Sur les fonctions indépendantes (X)

(Equipartition de molécules dans un récipient cubique)

par

H. STEINHAUS (Wrocław).

Nous reprenons ici les idées d'une autre note[1]) de la même série, que nous appellerons Comm. VII et qui avait pour objet le mouvement du centroïde d'un essaim de points matériels enfermés dans un récipient cubique, et réfléchis par les parois de ce récipient suivant la loi classique, les forces extérieures étant nulles. La Comm. VII fait appel à la Comm. IV[2]), où l'on trouve les notions et les théorèmes servant de base pour la théorie des fonctions indépendantes dans un intervalle infini.

L'objet de la Note présente est l'équipartition des molécules dans le modèle de la Comm. VII. Nous entendons par là le fait que le nombre de molécules qui se trouvent dans une partie du récipient fixée d'avance est proportionnel au volume de cette partie. Cet énoncé est capable d'une forme rigoureuse: le temps relatif pendant lequel le nombre relatif de molécules s'écarte du volume relatif plus que de ω, ω étant un nombre positif fixé arbitrairement, peut être rendu aussi petit que l'on veut en augmentant le nombre de molécules n. D'autre part, pour un n fixé, les écarts en question suivent la distribution normale de Gauss-Laplace, qui apparaît ici de la même manière que dans le calcul des probabilités, c'est-à-dire comme une approximation de la distribution binomiale.

Le calcul des probabilités au sens propre n'intervient pas dans les raisonnements, mais on emploie des formules que l'on classifie

[1]) H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (VII)*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 1-20.

[2]) M. Kac et H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (IV)*, Studia Mathematica 7 (1938), p. 1-15.

d'habitude comme appartenant à cette doctrine. Comme le modèle étudié ici est celui de la Comm. VII, donc un modèle parfaitement déterministe, on y peut prévoir la situation exacte d'une molécule quelconque à un moment futur quelconque en nommant le numéro de cette molécule, et ce moment. On voit donc que l'hypothèse du chaos initial ainsi que celle du chaos final est tout-à-fait superflue pour la déduction du mouvement du centroïde.

D'autre part, comme dans la Comm. VII, on voit que les conditions initiales assurant l'équipartition (les mêmes qui assuraient alors la loi des écarts du centroïde) sont réalisées presque toujours: l'ensemble des points de l'espace positions-vitesses qui, pris comme positions et vitesses initiales du système, n'engendrent pas l'équipartition au sens expliqué tout à l'heure est de mesure nulle.

On peut donner une interprétation probabiliste des résultats en considérant comme probabilité d'un état le temps relatif pendant lequel cet état est réalisé, ou bien en établissant une mesure dans l'espace de tous les états possibles du système. Le premier point de vue (celui de *Zeitgesammtheit*) envisage un modèle déterminé, par exemple celui de la Note. Il conduit à l'énoncé que la probabilité de rencontrer dans ce modèle, à n'importe quel instant, une distribution des molécules qui s'écarte de l'équidistribution de plus que ω, est très petite: elle décroît très vite lorsqu'on augmente le nombre de molécules. Le second point de vue (celui de *Raumgesammtheit*) porte sur l'ensemble de tous les états initiaux: il montre que la probabilité de rencontrer un état initial mettant en défaut l'énoncé de tout à l'heure est nulle. Ainsi le second point de vue peut être invoqué en faveur du premier par le physicien, sans toutefois nier l'existence de modèles exceptionnels, qui est mathématiquement évidente.

Avant que la Note présente eut été conçue, la Rédaction des Studia Mathematica a reçu un manuscrit de MM. E. Egerváry et P. Turán[3]). Ces auteurs ont lu la Comm. VII et se sont posé le problème d'un modèle déterministe jouissant de l'équipartition, comme le modèle déterministe de la Comm. VII jouit de la stabilité du centroïde. Ils ont réussi à résoudre ce problème par des moyens très ingénieux, sans suivre la voie de la Comm. VII. Ayant pris connaissance de leurs résultats, nous nous sommes proposé d'établir la propriété d'équipartition pour le modèle de la Comm. VII, en restant dans le cadre de la théorie des fonctions indépendantes. Or, notre définition de l'équipartition et les résultats que nous présentons ici sont essentiellement différents de ce qui a été obtenu par les mathématiciens hongrois; on trouve au § 4 quelques remarques relatives à cette différence.

