

# SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DES SURFACES

SERGE CANTAT

RÉSUMÉ. Nous étudions les groupes de type fini agissant par transformations birationnelles sur les surfaces complexes compactes kählériennes. Nous montrons (a) que le groupe des transformations birationnelles d'une surface satisfait l'alternative de TITS, (b) que les actions birationnelles de groupes de KAZHDAN sur les surfaces sont toutes birationnellement conjuguées à des actions homographiques sur le plan projectif et (c) que si  $f$  et  $g$  sont deux transformations birationnelles de surfaces qui commutent, alors ou bien  $f$  préserve un pinceau de courbes, ou bien l'un des itérés  $g^m$  de  $g$ ,  $m > 0$ , coïncide avec un itéré  $f^n$  de  $f$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

ABSTRACT. Let  $S$  be any compact complex kähler surface and  $\text{Bir}(S)$  the group of birational transformations of  $S$ . We study the structure of finitely generated subgroups of  $\text{Bir}(S)$  and prove three main results : (a)  $\text{Bir}(S)$  satisfies the Tits Alternative, (b) if a group with Kazhdan property (T) acts on a compact kähler surface by birational transformations, then the action is conjugate to a homographic action on the projective plane, and (c) if  $f$  is an element of  $\text{Bir}(S)$  which does not preserve any pencil of curves and if  $g$  commutes with  $f$  then an iterate of  $g$  coincides with an iterate of  $f$ . The second statement provides a positive answer to Zimmer's conjecture for birational actions on surfaces.

## 1. INTRODUCTION

**1.1. Transformations birationnelles.** Les transformations birationnelles d'une variété projective complexe  $M$  forment un groupe que nous noterons  $\text{Bir}(M)$ . Ces groupes se situent à mi-chemin entre les groupes linéaires et les groupes de difféomorphismes des variétés réelles compactes. Pour illustrer ce fait, considérons le cas où  $M$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ .

- Une fois fixé un système de coordonnées homogènes, tout élément  $f$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$  est déterminé par  $k + 1$  polynômes homogènes de même degré. Pour se donner un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$ , il « suffit » donc de se donner l'ensemble fini des coefficients de ces polynômes.

- Si  $k$  est supérieur ou égal à 2, il existe des éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$  définis par des polynômes à coefficients réels qui induisent des difféomorphismes analytiques de  $\mathbb{P}^k(\mathbf{R})$  dont l'entropie topologique est strictement positive et dont la dynamique n'est pas uniformément hyperbolique (voir [64]).

• Pour tout  $k \geq 2$ , le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$  contient des groupes de type fini non linéaires. Par exemple, le groupe des automorphismes extérieurs du groupe libre  $F_n$  se plonge dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$  dès que  $k$  est suffisamment grand. Pourtant,  $\text{Out}(F_n)$  n'est pas un groupe linéaire si  $n \geq 4$  (voir [56], [39]).

Dans cet article, nous considèrerons exclusivement le cas où la dimension de  $M$  est égale à 2. L'exemple principal qu'il faut donc garder à l'esprit est le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ , encore appelé groupe de CREMONA. Les résultats que nous obtiendrons concernent la structure algébrique des groupes de type fini pouvant agir fidèlement par transformations birationnelles sur les surfaces. Pour cela, nous importerons des idées issues de la théorie géométrique des groupes, notamment de la théorie des groupes hyperboliques de GROMOV.

**1.2. Rang et groupe de CREMONA.** Le rang (réel) d'un sous-groupe algébrique  $G$  de  $\text{SL}(n, \mathbf{R})$  est la dimension maximale d'un sous-groupe abélien de  $G$  diagonalisable sur  $\mathbf{R}$ . Par exemple, le rang de  $\text{SL}(n, \mathbf{R})$  est égal à  $n - 1$  et celui de  $\text{SO}(p, q)$  au minimum de  $p$  et de  $q$ . Le groupe de CREMONA contient le groupe des automorphismes

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}(3, \mathbf{C}),$$

qui est de rang 2. Le premier but de ce texte est de montrer que les groupes de transformations birationnelles des surfaces se comportent comme des groupes linéaires de rang inférieur ou égal à 1, modulo l'exception fournie par  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Ce phénomène peut déjà être observé à l'aide du théorème d'ENRIQUES et DEMAZURE affirmant que toute action birationnelle « algébrique » du groupe multiplicatif  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  est conjuguée à une action par homographies (voir [18], [22] et [2]).

Un phénomène similaire apparaît pour les sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Ceux-ci ont été classés à la fin du dix-neuvième siècle par KANTOR et WIMAN ; leurs résultats ont récemment fait l'objet d'une refonte totale dans l'esprit de la théorie de MORI, ce qui conduit à une classification complète des sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  à conjugaison près (voir [31]). On dispose par exemple de l'énoncé suivant (voir [2]).

**Théorème.** *Soit  $p$  un nombre premier distinct de 2 et 3. Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  isomorphe  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$ , alors  $r$  est égal à 1 ou 2 et, lorsque  $r = 2$ ,  $G$  est conjugué à un sous-groupe diagonal de  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ .*

Ce théorème montre que, par ses sous-groupes finis,  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  se comporte aussi comme un groupe de LIE réel connexe de rang 2. Cependant, ces deux situations (que ce soit que ce soit pour  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$ ,  $p > 3$ , ou  $(\mathbf{C}^*)^r$ ) sont compatibles avec le principe affirmant que les phénomènes de rang 2 proviennent de sous-groupes de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  qui sont conjugués à des sous-groupes de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Le premier but de ce texte est de corroborer cette assertion en étudiant les groupes de KAZHDAN et les groupes abéliens dénombrables agissant birationnellement sur les surfaces.

**Remarque 1.1.** Par projection stéréographique, la quadrique  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  est birationnelle au plan projectif. Son groupe d'automorphismes se plonge donc dans le groupe de Cremona ; en particulier, le groupe

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$$

est de rang 2 et se plonge dans  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Toutefois, ce groupe n'est pas un groupe de LIE simple, et ne jouera donc pas un rôle aussi important que  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  dans ce texte.

**1.3. Groupes de KAZHDAN et espace de PICARD-MANIN.** Un groupe dénombrable  $\Gamma$  a la propriété  $(T)$  de KAZHDAN si toute action de  $\Gamma$  par isométries affines sur un espace de HILBERT possède un point fixe ; l'exemple le plus simple de groupe de KAZHDAN infini est sans doute le groupe  $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ , pour  $n \geq 3$ . Le théorème suivant étend un énoncé de DESERTI valable pour les sous-groupes d'indice fini de  $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ .

**Théorème A.** *Soit  $S$  une surface kählérienne compacte. Soit  $\Gamma$  un groupe infini dénombrable de transformations birationnelles de  $S$ . Si  $\Gamma$  a la propriété  $(T)$  de KAZHDAN, il existe une application birationnelle  $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  qui conjugue  $\Gamma$  à un sous-groupe de  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ .*

Les groupes de LIE réels, connexes et simples de rang réel supérieur ou égal à 2 et leurs réseaux satisfont la propriété  $(T)$  (voir [21]). Cet énoncé confirme donc l'affirmation du paragraphe 1.2 concernant le « rang » de  $\mathrm{Bir}(S)$ . Il soutient aussi une conjecture célèbre de ZIMMER suivant laquelle un réseau d'un groupe de LIE réel, connexe, simple et de rang supérieur strictement à  $d$  ne peut agir sur une variété compacte de dimension  $d$  : le théorème A démontre cette conjecture pour les actions birationnelles en dimension  $d = 2$  (voir le §4.3).

Lorsque la surface  $S$  n'est pas rationnelle, le théorème A affirme que tout morphisme d'un groupe de KAZHDAN vers  $\mathrm{Bir}(S)$  a une image finie. C'est la partie facile, le cas difficile correspondant aux sous-groupes de  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . La preuve que nous exposerons utilise une version asymptotique du théorème de l'indice de HODGE : nous verrons en effet que  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  se plonge dans le groupe orthogonal  $\mathrm{O}(1, \infty)$  des isométries d'un espace de HILBERT pour un produit hilbertien de signature  $(1, \infty)$ . Cet espace, introduit par MANIN dans son étude des surfaces cubiques, est la limite inductive des groupes de PICARD des surfaces obtenues en éclatant successivement tous les points (même infiniment proches) du plan projectif : cet « espace de PICARD-MANIN » jouera un rôle central tout au long du texte.

L'idée d'éclater le plan indéfiniment pour lever simultanément toutes les indéterminations d'une application rationnelle et de ses itérés a déjà été utilisée pour comprendre, entre autre, la dynamique des transformations polynomiales du plan affine ou la croissance des degrés des itérés de transformations rationnelles non inversibles. Nous renvoyons le lecteur à [48] et [47], à [38] et au travail récent de BOUCKSOM, FAVRE et JONSSON (voir [7]).

