[6] W. Orlicz, *Linear operations in Saks spaces, II*, to appear, in Studia Mathematica.

[7] S. Saks, *On some functionals*, Transactions of the American Math. Soc. 35 (1932), p. 549-556.

[8] — *On some functionals, II*, ibidem 41 (1937), p. 160-170.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

(Reçu par la Rédaction le 14. 10. 1952)

Sur les fonctionnelles multiplicatives

par

T. LEŻAŃSKI (Warszawa)

Introduction

Ce travail est une continuation de mon article précédent [2]. Nous y considérons un sous-espace linéaire fermé Ξ de l'espace $\overline{X}$ conjugué à un espace X du type B; un espace linéaire fermé $\mathfrak{R}$ d'opérations linéaires de Ξ à Ξ; enfin un espace linéaire $\mathfrak{M}$ de fonctionnelles linéaires dans $\mathfrak{R}$, qui satisfont à l'axiome qui était désigné dans [2] par (F). Cet axiome sera cité plus loin sous la condition (12). A toute fonctionnelle F qui appartient à $\mathfrak{M}$, nous faisons correspondre une opération T_F linéaire de Ξ à Ξ, notamment

$$T_F\varphi x \underset{df}{=} F_{\psi\varphi}\{\psi x\cdot\varphi y\} \qquad (\varphi\in\Xi,\ x\in X)$$

(voir [2], Introduction).

Nous étudions ensuite l'équation $\varphi+T_F\varphi=\psi$ $(\varphi,\psi\in\Xi)$, en faisant correspondre à l'opération $I+T_F$ un nombre $D(F)$ qu'on appelle le *déterminant* de cette équation.

En général, on ne peut pas demander que le nombre correspondant à l'équation $(I+T_{F_1})(I+T_{F_2})\varphi=\psi$ soit égal à $D(F_1)\cdot D(F_2)$, vu que la fonctionnelle F et, par conséquent, $D(F)$ ne sont pas déterminées par T_F.

Nous introduisons ici une sorte de „multiplication" des éléments de $\mathfrak{M}$, de manière que l'on ait

$$T_{(F^{(1)}\cdot F^{(2)})}=T_{F^{(1)}}\cdot T_{F^{(2)}} \quad \text{pour} \quad F^{(i)}\in\mathfrak{M} \qquad (i=1,2);$$

nous démontrerons que la fonctionnelle $D(F)$ vérifie l'équation

$$D(F^{(1)})\cdot D(F^{(2)})=D(F^{(1)}+F^{(2)}+F^{(1)}F^{(2)})$$

pour tout couple $F^{(1)},F^{(2)}$ d'éléments permutables de $\mathfrak{M}$ [1]).

I. Considérations générales

Soit $\mathfrak{A}$ un anneau du type (B), c'est-à-dire un anneau linéaire avec une norme homogène $\|A\|$ satisfaisant à l'inégalité $\|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$ pour $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{A}$; regardé comme espace linéaire, cet anneau est un es-

---

[1]) M. R. Sikorski a remplacé la condition de permutabilité d'éléments $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ par une autre, moins restrictive.

pace de Banach avec la norme $\|A\|$. Soit $\Phi(A)$ $(A\epsilon\mathfrak{A})$ une fonctionnelle linéaire fixée. Posons par définition

$$a_0(A)\equiv 1, \qquad U_1(A)=A,$$

(1) $$U_n(A)=a_{n-1}(A)\cdot A-U_{n-1}(A)\cdot A,$$

$$a_n(A)=\frac{1}{n}\Phi\big(U_n(A)\big).$$

a_n est alors une fonctionnelle homogène de degré n, continue sur $\mathfrak{A}$, U_n— une opération homogène de degré n, continue sur $\mathfrak{A}$ et à valeurs en $\mathfrak{A}$. Posons pour λ réels, $A\epsilon\mathfrak{A}$,

(2) $$D_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n a_n(A),$$

(3) $$U_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n U_{n+1}(A).$$

Les séries infinies

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda^n a_n(A)| \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda^n|\cdot\|U_{n+1}(A)\|$$

sont évidemment convergentes dans le cercle $|\lambda|<r=[\max(1,\|A\|,\|\Phi\|)]^{-1}$, car, en posant $a=1/r$, on a par induction

