_0 . Pour tout α , soit \mathfrak{n}_α l'espace de poids α . On identifie en tant qu'espace vectoriel \mathfrak{n}_α à $\mathfrak{gl}(d)$. La somme $\bigoplus_{\alpha \in \Delta'_0} \mathfrak{n}_\alpha$ est un supplémentaire dans \mathfrak{n}'_0 de l'algèbre dérivée $[\mathfrak{n}'_0, \mathfrak{n}'_0]$. Soit Q le sous-groupe parabolique contenant P'_0 tel que l'ensemble des racines simples de A'_0 dans N_Q soit exactement l'ensemble des racines $\alpha \in \Delta'_0$ telles que la projection de Y sur \mathfrak{n}_α (qui est une matrice carrée de taille d) soit de rang $< d$. L'ensemble des sous-groupes paraboliques P tels que $P'_0 \subset P$ et $I_P^G(Y) = \mathcal{O}$ admet alors une description simple : c'est exactement l'ensemble des sous-groupes paraboliques compris entre P'_0 et Q .

Dans (7.5.4), le terme associé à P'_0 est toujours nul sauf si \tilde{P}_1 , le plus petit sous-groupe parabolique qui contient P'_0 et P_1 , est égal à Q , auquel cas il vaut 1. Par conséquent, on a

$$q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_{Y \in \mathcal{N}^G \cap \mathfrak{p}_1(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya) \Xi_{\mathcal{O}}^{P_1, G}(Y) \leq \sum_Q \sum_{P'_0} q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_Y \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya) \tag{7.5.5}$$

où les sommes portent sur

- les sous-groupes paraboliques Q contenant P_1 ,
- les sous-groupe paraboliques $P'_0 \subset Q$ tels que P'_0 est conjugué à P_0 sous $G(F)$ et le plus petit sous-groupe parabolique contenant P_1 et P'_0 est Q ,
- les éléments $Y \in \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{n}'_0(F)$ tels que la projection de Y sur \mathfrak{m}_Q appartienne à $I_{P'_0}^Q(0)$ et celle de Y sur \mathfrak{n}_Q appartienne à l'ensemble des éléments de $\mathfrak{n}_Q(F)$ dont l'image dans $\mathfrak{n}'_0/[\mathfrak{n}'_0, \mathfrak{n}'_0]$ (identifié à $\mathfrak{gl}(d)^r$) est formée de « blocs » de rang $< d$.

Il reste à majorer le terme de droite de (7.5.5). Pour cela, on fixe un sous-groupe parabolique Q comme dans ce terme (il n'y en a qu'un nombre fini). Soit $\alpha \in \Delta - \Delta^{P_1}$. Cette racine détermine un sous-groupe parabolique maximal R qui contient P_1 .

Supposons tout d'abord $Q \subset R$ et donc $\mathfrak{n}_R \subset \mathfrak{n}_Q$. Pour tout $P'_0 \subset Q$ comme ci-dessus, soit $\mathcal{V}_{P'_0} \subset \mathfrak{n}_R$ le fermé formé des $Z \in \mathfrak{n}_R$ dont l'image dans $\mathfrak{n}'_0/[\mathfrak{n}'_0, \mathfrak{n}'_0]$ (identifié à $\mathfrak{gl}(d)^r$) est formée de « blocs » de rang $< d$. Il s'agit d'un fermé défini par des polynômes dont le degré est borné. Dans ce cas, on a la majoration suivante (P'_0 et Y sont comme ci-dessus)

$$\sum_{P'_0} q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_Y \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya) \leq \sum_{P'_0} q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_{Y^Q, Y^R_Q, Y_R} \mathbf{1}_D(a^{-1}(Y^Q + Y^R_Q + Y_R)a) \tag{7.5.6}$$

où, dans le membre de droite, P'_0 est comme ci-dessus, Y^Q parcourt les éléments de

$$\mathfrak{m}_Q(F) \cap \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{n}'_0(F) \cap I_{P'_0}^Q(0),$$

Y^R_Q parcourt $\mathfrak{n}_Q(F) \cap \mathfrak{m}_R(F)$ et Y_R parcourt $\mathcal{V}_{P'_0}$. Il résulte de la proposition 5.3.1 qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $a \in A^G(T_1)$,

$$q^{-(2\rho_R, H_R(a))} \sum_{Y_R \in \mathcal{V}_{P'_0}} \mathbf{1}_D(a^{-1}(Y_R)a) \leq c \cdot q^{-(\alpha, H_B(a))}.$$

Observons ensuite que l'orbite $I_{P'_0}^Q(0)$ ne dépend pas du choix de $P'_0 \subset Q$. C'est d'ailleurs l'orbite que l'on a notée \mathcal{O}^Q précédemment. De plus, si $Y \in \mathfrak{m}_Q(F) \cap I_{P'_0}^Q(0)$, il existe un unique $P'_0 \subset Q$ tel que $Y \in \mathfrak{n}'_0$. Il s'ensuit que l'on obtient le majorant suivant pour (7.5.6)

$$c \cdot q^{-(\alpha, H_B(a))} \cdot \left[q^{-(2\rho_1^R, H_1(a))} \sum_{Y \in \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{m}_R(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya) \right].$$

Le terme entre crochets est un majorant grossier, mais qui est borné pour $a \in A^G(T_1)$ (cf. lemme 5.1.1). Cela conclut lorsque $Q \subset R$.