**Remarque 1.2.** La preuve de DESERTI mentionnée plus haut est de nature différente et s'apparente à celles décrites dans [41] et [40] pour les groupes de difféomorphismes. Cette approche ne permet pas de montrer le théorème A mais permet d'écartier l'existence d'actions birationnelles fidèles sur  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  pour des groupes qui ne relèvent pas des techniques que nous allons développer.

**1.4. Dynamique, centralisateur et rang du groupe de CREMONA.** Si  $G$  est un groupe et  $f$  est un élément de  $G$ , le centralisateur de  $f$  dans  $G$  est le sous-groupe de  $G$  défini par  $\text{Cent}(f, G) = \{g \in G \mid f \circ g = g \circ f\}$ .

Soient  $S$  une surface complexe compacte kählérienne et  $f$  une transformation rationnelle de  $S$ . L'application  $f$  détermine un opérateur linéaire  $f^*$  sur les groupes de cohomologie de  $S$ , qui préserve la décomposition de HODGE. Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur l'espace des endomorphismes de  $H^{1,1}(S, \mathbf{R})$ . Le (premier) degré dynamique  $\lambda(f)$  est alors défini par

$$\lambda(f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \|(f^n)^*\|^{1/n} \right).$$

Ce nombre réel positif est un nombre algébrique invariant par conjugaison birationnelle (voir [26]). Les applications birationnelles de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  déterminées par des polynômes homogènes de degré  $d$  fixé forment une variété algébrique  $\text{Bir}_d(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ ; en dehors d'un fermé de Zariski de codimension 1 dans  $\text{Bir}_d(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ , le degré dynamique  $\lambda(f)$  est égal à  $d$ . Ainsi, le degré dynamique d'un élément générique de  $\text{Bir}_d(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  est égal à  $d$  (cf. exemple 2.1).

**Théorème B.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte  $S$  dont le degré dynamique  $\lambda(f)$  est strictement plus grand que 1. Si  $g$  est une transformation birationnelle de  $S$  qui commute avec  $f$  il existe deux entiers  $m \in \mathbf{N}^*$  et  $n \in \mathbf{Z}$  tels que  $g^m$  est égal à  $f^n$ .*

Dans  $\text{SL}(r+1, \mathbf{C})$ , le centralisateur d'un élément générique est isomorphe à  $(\mathbf{C}^*)^r$ . Le théorème B suggère donc que  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  se comporte comme un groupe de LIE de rang 1. Nous présenterons deux preuves du théorème B, l'une de nature arithmétique utilisant l'espace de PICARD-MANIN (§5.1), l'autre de nature dynamique (§8).

**Remarque 1.3.** Dans la plupart des cas, nous montrerons que le groupe cyclique engendré par  $f$  est d'indice fini dans  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$ , ce qui est légèrement plus fort que le théorème B.

**Remarque 1.4.** Nous verrons qu'on dispose pour les transformations birationnelles des surfaces d'une classification analogue à celle de NIELSEN-THURSTON pour les éléments du groupe modulaire  $\text{Mod}(g)$  (ou mapping class group) d'une surface réelle orientable compacte de genre  $g$  (voir le §2.3). Le théorème B peut être comparé au fait qu'un élément pseudo-Anosov dans le groupe modulaire d'une surface compacte a un centralisateur virtuellement cyclique. Ceci

confirme le principe suivant lequel les propriétés cohomologiques d'une application rationnelle  $f$  contraignent fortement sa dynamique.

**1.5. Alternative de Tits.** Un groupe  $G$  satisfait l'alternative de TITS lorsque tout sous-groupe de type fini de  $G$ , contient un groupe libre non abélien ou un sous-groupe résoluble d'indice fini. Cette alternative a été établie par TITS pour les groupes linéaires  $GL(n, \mathbf{k})$ , où  $\mathbf{k}$  est n'importe quel corps, mais n'est pas valable pour les groupes de difféomorphismes des variétés réelles de dimension strictement positive (voir [42]). Le théorème suivant rapproche donc les groupes de transformations birationnelles des groupes linéaires et les écarte un peu des groupes de difféomorphismes. Il étend un résultat de LAMY concernant les automorphismes polynomiaux de  $\mathbf{C}^2$  (voir [53]).

**Théorème C.** *Si  $X$  est une variété complexe, compacte et kählérienne de dimension inférieure ou égale à 2, le groupe  $\text{Bir}(X)$  vérifie l'alternative de TITS.*

Les groupes d'automorphismes des variétés complexes compactes kählériennes vérifient également l'alternative de TITS, quelque soit la dimension de la variété (voir le théorème 6.5 et [62]). Il serait intéressant d'étendre ce résultat à  $\text{Bir}(M)$  lorsque  $\dim_{\mathbf{C}}(M)$  est supérieure ou égale à 3. Ceci permettrait d'étendre l'alternative de TITS à tous les groupes non linéaires qui agissent birationnellement sur une variété kählérienne compacte, fournissant ainsi une preuve unifiée de l'alternative de TITS pour une nouvelle classe de groupes, incluant les groupes modulaires  $\text{Mod}(g)$  des surfaces RIEMANN de genre  $g$  et les groupes  $\text{Out}(F_m)$  mentionnés au paragraphe 1.1 (voir [56, 1], et [50, 6]).

Nous compléterons ces résultats au paragraphe 7 par une description des groupes de type finis dont tous les éléments sont d'ordre fini et de ceux qui sont résolubles et sans torsion.

Le groupe des automorphismes d'une variété algébrique (affine ou projective) complexe  $M$  vérifie les propriétés de MALCEV et de SELBERG : un sous-groupe de type fini dans  $\text{Aut}(M)$  est résiduellement fini et virtuellement sans torsion (voir [1]). Je ne sais pas si ces propriétés restent valables au sein du groupe de CREMONA. Il reste donc, même en dimension 2, de nombreuses questions ouvertes dans l'esprit d'une comparaison des groupes de transformations birationnelles aux groupes linéaires. Quelques unes seront mentionnées au fil du texte.

**1.6. Remerciements.** Merci à J. DESERTI pour avoir partagé ses connaissances sur le groupe de CREMONA, à F. PAULIN pour m'avoir expliqué certains arguments de ping-pong dans les espaces hyperboliques, et à P. AUTISSIER, D. CERVEAU, R. DUJARDIN et M. JONSSON pour de nombreuses discussions sur ce sujet. Un merci tout particulier à C. FAVRE ; ses remarques et suggestions ont contribué à modifier profondément ce texte, notamment aux paragraphes 5.1 et 6.5.

## 2. TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES ET DEGRÉ DYNAMIQUE

Cette partie concerne la dynamique des transformations birationnelles des surfaces complexes compactes kähleriennes. Nous y résumons des travaux de DILLER, FAVRE et GIZATULLIN.

**2.1. Indéterminations et ensemble exceptionnel.** Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte. Les points d'indétermination de  $f$  forment un ensemble fini qui sera noté  $\text{Ind}(f)$ . Les courbes contractées par  $f$  sont aussi en nombre fini, et leur union sera notée  $\text{Exc}(f)$ , pour « ensemble exceptionnel » ;  $\text{Exc}(f)$  coïncide avec le lieu critique de  $f$ .

**2.2. Degré dynamique et stabilité algébrique.** Le (premier) degré dynamique  $\lambda(f)$  d'une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählienne  $S$  a été défini au paragraphe 1.4. C'est un invariant de conjugaison birationnelle.

**Exemple 2.1.** Soit  $f$  une transformation birationnelle du plan projectif. L'action de  $f$  sur  $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$  est la multiplication par un entier  $\deg(f)$  ; une fois fixé des coordonnées homogènes,  $\deg(f)$  est le degré des polynômes homogènes sans facteur commun définissant  $f$ . Le degré dynamique de  $f$  coïncide alors avec la limite supérieure de  $\deg(f^n)^{1/n}$ . En particulier, si  $\deg(f^n) = \deg(f)^n$  pour tout  $n$ , alors  $\lambda(f) = \deg(f)$  et le premier degré dynamique de  $f$  est un entier.

Pour l'involution de CREMONA standard, définie par  $\sigma[x : y : z] = [yz : zx : xy]$ , les degrés  $\deg(\sigma^n)$  valent 1 ou 2 suivant que  $n$  est pair ou impair, si bien que  $\lambda(\sigma) = 1$ .

Soit  $E$  la courbe elliptique  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[j]$  où  $j$  est une racine primitive cubique de l'unité. La transformation linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

agit linéairement sur  $\mathbf{C}^2$  en préservant le réseau  $\mathbf{Z}[j] \times \mathbf{Z}[j]$  et passe donc au quotient en un automorphisme  $f_A$  de  $E \times E$  satisfaisant  $\lambda(f_A) = (7 + 3\sqrt{5})/2$  (voir [13]). Puisque cette transformation commute à  $\eta(x, y) = (jx, jy)$ , elle passe au quotient en un automorphisme  $g_A$  de même degré dynamique sur la surface  $S = (E \times E)/\eta$ . Il se trouve que cette surface est rationnelle : l'automorphisme  $g_A$  est donc conjugué à une transformation birationnelle du plan projectif dont le degré dynamique est égal à  $\lambda(f_A)$  et n'est donc pas un entier.

