SUR LE MOUVEMENT D'UN LIQUIDE VISQUEUX EMPLISSANT L'ESPACE.[1]

Par

JEAN LERAY

à Rennes.

Introduction.[2]

I. *La théorie de la viscosité* conduit à admettre que les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier; il est nécessaire de justifier a posteriori cette hypothèse en établissant *le théorème d'existence suivant:* il existe une solution des équations de Navier qui correspond à un état de vitesse donné arbitrairement à l'instant initial. C'est ce qu'a cherché à démontrer M. Oseen[3]; il n'a réussi à établir l'existence d'une telle solution que pour une durée peut-être très brève succédant à l'instant initial. On peut vérifier en outre que l'énergie cinétique totale du liquide reste bornée[4]; mais il ne semble pas possible de déduire de ce fait que le mouvement lui-même reste régulier; j'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini[5]; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité.

---

[1] Ce mémoire a été résumé dans une note parue aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, le 20 février 1933, T. 196 p. 527.

[2] Les pages 59—63 de ma Thèse (Journ. de Math. 12, 1933) annoncent ce mémoire et en complètent l'introduction.

[3] Voir Hydrodynamik (Leipzig, 1927), § 7, p. 66. Acta mathematica T. 34. Arkiv för matematik, astronomi och fysik. Bd. 6, 1910. Nova acta reg. soc. scient. Upsaliensis Ser. IV, Vol. 4, 1917.

[4] l. c. 2, p. 59—60.

[5] l. c. 2, p. 60—61. Je reviens sur ce sujet au § 20 du présent travail (p. 224).

Il n'est pas paradoxal de supposer en effet que la cause qui régularise le mouvement — la dissipation de l'énergie — ne suffise pas à maintenir bornées et continues les dérivées secondes des composantes de la vitesse par rapport aux coordonnées; or la théorie de Navier suppose ces dérivées secondes bornées et continues; M. Oseen lui-même a déjà insisté sur le caractère peu naturel de cette hypothèse; il a montré en même temps comment le fait que le mouvement obéit aux lois de la mécanique peut s'exprimer à l'aide d'équations intégro-différentielles[1], où figurent seulement les composantes de la vitesse et leurs dérivées premières par rapport aux coordonnées spatiales. Au cours du présent travail je considère justement un système de relations[2] qui équivalent aux équations intégro-différentielles de M. Oseen, complétées par une inégalité exprimant la dissipation de l'énergie. Ces relations se déduisent d'ailleurs des équations de Navier à l'aide d'intégrations par parties qui font disparaître les dérivées d'ordres les plus élevés. Et, si je n'ai pu réussir à établir le théorème d'existence énoncé plus haut, j'ai pu néammoins démontrer le suivant[3]: les relations en question possèdent toujours *au moins une solution* qui correspond à un état de vitesse donné initialement et *qui est définie pour une durée illimitée*, dont l'origine est l'instant initial. Peut-être cette solution est-elle trop peu régulière pour posséder à tout instant des dérivées secondes bornées; alors elle n'est pas, au sens propre du terme, une solution des équations de Navier; je propose de dire qu'elle en constitue »*une solution turbulente*».[4]

Il est d'ailleurs bien remarquable que chaque solution turbulente satisfait effectivement les équations de Navier proprement dites, sauf à certaines époques d'irrégularité; ces époques constituent un ensemble fermé de mesure nulle; à ces époques sont seules vérifiées certaines conditions de continuité extrêmement

---

[1] Oseen, Hydrodynamik, § 6, équation (1).

[2] Voir relations (5. 15), p. 240.

[3] Voir p. 241.

[4] Je me permets de citer le passage suivant de M. Oseen (Hydrodynamik): »A un autre point de vue encore il semble valoir la peine de soumettre à une étude attentive les singularités du mouvement d'un liquide visqueux. S'il peut surgir des singularités, il nous faut manifestement distinguer deux espèces de mouvements d'un liquide visqueux, les mouvements réguliers, c'est-à-dire les mouvements sans singularité, et les mouvements irréguliers, c'est-à-dire les mouvements avec singularité. Or on distingue d'autre part en Hydraulique deux sortes de mouvements, les mouvements laminaires et les mouvements turbulents. On est dès lors tenté de présumer que les mouvements laminaires fournis par les expériences sont identiques aux mouvements réguliers théoriques et que les mouvements turbulents expérimentaux s'identifient aux mouvements irréguliers théoriques. Cette présomption répond-elle à la réalité? Seules des recherches ultérieures pourront en décider».

larges. Une *solution turbulente* a donc *la structure* suivante: elle se compose *d'une succession de solutions régulières.*

Si j'avais réussi à construire des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulières, j'aurais le droit[1] d'affirmer qu'il existe effectivement des solutions turbulentes ne se réduisant pas, tout simplement, à des solutions régulières. Même si cette proposition était fausse, la notion de solution turbulente, qui n'aurait dès lors plus à jouer aucun rôle dans l'étude des liquides visqueux, ne perdrait pas son intérêt: il doit bien se présenter *des problèmes* de Physique mathématique pour lesquels *les causes physiques de régularité* ne suffisent pas à justifier *les hypothèses de régularité faites lors de la mise en équation;* à ces problèmes peuvent alors s'appliquer des considérations semblables à celles que j'expose ici.

Signalons enfin les deux faits suivants:

Rien ne permet d'affirmer l'unicité de la solution turbulente qui correspond à un état initial donné. (Voir toutefois Compléments 1°, p. 245; § 33).

La solution qui correspond à un état initial suffisamment voisin du repos ne devient jamais irrégulière. (Voir les cas de régularité que signalent les § 21 et 22, p. 226 et 227).

II. Le travail présent concerne les liquides visqueux illimités. Les conclusions en sont extrêmement analogues à celles d'un autre mémoire[2] que j'ai consacré aux mouvements plans des liquides visqueux enfermés dans des parois fixes convexes; ceci autorise à croire que ces conclusions s'étendent au cas général d'un liquide visqueux à deux ou trois dimensions que limitent des parois quelconques (même variables).

L'absence de parois introduit certes quelques complications concernant l'allure à l'infini des fonctions inconnues[3], mais simplifie beaucoup l'exposé et met mieux en lumière les difficultés essentielles; le rôle important que joue l'homogénéité des formules est plus évident; (les équations aux dimensions permettent de prévoir a priori presque toutes les inégalités que nous écrirons).

---

[1] En vertu du théorème d'existence du § 31 (p. 241) et du théorème d'unicité du § 18 (p. 222).

[2] Journal de Mathématiques, T. 13, 1934.

[3] Les conditions à l'infini par lesquelles nous caractérisons celles des équations de Navier que nous nommons régulières diffèrent essentiellement des conditions qu'emploie M. Oseen.

Rappelons que nous avons déjà traité le cas des mouvements plans illimités[1]: il est assez spécial[2]; la régularité du mouvement est alors assurée.

Sommaire du mémoire.

Le chapitre I rappelle au Lecteur une série de propositions d'Analyse, qui sont importantes, mais qu'on ne peut pas toutes considérer comme classiques.

Le chapitre II établit diverses inégalités préliminaires, aisément déduites des propriétés que possède la solution fondamentale de M. Oseen.

Le chapitre III applique ces inégalités à l'étude des solutions régulières des équations de Navier.

Le chapitre IV énonce diverses propriétés des solutions régulières, dont fera usage le chapitre VI.

Le chapitre V établit qu'à tout état initial correspond au moins une solution turbulente, qui est définie pendant une durée illimitée. La démonstration de ce *théorème d'existence* repose sur le *principe* suivant: On n'aborde pas directement le problème posé, qui est de résoudre les équations de Navier; mais on traite d'abord un problème voisin dont on peut s'assurer qu'il admet toujours une solution régulière, définie pendant une durée illimitée; on fait tendre ce problème voisin vers le problème posé et l'on construit la limite (ou les limites) de sa solution. Il existe bien une façon élémentaire d'appliquer ce principe: c'est celle qu'utilise mon étude des mouvements plans des liquides visqueux limités par des parois; mais elle est intimement liée à cette structure des solutions turbulentes que nous avons précédemment signalée; elle ne s'appliquerait pas si cette structure n'était pas assurée. Nous procèderons ici d'une autre façon, dont la portée est vraisemblablement plus grande, qui justifie mieux la notion de solution turbulente, mais qui fait appel à quelques théorèmes peu usuels cités au chapitre I.

Le chapitre VI étudie la structure des solutions turbulentes.

---

[1] Thèse, Journal de Mathématiques 12, 1933; chapitre IV p. 64—82. (On peut donner une variante intéressante au procédé que nous y employons en utilisant la notion d'état initial semi-régulier qu'introduit le mémoire présent.)

[2] On peut dans ce cas baser l'étude du problème sur la propriété que possède alors le maximum du tourbillon à un instant donné d'être une fonction décroissante du temps. (Voir: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 194; p. 1893; 30 mai 1932). — M. Wolibner a lui aussi fait cette remarque.

I. Préliminaires.

1. *Notations.*

Nous utiliserons la lettre Π' pour désigner un domaine arbitraire de points de l'espace; Π' pourra être l'espace tout entier, que nous désignerons par Π; ϖ désignera un domaine borné de points de Π, dont la frontière constitue une surface régulière σ.

Nous représenterons un point arbitraire de Π par x, ses coordonnées cartésiennes par $x_i (i = 1, 2, 3)$, sa distance à l'origine par r_0, un élément de volume qu'il engendre par δx, un élément de surface qu'il engendre par δx_1, δx_2, δx_3. Nous désignerons de même par y un second point arbitraire de Π; r représentera toujours la distance des points nommés x et y.

Nous utiliserons la convention »de l'indice muet»: un terme où un indice figure deux fois représentera la somme des termes obtenus en donnant à cet indice successivement les valeurs 1, 2, 3.

A partir du chapitre II le symbole A nous servira à désigner les constantes dont nous ne préciserons pas la valeur numérique.

Nous représenterons systématiquement par de grandes lettres les fonctions que nous supposerons seulement mesurables; par de petites lettres les fonctions qui sont continues ainsi que leurs dérivées premières.

2. *Rappelons l'inégalité de Schwarz:*

$$\text{(1.1)} \qquad \left[\iiint_{\Pi'} U(x)\, V(x)\, \delta x\right]^2 \leq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\, \delta x \times \iiint_{\Pi'} V^2(x)\, \delta x.$$

— On est assuré que le premier membre a un sens quand le second est fini. —

Cette inégalité est à la base de toutes les propriétés énoncées au cours de ce chapitre.

Première application:

Si
$$U(x) = V_1(x) + V_2(x)$$
on a:
$$\sqrt{\iiint_{\Pi'} U^2(x)\, \delta x} \leq \sqrt{\iiint_{\Pi'} V_1^2(x)\, \delta x} + \sqrt{\iiint_{\Pi'} V_2^2(x)\, \delta x};$$

plus généralement si l'on a, t étant une constante:

$$U(x) = \int_0^t V(x, t')\, dt'$$

alors:

$$\sqrt{\iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x} \leq \int_0^t dt' \sqrt{\iiint_{\Pi'} V^2(x, t')\,\delta x} \tag{1.2}$$

les premiers membres de ces inégalités étant sûrement finis quand les seconds membres le sont.

Seconde application:

Soient n constantes λ_p et n vecteurs constants $\overrightarrow{\alpha_p}$; désignons par $x + \overrightarrow{\alpha_p}$ le point obtenu en faisant subir à x la translation $\overrightarrow{\alpha_p}$; nous avons:

$$\iiint_{\Pi} \left[\sum_{p=1}^{p=n} \lambda_p U(x + \overrightarrow{\alpha_p})\right]^2 \delta x < \left[\sum_{p=1}^{p=n} |\lambda_p|\right]^2 \times \iiint_{\Pi} U^2(x)\,\delta x;$$

(cette inégalité se démontre aisément en développant les deux carrés qui y figurent et en utilisant l'inégalité de Schwarz). On en déduit la suivante qui nous sera très utile: Soit une fonction $H(z)$: nous désignerons par $H(y - x)$ la fonction que l'on obtient en substituant aux coordonnées z_i de z les composantes $y_i - x_i$ du vecteur $\overrightarrow{xy}$; nous avons:

$$\iiint_{\Pi} \left[\iiint_{\Pi} H(y-x)\, U(y)\,\delta y\right]^2 \delta x < \left[\iiint_{\Pi} |H(z)|\,\delta z\right]^2 \times \iiint_{\Pi} U^2(y)\,\delta y; \tag{1.3}$$

on est assuré que le premier membre est fini quand les deux intégrales qui figurent au second membre le sont.

3. *Forte convergence en moyenne.*[1]

Définition: On dit qu'une infinité de fonctions $U^*(x)$ a pour forte limite en moyenne sur un domaine Π' une fonction $U(x)$ quand:

---

[1] Voir: F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. T. 69 (1910). Delsarte, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule 57, Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert.

$$\text{limite} \iiint_{\Pi'} [U^*(x) - U(x)]^2 \,\delta x = 0. \tag{1.4}$$

On a alors quelle que soit la fonction $A(x)$ de carré sommable sur Π':

$$\text{limite} \iiint_{\Pi'} U^*(x)\, A(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi'} U(x)\, A(x)\, \delta x. \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5) résulte:

$$\text{limite} \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi'} U^2(x)\, \delta x. \tag{1.6}$$

Faible convergence en moyenne:

Définition: Une infinité de fonctions $U^*(x)$ a pour faible limite en moyenne sur un domaine Π' une fonction $U(x)$ quand les deux conditions suivantes se trouvent réalisées:

a) les nombres $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x$ sont bornés dans leur ensemble;

b) on a quelle que soit la fonction $A(x)$ de carré sommable sur Π':

$$\text{limite} \iiint_{\Pi'} U^*(x)\, A(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi'} U(x)\, A(x)\, \delta x.$$

Exemple I. La suite $\sin x_1$, $\sin 2x_1$, $\sin 3x_1$, ... converge faiblement vers zéro sur tout domaine ϖ.

Exemple II. Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ admettant une fonction $U(x)$ comme forte limite en moyenne sur tout domaine ϖ, elle l'admet comme faible limite en moyenne sur Π quand les quantités $\iiint_{\Pi} U^{*2}(x)\, \delta x$ sont bornées dans leur ensemble.

Exemple III. Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ qui sur un domaine Π' convergent presque partout vers une fonction $U(x)$; cette fonction est leur faible limite en moyenne quand les quantités $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x$ sont bornées dans leur ensemble.

On a:

$$\text{limite} \iiint_{\Pi'_1} \iiint_{\Pi'_2} A(x, y)\, U^*(x)\, V^*(y)\, \delta x\, \delta y = \tag{1.7}$$

$$= \iiint_{\Pi'_1} \iiint_{\Pi'_2} A(x, y)\, U(x)\, V(y)\, \delta x\, \delta y$$

quand on suppose que les $U^*(x)$ convergent faiblement en moyenne vers $U(x)$ sur Π_1', les $V^*(x)$ vers $V(x)$ sur Π_2' et que l'intégrale

$$\iiint\limits_{\Pi_1'} \iiint\limits_{\Pi_2'} A^2(x, y)\, \delta x\, \delta y \qquad \text{est finie.}$$

On a:

$$\text{(I. 8)} \qquad \text{limite} \iiint\limits_{\Pi'} A(x)\, U^*(x)\, V^*(x)\, \delta x = \iiint\limits_{\Pi'} A(x)\, U(x)\, V(x)\, \delta x$$

quand on suppose, sur Π', $A(x)$ borné, $U(x)$ forte limite des $U^*(x)$ et $V(x)$ faible limite des $V^*(x)$.