On ne trouve guère dans notre Note des difficultès analytiques. Nous avons résumé au § 1 toutes les notions et tous les principes nécessaires pour la suite. Les définitions et lemmes dispensent le lecteur de lire les Notes précédentes de la série, sauf les passages explicitement indiqués. Nous avons évité l'emploi de la théorie des fonctions presque périodiques, ayant reconnu que la démonstration directe de quelques propriétés des fonctions bien simples qui constituent notre modèle est plus facile que la récapitulation des définitions et théorèmes de cette théorie. Le § 2 tire parti du § 1 pour en déduire facilement la distribution binomiale; pour des calculs numériques, on se sert de l'approximation classique par l'intégrale de Laplace — nous avons emprunté à l'excellent manuel de M. Uspensky[4]) une estimation rigoureuse de cette approximation. Le § 3 est consacré à une question à part: quand on affaiblit l'hypothèse de l'indépendance des vitesses initiales en la supposant satisfaite seulement pour chaque couple de molécules, on obtient une thèse plus faible — si le résultat du § 2 pouvait porter le nom de Laplace, celui du § 3 devrait avoir le nom de Tchebycheff. Le § 4 est une discussion des résultats. Il résume, entre autres, les avantages et désavantages respectifs de deux points de vue: celui de MM. Egerváry et Turán d'une part et celui de la Note présente d'autre. On y indique aussi quelle serait la solution du problème répondant aux besoins de la physique.

§ 1. Notations, définitions et lemmes.

Préliminaires. Nous aurons à faire dans la suite aux ensembles linéaires situés sur la demidroite du temps $0 \leqslant t < \infty$. On appelle un tel ensemble E *mesurable* (tout court), si l'ensemble

[3]) E. Egerváry and P. Turán, *On a certain point of the kinetic theory of gases*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 170-180. La version hongroise du même travail contient des estimations plus rapprochées de la réalité.

[4]) J. V. Uspensky, *Introduction to mathematical probability*, McGraw-Hill Book Co., New York and London, 1937.

$\big((a,b)\cdot E\big)$ est mesurable (L) quel que soit l'intervalle fini (a,b). Si E est mesurable et borné, on désigne sa mesure de Lebesgue par $|E|$. On désigne par CE l'ensemble complémentaire à E par rapport à la demidroite $\langle 0,\infty)$. On appelle *fonction caractéristique* d'un ensemble E la fonction $f(t)$ qui prend la valeur 1 pour $t\in E$ et la valeur 0 pour $t\in CE$. On dit qu'une *fonction* $f(t)$ définie dans $\langle 0,\infty)$ est *périodique* et que σ est sa *période*, s'il existe un nombre positif σ tel que $f(t+\sigma)=f(t)$ pour chaque t appartenant à $\langle 0,\infty)$. On dit qu'un *ensemble* E est *périodique* et que σ est sa *période*, si la fonction caractéristique de E est périodique avec la période σ. On appelle *intervalle* (tout court) tout intervalle $\langle a,b\rangle$, $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$, (a,b) avec a et b finis et $a<b$, ou bien un intervalle de type $\langle a,a\rangle$, $\langle a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,a\rangle$, $(-\infty,a)$, a étant fini, ou finalement l'intervalle $(-\infty,\infty)$.

Définition 1. Soit E un ensemble mesurable. On appelle *mesure* R (mesure relative) de E et l'on désigne par $|E|_R$ l'expression

$$\lim_{0<T\to\infty}\frac{1}{T}\,|E\cdot\langle 0,T\rangle|, \tag{1}$$

si la limite (1) existe. On dit alors que E est *mesurable* R (relativement mesurable).

Définition 2. On dit que les *ensembles* mesurables E_j $(j=1,2,\ldots,m)$ sont *indépendants*, si tous les produits $G_1G_2\ldots G_m$ obtenus en substituant pour chaque G_j $(j=1,2,\ldots,m)$ E_j, CE_j ou $\langle 0,\infty)$ sont mesurables et si

$$\Big|\prod_{j=1}^{m}G_j\Big|_R=\prod_{j=1}^{m}|G_j|_R, \tag{2}$$

l'existence de mesures relatives intervenant dans (2) étant présupposée dans cette définition.

Définition 3. Une *fonction* $f(t)$ définie pour $0\leqslant t<\infty$ est dite *mesurable* (tout court) si les ensembles

$$\underset{t}{E}\{f(t)\in I\}, \tag{3}$$

obtenus en prenant pour I un intervalle quelconque, sont tous mesurables.

Définition 4. On appelle une *fonction* $f(t)$, définie pour $0\leqslant t<\infty$ et mesurable, *mesurable* R (relativement mesurable) si tous les ensembles (3), obtenus comme tout à l'heure, sont mesurables R.

Définition 5. On dit que les *fonctions* $f_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, définies pour $0\leqslant t<\infty$ et mesurables, sont *indépendantes*, si les ensembles

$$\underset{t}{E}\{f_j(t)\in I_j\} \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{4}$$

obtenus en prenant pour I_j $(j=1,2,\ldots,m)$ m intervalles quelconques, sont indépendants.

Définition 6. Les *nombres* réels ϱ_j $(j=1,2,\ldots,m)$ sont dits *arithmétiquement indépendants* (ou *indépendants* tout court), si l'équation

$$\sum_{j=1}^{m}c_j\varrho_j=0,$$

aux coefficients c_j entiers, n'a lieu que pour $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$.