Supposons ensuite que l'on a $Q \not\subset R$. Alors $R \cap M_Q \subset M_Q$ est un sous-groupe parabolique maximal de M_Q . Toujours par le lemme 5.1.1, pour $a \in A^G(T_1)$, la somme

$$q^{-(2\rho_Q, H_Q(a))} \sum_{Y \in \mathfrak{n}_Q(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya)$$

est bornée. Quitte à remplacer G par M_Q et P_1 par $M_Q \cap P_1$, on voit qu'il suffit de traiter le cas $Q = G$. Il s'agit donc de majorer la quantité suivante

$$\sum_{P'_0} q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_{Y \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{n}'_0(F)} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya) \tag{7.5.7}$$

où la première somme est prise sur les sous-groupes paraboliques de G conjugués à P_0 tel que le plus petit sous-groupe parabolique qui contienne à la fois P'_0 et P_1 est G lui-même. Pour tout $Y \in \mathfrak{p}_1(F)$, on a $Y \in \overline{I_R^G(Y)}$. Si, de plus, $Y \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_1(F) \cap \mathfrak{n}'_0(F)$ où P'_0 est comme ci-dessus, alors Y appartient au fermé de $\overline{I_R^G(Y)}$ complémentaire de $I_R^G(Y)$. En effet, supposons le contraire : si $Y \in I_R^G(Y)$, on a $\overline{I_R^G(Y)} = \mathcal{O}$. Dans ce cas, la projection Y^R de Y sur \mathfrak{m}_R (relativement à la décomposition $\mathfrak{r} = \mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{n}_R$) est aussi « régulière par blocs ». Il existe donc un sous-groupe parabolique $P''_0 \subset R$ qui est G -conjugué à P_0 tel que $Y \in \mathfrak{n}''_0(F)$ et $Y_R \in I_{P''_0}^R(0)$. Un tel sous-groupe parabolique P''_0 est nécessairement le stabilisateur des drapeaux des images itérées de Y . On a donc $P'_0 = P''_0$. En particulier, on a $P'_0 \subset R$. Maintenant, R contient P'_0 et P_1 , donc par hypothèse sur P'_0 , on a $R = G$, ce qui contredit l'hypothèse que R est maximal.

Comme on l'a déjà utilisé, pour tout $Y \in \mathcal{O}$, il existe un unique sous-groupe parabolique P'_0 conjugué à P_0 tel que $Y \in \mathfrak{n}'_0$. On peut donc majorer (7.5.7) par

$$q^{-(2\rho_1, H_1(a))} \sum_{\{Y \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_1(F) \mid Y \notin I_R^G(Y)\}} \mathbf{1}_D(a^{-1}Ya). \tag{7.5.8}$$

On obtient alors le majorant voulu par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 6.7.1 (plus précisément dans la majoration de (6.7.7)). \square

Remerciements. Le premier auteur nommé souhaite remercier T. Finis, W. Hoffmann, E. Lapid et J.-L. Waldspurger pour des discussions enrichissantes.

Les auteurs remercient le rapporteur de cet article pour ses commentaires utiles, en particulier sur la définition 2.9.1, qui ont conduit à la remarque 2.9.2.

Bibliographie

1. J. ARTHUR, A trace formula for reductive groups I. Terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$, *Duke Math. J.* **45** (1978), 911–952.
2. J. ARTHUR, The trace formula in invariant form, *Ann. of Math. (2)* **114** (1981), 1–74.
3. J. ARTHUR, A measure on the unipotent variety, *Canad. J. Math.* **37** (1985), 1237–1274.
4. J. ARTHUR, A local trace formula, *Publ. Math. Inst. Hautes Études* **73** (1991), 5–96.
5. J. ARTHUR, An introduction to the trace formula, in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, (*Clay Math. Proc.*), Volume 4, pp. 1–263 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2005).
6. P.-H. CHAUDOUARD, Sur le comptage des fibrés de Hitchin. À paraître aux actes de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon.
7. O. GARCÍA-PRADA, J. HEINLOTH ET A. SCHMITT, On the motives of moduli of chains and Higgs bundles. ArXiv e-prints, April 2011.
8. G. HARDER, Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern, *Invent. Math.* **7** (1969), 33–54.
9. T. HAUSEL ET F. RODRIGUEZ-VILLEGAS, Mixed Hodge polynomials of character varieties, *Invent. Math.* **174**(3) (2008), 555–624; with an appendix by Nicholas M. Katz.
10. G. LAUMON, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Volume 56 (Cambridge University Press, Cambridge, 1997); Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence, with an appendix by Jean-Loup Waldspurger.
11. G. LUSZTIG ET N. SPALTENSTEIN, Induced unipotent classes, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **19** (1979), 41–52.
12. S. MOZGOVOY, Solutions of the motivic ADHM recursion formula. ArXiv e-prints, April 2011.
13. N. NITSURE, Moduli space of semistable pairs on a curve, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **62**(2) (1991), 275–300.