Il est d'autre part évident que l'on a, si les fonctions $U^*(x)$ convergent faiblement en moyenne vers $U(x)$ sur un domaine Π':

$$\text{limite} \left\{ \iiint\limits_{\Pi'} [U^*(x) - U(x)]^2\, \delta x - \iiint\limits_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x + \iiint\limits_{\Pi'} U^2(x)\, \delta x \right\} = 0;$$

d'où résultent l'inégalité:

$$\text{(I. 9)} \qquad \text{limite inférieure} \iiint\limits_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x \geq \iiint\limits_{\Pi'} U^2(x)\, \delta x,$$

et le *critère de forte convergence:*

Les fonctions $U^*(x)$ convergent fortement en moyenne sur le domaine Π' vers la fonction $U(x)$ quand elles convergent faiblement en moyenne vers cette fonction sur ce domaine et qu'en outre:

$$\text{(I. 10)} \qquad \text{limite supérieure} \iiint\limits_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x \leq \iiint\limits_{\Pi'} U^2(x)\, \delta x.$$

De même: Les composantes $U_i^*(x)$ d'un vecteur convergent fortement en moyenne sur le domaine Π' vers celles d'un vecteur $U_i(x)$ quand elles convergent faiblement en moyenne vers ces composantes sur ce domaine et qu'en outre[1]:

[1] Rappelons que le symbole $U_i(x)\, U_i(x)$ représente l'expression $\sum_{i=1}^{i=3} U_i(x)\, U_i(x)$.

$$\text{limite supérieure} \iiint_{\Pi'} U_i^*(x)\, U_i^*(x)\, \delta x \leq \iiint_{\Pi'} U_i(x)\, U_i(x)\, \delta x. \tag{I. 10'}$$

Ce critère de faible convergence appliqué à l'Exemple III fournit la propriété suivante:

Lemme 1. Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ [ou de vecteurs $U_i^*(x)$] qui convergent presque partout sur un domaine Π' vers une fonction $U(x)$ [ou un vecteur $U_i(x)$]; elles [ils] convergent fortement en moyenne vers cette limite quand l'inégalité (I. 10) [ou (I. 10')] est vérifiée.

Théorème de F. Riesz: Une infinité de fonctions $U^*(x)$ possède une faible limite en moyenne sur un domaine Π' si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

a) les nombres $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x$ sont bornés dans leur ensemble;

b) pour chaque fonction $A(x)$ de carré sommable sur Π' les quantités $\iiint_{\Pi'} U^*(x)\, A(x)\, \delta x$ ont une seule valeur limite.

On peut substituer à la condition b) la suivante:

b') Pour chaque cube c dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées et dont les sommets ont des coordonnées rationnelles les quantités $\iiint_{c} U^*(x)\, \delta x$ ont une seule valeur limite.

La démonstration de ce théorème fait usage des travaux de M. Lebesgue sur les fonctions sommables.

4. *Procédé diagonal de Cantor.*

Soit une infinité dénombrable de quantités dépendant chacune de l'indice entier $n: a_n, b_n, \ldots$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Supposons les a_n bornés dans leur ensemble, les b_n bornés dans leur ensemble, etc. Le procédé diagonal de Cantor permet de trouver une suite d'entiers $m_1, m_2, \ldots$ tels que chacune des suites $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$; $b_{m_1}, b_{m_2}, \ldots$; $\ldots$ converge vers une limite.

Rappelons brièvement quel est ce procédé: on construit une première suite d'entiers $n_1^1, n_2^1, n_3^1 \ldots$ tels que les quantités $a_{n_1^1}, a_{n_2^1}, a_{n_3^1}, \ldots$ convergent vers une limite; on constitue avec des éléments de cette première suite une seconde suite $n_1^2, n_2^2, n_3^2, \ldots$, telle que les quantités $b_{n_1^2}, b_{n_2^2}, b_{n_3^2}, \ldots$ convergent vers une limite; etc. On choisit alors m_p égal à n_p^p, qui est le $p^{\text{ième}}$terme de la diagonale du tableau infini des n_j^i.

Application: Du théorème cité au paragraphe précédent résulte le suivant:

Théorème fondamental de M. F. Riesz: Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ définies sur un domaine Π' et telles que les quantités $\iiint\limits_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x$ soient bornées dans leur ensemble; on peut toujours en extraire une suite illimitée de fonctions possédant une faible limite en moyenne.

En effet la condition a) est satisfaite et le Procédé diagonal de Cantor permet de construire une suite de fonctions $U^*(x)$ qui vérifient la condition b').

5. *Divers modes de continuité d'une fonction par rapport à un paramètre.*

Soit une fonction $U(x, t)$ dépendant d'un paramètre t. Nous dirons qu'elle est *uniformément continue* en t quand les trois conditions suivantes seront réalisées:

a) elle est continue par rapport à x_1, x_2, x_3, t;

b) pour chaque valeur particulière t_0 de t le maximum de $U(x, t_0)$ est fini;

c) étant donné un nombre positif ε, on peut trouver un nombre positif η tel que l'inégalité $|t - t_0| < \eta$ entraîne:

$$|U(x, t) - U(x, t_0)| < \varepsilon.$$

Le maximum de $|U(x, t)|$ sur Π est alors une fonction continue de t.

Nous dirons que $U(x, t)$ est *fortement continue* en t quand, pour chaque valeur particulière t_0 de t, $\iiint\limits_{\Pi} U^2(x, t_0)\,\delta x$ est fini et qu'on peut, étant donné ε, trouver η tel que l'inégalité $|t - t_0| < \eta$ entraîne:

$$\iiint\limits_{\Pi} [U(x, t) - U(x, t_0)]^2\,\delta x < \varepsilon.$$

L'intégrale $\iiint\limits_{\Pi} U^2(x, t)\,\delta x$ est donc une fonction continue de t. Inversement le lemme I nous apprend qu'une fonction $U(x, t)$, continue par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, t, est fortement continue en t quand l'intégrale précédente est une fonction continue de t.

6. *Relations entre une fonction et ses dérivées.*

Considérons deux fonctions $u(x)$ et $a(x)$ possédant des dérivées premières continues qui soient, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur Π. s étant la surface d'une sphère S dont le centre est l'origine et dont le rayon r_0 augmente indéfiniment, posons:

$$\varphi(r_0) = \iint\limits_s u(x)\, a(x)\, \delta x_i;$$

nous avons:

$$\varphi(r_0) = \iiint\limits_S \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} a(y)\right] \delta y.$$

La seconde expression de $\varphi(r_0)$ prouve que cette quantité tend vers une limite $\varphi(\infty)$ quand r_0 augmente indéfiniment. La première expression de $\varphi(r_0)$ nous donne:

$$|\varphi(r_0)| \leq \iint\limits_s |u(x)\, a(x)| \frac{x_i\, \delta x_i}{r_0}$$

d'où:

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(r_0)|\, dr_0 \leq \iiint\limits_\Pi |u(x)\, a(x)|\, \delta x.$$

Par suite $\varphi(\infty) = 0$; en d'autres termes:

$$\text{(I. 11)} \qquad \iiint\limits_\Pi \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} a(y)\right] \delta y = 0;$$

il en résulte que plus généralement:

$$\text{(I. 12)} \qquad \iiint\limits_{\Pi - \varpi} \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} a(y)\right] \delta y = -\iint\limits_\sigma u(y)\, a(y)\, \delta y_i.$$

Choisissons comme domaine ϖ une sphère de rayon infiniment petit dont nous nommerons le centre x; faisons[1] dans (I. 12) $a(y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_i}$; ajoutons les

[1] r représente la distance des points x et y.

relations qui correspondent aux valeurs 1, 2, 3 de i; nous obtenons l'identité importante:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\int\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i} \delta y. \tag{1.13}$$

Si maintenant nous faisons dans (1.11) $a(y) = \frac{y_i - x_i}{r^2} u(y)$ et si nous ajoutons les relations qui correspondent aux valeurs 1, 2, 3 de i, il vient:

$$2 \int\int\int_{\Pi} \frac{y_i - x_i}{r^2} \frac{\partial u}{\partial y_i} u(y) \delta y = - \int\int\int_{\Pi} \frac{1}{r^2} u^2(y) \delta y;$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz au premier membre de cette identité nous obtenons une inégalité qui nous sera utile:

$$\int\int\int_{\Pi} \frac{1}{r^2} u^2(y) \delta y \leq 4 \int\int\int_{\Pi} \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i} \delta y. \tag{1.14}$$

7. *Quasi-dérivées.*

Soit une infinité de fonctions $u^*(x)$ possédant des dérivées premières continues qui soient, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur Π. Supposons que les dérivées $\frac{\partial u^*}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u^*}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u^*}{\partial x_3}$ convergent faiblement en moyenne sur Π vers des fonctions $U_{,1}$; $U_{,2}$; $U_{,3}$. Soit $U(x)$ la fonction mesurable définie presque partout par la relation:

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \int\int\int_{\Pi} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_i} U_{,i}(y) \delta y.$$

Nous avons:

$$\int\int\int_{\varpi} [u^*(x) - U(x)]^2 \delta x = \tag{1.15}$$

$$= \int\int\int_{\Pi} \int\int\int_{\Pi} K_{ij}(y, y') \left[\frac{\partial u^*}{\partial y_i} - U_{,i}(y)\right] \left[\frac{\partial u^*}{\partial y'_j} - U_{,j}(y')\right] \delta y \, \delta y'$$

en posant[1]:

[1] r' représente la distance des points x et y'.

$$K_{ij}(y, y') = \frac{1}{16\pi^2} \iiint\limits_{\varpi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_i} \frac{\partial \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'_j} \delta x;$$

cette expression de K permet d'établir aisément que l'intégrale

$$\iiint\limits_{\Pi} \iiint\limits_{\Pi} K_{ij}(y, y') K_{ij}(y, y') \delta y \, \delta y'$$

est finie; le second membre de (I. 15) a donc bien un sens; et il tend vers zéro d'après la relation (I. 7). Donc les fonctions $u^*(x)$ ont sur tout domaine ϖ une forte limite en moyenne: la fonction $U(x)$. Et, si les intégrales $\iiint\limits_{\Pi} U^{*2}(x)\, \delta x$ sont bornées dans leur ensemble, $U(x)$ est sur Π faible limite en moyenne des fonctions $u^*(x)$ (Cf. § 3, Exemple II, p. 199); on déduit alors de (I. 11) l'égalité:

$$\iiint\limits_{\Pi} \left[U(y) \frac{\partial a}{\partial y_i} + U_{,i}(y)\, a(y) \right] \delta y = 0. \tag{I. 16}$$

Posons à ce propos la définition suivante:

Définition des quasi-dérivées: Soient deux fonctions de carrés sommables sur Π, $U(y)$ et $U_{,i}(y)$; nous dirons que $U_{,i}(y)$ est la quasi-dérivée de $U(y)$ par rapport à y_i quand la relation (I. 16) sera vérifiée; rappelons que dans cette relation (I. 16) $a(y)$ représente une quelconque des fonctions admettant des dérivées premières continues qui sont, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur Π.

Résumons les résultats acquis au cours de ce paragraphe:

Lemme 2. Soit une infinité de fonctions $u^*(x)$ continues ainsi que leurs dérivées premières. Supposons les intégrales $\iiint\limits_{\Pi} u^{*2}(x)\, \delta x$ bornées dans leur ensemble; supposons que chacune des dérivées $\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_i}$ ait sur Π une faible limite en moyenne $U_{,i}(x)$. Alors les fonctions $u^*(x)$ convergent en moyenne vers une fonction $U(x)$, dont les fonctions $U_{,i}(x)$ sont des quasi-dérivées; cette convergence est forte sur tout domaine ϖ; elle est faible[1] sur Π.

---

[1] Ou forte.

De même que nous avons défini les quasi-dérivées, nous allons définir comme suit la *quasi-divergence* $\Theta(x)$ d'un vecteur $U_i(x)$ dont les composantes sont de carrés sommables sur Π: c'est, quand elle existe, une fonction de carré sommable vérifiant la relation:

$$\iiint_{\Pi} \left[U_i(y) \frac{\partial a}{\partial y_i} + \Theta(y)\, a(y) \right] \delta y = 0. \tag{1.17}$$

8. *Approximation d'une fonction mesurable par une suite de fonctions régulières.* Soit une quantité positive arbitraire ε. Choisissons[1] une fonction $\lambda(s)$ continue, positive, définie pour $0 \leq s$, identique à zéro pour $1 \leq s$, possédant des dérivées de tous les ordres et telle que:

$$4\pi \int_0^1 \lambda(\sigma^2)\, \sigma^2\, d\sigma = 1\,.$$

$U(x)$ étant une fonction sommable sur tout domaine ϖ, nous poserons

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Pi} \lambda\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right) U(y)\, \delta y \tag{1.18}$$

(r = distance des points x et y)

Cette fonction $\overline{U(x)}$ possède des dérivées de tous les ordres:

$$\frac{\partial^{l+m+n}\, \overline{U(x)}}{\partial x_1^l\, \partial x_2^m\, \partial x_3^n} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Pi} \frac{\partial^{l+m+n}\, \lambda\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)}{\partial x_1^l\, \partial x_2^m\, \partial x_3^n}\, U(y)\, \delta y. \tag{1.19}$$

Supposons $U(x)$ borné sur Π; nous avons manifestement:

$$\text{minimum de } U(x) \leq \overline{U(x)} \leq \text{maximum de } U(x). \tag{1.20}$$

Supposons $U(x)$ de carré sommable sur Π; l'inégalité (1.3) appliquée à (1.18) nous donne:

$$\iiint_{\Pi} \overline{U(x)}^2\, \delta x < \iiint_{\Pi} U^2(x)\, \delta x; \tag{1.21}$$

---

[1] Pour fixer les idées nous prendrons $\lambda(s) = A\, e^{\frac{1}{s-1}}$, A étant une constante convenable, pour $0 < s < 1$.

appliquée à (1.19) elle prouve que les dérivées partielles de $\overline{U(x)}$ sont de carrés sommables sur Π.

Notons enfin que nous avons, si $U(x)$ et $V(x)$ sont de carrés sommables sur Π:

$$(1.22) \qquad \iiint_{\Pi} \overline{U(x)}\, V(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi} U(x)\, \overline{V(x)}\, \delta x.$$

Si $V(x)$ est continue, $\overline{V(x)}$ tend uniformément vers $V(x)$ sur tout domaine ϖ quand ε tend vers zéro; on a alors d'après (1.22):

$$\text{limite} \iiint_{\Pi} \overline{U(x)}\, V(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi} U(x)\, V(x)\, \delta x;$$

on en déduit que sur Π $\overline{U(x)}$ converge faiblement en moyenne vers $U(x)$ quand ε tend vers zéro; l'inégalité (1.21) et le critère de forte convergence énoncé p. 200 autorisent même une conclusion plus précise:

Lemme 3. Soit une fonction $U(x)$ de carré sommable sur Π; $\overline{U(x)}$ converge sur Π fortement en moyenne vers $U(x)$ quand ε tend vers zéro.