Définition 7. On appelle *distributrice* de la fonction relativement mesurable $f(t)$ la fonction

$$F(a)=|\underset{t}{E}\{f(t)<a\}|_R \qquad (-\infty<a<\infty).$$

Définition 8. On appelle *moyenne* R de la fonction relativement mesurable $f(t)$ l'intégrale de Riemann-Stieltjes

$$M_R(f)=\int_{-\infty}^{\infty}a\,dF(a), \tag{5}$$

$F(a)$ étant la distributrice de $f(t)$, en supposant l'existence de l'intégrale (5).

Définition 9. On appelle *moyenne* B de la fonction mesurable $f(t)$, définie dans $\langle 0,\infty)$, l'expression

$$M_B(f)=\lim_{0<T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \tag{6}$$

en supposant l'existence de la limite (6).

Lemme 1. *La somme des ensembles E_j $(j=1,2,\ldots,m)$, disjoints et mesurables R, est aussi mesurable R et*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} E_j\right|_R = \sum_{j=1}^{m} |E_j|_R. \tag{7}$$

Lemme 2. *Si l'ensemble A est mesurable R et contient un autre ensemble B qui est aussi mesurable R, l'ensemble $A-B$ est mesurable R et*

$$|A-B|_R = |A|_R - |B|_R. \tag{8}$$

En particulier, l'ensemble complémentaire CE d'un ensemble E mesurable R est lui-même mesurable R, et l'on a

$$|CE|_R = 1 - |E|_R.$$

Lemme 3. *Les fonctions caractéristiques des ensembles mesurables R sont mesurables R.*

Lemme 4. *Les fonctions caractéristiques des ensembles indépendants sont indépendantes.*

Lemme 5. *Si les ensembles E_j $(j=1,2,\ldots)$ sont indépendants, leurs produits G_k $(k=1,2,\ldots,m)$, où*

$$G_k = E_{k_1} E_{k_2} \ldots E_{k_{r(k)}},$$

le sont aussi, pourvu que l'on ait $k_h \neq k'_i$ pour $k \neq k'$ $(k,k'=1,2,\ldots,m)$, quels que soient h et i $(h=1,2,\ldots,r(k);\ i=1,2,\ldots,r(k'))$.

Lemme 6. *Les $3n$ fonctions de t,*

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \frac{2}{\pi}\arcsin\left(-\cos\pi\lambda_k(t-\tau'_k)\right), \\ y_k(t) &= \frac{2}{\pi}\arcsin\left(-\cos\pi\mu_k(t-\tau''_k)\right), \\ z_k(t) &= \frac{2}{\pi}\arcsin\left(-\cos\pi\nu_k(t-\tau'''_k)\right), \end{aligned} \tag{9}$$

où $k=1,2,\ldots,m$, $0 \leqslant t < \infty$ et $|\arcsin\tau| \leqslant \pi/2$ pour tout τ réel, sont indépendantes, si les $3n$ nombres λ_k, μ_k, ν_k $(k=1,2,\ldots,n)$ sont arithmétiquement indépendants (quels que soient les $3n$ nombres τ intervenant dans les formules (9)).

Lemme 7. *$f(t)$ étant une fonction bornée et mesurable R, ses moyennes R et B existent toutes les deux et sont égales:*

$$M_B(f) = M_R(f). \tag{10}$$

Lemme 8. *Si chaque fonction $f_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ a une moyenne B, leur somme en a une aussi, et*

$$M_B\Big(\sum_{j=1}^{m} f_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} M_B(f_j). \tag{11}$$

Lemme 9. *Si les fonctions $f_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ sont bornées, mesurables R et indépendantes, alors*

$$M_B\Big(\prod_{j=1}^{m} f_j\Big) = \prod_{j=1}^{m} M_B(f_j); \tag{12}$$

l'existence des moyennes B intervenant dans (12) *fait partie de la thèse.*

Démonstrations des lemmes. Les lemmes 1 et 2 résultent immédiament de la définition 1. Le lemme 3 résulte des définitions 1, 3, et 4, le lemme 4 des définitions 1-5. Le lemme 5 est une conséquence immédiate de la définition 2.

Le lemme 6 a été démontré dans la Comm. VII (§ 2, (17)) pour les n fonctions $x_k(t)$, en supposant l'indépendance artihmétique des λ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ [5]; son extension pour les $3n$ fonctions (9), en supposant l'indépendance de $3n$ nombres λ_k, μ_k, ν_k $(k=1,2,\ldots,n)$, est évidente. Or, une mise au point est nécessaire: la définition de l'indépendance des fonctions adoptée ici exige que les ensembles E_j, introduits par (4) dans le texte de la définition 5, soient indépendants au sens de la définition 2, tandis que la Comm. VII (loc. cit.) ne demande que la formule (2) avec $G_j = E_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$. Il faut donc montrer que la formule (2), admise pour $G_j = E_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$, implique la validité de cette formule au sens de la définition 2. Or, en prenant pour I_j l'intervalle $(-\infty,\infty)$, (4) fournit, pour E_j, l'intervalle $\langle 0,\infty)$; la substitution de $\langle 0,\infty)$ pour un G_j quelconque dans (2) a été donc permise déjà par la définition de la Comm. VII. Quant à la substitution $G_j = CE_j$, on l'obtient de la formule

$$\left|\prod_{j=1}^{m} E_j\right|_R = \prod_{j=1}^{m} |E_j|_R,$$

en tirant parti du lemme 2.