Ces exemples montrent que l'action d'une transformation birationnelle  $f$  sur la cohomologie d'une surface complexe  $S$  ne satisfait pas toujours  $(f^n)^* = (f^*)^n$ . En particulier, l'application de  $\text{Bir}(S)$  vers  $\text{End}(H^*(S, \mathbf{Z}))$  qui à  $f$  associe  $f^*$  n'est pas un morphisme.

Lorsque  $(f^*)^n = (f^n)^*$  pour tout entier  $n$ , on dit que  $f$  est « algébriquement stable ». Ceci équivaut à dire que l'orbite positive de  $\text{Ind}(f^{-1})$  ne rencontre pas  $\text{Ind}(f)$ . Dans [26], DILLER et FAVRE ont montré que toute transformation

birationnelle  $f$  d'une surface compacte  $S$  est conjuguée à une transformation birationnelle algébriquement stable : *il existe un morphisme birationnel  $\pi : S' \rightarrow S$  tel que  $\pi^{-1} \circ f \circ \pi$  soit une transformation algébriquement stable de  $S'$ .*

**2.3. Croissance des degrés et classification grossière.** D'après les travaux de GIZATULLIN, puis de DILLER et FAVRE, il y a quatre types de transformations birationnelles, liés à quatre comportements asymptotiques possibles pour la suite  $\|(f^n)^*\|$  (voir [26], [45], [10]).

- *Normes bornées.*- Lorsque  $\|(f^n)^*\|$  est une suite bornée, il existe un entier  $l > 0$  et une application birationnelle  $\varphi : S' \dashrightarrow S$  tels que  $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$  soit un automorphisme de  $S'$  isotope à l'identité. En d'autres termes,  $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$  est un élément de la composante connexe de l'identité  $\text{Aut}^0(S')$  dans le groupe de LIE complexe  $\text{Aut}(S')$ .

- *Croissance linéaire.*- Lorsque  $\|(f^n)^*\|$  croît linéairement avec  $n$ , il existe une application birationnelle  $\varphi : S' \dashrightarrow S$  et une fibration de  $S'$  par courbes rationnelles telles que  $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$  préserve cette fibration.

- *Croissance quadratique.*- Lorsque  $\|(f^n)^*\|$  croît quadratiquement avec  $n$ , il existe une application birationnelle  $\varphi : S' \dashrightarrow S$  et une fibration de  $S'$  par courbes elliptiques telle que  $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$  soit un automorphisme de  $S'$  préservant la fibration.

- *Croissance exponentielle.*- La suite  $\|(f^n)^*\|$  tend exponentiellement vite vers l'infini. En ce cas,  $\lambda(f)$  est strictement plus grand que 1 ; c'est un nombre de SALEM ou de PISOT (voir [26]).

**Exemple 2.2.** L'involution de CREMONA standard  $\sigma$  (voir l'exemple 2.1) devient un automorphisme d'ordre 2 si l'on éclate les trois sommets du triangle d'équation  $xyz = 0$ .

**Remarque 2.3.** Lorsque la croissance est linéaire ou quadratique, les fibrations fournies sont les seuls feuilletages algébriques invariants par  $f$  (voir [15]). En particulier, ce sont les seules fibrations invariantes.

Il est fructueux de comparer cette classification à celle de NIELSEN et THURSTON pour les éléments du groupe modulaire d'une surface réelle compacte. Si la croissance des normes est linéaire ou quadratique, la transformation  $f$  ressemble à un « twist de DEHN » :  $f$  préserve une fibration et effectue un twist le long de cette fibration ; ce twist explique simultanément l'absence de feuilletage invariant distinct de la fibration et la croissance des normes (voir [15]).

Si la croissance des normes est exponentielle,  $f$  ressemble au niveau cohomologique à une transformation de type pseudo-ANOSOV. Dans ce cas, le rôle joué par les feuilletages mesurés dans la théorie de NIELSEN-THURSTON est remplacé par celui des courants positifs fermés  $f$ -invariants (voir [10], [26] et [15]). Au niveau dynamique, on sait que le nombre de points périodiques de  $f$  de période  $N$  croît comme  $\lambda(f)^N$  et l'on s'attend à ce que  $f$  ait une entropie topologique positive (voir [26], [33] et le §8). Avec cette analogie entre  $\text{Bir}(S)$

et le groupe modulaire (ou mapping class group)  $\text{Mod}(g)$  d'une surface réelle orientable compacte de genre  $g$ , le théorème B peut être comparé au fait qu'un élément pseudo-Anosov de  $\text{Mod}(g)$  a un centralisateur virtuellement cyclique (voir [50]).

**Définition 2.4.** Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne. Nous dirons que  $f$  est

- *virtuellement isotope à l'identité* si la suite  $\|(f^n)^*\|$  est bornée,
- *un twist de DE JONQUIÈRES* si la suite  $\|(f^n)^*\|$  croît linéairement,
- *un twist de HALPHEN* si la suite  $\|(f^n)^*\|$  évolue quadratiquement,
- *entropique* si  $\lambda(f)$  est strictement plus grand que 1.

Ce vocabulaire est justifié par l'analogie avec les groupes modulaires et les remarques suivantes : le groupe de DE JONQUIÈRES est le groupe des transformations birationnelles du plan préservant un pinceau de courbes rationnelles ; il ne dépend du pinceau que par conjugaison au sein du groupe de CREMONA (voir [18] et le §6.4). De même, les pincesaux de courbes de genre 1 du plan  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  ont été classés par HALPHEN : tout tel pinceau est conjugué à l'un des pincesaux d'HALPHEN (voir [18], et [30] ou [49]).



### 3. ESPACE DE PICARD-MANIN

Dans cette partie nous présentons une construction due à MANIN. Il s'agit de décrire la limite inductive des groupes de NÉRON-SEVERI, ou de PICARD, des surfaces obtenues en éclatant ad vitam aeternam tous les points d'une surface  $S$ , puis de montrer que  $\text{Bir}(S)$  agit linéairement sur ce groupe limite ; pour cela nous suivons le chapitre cinq du livre [57]. L'espace introduit peut être pensé comme le groupe de NÉRON-SEVERI (ou de PICARD) de l'espace de RIEMANN-ZARISKI de  $S$  (voir [48] et [7]). Cette construction permettra de reprendre la classification de DILLER, FAVRE et GIZATULLIN vue au §2.3.

**3.1. Groupes de PICARD et morphismes birationnels.** Soit  $S$  une surface complexe compacte kählérienne. Nous noterons  $\text{Pic}(S)$  le groupe de PICARD de  $S$ ,  $\text{NS}(S)$  son groupe de NÉRON-SEVERI et  $\text{Pic}^0(S)$  le noyau du morphisme  $\text{Pic}(S) \rightarrow \text{NS}(S)$  qui associe à un fibré en droite  $L$  sa classe de CHERN  $c_1(L)$ . Lorsque  $\text{Pic}^0(S)$  est trivial,  $\text{Pic}(S)$  est isomorphe à  $\text{NS}(S)$ , ce qui nous permettra d'identifier ces deux groupes. Nous noterons  $\rho(S)$  la dimension de  $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$ , que nous appellerons *nombre de PICARD* de  $S$ . Le groupe de NÉRON-SEVERI et, par suite, le groupe de PICARD sont munis d'une forme d'intersection  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Lorsque  $S$  est projective, le théorème de l'indice de HODGE montre que cette forme quadratique est une forme non dégénérée de type hyperbolique : sa signature est égale à  $(1, \rho(S) - 1)$ . Le cône nef, ou « numériquement effectif », est le cône convexe engendré par les classes des fibrés en droites nef (voir [54], chapitre 1). Nous le noterons  $\text{NS}^+(S)$  ou  $\text{Pic}^+(S)$  si  $\text{NS}(S)$  et  $\text{Pic}(S)$  coïncident.

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces et  $\varepsilon : S_1 \rightarrow S_2$  un morphisme birationnel. Nous noterons  $\varepsilon^*$  et  $\varepsilon_*$  les morphismes induits par  $\varepsilon$  au niveau des groupes de PICARD (resp. de NÉRON-SEVERI). Le morphisme  $\varepsilon^*$  est injectif et préserve le cône nef :

$$\varepsilon^*(\text{NS}^+(S_2)) \subset \text{NS}^+(S_1).$$

Il préserve aussi le produit d'intersection : si  $l$  et  $l'$  sont deux éléments de  $\text{Pic}(S_1)$ , alors  $\langle \varepsilon^*l | \varepsilon^*l' \rangle = \langle l | l' \rangle$  où les intersections sont calculées respectivement dans  $\text{NS}(S_2)$  et  $\text{NS}(S_1)$ .