On établit de même la proposition suivante:

Généralisation du lemme 3. Soit une suite de fonctions $U_\varepsilon(x)$ qui sur Π convergent fortement (ou faiblement) vers une limite $U(x)$ quand ε tend vers zéro; les fonctions $\overline{U_\varepsilon(x)}$ convergent fortement (ou faiblement) vers cette même limite.

9. *Quelques lemmes concernant les quasi-dérivées.*

Soit une fonction $U(x)$ de carré sommable sur Π; supposons

$$\iiint_{\Pi} U(x)\, a(x)\, \delta x = 0$$

quelle que soit la fonction $a(x)$ de carré sommable sur Π dont les dérivées de tous les ordres existent et sont de carrés sommables sur Π; nous avons alors:

$$\iiint_{\Pi} U(x)\, \overline{U(x)}\, \delta x = 0;$$

d'où, en faisant tendre ε vers zéro:

$$\iiint_{\Pi} U^2(x)\,\delta x = 0.$$

La fonction $U(x)$ est donc nulle presque partout.

Ce fait permet d'établir les propositions suivantes: La quasi-dérivée d'une fonction par rapport à la variable x_i est unique quand elle existe. (Nous considérons comme identiques deux fonctions égales presque partout).

La quasi-divergence d'un vecteur est unique quand elle existe.

Lemme 4. Soit une fonction $U(x)$ admettant une quasi-dérivée $U,_i(x)$; je dis que $\dfrac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} = \overline{U,_i(x)}$.

Il suffit de prouver que:

$$\iiint_{\Pi} \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i}\, a(x)\,\delta x = \iiint_{\Pi} U,_i(x)\, a(x)\,\delta x.$$

Or on déduit aisément de (1.18) que:

$$\frac{\partial \overline{a(x)}}{\partial x_i} = \overline{\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\right)};$$

cette formule et les formules (1.11), (1.16), (1.22) justifient les transformations:

$$\iiint_{\Pi} \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i}\, a(x)\,\delta(x) = -\iiint_{\Pi} \overline{U(x)}\,\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\,\delta x = -\iiint_{\Pi} U(x)\overline{\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)}\,\delta x =$$

$$-\iiint_{\Pi} U(x)\,\frac{\partial \overline{a(x)}}{\partial x_i}\,\delta x = \iiint_{\Pi} U,_i(x)\,\overline{a(x)}\,\delta x = \iiint_{\Pi} \overline{U,_i(x)}\, a(x)\,\delta x. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 5. Soient deux fonctions de carrés sommables sur Π, $U(x)$ et $V(x)$, qui possèdent les quasi-dérivées $U,_i(x)$ et $V,_i(x)$; je dis que:

$$\iiint_{\Pi} [U(x)\,V,_i(x) + U,_i(x)\,V(x)]\,\delta x = 0. \tag{1.23}$$

Cette formule s'obtient en appliquant le lemme 3 à la formule:

$$\iiint_{\Pi} [U(x)\,\overline{V,_i(x)} + U,_i(x)\,\overline{V(x)}]\,\delta x = 0,$$

qui elle-même résulte de la relation (1.16) et du lemme 4.

Lemme 6. Soit un vecteur $U_i(x)$ admettant une quasi-divergence $\Theta(x)$; on a: divergence $\overline{U_i(x)} = \overline{\Theta(x)}$.

(La démonstration de ce lemme est très analogue à celle du lemme 4).

Lemme 7. Soit un vecteur $U_i(x)$ de quasi-divergence nulle. Supposons $\int\int\limits_{\Pi}\int U_i(x)\, a_i(x)\, \delta x = 0$ quel que soit le vecteur $a_i(x)$, de divergence nulle, dont les composantes ainsi que leurs dérivées de tous les ordres sont de carrés sommables sur Π. Je dis que $U_i(x) = 0$.

En effet le lemme 4 nous autorise à choisir $a_i(x) = \overline{U_i(x)}$; or quand ε tend vers zéro la relation $\int\int\limits_{\Pi}\int U_i(x)\overline{U_i(x)}\, \delta x = 0$ se réduit à la suivante:

$$\int\int\limits_{\Pi}\int U_i(x)\, U_i(x)\, \delta x = 0.$$

Corollaire. Une infinité de vecteurs $U_i^*(x)$, de quasi-divergence nulle, possède sur Π une faible limite en moyenne unique si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

a) Les nombres $\int\int\limits_{\Pi}\int U_i^*(x)\, U_i^*(x)\, \delta x$ sont bornés dans leur ensemble;

b) Pour chaque vecteur $a_i(x)$ de divergence nulle, dont les composantes, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres, sont de carrés sommables sur Π, les quantités $\int\int\limits_{\Pi}\int U_i^*(x)\, a_i(x)\, \delta x$ ont une seule valeur limite.

Sinon le Théorème fondamental de M. F. Riesz (p. 202) permettrait d'extraire de la suite $U_i^*(x)$ deux suites partielles possédant deux faibles limites distinctes, dont l'existence contredirait le lemme 7.

II. Mouvements infiniment lents.

10. On désigne par »équations des mouvements infiniment lents des liquides visqueux» ou par »équations de Navier linéarisées» les équations suivantes:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \nu\, \varDelta u_i(x, t) - \dfrac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = -X_i(x, t) \left[\varDelta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_k}\right] \\[2ex] \dfrac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_j} = 0. \end{cases}$$

ν et ϱ sont des constantes données, $X_i(x, t)$ est un vecteur donné qui représente les forces extérieures; $p(x, t)$ représente la pression, $u_i(x, t)$ la vitesse des molécules du liquide.

Le problème que pose la théorie des liquides visqueux est le suivant:

Construire pour $t > 0$ la solution de (2. 1) qui correspond à des valeurs initiales données, $u_i(x, 0)$.

Nous allons rappeler la solution de ce problème et quelques-unes des propriétés qu'elle possède. Nous poserons:

$$W(t) = \iiint_{\Pi} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x$$

$$J_m^2(t) = \iiint_{\Pi} \frac{\partial^m u_i(x, t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \frac{\partial^m u_i(x, t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \delta x.$$

$V(t) =$ Maximum de $\sqrt{u_i(x, t)\, u_i(x, t)}$ à l'instant t.

$D_m(t) =$ Maximum des fonctions $\left| \dfrac{\partial^m u_i(x, t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l} \right|$ à l'instant t $(h + k + l = m)$.

Nous ferons les hypothèses suivantes relativement aux données: Les fonctions $u_i(x, t)$ et leurs dérivées premières sont continues; $\dfrac{\partial u_j(x, 0)}{\partial x_j} = 0$; les quantités $W(0)$ et $V(0)$ sont finies; $|X_i(x, t) - X_i(y, t)| < r^{\frac{1}{2}} C(x, y, t)$, $C(x, y, t)$ étant une fonction continue; $\iiint_{\Pi} X_i(x, t)\, X_i(x, t)\, \delta x$ est une fonction continue de t, ou est inférieure à une fonction continue de t.

Les lettres A et A_m nous serviront désormais à désigner les constantes et les fonctions de l'indice m dont nous ne préciserons pas les valeurs numériques.

11. *Premier cas particulier:* $X_i(x, t) = 0$.

La Théorie de la Chaleur fournit dans ce cas la solution suivante du système (2. 1):

$$u_i'(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_{\Pi} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y, 0)\, \delta y; \qquad p'(x, t) = 0. \tag{2. 2}$$

Les intégrales $u_i'(x, t)$ sont uniformément continues en t (cf. § 5, p. 202) pour $0 < t$, et l'on a:

$$(2.3) \qquad V(t) < V(0).$$

Quand $J_1(0)$ est fini, l'application de l'inégalité (1.14) et de l'inégalité de Schwarz (1.1) à (2.2) permet d'obtenir une seconde borne de $V(t)$:

$$V^2(t) < 4 J_1^2(0) \frac{1}{(4\pi)^3} \iiint_{II} \frac{e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}}{(\nu t)^3} r^2 \delta x,$$

c'est-à-dire:

$$(2.4) \qquad V(t) < \frac{A J_1(0)}{(\nu t)^{\frac{1}{4}}}.$$

L'inégalité (1.3) appliquée à (2.2) prouve que l'on a:

$$(2.5) \qquad W(t) < W(0);$$

les intégrales $u_i'(x, t)$ sont fortement continues en t (cf. § 5, p. 202) même pour $t = 0$. Appliquée à la relation:

$$\frac{\partial u_i'(x, t)}{\partial x_k} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_{II} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} \right] u_i(y, 0)\, \delta y$$

cette inégalité (1.3) prouve que:

$$(2.6) \qquad J_1(t) < J_1(0);$$

les dérivées premières $\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ sont fortement continues en t, même pour $t=0$ si $J_1(0)$ est fini.

Pour des raisons analogues les dérivées de tous les ordres des intégrales $u_i'(x, t)$ sont uniformément et fortement continues en t pour $t > 0$; et plus précisément:

$$(2.7) \qquad D_m(t) < \frac{A_m \sqrt{W(0)}}{(\nu t)^{\frac{2m+3}{4}}},$$

$$(2.8) \qquad J_m(t) < \frac{A_m \sqrt{W(0)}}{(\nu t)^{\frac{m}{2}}}.$$

12. *Second cas particulier;* $u_i(x, 0) = 0$.

La solution fondamentale de M. Oseen[1], $T_{ij}(x, t)$, fournit la solution suivante du système (2.1):

[1] Voir: Oseen: Hydrodynamik § 5; Acta mathematica T. 34.

$$(2.9)\qquad \begin{cases} u_i''(x,t) = \int_0^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y,\, t-t')\, X_j(y,\, t')\, \delta y \\ p''(x,t) = -\dfrac{\varrho}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\iiint_\Pi \dfrac{1}{r} X_j(y,\, t)\, \delta y. \end{cases}$$

Nous avons:

$$(2.10)\qquad |T_{ij}(x-y,\, t-t')| < \frac{A}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{3}{2}}};\quad \left|\frac{\partial^m T_{ij}(x-y,\, t-t')}{\partial x_1^h\, \partial x_2^k\, \partial x_3^l}\right| < \frac{A_m}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{m+3}{2}}};\quad (t'<t).$$

Nous remarquerons en premier lieu que les inégalités (1.2) et (1.3) appliquées en même temps que (2.10) à la formule:

$$(2.11)\qquad \frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} = \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial T_{ij}(x-y,\, t-t')}{\partial x_k} X_j(y,\, t')\, \delta y$$

prouvent que les dérivées premières $\dfrac{\partial u_i''}{\partial x_k}$ sont fortement continues en t pour $t \geq 0$, et que:

$$(2.12)\qquad J_1(t) < A\int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,\, t')\, X_i(x,\, t')\, \delta x}\,.$$

Ceci fait, adjoignons aux hypothèses déjà énoncées la suivante: le maximum de $\sqrt{X_i(x,t)\, X_i(x,t)}$ à l'instant t est une fonction continue de t, ou est inférieur à une fonction continue de t; il n'y a aucune difficulté à déduire de (2.9) que $u_i''(x,t)$ et $\dfrac{\partial u_i''}{\partial x_k}$ sont alors uniformément continues en t pour $t \geq 0$, et à préciser par exemple que

$$(2.13)\qquad D_1(t) < A\int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}}\left\{\text{Max. de } \sqrt{X_i(x,\, t')\, X_i(x,\, t')} \text{ à l'instant } t'\right\};$$

cette inégalité (2.13) peut être complétée comme suit: nous avons

$$\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i''(y,t)}{\partial y_k} = \int_0^t dt' \iiint_{\varpi} \frac{\partial T_{ij}(x-z, t-t')}{\partial x_k} X_j(z,t')\,\delta z$$

$$- \int_0^t dt' \iiint_{\varpi} \frac{\partial T_{ij}(y-z, t-t')}{\partial y_k} X_j(z,t')\,\delta z$$

$$+ \int_0^t dt' \iiint_{\Pi-\varpi} \left[\frac{\partial T_{ij}(x-z, t-t')}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}(y-z, t-t')}{\partial y_k}\right] X_j(z,t')\,\delta z,$$

ϖ étant le domaine des points z situés à une distance de x ou de y inférieure à $2r$; appliquons la formule des accroissements finis au crochet:

$$\left[\frac{\partial T_{ij}(x-z, t-t')}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}(y-z, t-t')}{\partial y_k}\right]$$

et majorons les trois intégrales précédentes en remplaçant les diverses fonctions qui y figurent par des majorantes de leurs valeurs absolues; nous vérifions aisément que:

$$(2.14)\qquad \left|\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i''(y,t)}{\partial y_k}\right| <$$

$$< A r^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} \cdot \{\text{Max. de } \sqrt{X_i(x,t')\,X_i(x,t')} \text{ à l'instant } t'\}.$$

— Nous dirons *qu'une fonction* $U(x, t)$ *satisfait une condition* H quand elle vérifie une inégalité analogue à la précédente:

$$(2.15)\qquad |U(x,t) - U(y,t)| < r^{\frac{1}{2}}\, C(t),$$

où $C(t)$ est inférieur à une fonction continue de t. Nous nommerons coefficient de la condition H celle des fonctions $C(t)$ dont les valeurs sont les plus faibles possibles. —

Supposons maintenant que les fonctions $X_i(x, t)$ satisfassent une telle condition H, de coefficient $C(t)$; les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 u_i''(x,t)}{\partial x_k \partial x_l}$, qui sont données par les formules:

$$\frac{\partial^2 u_i''(x, t)}{\partial x_k \partial x_l} = \int_0^t dt' \iiint_{II} \frac{\partial^2 T_{ij}(x-y, t-t')}{\partial x_k \partial x_l} [X_j(y, t') - X_j(x, t')] \, \delta y$$

sont alors des fonctions uniformément continues en t, et l'on a:

$$D_2(t) < A \int_0^t \frac{C(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.16}$$

Plus généralement:

Supposons que les dérivées d'ordre m des fonctions $X_i(x, t)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 existent, soient continues et soient inférieures en valeur absolue à une fonction continue $\varphi_m(t)$. Alors les dérivées d'ordre $m+1$, par rapport à x_1, x_2, x_3, des fonctions $u_i''(x, t)$ existent, sont uniformément continues en t; on a:

$$D_{m+1}(t) < A \int_0^t \frac{\varphi_m(t')\, dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \tag{2.17}$$

enfin ces dérivées d'ordre $m+1$ satisfont une condition H de coefficient:

$$C_{m+1}(t) < A \int_0^t \frac{\varphi_m(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.18}$$

Si de plus:

$$\iiint_{II} \left[\frac{\partial^m X_i(x, t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right]^2 \delta x < \psi_m^2(t),$$

$\psi_m(t)$ étant une fonction continue (positive), alors les dérivées d'ordre $m+1$ par rapport à x_1, x_2, x_3 des fonctions $u_i(x, t)$ sont fortement continues en t et vérifient l'inégalité:

$$J_{m+1}(t) < A_m \int_0^t \frac{\psi_m(t')\, dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}}. \tag{2.19}$$

Supposons maitenant que les dérivées d'ordre m des fonctions $X_i(x, t)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 existent, soient inférieures en valeur absolue à une fonction continue de t et vérifient une condition H de coefficient $\theta_m(t)$. Alors les dérivées d'ordre $m+2$ des fonctions $u_i(x, t)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 existent, sont uniformément continues en t et vérifient l'inégalité

(2. 20)
$$D_{m+2}(t) < A \int_0^t \frac{\theta_m(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

13. *Cas général.*

Pour obtenir une solution $u_i(x, t)$ de (2. 1) correspondant à des valeurs initiales données $u_i(x, 0)$, il suffit d'ajouter les deux solutions particulières précédentes, c'est-à-dire de prendre:

$$u_i(x, t) = u_i'(x, t) + u_i''(x, t);\; p(x, t) = p''(x, t).$$

Nous nous proposons de compléter les renseignements que fournissent les deux paragraphes précédents en établissant que $u_i(x, t)$ est fortement continu en t et en majorant $W(t)$.