[5]) Cf. aussi F. Wecken, *Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen*, Mathematische Zeitschrift 45 (1939), p. 377-404, surtout p. 402.

Le lemme 7 est le théorème 2 de la Comm. VII, qui renvoie pour sa démonstration à la Comm. IV, p. 3. Le lemme 8 résulte facilement de la définition 9. Le lemme 9 figure dans la démonstration du théorème 5 de la Comm. VII (§ 1, (15)), qui renvoie pour sa démonstration à la Comm. IV (p. 5-7, th. 1). Ainsi tous les lemmes sont à vérifier presque immédiatement ou bien à emprunter aux résultats acquis dans la Comm. IV et la Comm. VII de la même série.

§ 2. L'équipartition des points matériels enfermés dans un récipient cubique.

Soit V le cube $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$. Nous désignons le volume de V aussi par V; on a d'ailleurs $V=8$. Les coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ d'un point matériel $P=P(t)$ enfermé dans V et refléchi par les parois de V suivant la loi classique de reflexion parfaite, aucune force n'agissant sur P, sont données par les formules (9) quand on y supprime l'indice k et quand on désigne le temps par t. On peut ajuster les six nombres τ', τ'', τ''', λ, μ, ν à une position initiale $P(0)$ et une vitesse initiale $P'(0)$ quelconque, qui sont compatibles avec la condition $P(0)\,\epsilon\, V$.

Soit $-1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$, $-1\leqslant\vartheta<\delta\leqslant 1$, $-1\leqslant\varepsilon<\zeta\leqslant 1$; le parallèlepipède $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, $\vartheta\leqslant y\leqslant\delta$, $\varepsilon\leqslant z\leqslant\zeta$ sera désigné par v; son volume sera aussi v; on a $v=(\beta-\alpha)(\delta-\vartheta)(\zeta-\varepsilon)$. Le volume relatif de v, v/V, sera désigné par p; on écrira q pour $1-p$.

En restituant l'indice k dans les formules (9), on peut les interpréter comme une description du mouvement d'un essaim P_k $(k=1,2,\ldots,n)$ de n points tels que P, qui ne diffèrent que par leurs positions et vitesses initiales, en supposant que les chocs ne se présentent jamais ou bien qu'il ne changent pas les vitesses des points matériels.

Définissons pour un k fixe l'ensemble

$$E_k=\underset{t}{E}\{P_k(t)\,\epsilon\, v\}\qquad (t\geqslant 0); \tag{13}$$

il est évident que E_k est l'ensemble de tous les moments t (sans compter le passé $t<0$) pour lesquels P_k se trouve dans la „cage" v, et que l'on a

$$E_k=X_k\cdot Y_k\cdot Z_k, \tag{14}$$

en définissant les ensembles X_k, Y_k, Z_k par les égalités respectives

$$X_k=\underset{t}{E}\{\alpha\leqslant x_k(t)\leqslant\beta\},\qquad Y_k=\underset{t}{E}\{\vartheta\leqslant y_k(t)\leqslant\delta\},$$
$$Z_k=\underset{t}{E}\{\varepsilon\leqslant z_k(t)\leqslant\zeta\}. \tag{15}$$

Or, la construction effective de l'ensemble X_k est immédiate: c'est un ensemble périodique avec $2/\lambda_k$ comme période; il est composé d'intervalles disjoints de même longueur (sauf au plus un intervalle) et il est facile d'évaluer sa mesure relative qui est $(\beta-\alpha)/2$. Y_k et Z_k étant analogues à X_k, on obtient

$$|X_k|_R=\frac{\beta-\alpha}{2},\qquad |Y_k|_R=\frac{\delta-\vartheta}{2},\qquad |Z_k|_R=\frac{\zeta-\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Introduisons maintenant l'hypothèse de l'indépendance des $3n$ nombres λ_k,μ_k,ν_k; d'après le lemme 6, les $3n$ fonctions (9) seront indépendantes. Il s'ensuit, en vertu de la définition 5, que les $3n$ ensembles, obtenus en faisant parcourir l'indice k les valeurs $1,2,\ldots\ldots,n$ dans (15) sont indépendants. D'après la définition 2, les produits (14) de ces ensembles seront mesurables R et on pourra leur appliquer la formule (2) qui donne ici, en tenant compte de (16),

$$|E_k|_R=|X_kY_kZ_k|_R=|X_k|_R|Y_k|_R|Z_k|_R=\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\vartheta)(\zeta-\varepsilon)}{8}=\frac{v}{V}=p. \tag{17}$$

Or, les trois nombres λ_k,μ_k,ν_k étant indépendants si les trois composantes de la vitesse du point P_k le sont, la formule (17) démontre que, dans ce cas, le temps relatif $|E_k|_R$ du séjour de P_k dans une cage quelconque v est égal au volume relatif p de la cage envisagée.