**3.2. Limite inductive et action de  $\text{Bir}(S)$ .** Fixons une surface complexe compacte kählérienne  $S$ . Suivant [57], considérons la catégorie  $\mathcal{B}(S)$  dont les objets sont les morphismes birationnels  $\varepsilon : S' \rightarrow S$  ; un morphisme entre deux objets  $\varepsilon_1 : S'_1 \rightarrow S$  et  $\varepsilon_2 : S'_2 \rightarrow S$  de cette catégorie est un morphisme birationnel  $m : S'_1 \rightarrow S'_2$  tel que  $\varepsilon_2 \circ m = \varepsilon_1$ . Ainsi, l'ensemble des morphismes entre deux objets est vide ou réduit à un unique élément.

L'ensemble des objets de cette catégorie est ordonné de la manière suivante :  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$  s'il existe un morphisme de  $\varepsilon_1$  vers  $\varepsilon_2$  ; on dira alors que  $\varepsilon_1$  (resp.  $S'_1$ ) domine  $\varepsilon_2$  (resp.  $S'_2$ ). Géométriquement, ceci correspond à dire que  $\varepsilon_1^{-1}$  éclate les mêmes points que  $\varepsilon_2^{-1}$  plus éventuellement quelques autres. Si  $\varepsilon_1$  et

$\varepsilon_2$  sont deux objets de  $\mathcal{B}(S)$  il en existe toujours un troisième qui les domine simultanément. Suivant [57], nous poserons alors

$$Z(S) = \lim_{\rightarrow} (\text{NS}(S'))$$

où la limite inductive est prise suivant les morphismes injectifs  $\varepsilon^*$ . Le groupe  $Z(S)$  sera appelé *groupe (ou espace) de PICARD-MANIN de  $S$* . Les structures invariantes par les morphismes  $\varepsilon^*$  passent à la limite et  $Z(S)$  est donc muni

- (i) d'une forme d'intersection  $\langle \cdot | \cdot \rangle : Z(S) \times Z(S) \rightarrow \mathbf{Z}$ ,
- (ii) d'un cône nef  $Z^+(S) = \lim_{\rightarrow} (\text{NS}^+(S))$ ,
- (iii) d'une classe canonique, vue comme une forme linéaire  $\Omega : Z(S) \rightarrow \mathbf{Z}$ .

Chaque groupe  $\text{NS}(S')$ , où  $S'$  domine  $S$ , s'injecte dans  $Z(S)$ ; nous identifierons régulièrement  $\text{NS}(S')$  à son image dans  $Z(S)$ .

Le groupe des transformations birationnelles de  $S$  agit sur  $Z(S)$  de la manière suivante. Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces et  $f : S_1 \dashrightarrow S_2$  une transformation birationnelle. Nous pouvons lever les indéterminations de  $f$  à l'aide de deux morphismes birationnels  $g : S' \rightarrow S_1$  et  $h : S' \rightarrow S_2$ , de sorte que  $f = h \circ g^{-1}$ . Par composition,  $g$  injecte  $\mathcal{B}(S')$  dans  $\mathcal{B}(S_1)$  et  $h$  injecte  $\mathcal{B}(S')$  dans  $\mathcal{B}(S_2)$ . Tout objet de  $\mathcal{B}(S_1)$  (resp.  $\mathcal{B}(S_2)$ ) étant dominé par un objet de  $g_*(\mathcal{B}(S'))$  (resp.  $h_*(\mathcal{B}(S'))$ ), ceci induit deux isomorphismes  $g_*$  et  $h_*$  de  $Z(S')$  vers  $Z(S_1)$  et  $Z(S_2)$ . On pose alors  $f_* = h_* \circ (g_*)^{-1}$ .

**Théorème 3.1** (MANIN, [57] page 194). *L'application  $f \mapsto f_*$  détermine un morphisme de groupe injectif de  $\text{Bir}(S)$  vers  $\text{GL}(Z(S))$ . Si  $f$  appartient à  $\text{Bir}(S)$ , l'application linéaire  $f_*$  préserve la forme d'intersection  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et le cône nef.*

**Remarque 3.2.** Le passage à la limite inductive  $Z(S)$  est nécessaire pour obtenir une telle représentation. L'application qui à l'élément  $f$  de  $\text{Bir}(S)$  associe l'application linéaire  $f_* : \text{NS}(S) \rightarrow \text{NS}(S)$  n'est en général pas un morphisme de groupe (voir le paragraphe 2.2).

### 3.3. Base de l'espace de PICARD-MANIN et complétion hilbertienne.

3.3.1. *Éclatements, base et intersection.* Notons  $\text{Eclat}(S)$  l'espace obtenu en recollant tous les éclatés de  $S$ . Plus précisément,  $\text{Eclat}(S)$  est l'union des surfaces  $S'$  munies d'un morphisme birationnel  $\varepsilon : S' \rightarrow S$ , modulo la relation d'équivalence qui identifie deux points  $x_1 \in S'_1$  et  $x_2 \in S'_2$  lorsque la transformation birationnelle  $(\varepsilon_2)^{-1} \circ \varepsilon_1$  est un isomorphisme local d'un voisinage de  $x_1$  sur un voisinage de  $x_2$ . Un point de  $\text{Eclat}(S)$  correspond donc à un point de  $S$ , ou un point situé sur le diviseur exceptionnel d'un éclatement de  $S$ , etc. Toute surface  $S'$  qui domine  $S$  se plonge donc dans  $\text{Eclat}(S)$ . Nous noterons  $\text{Ec}(S)$  le groupe abélien libre engendré par les points de  $\text{Eclat}(S)$ . On munit  $\text{Ec}(S)$  du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$  défini par

$$\langle x | x \rangle_E = -1 \text{ et } \langle x | y \rangle_E = 0$$

si  $x$  est distinct de  $y$ .

Nous pouvons maintenant plonger le groupe abélien libre  $\text{Ec}(S)$  dans  $Z(S)$  de la manière suivante. Soit  $\bar{x}$  un élément de  $\text{Eclat}(S)$ . Il existe une surface  $S'$ , un morphisme birationnel  $\varepsilon : S' \rightarrow S$  et un point  $x$  de  $S'$  tel que la classe  $\bar{x} \in \text{Eclat}(S)$  soit représentée par le point  $x$ . Soit  $S''$  la surface obtenue en éclatant  $S'$  au point  $x$ . Soient  $D_x$  le diviseur exceptionnel de cet éclatement et  $\varepsilon' : S'' \rightarrow S'$  le morphisme birationnel obtenu en contractant  $D_x$ . La composition de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  détermine un morphisme birationnel de  $S''$  sur  $S$  et le fibré en droites (ou faisceau inversible)  $\mathcal{O}(D_x)$  détermine un élément de  $\text{NS}(S'')$ , donc de  $Z(S)$ . Si l'on change de représentant  $(S', x, \varepsilon)$  pour le point  $\bar{x}$  de  $\text{Eclat}(S)$  on ne change pas l'élément de  $Z(S)$  ainsi déterminé.

Dans la suite, nous noterons  $e_x$  le point de  $Z(S)$  associé à l'élément  $x$  de  $\text{Eclat}(S)$  :  $e_x$  est donc la classe du diviseur exceptionnel  $D_x$ . Ceci détermine l'image de la base de  $\text{Ec}(S)$  dans  $Z(S)$ , d'où un morphisme

$$\begin{cases} \text{Ec}(S) & \rightarrow & Z(S) \\ \sum a(x)x & \mapsto & \sum a(x)e_x \end{cases} .$$

Considérons maintenant le morphisme de groupes abéliens

$$\text{NS}(S) \times \text{Ec}(S) \rightarrow Z(S)$$

obtenu en prenant l'injection canonique de  $\text{NS}(S)$  dans  $Z(S)$  et le morphisme  $\text{Ec}(S) \rightarrow Z(S)$  défini ci-dessus.

**Proposition 3.3** ([57], page 197). *Le morphisme  $\text{NS}(S) \times \text{Ec}(S) \rightarrow Z(S)$  ainsi défini détermine une isométrie de la somme directe orthogonale de  $\text{NS}(S)$  (muni de sa forme d'intersection) et de  $\text{Ec}(S)$  (muni du produit  $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ ) vers  $Z(S)$  (muni du produit d'intersection  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ).*

**Exemple 3.4.** Soit  $p$  un point du plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ . Soient  $X$  la surface obtenue par éclatement de  $p$  et  $D_p$  le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Soit  $q$  un point de  $D_p$ . Soient  $Y$  la surface obtenue en éclatant  $q$  et  $D_q$  le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Les deux éléments  $e_p$  et  $e_q$  appartiennent à l'image de  $\text{NS}(Y)$  dans  $Z(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Notons  $D_p^*$  la transformée stricte de  $D_p$  dans  $Y$ . Alors  $e_p$  correspond à  $D_p^* + D_q$  et  $e_q$  à  $D_q$  (ou plutôt aux classes de CHERN des fibrés en droites  $\mathcal{O}(D_p^* + D_q)$  et  $\mathcal{O}(D_q)$ ). Nous avons donc bien

$$\langle e_p | e_q \rangle = (D_p^* \cdot D_q) + (D_q)^2 = 1 - 1 = 0,$$

$$\langle e_p | e_p \rangle = (D_p^*)^2 + (D_q)^2 + 2 = -2 - 1 + 2 = -1.$$

3.3.2. *Complétion hilbertienne.* Par la suite, nous considèrerons la complétion hilbertienne  $\mathcal{E}(S)$  de

$$\text{Ec}(S) \otimes \mathbf{R}$$

pour le produit scalaire  $-\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ . Le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$  s'étend alors en un produit hilbertien défini négatif sur  $\mathcal{E}(S)$ . Nous noterons  $\mathcal{Z}(S)$  la somme directe orthogonale de  $\text{NS}(S)$ , qui est de dimension finie, et de  $\mathcal{E}(S)$ . Puisque