(4) $$\|U_n(A)\|\leqslant na^{2n-2} \qquad \text{et} \qquad |a_n(A)|\leqslant a^{2n-1}.$$

LEMME 1. *Soient* $A_i\epsilon\mathfrak{A}$ $(i=1,2)$, $A_1A_2=A_2A_1$, *et* $\|A_i\|<1/5$ $(i=1,2)$; *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(A_1+A_2+A_1A_2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}A_1^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}A_2^n.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\|A_1+A_2+A_1A_2\|\leqslant\|A_2\|+\|A_2\|+\|A_1\|\,\|A_2\|\leqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}<1.$$

On en tire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(A_1+A_2+A_1A_2)\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\|A_1\|+\|A_2\|+\|A_1\|\cdot\|A_2\|)<\infty.$$

En outre il est évident que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big\|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}A_i^n\Big\|<\infty \qquad (i=1,2).$$

Développons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(A_1+A_2+A_1A_2)$$

en une série double $\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{p,q}A_1^pA_2^q$. On a

$$\sum_{p,q=1}^{\infty}|a_{p,q}|\cdot\|A_1\|^p\cdot\|A_2\|^q<\infty$$

parce que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\|A_1\|+\|A_2\|+\|A_1\|\cdot\|A_2\|)<\infty.$$

Les coefficients $a_{p,q}$ sont respectivement égaux aux coefficients du développement de la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(s+t+st)^n$$

en série double. Mais pour des valeurs convenablement petites, par exemple pour $|s|\leqslant 1/5$, $|t|\leqslant 1/5$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(s+t+st)^n=\log(1+s+t+st)=\log(1+s)+\log(1+t)$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}\frac{1}{p}s^p+\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q-1}\frac{1}{q}t^q,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(A_1+A_2+A_1A_2)=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{p,q}A_1^pA_2^q$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}\frac{1}{p}A_1^p+\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q-1}\frac{1}{q}A_2^q,$$

c. q. f. d.

THÉORÈME 1. *Étant donnés* $A_i\epsilon\mathfrak{A}$ $(i=1,2)$ *tels que* $A_1A_2=A_2A_1$, *il existe un* $r_1>0$ *tel que* $D_\lambda(A_1)D_\lambda(A_2)=D_\lambda(A_1+A_2+\lambda A_1A_2)$ *pour* $|\lambda|\leqslant r_1$.

Démonstration. Pour $A\epsilon\mathfrak{A}$, il existe un $\varepsilon>0$ tel que $D_\lambda(A)\neq 0$ pour $|\lambda|\leqslant\varepsilon$. L'élément $B=u_\lambda(A)/D_\lambda(A)$ vérifie l'égalité $-\lambda A+\lambda B-(-\lambda A)(\lambda B)=0$. Mais pour $|\lambda|<1/\|A\|$, l'élément $C=A-\lambda A^2+\lambda^2A^3-\dots$ satisfait aussi à la condition $-\lambda A+\lambda C-\lambda C\cdot(-\lambda A)=0$. On en déduit que $B=C$ (voir [1], p. 544, th. 22). En vertu des définitions (1), (2) et (3),

$$\frac{dD_\lambda(A)}{d\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}n\lambda^{n-1}a_n(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\Phi\big(U_n(A)\big)=\Phi\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^nU_{n+1}(A)\Big)=\Phi\big(U_\lambda(A)\big)$$

pour

$$|\lambda| < r = [\max(1, \varepsilon, \|A\|, \|\Phi\|)]^{-1},$$

donc, en vertu de (4),

$$\frac{dD_\lambda(A)}{d\lambda} \cdot \frac{1}{D_\lambda(A)} = \Phi\left(\frac{U_\lambda(A)}{D_\lambda(A)}\right)$$

$$= \Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}A^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\Phi(A^n) \qquad \text{pour} \quad |\lambda| < r.$$