Désignons maintenant par $f_k(t)$ la fonction caractéristique de E_k. La somme

$$S(t)=\sum_{k=1}^{n}f_k(t) \tag{18}$$

est égale au nombre de points matériels P_k, parmi les n points $(k=1,2,\ldots,n)$, qui se trouvent dans v au moment t. $S(t)$ ne prend que les valeurs $0,1,2,\ldots,n$. Soit, par définition,

$$A_h=\underset{t}{E}\{S(t)=h\}\qquad (h=0,1,\ldots,n); \tag{19}$$

on aura

(20) $$A_h = \sum_r B_{r_1 r_2 \ldots r_n}, \qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_n = h,$$

où $B_{r_1 r_2 \ldots r_n} = G_{r_1} G_{r_2} \ldots G_{r_n}$, $G_i = E_i$ ou CE_i suivant que $i=1$ ou 0, et $r_k = 1$ ou 0 pour $k=1,2,\ldots,n$. En effect, le produit $B_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ est l'ensemble des moments t tels que l'on ait simultanément $P_k \epsilon v$ pour $r_k=1$ et $P_k \epsilon V-v$ pour $r_k=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$, et la somme A_h, étendue aux B assujettis à la condition $\sum_{k=1}^{n} r_k = h$, correspond à la définition (19). Or, les n ensembles E_k sont indépendants, ce qui résulte de (14) et du lemme 5; on peut donc appliquer la formule (2) de la définition 2 aux produits B, ce qui donne

(21) $$|B_{r_1 r_2 \ldots r_n}|_R = |G_{r_1}|_R \, |G_{r_2}|_R \ldots |G_{r_n}|_R .$$

En tenant compte de ce que $\sum_{k=1}^{n} r_k = h$ et de (17), on tire de (21) la formule

(22) $$|B_{r_1 r_2 \ldots r_n}|_R = p^h q^{n-h}.$$

Or, les ensembles $B_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, $B_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ étant disjoints, sauf le cas $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$, $\ldots$, $r_n = s_n$, on déduit de la mesurabilité relative des B et de (20), grâce au lemme 1, la mesurabilité relative de A_h, ce qui conduit de (22) à la relation

(23) $$|A_h|_R = \binom{n}{h} p^h q^{n-h} \qquad (h=0,1,2,\ldots,n).$$

Définissons maintenant le symbole $S_{\eta_1}^{\eta_2}$ pour $0 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant n$ en écrivant

(24) $$S_{\eta_1}^{\eta_2} = \underset{t}{E}\{\eta_1 \leqslant S(t) \leqslant \eta_2\} = \sum_{h \geqslant \eta_1}^{h \leqslant \eta_2} A_h;$$

la seconde égalité résulte de (19). Les A_h étant disjoints et mesurables R, le lemme 3 permet de tirer de (23) et (24) la formule

(25) $$|S_{\eta_1}^{\eta_2}|_R = \sum_{h \geqslant \eta_1}^{h \leqslant \eta_2} \binom{n}{h} p^h q^{n-h} \qquad (0 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant n);$$

remarquons que η_1, η_2 ne sont pas supposés entiers.

$|S_{\eta_1}^{\eta_2}|_R$ est le temps relatif du séjour de h points P_k dans v, où $\eta_1 \leqslant h \leqslant \eta_2$. L'approximation du second terme de (25) par l'intégrale de Laplace est un chapître classique du calcul des probabilités; posons

$$\eta_1 = np - \gamma\sqrt{npq}, \qquad \eta_2 = np + \gamma\sqrt{npq},$$

$$0 < \gamma < \sqrt{\frac{np}{q}}, \qquad npq \geqslant 25,$$

et empruntons à Uspensky l'estimation exacte que voici[6]):

(26) $$|S_{\eta_1}^{\eta_2}|_R = \sum_{h \geqslant np - \gamma\sqrt{npq}}^{h \leqslant np + \gamma\sqrt{npq}} \binom{n}{h} p^h q^{n-h} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-u^2/2} du + \Delta,$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} + \frac{0{,}20 + 0{,}25|p-q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}.$$

La formule (26) permet d'évaluer le temps relatif pendant lequel le nombre relatif h/n des points matériels se trouvant dans la cage v s'écarte du volume relatif p de cette cage tout au plus de $\gamma\sqrt{pq/n}$. Par exemple, on obtient pour $n=6\,000\,000$ et $p=0{,}001$, en prenant $\gamma=5$, l'évaluation du temps relatif $|S|_R$ pendant lequel le nombre relatif h/n des points matériels s'écarte de $0{,}001$ tout au plus de $0{,}000065$; l'intégrale de Laplace pour $\gamma=5$ fournit, comme terme principal de (26), $0{,}999994$ avec une erreur moindre que $1/10^6$ et l'on trouve que $|\Delta|$ ne surpasse pas $0{,}005228$; comme $\gamma\sqrt{pq/n} < 0{,}000065$, on peut affirmer que le temps cherché surpasse $0{,}994765$; il s'ensuit que le temps relatif pendant lequel le nombre relatif quitte l'intervalle $\langle 0{,}000935, 0{,}001065 \rangle$ est moindre que 1%. Nous avons choisi ici $n=6\,000\,000$ comme dans la Comm. VII; le modèle que nous traitons ici peut donc être identifié avec le modèle effectif de la Comm. VII et les trajectoires des points individuels peuvent être tracées effectivement. On voit que cette qualité déterministe du système ne nuit pas à l'équipartition et à la distribution normale des écarts.