Cette forte continuité est évidente dans le cas où $X_i(x, t)$ est nul hors d'un domaine ϖ; quand x s'éloigne indéfiniment $u_i''(x, t)$, $\dfrac{\partial u_i''(x, t)}{\partial x_k}$ et $p(x, t)$ tendent alors vers zéro respectivement comme $(x_i x_i)^{-\frac{3}{2}}$, $(x_i x_i)^{-2}$ et $(x_i x_i)^{-1}$; et il suffit d'intégrer les deux membres de l'égalité:

$$\nu u_i \Delta u_i - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_i u_i) - \frac{1}{\varrho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -u_i X_i$$

pour obtenir »*la relation de dissipation de l'énergie*»:

(2. 21)
$$\nu \int_0^t J_1^2(t')\,dt' + \frac{1}{2} W(t) - \frac{1}{2} W(0) = \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i(x, t') X_i(x, t')\,\delta x$$

d'où résulte l'inégalité:

$$\frac{1}{2} W(t) \leq \frac{1}{2} W(0) + \int_0^t dt' \sqrt{W(t')} \sqrt{\iiint_\Pi X_i(x, t') X_i(x, t')\,\delta x}.$$

$W(t)$ est donc inférieur ou égal à la solution $\lambda(t)$ de l'équation

$$\frac{1}{2}\lambda(t) = \frac{1}{2} W(0) + \int_0^t dt' \sqrt{\lambda(t')} \sqrt{\iiint_\Pi X_i(x, t') X_i(x, t')\,\delta x}$$

c'est-à-dire:

(2. 22)
$$\sqrt{W(t)} \leq \int_0^t \sqrt{\iiint_\Pi X_i(x, t') X_i(x, t')\,\delta x}\, dt' + \sqrt{W(0)}.$$

Quand $X_i(x, t)$ n'est pas nul hors d'un domaine ϖ, on peut approcher les fonctions $X_i(x, t)$ par une suite de fonctions $X_i^*(x, t)$ nulles hors de domaines ϖ^*, et par ce procédé établir que les relations (2. 21) et (2. 22) sont encore valables. La relation (2. 21) prouve que $W(t)$ est continue; les fonctions $u_i(x, t)$ sont donc fortement continues en t pour $t \geq 0$.

14. $u_i(x, t) = u_i'(x, t) + u_i''(x, t)$ est la seule solution du problème posé au paragraphe 10 pour laquelle $W(t)$ est inférieure à une fonction continue de t; cette proposition résulte de la suivante

Théorème d'unicité: Le système

$$\nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_j} = 0 \tag{2. 23}$$

admet une seule solution, définie et continue pour $t \geq 0$, nulle pour $t = 0$, telle que $W(t)$ soit inférieure à une fonction continue de t; c'est $u_i(x, t) = 0$.

En effet les fonctions

$$v_i(x, t) = \int_0^t \overline{u_i(x, t')}\, dt', \qquad q(x, t) = \int_0^t \overline{p(x, t')}\, dt'$$

constituent des solutions du même système (2. 23); les dérivées

$$\frac{\partial^m v_i(x, t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l} \text{ et } \frac{\partial^{m+1} v_i(x, t)}{\partial t \partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$$

existent et sont continues; on a évidemment $\Delta q = 0$ et par suite:

$$\nu \Delta(\Delta v_i) - \frac{\partial}{\partial t}(\Delta v_i) = 0;$$

la Théorie de la Chaleur permet d'en déduire $\Delta v_i = 0$. D'autre part les inégalités (1. 2) et (1. 21) prouvent que l'intégrale $\int\int_{\Pi}\int v_i(x, t)\, v_i(x, t)\, \delta x$ est finie. Donc $v_i(x, t) = 0$. Et par suite $u_i(x, t) = 0$.

Enonçons un corollaire qu'utilisera le paragraphe suivant:

Lemme 8. Supposons que nous ayons pour $\Theta \leq t < T$ le système de relations:

$$\nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = -\frac{\partial X_{ik}(x, t)}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_j} = 0.$$

Supposons les dérivées $\dfrac{\partial^2 X_{ik}(x, t)}{\partial x_j \partial x_l}$ continues et les intégrales

$$\iiint\limits_{\Pi} X_{ik}(x, t)\, X_{ik}(x, t)\, \delta x, \qquad \iiint\limits_{\Pi} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x$$

inférieures à des fonctions de t continues pour $\Theta \leq t < T$. Nous avons alors:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint\limits_{\Pi} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y, t_0)\, \delta y +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{t_0}^{t} dt' \iiint\limits_{\Pi} T_{ij}(x - y, t - t')\, X_{jk}(y, t)\, \delta y;$$

$$p(x, t) = -\frac{\varrho}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \iiint\limits_{\Pi} \frac{1}{r} X_{ik}(y, t)\, \delta y; \quad (\Theta \leq t_0 < t < T).$$

III. Mouvements réguliers.

15. *Définitions:* Les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier:

$$(3.1) \qquad \nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = u_k(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_k} = 0,$$

où ν et ϱ sont des constantes, p la pression, u_i les composantes de la vitesse. Nous poserons:

$$W(t) = \iiint\limits_{\Pi} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x,$$

$$V(t) = \text{Maximum de } \sqrt{u_i(x, t)\, u_i(x, t)} \text{ à l'instant } t.$$

Nous dirons qu'*une solution $u_i(x, t)$ de ce système est régulière* dans un intervalle de temps[1] $\Theta < t < T$ si dans cet intervalle de temps les fonctions u_i, la fonction p correspondante et les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l}$, $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ sont continues par rapport à x_1, x_2, x_3, t et si en outre les fonctions $W(t)$ et $V(t)$ sont inférieures à des fonctions de t continues pour $\Theta < t < T$.

Nous utiliserons les conventions suivantes:

La fonction $D_m(t)$ sera définie pour chaque valeur de t au voisinage de

[1] Le cas où $T = +\infty$ n'est pas exclu.

laquelle les dérivées $\dfrac{\partial^m u_i(x,\,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$ existent et sont uniformément continues en t; elle sera égale à la borne supérieure de leurs valeurs absolues.

La fonction $C_0(t)$ [ou $C_m(t)$] sera définie pour toutes les valeurs de t au voisinage desquelles les fonctions $u_i(x,\,t)$ $\left[\text{ou les dérivées } \dfrac{\partial^m u_i(x,\,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right]$ vérifient une même condition H; elle en sera le coefficient.

Enfin la fonction $J_m(t)$ sera définie pour chaque valeur de t au voisinage de laquelle les dérivées $\dfrac{\partial^m u_i(x,\,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$ existent et sont fortement continues en t; nous poserons:

$$J_m^2(t) = \iiint\limits_{II} \frac{\partial^m u_i(x,\,t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \frac{\partial^m u_i(x,\,t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \delta x.$$

Le lemme 8 (p. 216) s'applique aux solutions régulières du système (3. 1) et nous donne les relations:

$$(3.\,2) \qquad u_i(x,\,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint\limits_{II} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,\,t_0)\,\delta y + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{t_0}^{t} dt' \iiint\limits_{II} T_{ij}(x-y,\,t-t')\, u_j(y,\,t')\, u_k(y,\,t')\,\delta y.$$

$$(3.\,3) \qquad p(x,\,t) = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \iiint\limits_{II} \frac{1}{r} u_k(y,\,t)\, u_j(y,\,t)\,\delta y; \;\; (\Theta < t_0 < t < T).$$

Les paragraphes 11 et 12 permettent de déduire de la relation (3. 2) les faits suivants: les fonctions $u_i(x,\,t)$ sont uniformément et fortement continues en t pour $\Theta < t < T$; la fonction $C_0(t)$ est définie pour $\Theta < t < T$ et l'on a [cf. (2. 7) et (2. 18)]:

$$C_0(t) < \frac{A\sqrt{W(t_0)}}{\nu(t-t_0)} + A \int\limits_{t_0}^{t} \frac{V^2(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

Ce résultat porté dans (3. 2) prouve que $D_1(t)$ existe pour $\Theta < t < T$ et fournit l'inégalité [cf. (2. 7) et (2. 16)]:

$$D_1(t) < \frac{A\sqrt{W(t_0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{5}{4}}} + A \int\limits_{t_0}^{t} \frac{V(t')\,C_0(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} dt'.$$

Poursuivons par récurrence:

L'existence de $D_1(t), \ldots D_{m+1}(t)$ assure celle de $C_{m+1}(t)$ et l'on a [cf. (2. 7) et (2. 18)]:

$$C_{m+1}(t) < \frac{A_m \sqrt{W(t_0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{m+3}{2}}} + A_m \int_{t_0}^{t} \frac{V(t') D_{m+1}(t') + \sum\limits_{\alpha+\beta=m+1} D_\alpha(t') D_\beta(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} dt'.$$

L'existence de $D_1(t), \ldots D_{m+1}(t)$, $C_0(t), \ldots C_{m+1}(t)$ assure celle de $D_{m+2}(t)$ et l'on peut majorer cette dernière fonction à l'aide des précédentes [cf. (2. 7) et (2. 20)].

Les fonctions $D_m(t)$ et $C_m(t)$ sont donc définies pour $\Theta < t < T$, quelque grand que soit m.

D'autre part les paragraphes 11 et 12 permettent de déduire de (3. 2) l'existence de $J_1(t)$ pour toutes ces valeurs de t; et nous avons [cf. (2. 8) et (2. 19)]:

$$J_1(t) < \frac{A \sqrt{W(0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{2}}} + A \int_{t_0}^{t} \frac{W(t') D_1(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} dt'.$$

Plus généralement l'existence de $D_1(t), \ldots D_m(t)$, $J_1(t), \ldots J_{m-1}(t)$ assure celle de $J_m(t)$ [cf. (2. 8) et (2. 19)].

Il nous est maintenant aisé d'établir par l'intermédiaire de (3. 3) que la fonction $p(x, t)$ et ses dérivées $\frac{\partial^m p(x, t)}{\partial x_k \partial x_j \ldots}$ sont uniformément et fortement continues en t pour $\Theta < t < T$. D'après les équations de Navier il en est de même pour les fonctions $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial^{m+1} u}{\partial t \partial x_k \partial x_j \ldots}$.

Plus généralement les équations (3. 1) et (3. 3) permettent de ramener l'étude des dérivées qui sont d'ordre $n+1$ par rapport à t à l'étude des dérivées qui sont d'ordre n par rapport à t. Et l'on aboutit finalement au *théorème* suivant:

Si les fonctions $u_i(x, t)$ constituent une solution des équations de Navier régulière pour $\Theta < t < T$, alors toutes leurs dérivées partielles existent; ces dérivées partielles et les fonctions $u_i(x, t)$ elles-mêmes sont uniformément et fortement continues en t pour $\Theta < t < T$.

16. Le paragraphe précédent nous apprend plus: il nous apprend à majorer les fonctions $u_i(x, t)$ et leurs dérivées partielles de tous les ordres au moyen des seules fonctions $W(t)$ et $V(t)$. Il en résulte:

Lemme 9. Soit une infinité de solutions des équations de Navier, $u_i^*(x, t)$, régulières dans un même intervalle de temps (Θ, T). Supposons les diverses fonctions $V^*(t)$ et $W^*(t)$ inférieures à une même fonction de t, continue dans (Θ, T). De cette infinité de solutions on peut alors extraire une suite partielle telle que les fonctions $u_i^*(x, t)$ de cette suite et chacune de leurs dérivées convergent respectivement vers certaines fonctions $u_i(x, t)$ et vers leurs dérivées. Chacune de ces convergences est uniforme sur tout domaine ϖ pour $\Theta + \eta < t < T - \eta$ $(\eta > 0)$. Les fonctions $u_i(x, t)$ constituent une solution des équations de Navier régulière dans (Θ, T).

En effet le Procédé diagonal de Cantor (§ 4, p. 201) permet d'extraire une suite de fonctions $u_i^*(x, t)$ telle que ces fonctions $u_i^*(x, t)$ et leurs dérivées convergent pour tous les systèmes rationnels de valeurs données à x_1, x_2, x_3, t. Cette suite partielle possède les propriétés qu'énonce le lemme.

17. La quantité $W(t)$ et la quantité $J_1(t)$ — que désormais nous désignerons pour simplifier par $J(t)$ — sont liées par une relation importante; elle s'obtient en remplaçant dans (2.21) X_i par $u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ et en remarquant que:

$$\int\int\limits_{\Pi}\int u_i(x, t')\, u_k(x, t')\frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_k}\,\delta x = \frac{1}{2}\int\int\limits_{\Pi}\int u_k(x, t')\,\frac{\partial u_i(x, t')\, u_i(x, t')}{\partial x_k}\,\delta x = 0;$$

c'est »*la relation de la dissipation de l'énergie*«:

$$\nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}\,W(t) = \frac{1}{2}\,W(t_0). \tag{3.4}$$

Cette relation et les deux paragraphes ci-dessus prouvent que les fonctions $W(t)$, $V(t)$ et $J(t)$ jouent un rôle essentiel. Aussi retiendrons-nous de toutes les inégalités qu'on peut déduire du chapitre II uniquement quelques-unes où figurent ces trois fonctions, sans plus nous occuper des quantités $C_m(t)$, $D_m(t)$, ...

Avant d'écrire ces quelques inégalités fondamentales posons *une définition:*

Une solution $u_i(x, t)$ des équations de Navier sera dite régulière pour $\Theta \leq t < T$ quand elle sera régulière pour $\Theta < t < T$ et qu'en outre les circonstances suivantes se présenteront: les fonctions $u_i(x, t)$ et $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j}$ sont continues par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, t même pour $t = \Theta$; elles sont fortement continues en t même pour $t = \Theta$; les fonctions $u_i(x, t)$ restent bornées quand t tend vers Θ.