En intégrant cette dernière égalité terme par terme, on obtient

$$(5) \qquad \log\big(D_\lambda(A)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\lambda^n \frac{1}{n}\Phi(A^n) = \Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\lambda^n A^n\Big) \quad (|\lambda| < r).$$

La constante d'intégration est égale à zéro puisque $D_0(A) = 1$. De (5) et du lemme 1 on déduit que, pour

$$|\lambda| < \left(1, \varepsilon, \frac{1}{\|\Phi\|}, \frac{1}{5\|A_1\|}, \frac{1}{5\|A_2\|}\right),$$

on a

$$\log[D_\lambda(A_1 + A_2 + \lambda A_1 A_2)] = \Phi\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}\lambda^n (A_1 + A_2 + \lambda A_1 A_2)^n\right]$$

$$= \Phi\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\lambda^n A_1^n\right] + \Phi\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\lambda^n A_2^n\right] = \log D_\lambda(A_1) + \log D_\lambda(A_2),$$

c. q. f. d.

Introduisons les définitions suivantes: pour $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$,

$$a_{00}(A, B) = 1, \qquad a_{10}(A, B) = \Phi(A), \qquad a_{01}(A, B) = \Phi(B),$$

$$U_{p0}(A, B) = U_p(A), \qquad U_{0q}(A, B) = U_q(B) \qquad \text{pour} \quad p > 0 \text{ ou } q > 0,$$

$$(6) \qquad U_{pq}(A, B) = a_{p-1,q}(A, B)A - U_{p-1,q}(A, B)A$$

$$+ a_{p,q-1}(A, B)B - U_{p,q-1}(A, B)B \qquad \text{pour} \quad p > 0,\ q > 0,$$

$$a_{pq}(A, B) = \frac{1}{p+q}\Phi\big(U_{pq}(A, B)\big) \qquad \text{pour} \quad p + q > 0.$$

a_{pq} est une fonctionnelle continue sur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, homogène, respectivement de degré p, q par rapport à A et B; U_{pq} — une opération continue sur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, à valeurs en $\mathfrak{A}$, homogène, respectivement de degré p, q par rapport à A et B.

On prouve par induction les égalités

$$(7) \qquad \begin{aligned} U_n(A+B) &= \sum_{p=0}^{n} U_{p,n-p}(A, B), \\ a_n(A+B) &= \sum_{p=0}^{n} a_{p,n-p}(A, B) \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

ainsi que les inégalités

$$(8) \qquad \begin{aligned} \|U_{pq}(A, B)\| &\leqslant (p+q)2^{p+q}c^{2(p+q)-2}, \\ |a_{pq}(A, B)| &\leqslant 2^{p+q}c^{2(p+q)-1}, \end{aligned}$$

c étant égal à $\max(1, \|\Phi\|, \|A\|, \|B\|)$.

THÉORÈME 2. *Soient* $A_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2)$, $A_1 A_2 = A_2 A_1$. *Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(A_i)| < \infty \qquad (i = 1, 2),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|a_{p,n-p}(A_1 + A_2 + A_1 A_2)| < \infty,$$

alors $D_1(A_1 + A_2 + A_1 A_2) = D_1(A_1)\, D_1(A_2)$.

Démonstration[2]. En vertu de la supposition et de (7), $D_\lambda(A_1)$, $D_\lambda(A_2)$, $D_\lambda(A_1 + A_2 + \lambda A_1 A_2)$ sont des fonctions holomorphes de la variable λ dans le cercle $|\lambda| < 1$. En outre, les séries qui définissent ces fonctions sont convergentes pour $\lambda = 1$.

Du théorème 1 on déduit l'égalité $D_\lambda(A_1)D_\lambda(A_2) = D_\lambda(A_1 + A_2 + \lambda A_1 A_2)$ pour un entourage $|\lambda| < \varepsilon$ du point zéro, donc pour le cercle entier $|\lambda| < 1$, et, en vertu du théorème d'Abel, pour $|\lambda| = 1$, c. q. f. d.