[6]) Loc. cit.[4]), p. 130.

§ 3. L'indépendance faible.

Nous conservons les notations des §§ précédents et nous considérons le modèle mécanique du début du § 2, mais au lieu de l'hypothèse de l'indépendance de tous les $3n$ nombres λ_k, μ_k, ν_k $(k=1,2,\ldots,n)$ nous ne supposons que l'indépendance de chaque sixaine $\lambda_j,\mu_j,\nu_j,\lambda_k,\mu_k,\nu_k$ obtenue pour $j\neq k$ $(j,k=1,2,\ldots,n)$. Cette hypothèse porte donc seulement sur les paires de vecteurs-vitesses. Il est intéressant qu'elle suffit pour établir l'équipartition, toutefois sans la distribution normale.

Les définitions et formules (13), (14), (15) et (16) qui précédaient l'hypothèse de l'indépendance de $3n$ nombres subsistent sans changement. Remarquons que la démonstration de la mesurabilité relative de E_k, qui aboutit à la formule (17), subsiste aussi sous l'hypothèse faible; en effet, elle n'utilise que l'indépendance du triple λ_k,μ_k,ν_k. Pour établir l'indépendance du couple E_j,E_k $(j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots,n)$ remarquons d'abord que l'indépendance de six fonctions x_j,y_j,z_j,x_k,y_k,z_k, définies par (9) résulte de l'indépendance arithmétique de la sixaine $\lambda_j,\mu_j,\nu_j,\lambda_k,\mu_k,\nu_k$ de la même manière que la thèse du lemme 6 de l'hypothèse de ce lemme: il n'y a qu'à simplifier la démonstration de la Comm. VII. L'indépendance de six fonctions une fois assurée, la définition 5 donne l'indépendance de la sixaine X_j,Y_j,Z_j,X_k,Y_k,Z_k, ce qui conduit par (14) et le lemme 5 à l'indépendance des ensembles E_j,E_k $(j\neq k)$.

Tous les ensembles E_k $(k=1,2,\ldots,n)$ étant mesurables R, il en est de même de leurs fonctions caractéristiques respectives $f_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ (lemme 3); ces ensembles étant indépendants deux à deux, il en est de même de leurs fonctions caractéristiques (lemme 4).

D'après le lemme 9 les moyennes B des fonctions $f_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ et de leurs produits deux à deux existent et l'on a

$$M_B(f_jf_k)=M_B(f_j)\,M_B(f_k)\qquad (j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots,n). \tag{27}$$

En posant, par définition, $\varphi_k(t)=f_k(t)-p$, on obtient n fonctions φ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ mesurables R, douées de moyennes B et indépendantes deux à deux. En appliquant le lemme 7, il vient

$$M_B(f_k)=M_R(f_k)=|E_k|_R=p\qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{28}$$

donc

$$M_B(\varphi_k)=0\qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{29}$$

Comme

$$\varphi_k^2=f_k^2-2pf_k+p^2=f_k-2pf_k+p^2=f_k(1-2p)+p^2,$$

on voit que φ_k^2 a une moyenne B et que, vu (11) et (28),

$$M_B(\varphi_k^2)=p(1-2p)+p^2=pq\qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{30}$$

En appliquant le lemme 9 aux deux fonctions $\varphi_j(t)$, $\varphi_k(t)$ $(j\neq k)$, qui sont mesurables R et indépendantes, comme nous l'avons déjà constaté, nous obtenons, en vertu de (12) et (29),

$$M_B(\varphi_j,\varphi_k)=M_B(\varphi_j)\,M_B(\varphi_k)=0\qquad (j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots,n). \tag{31}$$

Considérons maintenant la fonction $S(t)$ définie par (18), et l'expression

$$(S(t)-np)^2=\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\Big)^2=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t)+\sum_{j\neq k}^{n,n}\varphi_j(t)\varphi_k(t). \tag{32}$$

Le lemme 8, avec (30), (31) et (32), donne

$$M_B(S-np)^2=npq,\qquad M_B(S/n-p)^2=pq/n,$$

ce qui implique, pour un T_0 suffisamment grand, l'inégalité

$$\frac{1}{T}\int_0^T\Big(\frac{S(t)}{n}-p\Big)^2dt<\frac{pq}{n-1}\qquad \text{pour}\quad T>T_0,\ n>1. \tag{33}$$