Dans ces conditions la relation (3. 2) vaut pour $\Theta \leq t_0 < t < T$ (la valeur Θ était jusqu'à présent interdite à t_0); le chapitre II permet d'en déduire *deux inégalités fondamentales;* ce sont, le symbole $\{B; C\}$ nous servant à représenter la plus petite des deux quantités B et C; A', A'', A''' étant des constantes numériques:

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} \right\} dt' + \left\{ V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}} \right\} \tag{3. 5}$$

$$J(t) < A'' \int_{t_0}^{t} \frac{J(t')\, V(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} dt' + J(t_0) \qquad (\Theta \leq t_0 < t < T). \tag{3. 6}$$

18. *Comparaison de deux solutions régulières.*

Considérons deux solutions des équations de Navier, u_i et $u_i + v_i$, régulières pour $\Theta < t < T$. Nous avons:

$$\nu \Delta v_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial q}{\partial x_i} = v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (u_k + v_k)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Posons:

$$\mathrm{w}(t) = \iiint_{\Pi} v_i(x, t)\, v_i(x, t)\, \delta x; \qquad \mathrm{j}^2(t) = \iiint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} \delta x.$$

Appliquons la relation (2. 21) qui nous a déjà fourni la relation fondamentale (3. 4); elle donne ici:

$$\nu \mathrm{j}^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{w}}{dt} = \iiint_{\Pi} v_i v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x + \iiint_{\Pi} v_i (u_k + v_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta x.$$

Or nous avons:

$$\iiint_{\Pi} v_i (u_k + v_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta x = \frac{1}{2} \iiint_{\Pi} (u_k + v_k) \frac{\partial (v_i v_i)}{\partial x_k} \delta x = 0;$$

et

$$\iiint_{\Pi} v_i v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x = - \iiint_{\Pi} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k u_i \, \delta x < \mathrm{j}(t) \sqrt{\mathrm{w}(t)}\; V(t).$$

Donc:

$$\nu\, \mathrm{j}^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{w}}{dt} < \mathrm{j}(t)\sqrt{\mathrm{w}(t)}\; V(t)$$

d'où:

$$2\nu \frac{d\,\mathrm{w}}{dt} < \mathrm{w}(t)\, V^2(t)$$

et finalement:

$$\mathrm{w}(t) < \mathrm{w}(t_0)\, e^{\frac{1}{2\nu}\int\limits_{t_0}^{t} V^2(t')\,dt'} \qquad (\Theta < t_0 < t < T). \tag{3.7}$$

De cette relation importante résulte en particulier:

Un théorème d'unicité: Deux solutions des équations de Navier régulières pour $\Theta \leq t < T$ sont nécessairement identiques pour ces valeurs de t si leurs états de vitesse le sont pour $t = \Theta$.

19. Donnons-nous *un état initial régulier*, c'est-à-dire un vecteur de divergence nulle, $u_i(x, 0)$, continu, ainsi que les dérivées premières de ses composantes, et tel que les quantités $W(0)$, $V(0)$, $J(0)$ soient finies. Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante:

Théorème d'existence: A tout état initial régulier, $u_i(x, 0)$, correspond une solution des équations de Navier, $u_i(x, t)$, qui est définie pour des valeurs $0 \leq t < \tau$ de t et qui se réduit à $u_i(x, 0)$ pour $t = 0$.

Formons les *approximations successives:*

$$u_i^{(0)}(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint\limits_{\Pi} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}}\, u_i(y, 0)\,\delta y,$$

. . . .

$$u_i^{(n+1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_0^t dt' \iiint\limits_{\Pi} T_{ij}(x-y, t-t')\, u_k^{(n)}(y, t')\, u_j^{(n)}(y, t')\,\delta y + u_i^{(0)}(x, t),$$

. . . .

Ecrivons en premier lieu les inégalités, déduites de (2.3) et (2.13):

$$V^{(0)}(t) \leq V(0)$$

$$V^{(n+1)}(t) \leq A' \int\limits_0^t \frac{[V^{(n)}(t')]^2}{\sqrt{\nu(t-t')}}\,dt' + V(0);$$

elles prouvent que nous avons, quel que soit n:

$$V^{(n)}(t) \leq \varphi(t) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \tau,$$

si $\varphi(t)$ est une fonction continue qui vérifie pour ces valeurs de t l'inégalité:

$$\varphi(t) \geq A' \int_0^t \frac{\varphi^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} dt' + V(0);$$

nous choisirons $\varphi(t) = (1 + A)\, V(0)$; la valeur à donner à τ est:

$$\tau = A\nu\, V^{-2}(0). \tag{3.8}$$

Posons alors:

$\mathrm{v}^{(n)}(t) =$ Maximum de $\sqrt{[u_i^{(n)}(x, t) - u_i^{(n+1)}(x, t)]\,[u_i^{(n)}(x, t) - u_i^{(n+1)}(x, t)]}$ à l'instant t.

Nous avons:

$$\mathrm{v}^{(1)}(t) < A' \int_0^\tau \frac{V^2(0)}{\sqrt{\nu(\tau - t')}} dt' = A\, V(0)$$

$$\mathrm{v}^{(n+1)}(t) < A \int_0^\tau \frac{\varphi(t')\,\mathrm{v}^{(n)}(t')}{\sqrt{\nu(\tau - t')}} dt' = A\, V(0) \int_0^\tau \frac{\mathrm{v}^{(n)}(t')\, dt'}{\sqrt{\nu(\tau - t')}}$$

d'où résulte que, pour $0 \leq t \leq \tau$, les fonctions $u_i^{(n)}(x, t)$ convergent uniformément vers des limites continues, $u_i(x, t)$.

On démontre sans difficulté qu'à l'intérieur de l'intervalle $(0, \tau)$ chacune des dérivées des fonctions $u_i^{(n)}(x, t)$ converge uniformément vers la dérivée correspondante des fonctions $u_i(x, t)$; les raisonnements sont trop proches de ceux du paragraphe 15 pour que nous les reproduisions. Les fonctions $u_i(x, t)$ satisfont donc les équations de Navier pour $0 < t < \tau$.

Vérifions que l'intégrale $W(t) = \iiint_\Pi u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x$ est inférieure à une fonction continue de t: les inégalités (2.5) et (2.12) fournissent les suivantes, où A_0 représente une constante:

$$\sqrt{W^{(0)}(t)} \leq \sqrt{W(0)}$$

$$\sqrt{W^{(n+1)}(t)} \leq A_0 \int_0^t \frac{\varphi(t')\sqrt{W^{(n)}(t')}}{\sqrt{\nu(t-t')}} dt' + \sqrt{W(0)};$$

la théorie des équations intégrales linéaires nous apprend l'existence d'une fonction positive $\theta(t)$ solution de l'équation:

$$\theta(t) = A_0 \int_0^t \frac{\varphi(t')\,\theta(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\,dt' + \sqrt{W(0)};$$

nous avons $W^{(n)}(t) \leq \theta^2(t)$; donc $W(t) \leq \theta^2(t)$.

Il nous reste à préciser comment les fonctions $u_i(x, t)$ se comportent quand t tend vers zéro. Nous savons déjà qu'elles se réduisent alors aux données $u_i(x, 0)$, en restant continues même pour $t=0$. Pour prouver qu'elles demeurent fortement continues en t quand t s'annule, il suffit d'après le lemme 1 d'établir que:

$$\text{limite supérieure de } W(t) \leq W(0);$$
$$t \to 0$$

or cette inégalité a manifestement lieu, puisque $\theta^2(0) = W(0)$. On prouve de même que les fonctions $\dfrac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k}$ sont fortement continues en t, même pour $t=0$.

Dès lors la démonstration du théorème d'existence énoncé ci-dessus est achevée.

Mais la formule (3.8) nous fournit un second résultat: Convenons de dire *qu'une solution des équations de Navier*, régulière dans un intervalle (Θ, T), *devient irrégulière à l'époque* T quand T est fini et qu'il est impossible de définir cette solution régulière dans un intervalle (Θ, T') plus grand que (Θ, T). La formule (3.8) révèle:

Un premier caractère des irrégularités: Si une solution des équations de Navier devient irrégulière à l'époque T, alors $V(t)$ augmente indéfiniment quand t tend vers T; et plus précisément:

$$V(t) > A\sqrt{\frac{\nu}{T-t}}. \tag{3.9}$$

20. *Il serait important de savoir s'il existe des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulières.* S'il ne s'en trouvait pas, la solution régulière unique qui correspond à un état initial régulier, $u_i(x, 0)$, existerait pour toutes les valeurs positives de t.

Aucune solution ne pourrait devenir irrégulière si l'inégalité (3.9) était incompatible avec les relations fondamentales (3.4), (3.5) et (3.6); mais il n'en est rien, comme on le voit en choisissant:

$$(3.10)\qquad V(t) = A_0'[\nu(T-t)]^{-\frac{1}{2}};\ W(t) = A_0''[\nu(T-t)]^{\frac{1}{2}};\ J(t) = \frac{\sqrt{A_0''}}{2}[\nu(T-t)]^{-\frac{1}{4}}$$

et en vérifiant que pour des valeurs suffisamment fortes des constantes A_0' et A_0'' l'inégalité (3.9) et la relation (3.4) sont vérifiées, ainsi que les deux inégalités suivantes, qui sont plus strictes que (3.5) et (3.6):

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(T-t')}};\ \frac{W(t')}{[\nu(T-t')]^2}\right\} dt' + \left\{V(t_0);\ \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\right\}$$

$$J(t) < A'' \int_{t_0}^{t} \frac{J(t')\, V(t')}{\sqrt{\nu(T-t')}} + J(t_0) \qquad (t_0 < t < T).$$

Les équations de Navier possédent sûrement une solution qui devient irrégulière et pour laquelle les fonctions $W(t)$, $V(t)$ et $J(t)$ sont du type (3.10) si le système:

$$(3.11)\qquad \nu \Delta U_i(x) - \alpha\left[U_i(x) + x_k \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k}\right] - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = U_k(x)\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_k} = 0,$$

où α désigne une constante positive, possède une solution non nulle, les $U_i(x, t)$ étant bornés et les intégrales $\iiint_{II} U_i(x, t)\, U_i(x, t)\, \delta x$ finies; la solution des équations de Navier dont il s'agit est:

$$(3.12)\qquad u_i(x, t) = [2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}}\, U_i[(2\alpha(T-t))^{-\frac{1}{2}} x] \qquad (t < T)$$

(λx désigne le point de coordonnées λx_1, λx_2, λx_3.)

Je n'ai malheureusement pas réussi à faire l'étude du système (3.11). Nous laisserons donc en suspens cette question de savoir si des irrégularités peuvent ou non se présenter.

21. *Conséquences diverses des relations fondamentales* (3.4), (3.5) *et* (3.6). Soit une solution des équations de Navier, régulière pour $\Theta \leq t < T$ qui, lorsque t tend vers T, devient irrégulière, à moins que T ne soit égal à $+\infty$. Des relations fondamentales (3.4) et (3.5) résulte l'inégalité:

$$(3.13)\qquad V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}};\ \frac{W(t_0)}{[\nu(t-t')]^2} \right\} dt' + \left\{ V(t_0);\ \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}} \right\}$$
$$(\Theta \leq t_0 < t < T);$$

supposons qu'une fonction $\varphi(t)$, continue pour $0 < t \leq \tau$, vérifie pour ces valeurs de t l'inégalité:

$$(3.14)\qquad \varphi(t) \geq A' \int_{0}^{t} \left\{ \frac{\varphi^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}};\ \frac{W(t_0)}{[\nu(t-t')]^2} \right\} dt' + \left\{ V(t_0);\ \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}} \right\},$$

nous avons alors pour les valeurs de t communes aux deux intervalles (t_0, T) et $(t_0, t_0 + \tau)$:

$$(3.15)\qquad V(t) < \varphi(t - t_0);$$

le premier caractère des irrégularités permet d'en déduire

$$(3.16)\qquad t_0 + \tau < T.$$

Supposons en outre connue une fonction $\psi(t)$ telle que

$$(3.17)\qquad \psi(t) \geq A'' \int_{0}^{t} \frac{\varphi(t')\,\psi(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} dt' + J(t_0) \qquad (0 < t \leq \tau);$$

de l'inégalité (3.6) résulte alors la suivante:

$$(3.18)\qquad J(t) < \psi(t - t_0) \quad \text{pour} \quad t_0 < t \leq t_0 + \tau.$$

Le premier caractère des irrégularités se déduit de (3.16) en choisissant:

$$\varphi(t) = (1 + A)\, V(t_0) \quad \text{et} \quad \tau = A \nu V^{-2}(t_0).$$

Le choix $\varphi(t) = (1 + A)\, V(t_0)$ et $\tau = +\infty$ satisfait l'inégalité (3.14) quand

$$V(t_0) > \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{A\, V^2(t_0)}{\sqrt{\nu t'}};\ \frac{A\, W(t_0)}{(\nu t')^2} \right\} dt'$$

c'est-à-dire quand $\nu^{-3} W(t_0)\, V(t_0) < A$. Donc:

Premier cas de régularité: On est assuré qu'une solution régulière ne devient jamais irrégulière quand la quantité $\nu^{-3} W(t)\, V(t)$ se trouve être inférieure à une certaine constante A soit à l'instant initial, soit à tout autre instant antérieurement auquel cette solution n'est pas devenue irrégulière.

On peut satisfaire (3. 14) et (3. 17) par un choix du type

$$(3.19) \qquad \varphi(t) = A J(t_0)[\nu(t-t_0)]^{-\frac{1}{4}}; \quad \psi(t) = (1+A) J(t_0); \quad \tau = A \nu^3 J^{-4}(t_0).$$

Cette expression de τ fournit:

Un second caractère des irrégularités: Si une solution des équations de Navier devient irrégulière à l'époque T, alors $J(t)$ augmente indéfiniment quand t tend vers T; et plus précisément:

$$J(t) > \frac{A \nu^{\frac{3}{4}}}{(T-t)^{\frac{1}{4}}}.$$

Les inégalités (3. 15) et (3. 19) prouvent qu'une solution régulière à un instant t reste régulière jusqu'à l'instant $t_0 + \tau$ et que l'on a:

$$V(t_0+\tau) < A \nu^{-1} J^2(t_0).$$

La relation fondamentale (3. 4) donne d'autre part:

$$W(t_0+\tau) < W(t_0).$$

Donc:

$$\nu^{-3} W(t_0+\tau) V(t_0+\tau) < A \nu^{-4} W(t_0) J^2(t_0).$$

L'application du premier cas de régularité à l'époque $t_0 + \tau$ fournit dès lors:

Un second cas de régularité: On est assuré qu'une solution régulière ne devient jamais irrégulière quand la quantité $\nu^{-4} W(t) J^2(t)$ se trouve être inférieure à une certaine constante A soit à l'instant initial, soit à tout autre instant antérieurement auquel cette solution n'est pas devenue irrégulière.

22. On établit de même les résultats suivants dont les précédents peuvent d'ailleurs être considérés comme des cas particuliers:

Caractère des irrégularité: Si une solution devient irrégulière à l'époque T, on a:

$$\left\{\iiint_{\Pi} [u_i(x,t) u_i(x,t)]^{\frac{p}{2}} \delta x\right\}^{\frac{1}{p}} > \frac{A\left(1-\frac{3}{p}\right)\nu^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{p}\right)}}{(T-t)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{p}\right)}} \qquad (p>3).$$

Cas de régularité: On est assuré qu'une solution régulière ne devient jamais irrégulière quand on a à un instant quelconque:

$$[A\,W(t)]^{p-3}\int\int_{\Pi}\int [u_i(x,t)\,u_i(x,t)]^{\frac{p}{2}}\,\delta x < A\left(1-\frac{3}{p}\right)^3 \nu^{3(p-2)} \qquad (p>3).$$

Les cas de régularité que nous signalons montrent comment une solution reste toujours régulière quand son état initial de vitesse est suffisamment voisin du repos. Plus généralement considérons un état de vitesse auquel correspond une solution ne devenant jamais irrégulière; à tout état initial suffisamment voisin correspond une solution qui elle aussi ne devient jamais irrégulière. La démonstration de ce fait utilise ceux des résultats du paragraphe 34 qui concernent l'allure d'une solution des équations de Navier pour les grandes valeurs de t.