Le problème suivant s'impose: quelle est la forme générale de la fonctionnelle $D(A)$ satisfaisante à l'égalité $D(A) \cdot D(B) = D(A + B + AB)$, A et B étant des éléments permutables de $\mathfrak{A}$, contenus dans un certain entourage de l'origine? Une réponse partielle est donnée par le théorème 3.

Soient $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ des fonctionnelles continues dans $\mathfrak{A}$, homogènes respectivement de degré $0, 1, \ldots$ On suppose $\Phi_0(A) \equiv 1$, $\Phi_1 = \Phi$ (voir le début de la première partie de ce travail).

THÉORÈME 3. *Supposons qu'il existe un* $\delta > 0$ *tel que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(A)$$

[2]) Cette démonstration ainsi que celle du théorème 3 est due à R. Sikorski.

soit absolument convergente, uniformément dans la sphère $\|A\|<\delta$, *et que l'équation*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(A)\Big)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(2A+A^2)$$

ait lieu pour tout $A\epsilon\mathfrak{A}$ *tel que* $\|A\|<\delta$ *et* $\|2A+A^2\|\leqslant\delta$.

Alors $\Phi_n(A)=a_n(A)$ $(A\epsilon\mathfrak{A}, n=0,1,\ldots)$.

Démonstration. Soient $\Phi_{pq}(A,B)$ $(A\epsilon\mathfrak{A}, B\epsilon\mathfrak{A}, p,q=0,1,\ldots)$ des fonctionnelles homogènes, respectivement de degré p,q par rapport à A et B, qui satisfont aux équations

$$\Phi_n(A+B)=\sum_{p=0}^{n}\Phi_{p,n-p}(A,B)\qquad(n=0,1,\ldots, A\epsilon\mathfrak{A}, B\epsilon\mathfrak{A}).$$

Établissons d'abord les équations

(9) $$\sum_{k=0}^{n}\Phi_{2n-2k,k}(2A,A^2)=\sum_{i=0}^{2}\Phi_i(A)\Phi_{2n-i}(A),$$

(10) $$\sum_{k=0}^{n}\Phi_{2n-2k+1,k}(2A,A^2)=\sum_{i=0}^{2n+1}\Phi_i(A)\Phi_{2n-i+1}(A).$$

Soit $A\epsilon\mathfrak{A}$ fixé. Pour $|\lambda|\leqslant\varepsilon$, où ε est un nombre positif, convenablement petit, on a

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Phi_n(A)\Big)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(2\lambda A+\lambda^2A^2);$$

la somme à droite est une série de polynômes uniformément convergente vers une fonction $f(\lambda)$ holomorphe dans le cercle $|\lambda|<\varepsilon$; le coefficient de λ^n de la fonction $f(\lambda)$ est alors égal à la somme des coefficients correspondants dans les polynômes $\Phi_p(2\lambda A+\lambda^2A^2)$.

En comparant les sommes mentionnées aux coefficients du développement de Taylor de la fonction

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\Phi_k(A)\Big)^2,$$

on parvient aux équations (9) et (10).

Passons à la démonstration des équations

$$\Phi_n(A)=a_n(A)\qquad(A\epsilon\mathfrak{A}, n=0,1,\ldots).$$

Il a été supposé que $\Phi_0(A)=a_0(A)$, $\Phi_1(A)=a_1(A)$ $(A\epsilon\mathfrak{A})$. Supposons maintenant que les égalités $\Phi_n(A)=a_n(A)$ soient démontrées pour $n=0,1,\ldots,2r-1$.

De l'équation (9) il résulte

$$\Phi_{2r,0}(2A,A)-\Phi_0(A)\Phi_{2r}(A)-\Phi_{2r}(A)\Phi(A)$$
$$=\sum_{i=1}^{2r-1}\Phi_i(A)\Phi_{2r-i}(A)-\sum_{k=1}^{r}\Phi_{2r-2k,k}(2A,A^2).$$