Soit $\tau>0$; (33) montre que l'on a $|S(t)/n-p|<\sqrt{\tau}$ pour tout t de $\langle 0,T\rangle$ à l'exception d'un ensemble Z des t, dont la mesure $|Z|$ est moindre que $Tpq/(n-1)\tau$. En posant $\tau=1/(n-1)^{2/3}$, on obtient le résultat suivant:

Le nombre relatif de points matériels se trouvant dans la cage $\mathfrak{r}$ s'écarte du volume relatif de la cage en question moins que de $1/(n-1)^{1/3}$ pendant tout le temps de 0 à T, sauf des intervalles exceptionnels dont la durée totale mesurée par T est moindre que $pq/(n-1)^{1/3}$, pourvu que T soit suffisamment grand $(T>T_0)$.

§ 4. Discussion des résultats et commentaires.

1. Les composantes des vitesses initiales étant proportionnelles aux nombres $\pm\lambda_k$, $\pm\mu_k$, $\pm\nu_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, l'hypothèse *forte* de l'indépendance arithmétique de ces $3n$ nombres équivaut à la condition de l'indépendance arithmétique de $3n$ composantes des vitesses initiales; c'est l'hypothèse admise dans le § 2. De même l'hy-

pothèse *faible* (celle du § 3) peut être formulée comme une condition portant sur les vitesses initiales. Comme l'hypothèse forte implique l'hypothèse faible, le résultat du § 3 s'applique aussi au modèle de la Comm. VII, dont parle le § 2. Or, nous n'avons pas formulé ce résultat dans le language des probabilités. Pour le faire, il faut montrer d'abord que l'ensemble composé des intervalles exceptionnels est mesurable R, ce qui ne cause aucune difficulté sous l'hypothèse forte. La mesurabilité en question a lieu aussi sous l'hypothèse faible; ce qui peut être déduit à l'aide de la théorie des fonctions presque périodiques: $S(t)$ est une somme de n fonctions $f_k(t)$, chaque $f_k(t)$ est un produit de trois fonctions périodiques, donc $f_k(t)$ et $S(t)$ sont des fonctions presque périodiques, ce qui implique la mesurabilité R de l'ensemble exceptionnel dont on parle à la fin du § 3. En effet, cet ensemble est défini par la condition que $S(t)$ y prend des valeurs extérieures à un certain intervalle fini; on tire parti de ce que $S(t)$ ne prend que $n+1$ valeurs différentes[7]).

2. Remarquons que la formule (28) et le lemme 8 donnent, pour la fonction $S(t)$ définie par (18), une moyenne $M_B(S)$ égale à np. Or, nous avons établi au § 2 la mesurabilité R des ensembles A_h (formules (19)-(23)), ce qui donne la mesurabilité R de $S(t)$ et, grâce au lemme 7, la relation $M_R(S)=np$. Ces résultats rappellent la théorie classique de l'équipartition; nous ne les mentionnons ici que pour attirer l'attention sur les deux formes, B et R, du théorème. La première est valide aussi sous l'hypothèse faible, tandis que la seconde n'en résulte pas immédiatement. Pour combler cette lacune il suffit de rappeler ce qui a été dit de la fonction $S(t)$ au alinéa 1 de ce paragraphe.

3. Au lieu d'une cage telle qu'elle était définie au § 2, on peut envisager un domaine quelconque mesurable au sens de Jordan. En effet, les résultats des §§ 2 et 3 subsistent pour un domaine constitué par la réunion de plusieurs cages et il est aisé de les étendre par un passage à la limite à un domaine mesurable J.

4. Notre modèle n'exclut pas la possibilité que l'équipartition fasse défaut pendant un temps très long. En d'autres mots, nous ne pouvons assigner aucune borne inférieure au temps T_0 dont on parle à la fin du § 3 (formule (33)). Cette impossibilité résulte de ce que l'on peut satisfaire les conditions auxquelles sont assujetties les vitesses initiales de manière qu'un effet visible ne se produise que très tard, d'autant plus que les positions initiales sont tout à fait arbitraires. Par exemple, on peut placer toutes les molécules très près du centre du cube et leur donner des vitesses très petites ou bien à peu près verticales.

5. Supposons que l'énergie totale du système soit donnée, ce qui limite le choix de $3n$ composantes des vitesses initiales: le point représentant l'ensemble de ces vitesses dans l'espace à $3n$ dimensions sera situé sur une sphère $(3n-1)$-dimensionnelle. Or, toute dépendance arithmétique étant, selon la définition 6, une relation linéaire aux coefficients entiers entre les composantes, il n'y a qu'une infinité dénombrable de telles dépendances, chacune étant représentée par un plan $(3n-1)$-dimensionnel de l'espace à $3n$ dimensions. Ces plans coupent la sphère des vitesses suivant des cercles. L'hypothèse (forte ou faible) de l'indépendance exclut donc seulement l'ensemble des points formé par la réunion d'un ensemble dénombrable des cercles. La mesure sphérique de Lebesgue de cet ensemble défendu étant évidemment nulle, on obtient une assertion plus forte que celle de l'introduction.