IV. Etats initiaux semi-réguliers.

23. Nous serons amenés, dans le courant du chapitre VI, à envisager des états initiaux non réguliers au sens du paragraphe 17. Commençons leur étude en remarquant que l'inégalité (3. 7) permet d'énoncer un théorème d'unicité plus général que celui du paragraphe 18: Posons à cet effet une définition:

Nous dirons qu'une solution des équations de Navier est semi-régulière pour $\Theta \leq t < T$ quand elle est régulière pour $\Theta < t < T$ et que les deux circonstances suivantes se présentent:

$$\text{L'intégrale} \int_{\Theta}^{t} V^2(t')\,dt' \text{ est finie quand } \Theta < t < T.$$

Les fonctions $u_i(x,t)$ ont de fortes limites en moyenne, $u_i(x,\Theta)$, quand t tend vers Θ.

— Nous nommerons »état initial des vitesses» ce vecteur $u_i(x,\Theta)$, dont la quasi-divergence est nulle. —

Le théorème que fournit l'inégalité (3. 7) est le suivant:

Théorème d'unicité: Deux solutions des équations de Navier, semi-régulières pour $\Theta \leq t < T$, sont nécessairement identiques pour toutes ces valeurs de t quand leurs états de vitesse à l'instant Θ sont presque partout identiques.

Nous dirons qu'*un état initial de vitesse*, $u_i(x,0)$, est semi-régulier quand il lui correspond une solution $u_i(x,t)$ semi-régulière sur un intervalle $0 \leq t < \tau$.

24. Soit un vecteur $U_i(x)$ de quasi-divergence nulle, dont les composantes sont de carrés sommables sur Π et possèdent des quasi-dérivées $U_{i,j}(x)$ de carrés sommables sur Π. Nous allons établir que le champ de vitesses $U_i(x)$ est un état initial semi-régulier.

Posons:

$$W(\text{o}) = \iiint\limits_{\Pi} U_i(x)\, U_i(x)\, \delta x \quad \text{et} \quad J^2(\text{o}) = \iiint\limits_{\Pi} U_{i,j}(x)\, U_{i,j}(x)\, \delta x.$$

Les fonctions $\overline{U_i(x)}$ constituent un état initial régulier, comme le prouvent le lemme 6 et le paragraphe 8 (p. 209 et 206); soit $u_i^*(x, t)$ la solution régulière qui correspond à l'état initial $\overline{U_i(x)}$; nous avons en vertu de l'inégalité (1. 21) et de la relation de dissipation de l'énergie (3. 4):

$$(4.\ 1) \qquad W^*(t) < W(\text{o}).$$

Le lemme 4 nous apprend que $\dfrac{\partial\, \overline{U_i(x)}}{\partial x_j} = \overline{U_{i,j}(x)}$; nous avons donc d'après (1. 21):

$$J^*(\text{o}) < J(\text{o});$$

les relations (3. 15), (3. 18) et (3. 19) permettent d'en déduire que sur un même intervalle (o, τ) les diverses solutions $u_i^*(x, t)$ sont régulières et vérifient les inégalités:

$$(4.\ 2) \qquad V^*(t) < A\, J(\text{o})\, (\nu t)^{-\frac{1}{4}}; \quad J^*(t) < (1 + A)\, J(\text{o});$$

nous avons d'ailleurs:

$$(4.\ 3) \qquad \tau = A \nu^3 J^{-4}(\text{o}).$$

Les inégalités (4. 1) et (4. 2) nous autorisent à appliquer le lemme 9 (p. 220): dans la formule de définition (1. 18) de $\overline{U(x)}$ figure une longueur ε; il est possible de la faire tendre vers zéro en sorte que pour $\text{o} < t < \tau$ les fonctions $u_i^*(x, t)$ et chacune de leurs dérivées convergent respectivement vers certaines fonctions $u_i(x, t)$ et vers leurs dérivées. Ces fonctions $u_i(x, t)$ constituent une solution des équations de Navier régulière pour $\text{o} < t < \tau$; d'après (4. 1) et (4. 2) cette solution satisfait les trois inégalités:

$$(4.\ 4) \qquad W(t) \leq W(\text{o}); \quad V(t) \leq A\, J(\text{o})\, (\nu t)^{-\frac{1}{4}}; \quad J(t) \leq (1 + A)\, J(\text{o}).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^t V^2(t')\, dt'$ est donc finie pour $\text{o} < t < \tau$. Il nous reste à préciser comment les fonctions $u_i(x, t)$ se comportent quand t tend vers zéro.

Soit $a_i(x)$ un vecteur quelconque, de divergence nulle, dont les composantes, ainsi que toutes leurs dérivées, sont de carrés sommables sur Π. Des équations de Navier résulte la relation:

$$\iiint_{\Pi} u_i^*(x,\ t)\, a_i(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi} \overline{U_i(x)}\, a_i(x)\, \delta x + \\ + \nu \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} u_i^*(x,\ t')\, \Delta a_i(x)\, \delta x + \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} u_k(x,\ t')\, u_i(x,\ t') \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_k}\, \delta x;$$

d'où, en passant à la limite:

$$\iiint_{\Pi} u_i(x,\ t)\, a_i(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi} U_i(x)\, a_i(x)\, \delta x + \\ + \nu \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} u_i(x,\ t')\, \Delta a_i(x)\, \delta x + \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} u_k(x,\ t')\, u_i(x,\ t') \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_k}\, \delta x.$$

Cette dernière relation prouve que

$$\iiint_{\Pi} u_i(x,\ t)\, a_i(x)\, \delta x \ \text{ tend vers } \iiint_{\Pi} U_i(x)\, a_i(x)\, \delta x$$

quand t tend vers zéro. Dans ces conditions $u_i(x,\ t)$ a une faible limite en moyenne unique, qui est $U_i(x)$ (cf. Corollaire du lemme 7, p. 209). Mais l'inégalité $W(t) \leq W(0)$ nous permet d'utiliser le critère de forte convergence énoncé p. 200; et nous constatons ainsi que les fonctions $u_i(x,\ t)$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_i(x)$ quand t tend vers zéro.

$u_i(x,\ t)$ est donc une solution semi-régulière[1] pour $0 \leq t < \tau$ et elle correspond à l'état initial $U_i(x)$.

25. On peut par des raisonnements analogues traiter les deux autres cas que signale le théorème ci-dessous:

Théorème d'existence: Soit un vecteur $U_i(x)$, de quasi-divergence nulle, dont

[1] On peut même affirmer plus: les fonctions $\dfrac{\partial u_i(x,\ t)}{\partial x_j}$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_{i,j}(x)$ quand t tend vers zéro.

les composantes sont de carrés sommables sur Π; on peut affirmer que l'état initial de vitesses qu'il définit est semi-régulier:

a) quand les fonctions $U_i(x)$ possèdent des quasi-dérivées de carrés sommables sur Π;

b) quand les fonctions $U_i(x)$ sont bornées;

c) ou enfin quand l'intégrale $\iiint\limits_{\Pi} [U_i(x)U_i(x)]^{\frac{p}{2}}\,\delta x$ est finie pour une valeur de p supérieure à 3.

N. B. Ce théorème et le théorème d'existence du paragraphe 19 n'épuisent évidemment pas l'étude de l'allure que présente au voisinage de l'instant initial la solution qui correspond à un état initial donné.

V. Solutions turbulentes.

26. Soit un état initial régulier $u_i(x, 0)$. Nous n'avons pas réussi à prouver que la solution régulière des équations de Navier qui lui correspond est définie pour toutes les valeurs de t postérieures à l'instant initial $t = 0$. Mais considérons le système:

$$(5.\ 1)\qquad \nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = \overline{u_k(x, t)}\,\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k};\quad \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_j} = 0.$$

C'est un système qui est très voisin des équations de Navier quand la longueur[1] ε est très courte. Tout ce que nous avons dit au cours du chapitre III sur les équations de Navier lui est applicable sans modification, hormis les considérations non concluantes du paragraphe 20. Par là se trouve établie toute une catégorie de propriétés du système (5. 1), dans lesquelles ne figure pas la longueur ε. D'autre part l'inégalité de Schwarz (1. 1) nous donne:

$$\overline{u_k(x, t)} < A_0\,\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\sqrt{W(t)},\ A_0 \text{ étant une constante numérique.}$$

Cette nouvelle inégalité et la relation de dissipation de l'énergie (3. 4) autorisent à écrire à côté de l'inégalité (3. 5) la suivante: si une solution du système (5. 1) est régulière pour $0 \leq t < T$, alors:

---

[1] Rappelons que cette longueur a été introduite au § 8 (p. 206), quand nous avons défini le symbole $\overline{U(x)}$.

$$V(t) < A' A_0 \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{W(0)} \int_0^t \frac{V(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} + V(0) \qquad (0 < t < T).$$

De là résulte que sur tout intervalle de régularité $(0, T)$ $V(t)$ reste inférieur à la fonction $\varphi(t)$, continue pour $0 \leq t$, qui satisfait l'équation intégrale linéaire du type de Volterra:

$$\varphi(t) = A' A_0 \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{W(0)} \int_0^t \frac{\varphi(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} + V(0);$$

$V(t)$ reste donc borné quand, T étant fini, t tend vers T; ceci contredit le premier caractère des irrégularités (p. 224); en d'autres termes *l'unique solution des équations* (5. 1) *qui correspond à un état initial régulier donné est définie pour toutes les valeurs du temps postérieures à l'instant initial.*

27. Étant donné un mouvement qui satisfait les équations (5. 1), nous aurons besoin de *résultats concernant la répartition de son énergie cinétique:* $\frac{1}{2} u_i(x, t)\, u_i(x, t)$. Ces résultats devront être indépendants[1] de ε.

Soient deux longueurs constantes R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$; introduisons la fonction $f(x)$ suivante:

$$f(x) = 0 \text{ pour } r_0 \leq R_1;$$

$$f(x) = \frac{r_0 - R_1}{R_2 - R_1} \text{ pour } R_1 \leq r_0 \leq R_2; \qquad (r_0^2 = x_i x_i)$$

$$f(x) = 1 \text{ pour } R_2 \leq r_0.$$

Un calcul analogue à celui qui fournit la relation de dissipation de l'énergie (2. 21) nous donne:

$$\nu \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} f(x) \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_k} \frac{\partial u_i(u, t')}{\partial x_k} \delta x + \frac{1}{2} \iiint_{\Pi} f(x)\, u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\Pi} f(x)\, u_i(x, 0)\, u_i(x, 0)\, \delta x - \nu \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\, u_i(x, t') \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} \delta x +$$

[1] Ils vaudront également pour les solutions régulières des équations de Navier.

$$+\frac{1}{\varrho}\int_0^t dt' \iiint_{II} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} p(x, t') u_i(x, t') \delta x +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t dt' \iiint_{II} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \overline{u_k(x, t')} u_i(x, t') u_i(x, t') \delta x.$$

Nous en déduisons l'inégalité:

$$(5.2)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\iiint\limits_{r_0>R_2} u_i(x, t) u_i(x, t) \delta x < \frac{1}{2}\iiint\limits_{r_0>R_1} u_i(x, 0) u_i(x, 0) \delta x + \\ + \frac{\nu\sqrt{W(0)}}{R_2 - R_1}\int_0^t J(t')\, dt' + \frac{1}{\varrho}\frac{\sqrt{W(0)}}{R_2 - R_1}\int_0^t dt' \sqrt{\iiint\limits_{II} p^2(x, t')\delta x} + \\ + \frac{\sqrt{W(0)}}{R_2 - R_1}\int_0^t dt' \sqrt{\iiint\limits_{II}\left[\frac{1}{2} u_i(x, t') u_i(x, t')\right]^2 \delta x.} \end{cases}$$

Majorons les trois derniers termes: d'après l'inégalité de Schwarz

$$(5.3)\qquad \int_0^t J(t') dt' < \sqrt{\int_0^t J^2(t')\, dt'}\,\sqrt{t} < \sqrt{\frac{W(0)}{2\nu}}\sqrt{t}.$$

D'autre part (cf. (3. 3)):

$$(5.4)\qquad \frac{1}{\varrho} p(x, t') = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{II} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i(y, t')}{\partial y_k} \overline{u_k(y, t')}\, \delta y,$$

d'où

$$\frac{1}{\varrho^2}\iiint\limits_{II} p^2(x, t')\delta x = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{II}\iiint\limits_{II} \overline{u_k(x, t')}\frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_k}\frac{1}{r}\overline{u_j(y, t)}\frac{\partial u_i(y, t')}{\partial y_j}\delta x\,\delta y;$$

la relation (1. 14) et l'inégalité de Schwarz (1. 1) nous apprennent que

$$\sum_i \left[\iiint\limits_{II} \frac{1}{r}\overline{u_j(y, t)}\frac{\partial u_i(y, t')}{\partial y_j}\partial y\right]^2 < 4 J^4(t');$$

en outre:

$$\sum_i \left[\iiint_{\Pi} \overline{u_k(x, t')} \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_k} \delta x \right]^2 < W(t') J^2(t');$$

donc:

$$\frac{1}{\varrho^2} \iiint_{\Pi} p^2(x, t') \delta x < \frac{1}{2\pi} \sqrt{W(t')} J^3(t');$$

par suite:[1]

$$(5.5) \qquad \frac{1}{\varrho} \int_0^t dt' \sqrt{\iiint_{\Pi} p^2(x, t') \delta x} < \frac{[W(0)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t J^{\frac{3}{2}}(t')\, dt' < \frac{W(0)}{\sqrt{2\pi}(2\nu)^{\frac{3}{4}}} t^{\frac{1}{4}}.$$

De (1.13) résulte:

$$\frac{1}{2} u_i(x, t') u_i(x, t') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Pi} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_k} u_i(y, t') \frac{\partial u_i(y, t')}{\partial y_k} \delta y;$$

cette formule analogue à (5.4) conduit par des calculs analogues aux précédents à l'inégalité:

$$(5.6) \qquad \int_0^t dt' \sqrt{\iiint_{\Pi} \left[\frac{1}{2} u_i(x, t') u_i(x, t')\right]^2 \delta x} < \frac{W(0)}{\sqrt{2\pi}(2\nu)^{\frac{3}{4}}} t^{\frac{1}{4}}.$$

Tenons compte dans (5.2) des majorantes (5.3), (5.5) et (5.6); nous obtenons:

$$(5.7) \qquad \frac{1}{2} \iiint_{r_0 > R_2} u_i(x, t) u_i(x, t) \delta x < \frac{1}{2} \iiint_{r_0 > R_1} u_i(x, 0) u_i(x, 0) \delta x + $$

$$+ \frac{W(0)\sqrt{\nu t}}{\sqrt{2}(R_2 - R_1)} + \frac{W^{\frac{3}{2}}(0)\, t^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{4}} (R_2 - R_1)}.$$

---

[1] Nous utilisons l'inégalité:

$$\int_0^t J^{\frac{3}{2}}(t')\, dt' < \left[\int_0^t J^2(t')\, dt'\right]^{\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{4}}$$

qui est un cas particulier de »l'inégalité de Hölder»:

$$\left|\int_0^t \varphi(t') \psi(t')\, dt'\right| < \left[\int_0^t \varphi^p(t') dt'\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^t \psi^q(t') dt'\right]^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\ 1 < p,\ 1 < q\right).$$

Cette inégalité renseigne sur la façon dont l'énergie cinétique reste localisée à distance finie.