Mais $\Phi_0(A)=1$, $\Phi_{2r,0}(2A,A^2)=\Phi_{2r}(2A)=2^{2r}\Phi_{2r}(A)$; en outre, $\Phi_n(A)=a_n(A)$ $(n=0,1,\ldots,2r-1)$, ce qui entraîne $\Phi_{p,n-p}(A,B)=a_{p,n-p}(A,B)$ $(A\epsilon\mathfrak{A}, B\epsilon\mathfrak{A}, p=0,1,\ldots,n, n=0,1,\ldots,2r-1)$ et, par conséquent,

$$(2^{2r}-2)\Phi_{2r}(A)=\sum_{i=1}^{2r-1}a_i(A)a_{2r-i}(A)-\sum_{k=1}^{r}a_{2r-2k,k}(2A,A^2)=(2^{2r}-2)a_{2r}(A),$$

en vertu de l'équation (9).

Pour les indices impairs, la démonstration est analogue et se base sur l'équation (10).

II. Application

Ci-dessous, nous donnons une application des considérations précédentes à la théorie des équations linéaires dans les espaces du type (B) (voir [2]; les notations employées ici sont conformes à celles de [2]).

Soient: X — un espace du type (B), Ξ — un sous-espace linéaire fermé de $\bar{X}$, $\mathfrak{K}$ — un espace linéaire fermé de transformations linéaires de Ξ à Ξ, qui satisfait aux conditions suivantes:

1° si $\varphi_0\epsilon\Xi$, $x_0\epsilon X$, $K\epsilon\mathfrak{K}$, $M\psi=K\psi x_0\cdot\varphi_0$ pour $\psi\epsilon\Xi$, alors $M\epsilon\mathfrak{K}$;

2° l'opération I, identique sur Ξ, appartient à $\mathfrak{K}$;

3° si $K_i\epsilon\mathfrak{K}$ $(i=1,2)$, alors $K_1K_2\epsilon\mathfrak{K}$.

Considérons une fonctionnelle F linéaire sur $\mathfrak{K}$. Pour $K\epsilon\mathfrak{K}$, on entend par $F_{\psi y}\{K\psi y\}$ le nombre $F(K)$. A toute fonctionnelle F linéaire sur $\mathfrak{K}$ faisons correspondre une opération linéaire T_F de Ξ à $\bar{X}$, à savoir

(11) $$T_F\varphi x\underset{df}{=}F_{\psi y}\{\psi x\cdot\varphi y\}.$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles T linéaires sur $\mathfrak{K}$, qui satisfont aux conditions:

1° T_F est une opération linéaire de Ξ à Ξ;

2° pour $K\epsilon\mathfrak{K}$, $\varphi_0\epsilon\Xi$, $x_0\epsilon X$, on a

(12) $$F_{\psi y}\{K\psi x_0\cdot\varphi_0 y\}=KT_F\varphi_0x_0.$$

On déduit de (12)

(13) $$F_{\psi y}\{K_1\psi x\cdot K_2\varphi y\}=K_1T_FK_2\varphi x$$

(pour la démonstration voir [2], p. 246).

Il est facile de démontrer que $\mathfrak{M}$ est un espace du type (B).

Introduisons une sorte de „multiplication” des fonctionnelles linéaires sur $\mathfrak{K}$; $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ étant linéaires sur $\mathfrak{K}$, on définit

(14) $$(F^{(1)}F^{(2)})(K) \underset{df}{=} F^{(2)}(KT_{F^{(1)}}).$$

Pour $F^{(i)} \epsilon \mathfrak{M}$ $(i=1,2)$, $F^{(1)}F^{(2)}$ appartient aussi à $\mathfrak{M}$. En effet,

$$T_{(F^{(1)}F^{(2)})} = (F^{(1)}F^{(2)})_{\psi y}\{\psi x \cdot \varphi y\} = F^{(2)}_{\psi y}\{T_{F^{(1)}}\psi x \cdot \varphi y\} = T_{F^{(1)}}\, T_{F^{(2)}};$$

$T_{F^{(1)}}$ et $T_{F^{(2)}}$ étant des opérations linéaires de Ξ à Ξ, $T_{F^{(1)}}T_{F^{(2)}}$ l'est aussi.

Il a été démontré en même temps que $T_{(F^{(1)}F^{(2)})} = T_{F^{(1)}}T_{F^{(2)}}$ pour $F^{(i)} \epsilon \mathfrak{M}$ $(i=1,2)$.