6. Les „molécules" de notre modèle sont des points matériels de masses égales. Nous supposons que les collisions entre ces molécules ne se produisent jamais. On trouvera dans la Note de MM. Egerváry et Turán quelques considérations sur ce sujet, que nous ne reproduisons pas ici. Remarquons seulement que l'on peut choisir effectivement les positions et vitesses initiales d'une manière excluant les collisions, en conservant toutefois les hypothèses essentielles qui impliquent l'équipartition au sens de notre Note. On peut aussi démontrer que, les positions initiales étant données arbitrairement, les vitesses initiales qui garantissent l'absence des collisions, remplissent presque tout l'espace à $3n$ dimensions dont on parle au alinéa 5 de ce paragraphe.

7. MM. Egerváry et Turán construisent un modèle différent du notre. Pour ce modèle, ils démontrent l'existence et donnent effectivement trois fonctions $T(n)$, $d(n)$ et $r(n)$ telles que $\lim T(n)=\infty$, $\lim d(n)=\lim r(n)=0$ et que tous les écarts entre les nombres re-

[7]) A. Wintner, *Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen*, Mathematische Zeitschrift 36 (1933), p. 618-629, *passim*.

latifs des molécules et les volumes relatifs des cages qu'elles occupent sont à la fois moindres que $r(n)$, sauf pour des moments exceptionnels; or, la durée totale de ces moments ne surpasse pas $d(n)$ pendant une période d'observation de longueur $T(n)$, quel que soit le moment où l'on commence l'observation. Le modèle en question jouit donc de deux avantages: 1° l'équipartition porte sur toutes les cages à la fois [8]), 2° le temps d'attente est limité effectivement par les fonctions mentionnées ci-dessus; si l'observateur a constaté, entre les moments t_0 et $t_0+T/2$, des moments où l'équipartition faisait défaut dans une cage quelconque (qui change avec le temps), et si la durée totale de ces moments a dépassé d, il est sûr de voir l'équipartition réalisée à la fois dans toutes les cages pendant tout le temps de $t_0+T/2$ à t_0+T; le terme „équipartition" signifie ici l'équipartition à r près, comme il a été expliqué au début de l'alinéa. Un troisième avantage, qui est d'ailleurs commun à ces modèles, est l'admission de toutes les positions initiales possibles: la détermination des fonctions $T(n)$, $d(n)$ et $r(n)$, les seules qui intéressent le physicien, n'exige pas la connaissance de ces positions. Or, cet avantage est payé fort cher par le fait que les vitesses initiales croîssent avec le nombre n des molécules, ce qui constitue une difficulté d'ordre physique dont notre modèle est libre. Remarquons enfin que les vitesses initiales spéciales qui garantissent le succès de la méthode Egerváry-Turán ne remplissent qu'une partie restreinte de l'espace des vitesses. Cette objection du physicien contre le modèle en question ne touche pas le nôtre (cf. alinéa 5). D'autre part, les propriétés que MM. Egerváry et Turán imposent aux vitesses initiales peuvent être constatées par des mesures physiques, ce qui est impossible pour notre modèle, car les points de l'espace des vitesses qui satisfont à la condition de l'indépendance forment un ensemble partout dense dont le complémentaire est aussi dense partout. La dernière différence à noter ici est l'emploi de la fonction $\Theta(\gamma)$ de Laplace pour décrire les fluctuations de la densité du gaz — c'est une des propriétés caractéristiques de notre modèle.

[8]) M. S. Hartman remarque que cet avantage convient aussi à notre modèle; on peut atteindre l'équipartition à ε près dans toutes les cages à la fois, sauf pour un temps qui, mesuré par la durée de l'observation T, est moindre que η, pourvu que l'on ait $T>T_1(\varepsilon,\eta)$.

8. La comparaison de deux modèles engendre le problème de la construction d'un troisième qui réunirait leurs principaux avantages et serait par là à l'abri de toute objection de la part des physiciens. Pour le faire, il faudrait abandonner toutes les conditions artificielles relatives aux vitesses initiales. Ceci revient à démontrer le théorème suivant: Les fonctions $T(n)$, $d(n)$ et $r(n)$, dont les propriétés sont formulées au alinéa 7 de ce paragraphe, existent et conservent ces propriétés pour toutes les positions initiales et toutes les vitesses initiales correspondantes à une énergie cinétique ne surpassant pas $c^2M/2$, M étant la masse du gaz et c une constante absolue, sauf pour un ensemble exceptionnel des positions-vitesses, dont la mesure est moindre que $w(n)$, où $w(n)$ tend vers 0 avec $1/n$. Nous sommes portés à croire à la possibilité d'une solution, du fait que le problème correspond à une réalité physique d'une part et qu'il est capable d'un énoncé mathématique d'autre part, bien que les difficultés analytiques ne soient pas négligeables.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 14. 7. 1951)