$\langle \cdot | \cdot \rangle_E$  est définie négative et que la forme d'intersection sur  $\text{NS}(S)$  est de signature  $(1, \rho(S) - 1)$ , l'espace  $\mathcal{Z}(S)$  est muni d'une forme d'intersection de signature  $(1, \infty)$ . Cette construction ne dépend pas du choix de la surface  $S$  dans sa classe d'équivalence birationnelle : si  $S'$  est birationnelle à  $S$ , il existe une surface  $S''$  munie de deux morphismes birationnels  $\varepsilon : S'' \rightarrow S$  et  $\varepsilon' : S'' \rightarrow S'$  ; on remarque alors que  $\text{Ec}(S'')$  détermine simultanément un sous-espace de codimension finie dans  $\text{Ec}(S)$  et dans  $\text{Ec}(S')$ , donc les complétions obtenues à partir de  $\text{Ec}(S)$  et  $\text{Ec}(S')$  coïncident avec celle issue de  $\text{Ec}(S'')$ .

Le cône nef de  $\mathcal{Z}(S)$  sera noté  $\mathcal{Z}^+(S)$ , la forme d'intersection sera toujours notée  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

**Remarque 3.5.** Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de type fini dans  $\text{Bir}(S)$ , on pourra se contenter de n'éclater que les points d'indétermination (parfois infiniment proches) des éléments de  $\Gamma$ . En ce cas,  $\mathcal{E}(S)$  est à base dénombrable. Nous n'aurons donc besoin que d'espaces de HILBERT séparables dans la suite.

**Remarque 3.6.** Soit  $g : S \dashrightarrow S$  une transformation birationnelle virtuellement isotope à l'identité. Conjuguons  $g$  à un automorphisme (encore noté  $g$ ) d'une surface  $S'$  (voir le §2.3). Alors  $g$  induit une isométrie d'ordre fini de  $\text{NS}(S')$  pour la forme d'intersection et la transformation  $g_*$  de  $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(S')$  préserve la somme directe orthogonale  $\mathcal{Z}(S') = \text{NS}(S') \oplus \text{Ec}(S')$ . Si  $e_x$  est un élément de  $\text{Ec}(S')$ , l'image de  $e_x$  par  $g_*$  est le point  $e_{g(x)}$  où  $g(x)$  est défini comme suit : si  $x$  est un point de  $S'$ , alors  $g(x)$  est l'image de  $x$  par  $g$ , si  $x$  est situé sur le diviseur exceptionnel  $D_p$  obtenu en éclatant  $S'$  en un point  $p$ , alors on éclate  $g(p)$ , on relève  $g$  en un difféomorphisme local d'un voisinage de  $D_p$  sur un voisinage de  $D_{g(p)}$  et on prend l'image de  $x$  par ce difféomorphisme, et ainsi de suite. En particulier,  $g_*$  détermine un opérateur borné de  $\mathcal{Z}(S)$ .

D'après le théorème de NOETHER, le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  est engendré par des transformations virtuellement isotopes à l'identité, à savoir  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  et l'involution de CREMONA  $\sigma$  (voir les exemples 2.1 et 2.2). *Chaque transformation crémonnienne plane agit donc continûment sur  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .* Cette propriété peut être démontrée directement pour toutes les surfaces complexes compactes kählériennes car  $\text{Bir}(S)$  agit par isométries pour  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  (voir [7]) ; nous n'en ferons pas usage pour les surfaces irrationnelles.

**3.4. L'espace hyperbolique de dimension infinie.** L'hyperboloïde constitué des points  $x$  de  $\mathcal{Z}(S)$  satisfaisant  $\langle x | x \rangle = 1$  comporte deux nappes, et une seule d'entre elles intersecte le cône nef  $\mathcal{Z}^+(S)$ . Nous noterons  $\mathbb{H}^\infty(S)$  (ou plus simplement  $\mathbb{H}^\infty$ ) cette nappe et la munirons de la métrique définie par

$$\cosh(\text{dist}(x, y)) = \langle x | y \rangle.$$

Il s'agit d'un modèle de « l'espace hyperbolique de dimension infinie ». Le groupe de ses isométries sera noté  $\text{Isom}(\mathbb{H}^\infty)$  ou  $\text{O}(1, \infty)$  (voir [46], §6). L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  est un espace  $\text{CAT}(-1)$  complet et est donc hyperbolique au sens de GROMOV (voir [43]). Comme le dit GROMOV, « this space is as cute and sexy as its finite-dimensional brothers » (voir [46], §6.A.III).

L'action de  $\text{Bir}(S)$  sur  $Z(S)$  préserve la structure entière de  $Z(S)$ , le cône nef et la forme d'intersection. Préservant le cône nef,  $\text{Bir}(S)$  agit isométriquement sur l'espace hyperbolique de dimension infinie  $\mathbb{H}^\infty(S)$ . Nous obtenons ainsi un *plongement*

$$\text{Bir}(S) \hookrightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^\infty(S)).$$

**3.5. Classification des transformations crémonniennes planes.** Puisque l'espace  $\mathbb{H}^\infty$  est un espace métrique  $\text{CAT}(-1)$  complet, ses isométries sont de trois types : elliptique, parabolique ou hyperbolique (voir [43], ou [8] page 228 et suivantes). Dans le cas précis d'un espace hyperbolique, nous pouvons caractériser ces trois types d'isométries de la façon suivante.

- *Isométrie elliptique.* Il existe un élément  $l$  de  $Z(S)$  tel que  $f_*(l) = l$  et  $\langle l|l \rangle > 0$ . En ce cas,  $f_*$  est une rotation autour de  $l$  et l'orbite de tout vecteur  $x$  de  $Z(S)$  (resp. de tout point  $x$  de  $\mathbb{H}^\infty$ ) est bornée.

- *Isométrie parabolique.* Dans ce cas  $f$  n'est pas elliptique mais il existe un élément non nul  $l$  de  $Z^+(S)$  tel que  $f(l) = l$ . Le vecteur  $l$  appartient au cône de lumière de la forme d'intersection, i.e.  $\langle l|l \rangle = 0$ , et  $\mathbf{R}l$  est l'unique droite invariante par  $f_*$  qui intersecte  $Z^+(S)$ . Si  $x$  appartient à  $Z^+(S)$ , la suite de droites  $(f_*)^n(\mathbf{R}x)$  tend vers  $\mathbf{R}l$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

- *Isométrie hyperbolique.* Il existe un nombre réel  $\lambda > 1$  et deux éléments  $l_+$  et  $l_-$  du cône de lumière de  $Z(S)$  tels que  $f_*(l_+) = \lambda l_+$  et  $f_*(l_-) = (1/\lambda)l_-$ . Si  $x$  est un point de  $Z^+(S)$  n'appartenant pas à la droite  $\mathbf{R}l_-$ , la suite  $(1/\lambda)^n f_*^n(x)$  tend vers un vecteur non nul de  $\mathbf{R}l_+$  (un énoncé analogue vaut pour  $l_-$  et  $f^{-1}$ ).

Cette classification est moins fine que celle du paragraphe 2.3. Les deux sont liées par le théorème suivant (voir la définition 2.4).

**Théorème 3.7.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface projective complexe. Soit  $f_*$  l'action induite par  $f$  sur  $Z(S)$ .*

- (i)  $f_*$  est elliptique si, et seulement si  $f$  est virtuellement isotope à l'identité ;
- (ii)  $f_*$  est parabolique si, et seulement si  $f$  est un twist de DE JONQUIÈRES ou d'HALPHEN ;
- (iii)  $f_*$  est hyperbolique si, et seulement si  $f$  est une transformation birationnelle entropique.

*Démonstration.* Rappelons que  $f$  est entropique si et seulement si son (premier) degré dynamique satisfait l'inégalité  $\lambda(f) > 1$ . D'après [7], il existe alors un vecteur non nul  $\xi$  du cône nef  $Z^+(S)$  tel que  $f_*\xi = \lambda(f)\xi$ . En particulier,  $f_*$  est hyperbolique si et seulement si  $\lambda(f)$  est strictement supérieur à 1, si et seulement si  $f$  est entropique.