28. Donnons-nous à l'instant initial $t = 0$ un état initial constitué par un vecteur quelconque, $U_i(x)$, dont les composantes sont de carrés sommables sur Π et dont la quasi-divergence est nulle. Le vecteur $\overline{U_i(x)}$ constitue un état initial régulier (cf. lemme 6 et paragraphe 8); nommons $u_i^*(x, t)$ la solution régulière des équations (5.1) qui lui correspond; elle est définie pour toutes les valeurs positives de t. *Le but de ce chapitre est d'étudier les limites que peut avoir cette solution régulière $u_i^*(x, t)$ du système (5.1) quand ε tend vers zéro.*

Les propriétés des fonctions $u_i^*(x, t)$ dont nous ferons usage sont les trois suivantes:

1°) Soit $a_i(x, t)$ un vecteur quelconque de divergence nulle, dont toutes les composantes et toutes leurs dérivées sont uniformément et fortement continues en t; nous avons d'après (5.1):

$$\begin{aligned}\iiint_{\Pi} u_i^*(x, t)\, a_i(x, t)\, \delta x = {} & \iiint_{\Pi} \overline{U_i(x)}\, a_i(x, 0)\, \delta x + \\ (5.8) \qquad & + \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} u_i^*(x, t')\left[\nu \varDelta a_i(x, t') + \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial t'}\right]\delta x + \\ & + \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} \overline{u_k^*(x, t)}\, u_i^*(x, t')\, \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k}\, \delta x.\end{aligned}$$

2°) La relation de dissipation de l'énergie et l'inégalité (1.21) nous donnent:

$$(5.9) \qquad \nu \int_{t_0}^{t} J^{*2}(t')\, dt' + \frac{1}{2} W^*(t) = \frac{1}{2} W^*(t_0) < \frac{1}{2} W(0).$$

$$(5.10) \qquad \left(\text{Par définition } W(0) = \iiint_{\Pi} U_i(x)\, U_i(x)\, \delta x.\right)$$

3°) L'inégalité (5.7) et l'inégalité $W^*(0) < W(0)$ justifient la proposition suivante:

Soit une constante arbitrairement faible $\eta\,(0 < \eta < W(0))$; nommons $R_1(\eta)$ la longueur telle que:

$$\iiint\limits_{r_0 > R_1(\eta)} U_i(x)\, U_i(x)\, \delta x = \frac{\eta}{2},$$

désignons par $s(\eta, t)$ la sphère, qui dépend continûment de η et de t, dont le centre est l'origine des coordonnées et dont le rayon est:

$$R_2(\eta, t) = R_1(\eta) + \frac{4}{\eta}\left[\frac{W(0)\sqrt{\nu t}}{\sqrt{2}} + \frac{W^{\frac{3}{2}}\, t^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\, \pi^{\frac{1}{2}}\, \nu^{\frac{3}{4}}}\right],$$

nous avons:

$$(5.11) \qquad \text{limite supérieure}_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Pi - s(\eta, t)} u_i^*(x, t)\, u_i^*(x, t)\, \delta x \leq \eta.$$

29. Faisons tendre ε vers zéro par une suite dénombrable de valeurs: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Considérons les fonctions $W^*(t)$ qui leur correspondent; elles sont bornées dans leur ensemble et chacune d'elles est décroissante. Le Procédé diagonal de Cantor (§ 4) permet d'extraire de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite partielle $\varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_2}, \ldots$ telle que les fonctions $W^*(t)$ correspondantes convergent pour chaque valeur rationnelle de t. Ces fonctions $W^*(t)$ convergent alors vers une fonction décroissante, sauf peut-être en des points de discontinuité de cette dernière. Les points de discontinuité d'une fonction décroissante sont dénombrables. Une seconde application du Procédé diagonal de Cantor permet donc d'extraire de la suite $\varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_2}, \ldots$ une suite partielle $\varepsilon_{m_1}, \varepsilon_{m_2}, \ldots$ telle que les fonctions $W^*(t)$ correspondantes convergent[1] quel que soit t. Nous nommerons $W(t)$ la fonction décroissante qui est leur limite. (Cette définition ne contredit pas (5.10).)

L'inégalité $W^*(t) < W(0)$ prouve que chacune des intégrales:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt' \iiint\limits_{\varpi} u_i^*(x, t')\, \delta x; \quad \int_{t_1}^{t_2} dt' \iiint\limits_{\varpi} \overline{u_k^*(x, t')}\, u_i^*(x, t')\, \delta x$$

est inférieure à une borne indépendante de ε. Par une troisième application du Procédé diagonal de Cantor nous pouvons donc extraire de la suite $\varepsilon_{m_1}, \varepsilon_{m_2}, \ldots$ une suite partielle $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}, \ldots$ telle que chacune de ces intégrales ait une limite

[1] En d'autres termes nous utilisons le théorème de Helly.

unique quand t_1 et t_2 sont rationnels et que ϖ est un cube d'arêtes parallèles aux axes et de sommets à coordonnées rationnelles. L'inégalité $W^*(t) < W(0)$ et les hypothèses[1] faites sur les fonctions $a_i(x, t)$ permettent d'affirmer que dans ces conditions chacune des intégrales:

$$\int_0^t dt' \iiint_{\Pi} u_i^*(x, t')\left[\nu \Delta a_i(x, t') + \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial t'}\right] \delta x;$$

$$\int_0^t dt' \iiint_{\Pi} \overline{u_k^*(x, t')}\, u_i^*(x, t') \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k} \delta x$$

a une limite unique. Ce résultat, porté dans (5. 8), nous apprend que l'intégrale $\iiint_{\Pi} u_i^*(x, t)\, a_i(x, t)\, \delta x$ converge vers une limite unique, quels que soient $a_i(x, t)$ et t. Donc (cf. Corollaire du lemme 7) les fonctions $u_i^*(x, t)$ convergent faiblement en moyenne vers une limite $U_i(x, t)$ pour chaque valeur de t.

Ainsi, étant donnée une suite de valeurs de ε qui tendent vers zéro, on peut en extraire une suite partielle telle que les *fonctions* $W^*(t)$ *convergent vers une limite unique* $W(t)$ et que *les fonctions* $u_i^*(x, t)$ *aient pour chaque valeur de* t *une faible limite en moyenne unique:* $U_i(x, t)$. Nous supposerons désormais que ε tend vers zéro par une suite de valeurs ε^* telle que ces deux circonstances se produisent.

Remarque I. Nous avons d'après (1.9):

$$W(t) \geq \iiint_{\Pi} U_i(x, t)\, U_i(x, t)\, \delta x.$$

[1] De ces hypothèses résulte en effet qu'étant donnés t, un nombre η (> 0) et une fonction $\delta(x, t)$ égale à l'une des dérivées des fonctions $a_i(x, t)$, on peut trouver un entier N et deux fonctions discontinues $\beta(x, t)$ et $\gamma(x, t)$ qui possèdent les propriétés suivantes: ces fonctions $\beta(x, t)$, $\gamma(x, t)$ restent constantes quand x_1, x_2, x_3, t varient sans atteindre aucune valeur multiple de $\frac{1}{N}$; chacune d'elles est nulle hors d'un domaine ϖ; on a:

$$\int_0^t dt' \iiint_{\Pi} [\delta(x, t') - \beta(x, t')]^2\, \delta x < \eta; \quad |\delta(x, t') - \gamma(x, t')| < \eta \text{ pour } 0 < t' < t.$$

Remarque II. Le vecteur $U_i(x, t)$ possède manifestement une quasi-divergence égale à zéro.

30. L'inégalité (5.9) nous donne:

$$\nu \int_0^\infty [\text{limite inférieure de } J^*(t')]^2 \, dt' < \frac{1}{2} W(0);$$

la limite inférieure de $J^*(t)$ ne peut donc être $+\infty$ que pour un ensemble de valeurs de t dont la mesure est nulle. Soit t_1 une valeur de l'ensemble complémentaire. On peut extraire de la suite de valeurs ε^* envisagée une suite partielle[1] ε^{**} telle que sur Π les fonctions $\dfrac{\partial u_i^{**}(x, t_1)}{\partial x_j}$ correspondantes convergent faiblement en moyenne vers une limite: $U_{i,j}(x, t_1)$ (cf. Théorème fondamental de M. F. Riesz, p. 202).

Le lemme 2 nous permet d'en déduire tout d'abord que *les fonctions* $U_i(x, t_1)$ *ont des quasi-dérivées qui sont ces fonctions* $U_{i,j}(x, t_1)$. Nous poserons:

$$J(t_1) = \iiint_\Pi U_{i,j}(x, t_1) \, U_{i,j}(x, t_1) \, \delta x;$$

nous avons (cf. (1.9)):

$$J(t_1) \leq \text{limite inférieure de } J^*(t_1);$$

portons cette inégalité dans (5.9); il vient:

$$(5.12) \qquad \nu \int_{t_0}^{t} J^2(t') \, dt' + \frac{1}{2} W(t) \leq \frac{1}{2} W(t_0) \leq \frac{1}{2} W(0) \qquad (0 \leq t_0 \leq t).$$

Le lemme 2 nous apprend ensuite que sur tout domaine ϖ les fonctions $u_i^{**}(x, t_1)$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_i(x, t)$;

$$\underset{\varepsilon^{**} \to 0}{\text{limite}} \iiint_\varpi u_i^{**}(x, t_1) \, u_i^{**}(x, t_1) \, \delta x = \iiint_\varpi U_i(x, t_1) \, U_i(x, t_1) \, \delta x.$$

Choisissons ϖ identique à $s(\eta, t_1)$ et tenons compte de (5.11); il vient:

[1] Cette suite partielle que nous choisissons est fonction de l'époque t_1 envisagée.

limite supérieure $\iiint\limits_{\Pi} u_i^{**}(x, t_1)\, u_i^{**}(x, t_1)\, \delta x \leq \iiint\limits_{s(\eta,\, t_1)} U_i(x, t_1)\, U_i(x, t_1)\, \delta x + \eta.$

D'où, puisque η est arbitrairement faible et que $W^*(t_1)$ a une seule valeur limite:

$$(5.13)\qquad \operatorname*{limite}_{\varepsilon^* \to 0} \iiint\limits_{\Pi} u_i^*(x, t_1)\, u_i^*(x, t_1)\, \delta x \leq \iiint\limits_{\Pi} U_i(x, t_1)\, U_i(x, t_1)\, \delta x.$$

Appliquons le critère de forte convergence énoncé p. 200; nous constatons que *sur Π les fonctions $u_i^*(x, t)$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_i(x, t)$ pour toutes les valeurs t_1 de t qui n'appartiennent pas à l'ensemble de mesure nulle sur lequel la limite inférieure de $J^*(t)$ est $+\infty$.*

Pour toutes ces valeurs t les deux membres de (5.13) sont égaux c'est-à-dire:

$$(5.14)\qquad W(t_1) = \iiint\limits_{\Pi} U_i(x, t_1)\, U_i(x, t_1)\, \delta x.$$

Les fonctions $\overline{u_i^*(x, t_1)}$ elles aussi convergent fortement en moyenne vers $U_i(x, t_1)$ (cf. Généralisation du lemme 3, p. 207). L'intégrale qui figure dans (5.8):

$$\iiint\limits_{\Pi} \overline{u_k^*(x,\, t')}\, u_i^*(x,\, t')\, \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k}\, \delta x$$

converge donc vers:

$$\iiint\limits_{\Pi} U_k(x, t')\, U_i(x, t')\, \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k}\, \delta x$$

pour presque toutes les valeurs de t' (cf. (1.8)); cette intégrale est d'autre part inférieure à

$$3\, W(0) \cdot \text{Maximum de} \left| \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k} \right|;$$

le Théorème de M. Lebesgue qui concerne le passage à la limite sous le signe $\int$ nous permet d'en déduire que:

$$\lim_{\varepsilon^* \to 0} \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} \overline{u_k^*(x, t')}\, u_i^*(x, t') \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k} \delta x =$$

$$\int_0^t dt' \iiint_{\Pi} U_k(x, t')\, U_i(x, t') \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k} \delta x,$$

le second membre de cette relation pouvant être mis, d'après le lemme 5, sous la forme:

$$-\int_0^t dt' \iiint_{\Pi} U_k(x, t')\, U_{i,k}(x, t')\, a_i(x, t')\, \delta x.$$

Dès le début de ce paragraphe nous avions le droit d'affirmer que les autres termes qui figurent dans (5.8) convergent de même vers des limites qui s'obtiennent en substituant $U_i(x, t)$ à $u_i^*(x, t)$, $U_i(x)$ à $\overline{U_i(x)}$. Par suite:

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint_{\Pi} U_i(x, t)\, a_i(x, t)\, \delta x = \iiint_{\Pi} U_i(x)\, a_i(x, 0)\, \delta x \\ &+ \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} U_i(x, t') \left[\nu \Delta a_i(x, t') + \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial t'} \right] \delta x \\ &- \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} U_k(x, t')\, U_{i,k}(x, t')\, a_i(x, t')\, \delta x. \end{aligned} \right.$$

31. Les résultats ainsi obtenus conduisent à la définition suivante: Nous dirons qu'un vecteur $U_i(x, t)$, défini pour $t \geq 0$, constitue *une solution turbulente des équations de Navier* quand les conditions que nous allons énoncer se trouveront réalisées, les valeurs de t que nous nommerons *singulières* constituant un ensemble de mesure nulle:

Pour chaque valeur positive de t les fonctions $U_i(x, t)$ sont de carrés sommables sur Π, et le vecteur $U_i(x, t)$ a une quasi-divergence nulle.

La fonction:

$$\int_0^t dt' \iiint_{\Pi} U_i(x, t') \left[\nu \Delta a_i(x, t') + \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial t'} \right] \delta x - \iiint_{\Pi} U_i(x, t) a_i(x, t) \delta x$$

$$- \int_0^t dt' \iiint_{\Pi} U_k(x, t') U_{i,k}(x, t') a_i(x, t') \delta x$$

est constante ($t \geq 0$). (Autrement dit la relation (5. 15) a lieu.) Pour toutes les valeurs positives de t, sauf éventuellement pour certaines valeurs *singulières*, les fonctions $U_i(x, t)$ possèdent des quasi-dérivées $U_{i,j}(x, t)$, de carrés sommables sur Π.

Nous poserons:

$$J^2(t) = \iiint_{\Pi} U_{i,j}(x, t) U_{i,j}(x, t) \delta x,$$

$J(t)$ se trouvant donc défini pour presque toutes les valeurs positives de t.