La multiplication $F^{(1)}F^{(2)}$ est associative:

$$\big((F^{(1)}F^{(2)})F^{(3)}\big)(K) = F^{3}(KT_{F^{(1)}F^{(2)}}) = F^{(3)}(KT_{F^{(1)}}T_{F^{2}})$$
$$= (F^{(2)}F^{(3)})(KT_{F^{(1)}}) = \big(F^{(1)}(F^{(2)}F^{(3)})\big)(K).$$

L'espace $\mathfrak{M}$ est ainsi un anneau du type (B) parce que

$$|F^{(1)}F^{(2)}(K)| = |F^{(2)}(KT_{F^{(1)}})| \leqslant \|F^{(2)}\| \cdot \|K\| \cdot \|T_{F^{(1)}}\| \leqslant \|F^{(2)}\| \cdot \|F^{(1)}\| \cdot \|K\|,$$

puisque $\|T_F\| \leqslant \|F\|$ (voir [2], p. 245, condition (i)).

Démontrons maintenant quelques égalités:

(15) $$F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{F^{(2)}_{\psi_2 y_2}\{K_1\psi_1 x \cdot K_2\varphi_2 y_1 \cdot K_3\varphi y_2\}\}$$
$$= F^{(2)}_{\psi_2 y_2}\{F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{K_1\psi_1 x \cdot K_2\psi_2 y_1 \cdot K_3\varphi y_2\}\}.$$

En effet, les deux membres sont égaux à $K_1T_{F^{(1)}}K_2T_{F^{(2)}}K_3\varphi x$.

Si $F^{(1)}F^{(2)} = F^{(2)}F^{(1)}$ et $T_{F^{(1)}}K_i = K_iT_{F^{(1)}}$ $(i=1,2)$, l'égalité suivante a lieu:

(16) $$F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{F^{(2)}_{\psi_2 y_2}\{K_1\psi_1 y_2 \cdot K_2\psi_2 y_1\}\} = F^{(2)}_{\psi_2 y_2}\{F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{K_1\psi_1 y_2 \cdot K_2\psi_2 y_1\}\}.$$

En effet,

$$F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{F^{(2)}_{\psi_2 y_2}\{K_1\psi_1 y_2 \cdot K_2\psi_2 y_1\}\} = F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{K_2T_{F^{(2)}}K_1\psi_1 y_1\}$$
$$= F^{(1)}(K_1T_{F^{(2)}}K_2) = F^{(1)}(K_2K_1T_{F^{(2)}}) = (F^{(2)}F^{(1)})(K_2K_1) = F^{(2)}(K_2K_1T_{F^{(1)}})$$
$$= F^{(2)}(K_2T_{F^{(1)}}K_1) = F^{(2)}_{\psi_2 y_2}\{F^{(1)}_{\psi_1 y_1}\{K_1\psi_1 y_2 \cdot K_2\psi_2 y_1\}\}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Pour $F \epsilon \mathfrak{M}$, posons par définition

(17) $$\Phi(F) = F(I), \qquad a_0(F) = 1, \qquad U_1(F) = F,$$
$$U_n(F) = a_{n-1}(F)\,F - U_{n-1}(F)\,F, \qquad a_n(F) = \frac{1}{n}\,\Phi\big(U_n(F)\big).$$

a_n est une fonctionnelle continue sur $\mathfrak{M}$, homogène de degré n; U_n est une opération continue de $\mathfrak{M}$ à $\mathfrak{M}$, homogène de degré n.

Conformément aux définitions de [2], on entend par

$$I\begin{pmatrix}\varphi_1, \ldots, \varphi_n\\ x_1, \ldots, x_n\end{pmatrix}$$

la valeur du déterminant $|\varphi_i\, x_k|$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$.

Démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME 4.

$$a_n(F) = \frac{1}{n!}\,F_{\psi_1 y_1}\Big\{F_{\psi_2 y_2}\ldots\Big\{F_{\psi_n y_n}\Big\{I\begin{pmatrix}\psi_1, \ldots, \psi_n\\ y_1, \ldots, y_n\end{pmatrix}\Big\}\Big\}\ldots\Big\}.$$

(Dans ce qui suit, nous ommettrons les parenthèses { } entre les F)

Démonstration. 1° $a_1(F) \underset{df}{=} \Phi(F) \underset{df}{=} F(I) \underset{df}{=} F_{\psi_1 y_1}\Big\{I\begin{pmatrix}\psi_1\\ y_1\end{pmatrix}\Big\}$.

2° Supposons

$$a_k(F) = \frac{1}{k!}\,F_{\psi_1 y_1}\ldots F_{\psi_k y_k}\Big\{I\begin{pmatrix}\psi_1, \ldots, \psi_k\\ y_1, \ldots, y_k\end{pmatrix}\Big\} \quad (k=1,\ldots,m-1),$$

et posons

$$T_1 \underset{df}{=} T_F, \quad T_p \underset{df}{=} a_{p-1}(F)\cdot T_F - T_{p-1}\cdot T_F \quad (p=1,2,\ldots,n-1).$$

Nous démontrerons que $T_k = T_{u_k(F)}$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$. La proposition est vraie pour $k=1$ puisque $T_1 = T_F = T_{u_1(F)}$. Supposons qu'elle le soit pour $k=1,2,\ldots,q$, $q<n-1$, et posons $M\psi y = \psi x \cdot \varphi y$ pour φ et x fixés. On a

$$T_{Uq(F)}\,\varphi x = \big(U_q(F)\big)(M) = a_{q-1}(F)\,F(M) - F(MT_{q-1})$$
$$= a_{q-1}(F)\,F(M) - F\big(M\cdot T_{Uq-1}(F)\big) = a_{q-1}(F)\,F(M) - F(MT_{q-1})$$
$$= a_{q-1}(F)\,T_1\varphi x - F\psi y\,\{T_{q-1}\psi x\,\varphi y\} = a_{q-1}(F)\,T_1\varphi x - T_{q-1}\,T_1\varphi x = T_q\varphi x,$$

c. q. f. d.

On sait (voir [2]), que si

1° $\quad a_q = \dfrac{1}{q!}\,F_{\psi_1 y_1}\ldots F_{\psi_q y_q}\Big\{I\begin{pmatrix}\psi_1, \ldots, \psi_2\\ y_1, \ldots, y_2\end{pmatrix}\Big\}$,

2° $\quad T_1\varphi_x = F_{\psi y}\{\psi x \cdot \varphi y\}$,

3° $\quad T'_q = a_{q-1}\,T_1 - T_{q-1}\,T_1 \quad (q=1,2,\ldots,n-1)$, alors

$$T_q\varphi x=\frac{1}{(q-1)!}F_{\psi y}\left\{\psi x\cdot F_{\psi_1y_1}\dots F_{\psi_{q-1}y_{q-1}}\left\{I\begin{pmatrix}\psi,\psi_1,\dots,\psi_{q-1}\\ y,y_1,\dots,y_{q-1}\end{pmatrix}\right\}\right\}\quad(q=1,\dots,n-1).$$

Dans l'expression

$$F_{\psi_1y_1}\dots F_{\psi_ny_n}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix}\right\},$$

développons le déterminant

$$I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix}$$

suivant la première colonne. En tenant compte de ce que la valeur de

$$F_{\psi_1y_1}\dots F_{\psi_py_p}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_p\\ y_1,\dots,y_p\end{pmatrix}\right\}$$

ne dépend pas de l'ordre des $F_{\psi_iy_i}$, on a, en vertu de la propriété établie de T_q,