Soit  $f$  une transformation birationnelle virtuellement isotope à l'identité. Nous pouvons donc conjuguer  $f$  à un automorphisme  $f' : S' \rightarrow S'$  à l'aide d'une application birationnelle  $h : S' \dashrightarrow S$ . L'isométrie  $(f')_*$  de  $\text{NS}(S')$  est d'ordre fini et préserve donc un fibré en droites ample  $l \in \text{NS}(S')$ . L'image de  $l$  dans  $Z(S)$  par l'injection canonique de  $\text{NS}(S')$  dans  $Z(S)$  est un point fixe de  $f_*$  d'auto-intersection strictement positive. Donc  $f_*$  est une isométrie elliptique.

Réciproquement, si  $f$  est une transformation birationnelle de  $S$  telle que  $f_*$  soit elliptique, et si  $l$  est une classe nef, la suite  $\langle l | (f_*)^n l \rangle$  est bornée. Il en résulte que la suite des normes de  $(f^n)_* : \text{NS}(S) \rightarrow \text{NS}(S)$  est bornée (voir [7], preuve du théorème 3.2). D'après le paragraphe 2.3, on sait alors que  $f$  est virtuellement isotope à l'identité.

Les points (i) et (iii) étant établis, le point (ii) en résulte. Précisons toutefois que, lorsque  $f$  est un twist de HALPHEN ou de DE JONQUIÈRES, l'unique fibration  $f$ -invariante détermine un élément du cône de lumière de  $\mathcal{Z}(S)$  qui est préservé par  $f_*$  : c'est l'unique point fixe de l'isométrie  $f_*$  sur l'union de  $\mathbb{H}^\infty(S)$  et de son bord.  $\square$

**Remarque 3.8.** Soient  $l$  un élément de  $\mathcal{Z}^+(S)$ ,  $f$  un élément de  $\text{Bir}(S)$  et  $\alpha$  un nombre complexe tel que  $f_*(l) = \alpha l$ . Alors  $\alpha$  est égal à  $\lambda(f)$  ou  $\lambda(f)^{-1}$  ; il est donc égal à 1 si et seulement si  $f$  est elliptique ou parabolique. Lorsque  $f$  est parabolique,  $l$  correspond à l'unique point fixe de  $f_*$  au bord de l'espace  $\mathbb{H}^\infty(S)$  ; un multiple positif de  $l$  coïncide donc avec la classe de l'unique fibration,  $f$ -invariante.

### 3.6. Stabilisateur d'un point.

**Proposition 3.9.** Soit  $f : S' \dashrightarrow S$  une transformation birationnelle entre deux surfaces. Soient  $l'$  un élément de  $\text{NS}(S') \otimes \mathbf{R}$  et  $l$  un élément de  $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$  tels que (i)  $f_*(l') = l$  et (ii)  $l$  soit une classe ample. Alors  $f$  est un morphisme birationnel.

*Esquisse de démonstration (voir [57], lemme 35.13).* Factorisons  $f$  à l'aide de deux morphismes  $g : S'' \rightarrow S'$  et  $h : S'' \rightarrow S$ , de sorte que  $f = h \circ g^{-1}$ . Supposons pour simplifier que  $g$  est la contraction d'une courbe exceptionnelle de première espèce  $E$ . Le point  $x = g(E)$  est alors l'unique point d'indétermination de  $f$ . Soit  $[E]$  la classe de  $E$  dans  $\text{NS}(S'')$ . Nous obtenons

$$0 = \langle g^*(l') | [E] \rangle = \langle h^*(l) | [E] \rangle.$$

Puisque  $l$  est ample,  $h$  contracte  $E$ . Ainsi, la courbe contractée par  $g$  l'est aussi par  $h$  et  $f$  est holomorphe. Le cas général découle de ce cas particulier.  $\square$

**Remarque 3.10.** Si  $l$  n'est pas ample, on obtient toutefois la propriété suivante : toute courbe contractée par  $g$  est orthogonale à  $h^*(l)$ . Si, par exemple,  $h^*(l)$  est la classe des fibres d'une fibration, ceci signifie que les courbes contractées par  $g$  sont contenues dans les fibres.

Cette proposition montre que si  $l$  est un point de  $\mathcal{Z}^+(S) \otimes \mathbf{R}$  issu d'une classe ample de  $\text{NS}(S') \otimes \mathbf{R}$  (où  $S'$  est birationnelle à  $S$ ), alors tout élément  $f$  de  $\text{Bir}(S)$  pour lequel  $f_* : \mathcal{Z}(S) \rightarrow \mathcal{Z}(S)$  stabilise  $l$  est conjugué à un automorphisme de  $S'$  ; cet automorphisme est virtuellement isotope à l'identité car  $f_*$  est elliptique. La proposition suivante étend ce résultat de deux façons :  $l$  appartient à  $\mathcal{Z}^+(S)$  et  $f$  est remplacée par un groupe de type fini  $G$ . Le fait que  $G$  soit de type fini est essentiel (voir §7).

**Proposition 3.11.** *Soit  $G$  un sous-groupe de type fini de  $\text{Bir}(S)$ . Soit  $l$  un élément de  $\mathcal{Z}^+(S) \setminus \{0\}$  fixé par tous les éléments de  $G$ .*

- (i) *Il existe un élément  $l'$  de  $\mathcal{Z}^+(S)$  qui est  $G$ -invariant.*
- (ii) *Si  $\langle l|l \rangle > 0$  on peut choisir  $l'$  de sorte que  $\langle l'|l' \rangle > 0$ . Dans ce cas, il existe une transformation birationnelle  $\Phi : S \dashrightarrow S'$  telle que  $l'$  soit issu de  $\text{NS}(S')$ ,  $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$  soit contenu dans  $\text{Aut}(S')$ , et un sous-groupe d'indice fini de  $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$  soit contenu dans  $\text{Aut}^0(S')$ .*

*Démonstration.* La difficulté consiste à se ramener de l'hypothèse  $l \in \mathcal{Z}(S)$  à l'hypothèse  $l \in \mathcal{Z}(S)$ . Nous utiliserons la remarque 3.6 et les notations qui l'accompagnent.

Puisque le groupe  $G$  fixe un vecteur nef non nul, tous les éléments de  $G$  sont paraboliques ou elliptiques (voir la remarque 3.8). Si l'un des éléments est parabolique,  $l$  est proportionnel à la classe d'une fibration elliptique ou rationnelle ; dans ce cas, un multiple de  $l$  appartient à  $\mathcal{Z}^+(S)$  et  $\langle l|l \rangle = 0$ . Nous pouvons donc désormais supposer que tous les éléments de  $G$  sont elliptiques.

Soit  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  un système de générateurs fini de  $G$ . D'après le théorème 3.7, chaque  $g_i$  est virtuellement isotope à l'identité et est donc conjugué à un automorphisme d'une surface  $S_i$  birationnelle à  $S$ . La transformation  $(g_i)_*$  préserve donc la décomposition

$$\mathcal{Z}(S) = (\text{NS}(S_i) \otimes \mathbf{R}) \oplus \mathcal{E}(S_i).$$

Pour chaque entier  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , l'élément  $l$  de  $\mathcal{Z}^+(S)$  peut donc être décomposé en

$$l = p_i + \sum a_r(l) e_r \tag{3.1}$$

où  $p_i$  est issu de  $\text{NS}(S_i)$  et les  $e_r$  sont associés à des éclatements de points dominants  $S_i$ , i.e. à des points de  $\text{Eclat}(S_i)$ . D'après la remarque 3.6,  $g_i$  permute entre eux les termes  $a_r(l) e_r$  de la décomposition (3.1) :

$$\forall j, \exists j', (g_i)_*(a_r(l) e_r) = a_{r'}(l) e_{r'}.$$

Puisque la somme hilbertienne  $\sum a_r(l)^2$  doit être finie, ou bien l'orbite de  $e_r$  par  $(g_i)_*$  est finie, ou bien  $a_r(l)$  est nul.

Décomposons maintenant  $l$  dans la base canonique de  $\mathcal{Z}(S)$ ,

$$l = p_0 + \sum a_x(l) e_x$$

où  $p_0$  appartient à  $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$  et les  $e_x$  correspondent à des éclatements au-dessus de  $S$ . Soit  $S''$  une surface qui domine à la fois les  $S_i$  et la surface  $S$ . Soit  $J$  une partie finie de  $\text{Eclat}(S)$  telle que l'image de  $\text{NS}(S'')$  dans  $\mathcal{Z}(S)$  soit contenue dans l'espace vectoriel engendré par  $\text{NS}(S)$  et les  $e_j$ ,  $j \in J$ . Chaque  $p_i$  peut alors être décomposé en une somme finie

$$p_i = p_i(S) + \sum_{j \in J} a_j(p_i) e_j$$

avec  $p_i(S) \in \text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$ .

Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif inférieur à la moitié de la plus petite valeur non nulle parmi les  $|a_j(p_i)|$ ,  $j \in J$ . Soit  $g_i$  l'un des  $k$  générateurs du groupe  $G$ . Soit  $e_x$  un élément de  $\text{Eclat}(S)$  pour lequel le coefficient  $a_x(l)$  est plus petit que  $\varepsilon$ . Alors  $x$  n'appartient pas à  $J$  donc  $e_x$  n'est pas issu de  $\text{NS}(S_i)$ . Ceci montre que

$$(g_i)_* a_x(l) e_x = a_{x'}(l) e_{x'}$$

où  $x' = g_i(x)$  est un autre point de  $\text{Eclat}(S_i)$ . Nous en déduisons que le groupe  $G$  stabilise le vecteur

$$l_0 = \sum_{|a_x(l)| < \varepsilon} a_x(l) e_x$$

où la somme ne porte que sur les termes pour lesquels  $|a_x(l)| < \varepsilon$ . Par conséquent, la somme finie  $l' = l - l_0$  est  $G$ -invariante. Puisque  $l_0$  est orthogonal à  $l'$  et  $\langle l_0 | l_0 \rangle \leq 0$ , nous avons  $\langle l' | l' \rangle \geq \langle l | l \rangle$ . Ce vecteur appartient à  $Z(S)$ .

Supposons maintenant que  $\langle l' | l' \rangle > 0$  (ce qui ne permet pas encore d'appliquer la proposition 3.9). Si  $C$  est une courbe irréductible de  $S''$  contractée par un élément  $g$  de  $G$ , alors  $\langle l' | C \rangle = 0$ . Ceci montre que le sous- $\mathbf{Z}$ -module  $W$  de  $\text{NS}(S'')$  engendré par les classes des courbes contractées par  $G$  est entièrement contenu dans l'orthogonal de  $l'$  pour la forme d'intersection. Le théorème de l'indice de HODGE montre alors que la forme d'intersection est définie négative sur  $W$ , et le critère de MUMFORD-GRAUERT permet de contracter simultanément toutes ces courbes, ce qui fournit un morphisme birationnel  $\pi : S'' \rightarrow S'''$ , où  $S'''$  est une surface munie d'un nombre fini de singularités normales. Le morphisme  $\pi$  conjugue  $G$  à un sous-groupe de  $\text{Aut}(S''')$ , et  $G$  agit donc par automorphismes sur l'unique résolution minimale  $S'$  de  $S'''$ . Puisque tous les éléments de  $G$  sont elliptiques, leur action sur  $\text{NS}(S')$  est d'ordre fini ; comme tout groupe linéaire de torsion et de type fini est fini, un sous-groupe d'indice fini de  $G$  est contenu dans  $\text{Aut}^0(S')$ .  $\square$



#### 4. ACTION DE GROUPES DE KAZHDAN SUR LES SURFACES

Dans cette partie nous décrivons les actions birationnelles des groupes de KAZHDAN sur les surfaces : il s'agit de montrer le théorème A et quelques corollaires. Nous commençons par le cas facile des surfaces irrationnelles.

##### 4.1. Surfaces irrationnelles.

**Théorème 4.1.** *Si  $X$  est une surface complexe compacte kählérienne qui n'est pas rationnelle, tout sous-groupe dénombrable de  $\text{Bir}(X)$  qui a la propriété (T) de KAZHDAN est un groupe fini.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive ou que  $X$  est une surface réglée irrationnelle. Dans ce paragraphe,  $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Bir}(X)$  est un morphisme d'un groupe de KAZHDAN dénombrable vers  $\text{Bir}(X)$ . Il s'agit de montrer que l'image de  $\alpha$  est finie.

4.1.1. *Préliminaire (voir [21]).* Nous utiliserons plusieurs fois le théorème suivant : *Soit  $\Gamma$  un groupe de KAZHDAN ; si  $\rho$  est un morphisme de  $\Gamma$  vers le groupe orthogonal  $O(1, n)$ , alors  $\rho(\Gamma)$  est relativement compact.* Ceci s'applique en particulier pour les morphismes de  $\Gamma$  dans  $SL(2, \mathbf{R})$  et  $SL(2, \mathbf{C})$  car ces groupes de LIE sont localement isomorphes à  $O(1, 2)$  et  $O(1, 3)$  ; dans ce cas, l'image de  $\rho$  est en fait finie, car les groupes  $O(2)$  et  $O(3)$  ne contiennent pas de groupe de KAZHDAN infini.

4.1.2. *Dimension de KODAIRA positive.* Lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive ou nulle,  $X$  possède un unique modèle minimal  $X_0$  obtenu en contractant une à une des courbes exceptionnelles de première espèce. Le groupe  $\text{Bir}(X)$  est alors conjugué au groupe des automorphismes de  $X$ . Nous pouvons donc supposer que  $\alpha$  est à valeurs dans  $\text{Aut}(X_0)$ . L'action de  $\alpha(\Gamma)$  sur le groupe de cohomologie  $H^{1,1}(X_0, \mathbf{R})$  y préserve la forme d'intersection, qui est de signature  $(1, \rho(X) - 1)$  (voir le §3.1). L'image de  $\Gamma$  dans  $GL(H^{1,1}(X_0, \mathbf{R}))$  est donc relativement compacte (§4.1.1). Chaque élément de  $H^{2,0}(X_0, \mathbf{C})$  est représenté par une unique 2-forme holomorphe et l'action de  $\alpha(\Gamma)$  sur  $H^{2,0}(X_0, \mathbf{C})$  préserve le produit hermitien (défini positif)

$$(\Omega, \Omega') \mapsto \int_X \Omega \wedge \overline{\Omega'}.$$

Par conjugaison, l'action de  $\alpha(\gamma)$  sur  $H^{0,2}(X_0, \mathbf{C})$  est également unitaire. L'image de  $\Gamma$  dans  $GL(H^2(X_0, \mathbf{C}))$  est donc relativement compacte. Puisque  $\Gamma$  préserve la structure entière de la cohomologie, cette image est finie. D'après [55], il existe un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$  tel que  $\alpha(\Gamma_0)$  soit contenu dans la composante connexe de l'identité  $\text{Aut}^0(X_0)$ . Puisque la dimension de KODAIRA de  $X_0$  est positive, ce groupe est abélien (voir [9]). Puisque  $\Gamma_0$  hérite de la propriété de KAZHDAN,  $\alpha(\Gamma_0)$  et donc  $\alpha(\Gamma)$  sont finis (voir [21]).

4.1.3. *Surfaces réglées.* Supposons maintenant que  $X$  est une surface réglée irrrationnelle. La fibration d'ALBANESE de  $X$  détermine une fibration holomorphe non triviale à fibres rationnelles  $a_X : X \rightarrow B$  où  $B$  est une courbe de genre supérieur ou égal à 1. Cette fibration est invariante sous l'action de  $\text{Bir}(X)$  : il existe un morphisme de  $\text{Bir}(X)$  dans  $\text{Aut}(B)$  tel que  $a_X$  soit équivariante. On conclut alors avec le lemme suivant, qui est extrait de [23].

**Lemme 4.2.** *Soient  $S$  une surface complexe compacte,  $B$  une courbe et  $\pi : S \rightarrow B$  une fibration holomorphe de  $S$ . Soit  $\text{Bir}(S, \pi)$  le groupe des transformations birationnelles de  $S$  qui permutent les fibres de  $\pi$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe dénombrable de  $\text{Bir}(S, \pi)$  qui a la propriété (T),  $\Gamma$  est fini.*

*Démonstration.* L'hypothèse signifie qu'il existe un morphisme  $\rho$  de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(B)$  tel que  $\pi \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \pi$  pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Le groupe  $\text{Aut}(B)$  est isomorphe à  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$  lorsque  $B$  est la sphère de RIEMANN et est virtuellement abélien sinon. Puisque  $\Gamma$  a la propriété (T), le noyau  $\Gamma_0$  de  $\rho$  est d'indice fini dans  $\Gamma$  (§4.1.1). Trivialisons la fibration  $\pi$  au-dessus d'un ouvert de ZARISKI  $B'$  de  $B$ , de sorte que  $\pi^{-1}(B')$  soit isomorphe à  $B' \times E$ , où  $E$  est une courbe, et que  $\pi$  s'identifie à la projection sur  $B'$ . Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_0$ , il existe une application rationnelle  $A_\gamma : B' \dashrightarrow \text{Aut}(E)$  telle que  $\gamma(b, z) = (b, A_\gamma(b)(z))$ . Si  $E$  est de genre 0, ceci détermine un morphisme injectif  $\gamma \mapsto A_\gamma$  de  $\Gamma_0$  vers le groupe  $\text{PGL}(2, \mathcal{M}(B))$  où  $\mathcal{M}(B)$  est le corps des fonctions rationnelles de  $B$ . Comme  $\Gamma_0$  a la propriété (T), l'image de ce morphisme est finie (§4.1.1). Si le genre de  $E$  est strictement positif,  $\text{Aut}(E)$  est virtuellement abélien, et l'on montre de même que l'image de  $\gamma$  est finie. Le groupe  $\Gamma$  est donc fini.  $\square$

4.2. **Actions sur le plan.** Dans ce paragraphe, nous montrons le résultat principal de cette partie, celui qui termine la preuve du théorème A.