Il existe une fonction $W(t)$, définie pour $t \geq 0$, qui possède les deux propriétés suivantes:

la fonction $\nu \int_0^t J^2(t') dt' + \frac{1}{2} W(t)$ est non croissante;

on a: $\iiint_{\Pi} U_i(x, t) U_i(x, t) \delta x \leq W(t)$, l'inégalité n'ayant lieu qu'à certaines époques *singulières*, dont l'époque initiale $t = 0$ ne fait pas partie.

Nous dirons *qu'une telle solution turbulente correspond à l'état initial* $U_i(x)$ quand nous aurons: $U_i(x, 0) = U_i(x)$.

La conclusion de ce chapitre peut alors se formuler comme suit:

Théorème d'existence: Supposons donné à l'instant initial un état initial $U_i(x)$, tel que les fonctions $U_i(x)$ soient de carrés sommables sur Π et que le vecteur de composantes $U_i(x)$ possède une quasi-divergence nulle. Il correspond à cet état initial au moins une solution turbulente, qui est définie pour toutes les valeurs du temps postérieures à l'instant initial.

VI. Structure d'une solution turbulente.

32. Il nous reste à établir quels liens existent entre les solutions régulières et les solutions turbulentes des équations de Navier. Il est tout d'abord évident que toute solution régulière constitue a fortiori une solution turbulente. Nous allons chercher dans quels cas une solution turbulente se trouve constituer une solution régulière. Généralisons à cet effet les raisonnements du paragraphe 18 (p. 221).

Comparaison d'une solution régulière et d'une solution turbulente: Soit une solution des équations de Navier, $a_i(x, t)$, définie et semi-régulière pour $\Theta \leq t < T$; nous supposons qu'elle devient irrégulière quand t tend vers T, à moins que T ne soit égal à $+\infty$. Considérons une solution turbulente, $U_i(x, t)$, définie pour $\Theta \leq t$, l'époque Θ n'étant pas singulière. Les symboles $\mathrm{W}(t)$ et $\mathrm{J}(t)$ se rapporteront à cette solution turbulente. Nous poserons:

$$\mathrm{w}(t) = \mathrm{W}(t) - 2\iiint_{\Pi} U_i(x, t)\, a_i(x, t)\,\delta x + \iiint_{\Pi} a_i(x, t)\, a_i(x, t)\,\delta x$$

$$\mathrm{j}^2(t) = \mathrm{J}^2(t) - 2\iiint U_{i,j}(x, t)\frac{\partial a_i(x, t)}{\partial x_j}\,\delta x + \iiint_{\Pi} \frac{\partial a_i(x, t)}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_i(x, t)}{\partial x_j}\,\delta x.$$

Rappelons que la fonction de t:

$$\nu\int_{\Theta}^{t} dt' \iiint_{\Pi} \frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_j}\,\delta x + \frac{1}{2}\iiint_{\Pi} a_i(x, t)\, a_i(x, t)\,\delta x$$

est constante et que la fonction:

$$\nu\int_{\Theta}^{t} \mathrm{J}^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}\mathrm{W}(t)$$

est non croissante. Il en résulte que la fonction de t:

$$(6.1)\qquad \nu\int_{\Theta}^{t} \mathrm{j}^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}\mathrm{w}(t) + 2\nu\int_{\Theta}^{t} dt' \iiint_{\Pi} U_{i,k}(x, t')\frac{\partial a_i(x, t')}{\partial x_k}\,\delta x + \\ + \iiint_{\Pi} U_i(x, t)\, a_i(x, t)\,\delta x$$

est non croissante. Tenons compte de la relation (5.15) et de ce que $a_i(x, t)$

est une solution semi-régulière des équations de Navier: nous constatons que la fonction non croissante (6. 1) est à une constante près égale à la suivante:

$$(6.2)\qquad \nu\int_{\Theta}^{t} \mathrm{j}^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}\,\mathrm{w}(t) + \int_{\Theta}^{t} dt' \iiint_{\Pi} [a_k(x,\,t') - U_k(x,\,t')]\, U_{i,k}(x,\,t')\, a_i(x,\,t')\,\delta x.$$

Or nous avons pour chaque valeur non singulière de t:

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,\,t') - U_k(x,\,t')]\,\frac{\partial a_i(x,\,t')}{\partial x_k}\, a_i(x,\,t')\,\delta x =$$

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Pi} [a_k(x,\,t') - U_k(x,\,t')]\,\frac{\partial a_i(x,\,t')\,a_i(x,\,t')}{\partial x_k}\,\delta x = 0;$$

l'intégrale

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,\,t') - U_k(x,\,t')]\, U_{i,k}(x,\,t')\, a_i(x,\,t')\,\delta x$$

peut donc s'écrire:

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,\,t') - U_k(x,\,t')]\left[U_{i,k}(x,\,t') - \frac{\partial a_i(x,\,t')}{\partial x_k}\right] a_i(x,\,t')\,\delta x$$

et par suite elle est inférieure en valeur absolue à:

$$\sqrt{\mathrm{w}(t')}\;\mathrm{j}(t')\,\mathrm{V}(t'),$$

$\mathrm{V}(t')$ désignant la plus grande longueur du vecteur $a_i(x,\,t)$ à l'instant t'. Puisque (6. 2) n'est pas croissante, il en est donc a fortiori de même pour la fonction:

$$\nu\int_{\Theta}^{t} \mathrm{j}^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}\,\mathrm{w}(t) - \int_{\Theta}^{t} \sqrt{\mathrm{w}(t')}\,\mathrm{j}(t')\,\mathrm{V}(t')\,dt'.$$

Or

$$\nu\int_{\Theta}^{t} \mathrm{j}^2(t')\,dt' - \int_{\Theta}^{t} \sqrt{\mathrm{w}(t')}\,\mathrm{j}(t')\,\mathrm{V}(t')\,dt' + \frac{1}{4\nu}\int_{\Theta}^{t} \mathrm{w}(t')\,\mathrm{V}^2(t')\,dt'$$

ne peut manifestement pas décroître. Par suite la fonction:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{w}(t) - \frac{1}{4\nu}\int\limits_{\Theta}^{t} \mathrm{w}(t')\,\mathrm{V}^2(t')\,dt'$$

est non croissante. De là résulte l'inégalité qui généralise (3.7):

$$(6.3) \qquad \mathrm{w}(t) \leq \mathrm{w}(\Theta)\, e^{\frac{1}{2\nu}\int\limits_{\Theta}^{t} \mathrm{V}^2(t')\,dt'} \qquad (\Theta < t < T).$$

Supposons en particulier que les solutions $U_i(x, t)$ et $a_i(x, t)$ correspondent à un même état initial: $\mathrm{w}(\Theta) = 0$; de (6.3) résulte alors $\mathrm{w}(t) = 0$; donc $U_i(x, t) = a_i(x, t)$ pour $\Theta \leq t < T$. Ce résultat constitue *un théorème d'unicité*[1] dont ceux des paragraphes 18 et 23 (p. 222 et 228) ne sont que des cas particuliers.

33. *Régularité d'une solution turbulente pendant certains intervalles de temps.*

Considérons une solution turbulente $U_i(x, t)$, définie pour $t \geq 0$. A toute époque non singulière le vecteur $U_i(x, t)$ constitue un état initial semi-régulier (cf. p. 231 Théorème d'existence, cas a)); le théorème d'unicité que nous venons d'établir a dès lors la conséquence suivante: Soit une époque non singulière, c'est-à-dire choisie hors d'un certain ensemble de mesure nulle; cette époque est l'origine d'un intervalle de temps à l'intérieur duquel la solution turbulente envisagée coïncide avec une solution régulière des équations de Navier; et cette coïncidence ne cesse pas tant que cette solution régulière n'est pas devenue irrégulière. Ce résultat, complété par quelques autres aisés à établir, nous fournit le théorème ci-dessous:

Théorème de structure.

Pour qu'un vecteur $U_i(x, t)$ constitue, quand $t \geq 0$, une solution turbulente des équations de Navier, il faut et il suffit que ce vecteur possède les trois propriétés suivantes:

a) Nommons *intervalle de régularité* tout intervalle $\overline{\Theta_l T_l}$ de l'axe des temps à l'intérieur duquel le vecteur $U_i(x, t)$ constitue une solution régulière des équations de Navier, sans que ceci soit vrai pour aucun intervalle contenant $\Theta_l T_l$. Soit O l'ensemble ouvert formé par la réunion de ces intervalles de régularité

[1] Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'à un état initial donné correspond une solution turbulente unique.

(qui sont deux à deux sans point commun). O ne doit différer du demi-axe $t \geq 0$ que par un ensemble de mesure nulle.

b) La fonction $\iiint\limits_{II} U_i(x, t)\, U_i(x, t)\, \delta x$ est décroissante sur l'ensemble que constitue O et l'instant initial $t = 0$.

c) Quand t' tend vers t les fonctions $U_i(x, t')$ doivent converger faiblement en moyenne vers les fonctions $U_i(x, t)$.

Compléments:

1) Une solution turbulente correspondant à un état initial semi-régulier coïncide avec la solution semi-régulière qui correspond à cet état initial aussi longtemps que celle-ci existe.

2) Faisons tendre en croissant t vers l'extrémité T_l d'un intervalle de régularité. La solution $U_i(x, t)$, qui est régulière pour $\Theta_l < t < T_l$ devient alors irrégulière.

Ce théorème de structure nous permet de *résumer notre travail* en ces termes: Nous avons essayé d'établir l'existence d'une solution des équations de Navier correspondant à un état initial donné: nous n'y avons réussi qu'en renonçant à la régularité de la solution en certains instants, convenablement choisis, dont l'ensemble est de mesure nulle; en ces instants la solution n'est assujettie qu'à une condition de continuité très large (c) et à une condition exprimant la non-croissance de l'énergie cinétique (b).

Remarque: Si le système (3. 11) possède une solution non nulle $U_i(x)$ cette solution permet de construire un exemple très simple de solution turbulente c'est le vecteur $U_i(x, t)$ égal à

$$[2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}}\, U_i\left[[2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}} x\right] \text{ pour } t < T \text{ et à } 0 \text{ pour } t > T;$$

il existe une seule époque d'irrégularité: T.

34. *Compléments relatifs aux intervalles de régularité et à l'allure d'une solution des équations de Navier pour les grandes valeurs du temps.*

Le chapitre IV nous fournit, outre le théorème d'existence utilisé au paragraphe précédent, l'inégalité (4. 3); d'où résulte la proposition suivante: considérons une solution turbulente $U_i(x, t)$; soit une époque non singulière t et une époque T_l postérieure; nous avons:

$$J(t') > A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (T_l - t')^{-\frac{1}{4}},$$

A_1 étant une certaine constante numérique. Portons cette minorante de $J(t')$ dans l'inégalité:

$$\nu \int_0^{T_l} J^2(t')\,dt' < \frac{1}{2}\,W(0),$$

il vient:

$$2\,A_1\,\nu^{\frac{5}{2}}\,T_l^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\,W(0).$$

Toutes les époques singulières sont donc antérieures à l'époque:

$$\theta = \frac{W^2(0)}{16\,A_1^4 \nu^5}. \tag{6.4}$$

Autrement dit, il existe un intervalle de régularité qui contient cette époque θ et qui s'étend jusqu'à $+\infty$. Un mouvement régulier jusqu'à l'époque θ ne devient jamais irrégulier.

Il est aisé de préciser ce résultat:

Soit un intervalle de régularité de longueur finie $\overline{\Theta_l T_l}$; toute époque t intérieure à cet intervalle est non singulière; nous avons donc d'après (4.3):

$$J(t') > A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (T_l - t')^{-\frac{1}{4}} \text{ pour } \Theta_l < t' < T_l.$$

(cf. Second caractère des irrégularités, p. 227.)

Portons cette minorante de $J(t')$ dans l'inégalité:

$$\nu \sum_l \int_{\Theta_l T_l} J^2(t')\,dt' \leq \frac{1}{2}\,W(0);$$

il vient, le signe $\sum_l'$ portant sur tous les intervalles de longueur finie:

$$2\,A_1^2\,\nu^{\frac{5}{2}} \sum_l' \sqrt{(T_l - \Theta_l)} < \frac{1}{2}\,W(0). \tag{6.5}$$

Le chapitre IV nous donne, à côté de l'inégalité (4. 3) (4. 4). Il en résulte la propriété suivante: Considérons une solution turbulente, une époque non singulière t', une époque postérieure t. Nous avons:

$$\text{soit} \quad t - t' > A_1^4 \nu^3 J^{-4}(t'), \quad \text{soit} \quad J(t) < (1 + A) J(t')$$

c'est-à-dire:[1]

$$J(t') > \left\{ A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (t - t')^{-\frac{1}{4}}; \quad \frac{1}{1 + A} J(t) \right\}.$$

Portons cette minorante de $J(t')$ dans l'inégalité:

$$\nu \int_0^t J^2(t') \, dt' \leq \frac{1}{2} W(0);$$

nous obtenons:

$$\nu \int_0^t \left\{ A_1^2 \nu^{\frac{3}{2}} (t - t')^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{(1 + A)^2} J^2(t) \right\} dt' \leq \frac{1}{2} W(0). \tag{6.6}$$

Cette inégalité (6. 6) fournit pour les valeurs de t supérieures à θ une majorante de $J(t)$; cette majorante a d'ailleurs une expression analytique assez compliquée.

Nous nous contenterons de remarquer que de (6. 6) résulte l'inégalité moins précise:

$$\nu \int_0^t \left\{ A_1^2 \nu^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{(1 + A)^2} J^2(t) \right\} dt' \leq \frac{1}{2} W(0);$$

cette dernière exprime tout simplement que

$$J^2(t) < \frac{(1 + A)^2}{2} \frac{W(0)}{\nu t} \quad \text{pour} \quad t > \frac{W^2(0)}{4 A_1^4 \nu^5}. \tag{6.7}$$

Complétons ce résultat, qui est relatif à l'allure asymptotique de $J(t)$, par un autre relatif à l'allure asymptotique de $V(t)$: Les inégalités (4. 3) et (4. 4) nous apprennent que:

$$V(t) < A J(t') [\nu (t - t')]^{-\frac{1}{4}} \quad \text{pour} \quad t - t' < A_1^4 \nu^3 J^{-4}(t').$$

---

[1] Rappelons que le symbole $\{B; C\}$ nous sert à désigner la plus petite des quantités B et C.

D'après (6. 7) cette dernière inégalité est satisfaite pour $t' = \frac{1}{2} t$ quand on prend $t > A \frac{W^2(0)}{\nu^5}$; on a donc pour ces valeurs de t:

$$V(t) < A \sqrt{W(0)}\,(\nu t)^{-\frac{3}{4}}.$$

En résumé il existe des constantes A telles que l'on ait:

$$J(t) < A \sqrt{W(0)}\,(\nu t)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad V(t) < A \sqrt{W(0)}\,(\nu t)^{-\frac{3}{4}} \quad \text{pour} \quad t > A \frac{W^2(0)}{\nu^5}.$$

N. B. J'ignore si $W(t)$ tend nécessairement vers 0 quand t augmente indéfiniment.