$$\begin{aligned}F_{\psi_1y_1}\dots F_{\psi_ny_n}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix}\right\}&=F_{\psi_1y_1}\{\psi_1y_1\}\cdot F_{\psi_2y_2}\dots F_{\psi_ny_n}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_2,\dots,\psi_n\\ y_2,\dots,y_n\end{pmatrix}\right\}\\ &+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}F_{\psi_1y_1}F_{\psi_iy_i}\{\psi_1y_i\}F_{\psi_2y_2}\dots F_{\psi_{i-1}y_{i-1}}F_{\psi_{i+1}y_{i+1}}\dots F_{\psi_ny_n}\\ &\qquad\times\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_{i-1},\psi_{i+1},\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n\end{pmatrix}\right\}\\ &=(n-1)!\,F(I)\;\alpha_{n-1}(F)-(n-1)\,F_{\psi_1y_1}F_{\psi y}\{\psi y_1\}\cdot F_{\psi_2y_2}\dots F_{\psi_{n-1}y_{n-1}}\\ &\qquad\times\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}\\ y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\end{pmatrix}\right\}\\ &=(n-1)!\,\alpha_{n-1}(F)\cdot F(I)-(n-1)(n-2)!\,F_{\psi_1y_1}\{T_{n-1}\psi_1y_1\}\\ &=(n-1)!\,[\alpha_{n-1}(F)\,\Phi(F)-(U_{n-1}(F)\cdot F)(I)]\\ &=(n-1)!\,\Phi\big(\alpha_{n-1}(F)\cdot F-U_{n-1}(F)\cdot F\big)=n!\,\alpha_n(F),\end{aligned}$$

c. q. f. d.

Si les éléments $F^{(1)},\dots,F^{(n)}$ de $\mathfrak{M}$ sont permutables, la fonctionnelle

$$\alpha_n^*(F^{(1)},\dots,F^{(n)})\underset{df}{=}\frac{1}{n!}F_{\psi_1y_1}\dots F_{\psi_ny_n}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix}\right\}$$

est symétrique (la démonstration est analogue à celle du lemme (iii) ([2], p. (246)), et s'appuie sur (15) et (16)).

Du théorème 4, on déduit que, pour $F^{(1)},F^{(2)}$ permutables, on a

$$\alpha_{p,n-p}(F^{(1)},F^{(2)})=\binom{n}{p}\alpha_p^*(\underbrace{F^{(1)},\dots,F^{(1)}}_{p\text{ termes}},\underbrace{F^{(2)},\dots,F^{(2)}}_{n-p\text{ termes}})$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}|\alpha_{p,n-p}(F^{(1)},F^{(2)})|&=\frac{1}{n!}\left|F^{(1)}_{\psi_1y_1}\dots F^{(1)}_{\psi_py_p}F^{(2)}_{\psi_{p+1}y_{p+1}}\dots F^{(2)}_{\psi_ny_n}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix}\right\}\right|\\ &\leqslant\frac{1}{n!}\binom{n}{p}\|F^{(1)}\|^p\,\|F^{(2)}\|^{n-p}n^{n/2}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}|\alpha_{p,n-p}(F^{(1)},F^{(2)})|<\infty$$

pour $F^{(1)},F^{(2)}$ permutables, ce qui donne, en vertu du théorème 4, le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *La fonctionnelle*

$$D(F)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}F_{\psi_1y_1}\dots F_{\psi_ny_n}\left\{I\begin{pmatrix}\psi_1,\dots,\psi_n\\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix}\right\},$$

c'est-à-dire le déterminant de l'équation $\varphi_x+F_{\psi y}\{\psi x\cdot\varphi y\}=\psi_0x$ $(x\in X)$ *(voir* [2]*) satisfait à l'équation*

$$D(F^{(1)})\,D(F^{(2)})=D(F^{(1)}+F^{(2)}+F^{(1)}F^{(2)}),$$

pour tout couple $F^{(1)},F^{(2)}$ *d'éléments permutables de* $\mathfrak{M}$.

Remarque. Dans mon article [2], dont le présent est une continuation, la dernière phrase a été mal rédigée. Voici sa teneur adéquate:

"I am indebted to Prof. S. Mazur for having suggested this problem to me. I am greatly obliged to Prof. R. Sikorski for valuable advices, for complete preparation of this paper, for giving of several proofs and correction of others".

Publications citées

[1] E. Hill, *Functional analysis and semigroups*, New York 1948.

[2] T. Leżański, *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 244-276.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

(Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1953)