**Théorème 4.3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de KAZHDAN discret. Soit  $\alpha$  un morphisme de  $\Gamma$  dans le groupe de CREMONA  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Ou bien  $\alpha(\Gamma)$  est fini, ou bien  $\alpha(\Gamma)$  est conjugué à un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ .*

4.2.1. *Automorphismes isotopes à l'identité.* Soit  $S$  une surface complexe compacte et  $\text{Aut}^0(S)$  le groupe de ses automorphismes isotopes à l'identité. Si  $E$  est une courbe rationnelle lisse de  $S$  dont l'auto-intersection est égale à  $-1$ ,  $E$  est uniquement déterminée par sa classe d'homologie. Le groupe  $\text{Aut}^0(S)$  agit trivialement sur l'homologie de  $S$  et préserve donc la courbe  $E$ . Contractant la courbe  $E$ , nous obtenons un morphisme  $\pi : S \rightarrow S'$  qui conjugue  $\text{Aut}^0(S)$  à un sous-groupe de  $\text{Aut}^0(S')$ . Répétant cette procédure, nous voyons que, pour toute surface  $S$ , il existe un morphisme birationnel  $\varepsilon : S \rightarrow S_0$  de  $S$  vers un modèle minimal  $S_0$  de  $S$  tel que  $\varepsilon \text{Aut}^0(S) \varepsilon^{-1}$  soit un sous-groupe de  $\text{Aut}^0(S_0)$ . Si  $S$  est rationnelle, les modèles minimaux sont

- le plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  et  $\text{Aut}^0(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}(3, \mathbf{C})$ ;

- la quadrique  $Q = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  pour laquelle  $\text{Aut}^0(Q)$  correspond au groupe  $\text{PGL}(2, \mathbf{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbf{C})$  agissant diagonalement ;
- les surfaces de HIRZEBRUCH  $\mathbb{F}_m$  : pour tout entier  $m \geq 1$ , la surface  $\mathbb{F}_m$  est construite en quotientant l'espace total du fibré  $O(m) \oplus O(0)$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , privé de sa section nulle, par les homothéties dans les fibres. La surface  $\mathbb{F}_m$  fibre donc naturellement sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , avec des fibres rationnelles ; nous noterons  $\pi_m : \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  cette fibration. Les automorphismes de  $\mathbb{F}_m$  préservent cette fibration et agissent par homographies sur la base et dans les fibres.

Le lemme 4.2 et le théorème 4.1 fournissent donc le résultat suivant.

**Lemme 4.4.** *Si  $S$  est une surface complexe compacte kählérienne, si  $\Gamma$  a la propriété (T) et si  $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Aut}^0(S)$  est un morphisme, ou bien l'image de  $\alpha$  est finie ou bien  $\alpha$  est conjugué à un morphisme de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  par un morphisme birationnel  $S \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ .*

4.2.2. *Démonstration du théorème 4.3.* Il s'agit de juxtaposer la partie 3 à des idées exposées par GROMOV et VALETTE dans [46], §7.A, et [17], §7.4.

Composant  $\alpha$  avec l'action de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  sur l'espace de PICARD-MANIN  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ , nous obtenons un morphisme  $\alpha_*$  de  $\Gamma$  dans le groupe d'isométries de  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  pour la forme d'intersection  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . En utilisant les notations du paragraphe 3.4, ceci détermine une action de  $\Gamma$  par isométries sur  $\mathbb{H}^\infty$  ou, plus précisément, sur  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ .

Notons  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  la distance associée à la métrique de  $\mathbb{H}^\infty$  et fixons un point  $x$  de  $\mathbb{H}^\infty$ . D'après le corollaire 8.2 de [34], la fonction

$$\gamma \mapsto \log(\cosh \text{dist}(\gamma(x), x))$$

est de type négatif sur  $\Gamma$ , donc bornée puisque  $\Gamma$  a la propriété (T) ([21], chapitres 5 et 6). L'orbite  $\text{Orb}(x, \Gamma)$  de  $x$  sous  $\Gamma$  forme donc un ensemble borné de  $\mathbb{H}^\infty$ . Puisque  $\mathbb{H}^\infty$  satisfait l'inégalité de la médiane nous pouvons appliquer le lemme du centre ([21], page 37) : il existe un unique point  $x_0$  de  $\mathbb{H}^\infty$  qui minimise la fonction

$$y \in \mathbb{H}^\infty \mapsto \sup_{g \in \Gamma} \{\text{dist}(y, g(x))\}.$$

Ce point  $x_0$ , appelé centre de l'orbite de  $x$ , est invariant sous l'action de  $\alpha_*(\Gamma)$ , ce qui montre que  $\alpha_*(\Gamma)$  fixe un point  $x_0$  de  $\mathbb{H}^\infty$ .

Ayant la propriété (T), le groupe  $\Gamma$  est de type fini ([21], page 11). Nous pouvons donc appliquer la proposition 3.11 : il existe un sous-groupe distingué et d'indice fini  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$  tel que  $\alpha(\Gamma_0)$  soit conjugué à un sous-groupe de  $\text{Aut}^0(S)$  où  $S$  est une surface rationnelle. Le paragraphe 4.2.1 fournit l'alternative : ou bien  $\alpha(\Gamma)$  est fini ou bien  $\alpha(\Gamma_0)$  est conjugué à un sous-groupe infini de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Nous pouvons donc désormais supposer que  $\alpha(\Gamma_0)$  est un sous-groupe infini de  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ .

**Lemme 4.5.** *Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  qui a la propriété (T) de KAZHDAN et si  $G$  préserve une courbe  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ ,  $G$  est fini.*

*Démonstration.* Si  $G$  préserve une courbe, son adhérence de ZARISKI est un sous-groupe algébrique strict de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ . Par ailleurs, si  $H$  est un sous-groupe algébrique complexe de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  de codimension supérieure ou égale à 1, tout sous-groupe de KAZHDAN de  $H$  est fini.  $\square$

Puisque  $\alpha(\Gamma_0)$  est infini et a la propriété  $(T)$ , le lemme montre que  $\alpha(\Gamma_0)$  ne préserve aucune courbe  $C$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ . Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$ . Puisque  $\Gamma_0$  est distingué dans  $\Gamma$ ,

$$\gamma \circ \Gamma_0 = \Gamma_0 \circ \gamma,$$

et comme  $\alpha(\Gamma_0)$  agit par automorphismes sur le plan,  $\alpha(\Gamma_0)$  stabilise l'union finie des courbes contractées par la transformation birationnelle  $\alpha(\gamma)$ . Nous déduisons du lemme 4.5 que  $\alpha(\gamma)$  ne contracte aucune courbe, *i.e.* que  $\alpha(\gamma)$  est un automorphisme du plan. Ainsi,  $\alpha(\Gamma)$  est entièrement contenu dans  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  et le théorème est démontré.

**4.3. Remarques autour du « programme de Zimmer ».** Le « programme de ZIMMER » consiste à étudier les actions de réseaux de groupes de LIE par difféomorphismes sur les variétés compactes, dans l'esprit des travaux de MARGULIS concernant les actions linéaires. Une conjecture centrale de ce domaine stipule, entre autres choses, qu'un réseau  $\Gamma$  d'un groupe de LIE réel simple (connexe)  $G$  ne peut agir fidèlement sur une variété compacte dont la dimension serait strictement inférieure au rang réel de  $G$ . Dans cet esprit, le théorème A admet le corollaire suivant.

**Corollaire 4.6.** *Soit  $G$  un groupe de LIE réel, connexe et presque simple. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Soit  $S$  une surface complexe compacte kählérienne. Si le rang réel de  $G$  est supérieur ou égal à 3, tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{Bir}(S)$  a une image finie. Si le rang réel de  $G$  est égal à 2, et si  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{Bir}(S)$  est un morphisme dont l'image est infinie, il existe une application birationnelle de  $S$  vers  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  qui conjugue  $\rho(\Gamma)$  à un sous-groupe de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$ .*

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que le rang réel de  $G$  est supérieur ou égal à 2. En ce cas,  $G$  et  $\Gamma$  ont la propriété  $(T)$ . Si  $S$  n'est pas rationnelle, tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{Bir}(S)$  a donc une image finie. Nous pouvons donc supposer maintenant que  $S$  est le plan projectif et que l'image de  $\Gamma$  est contenue dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$  (appliquer le théorème 4.3). On déduit alors de [58], théorème 2' page 4, que le rang de  $G$  est inférieur ou égal à 2 (voir par exemple [11], pages 764-765, pour cet argument).  $\square$

**Remarque 4.7.** Notons  $\mathrm{Bir}^{\omega}(\mathbb{P}^2(\mathbf{R}))$  le sous-groupe de  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  constitué des transformations birationnelles à coefficients réels qui induisent des difféomorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$ . Ce groupe s'identifie à un sous-groupe des difféomorphismes analytiques réels de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$  et se place donc à l'intersection de  $\mathrm{Diff}(\mathbb{P}^2(\mathbf{R}))$  et  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Sous cette forme, le théorème A fournit un exemple supplémentaire confirmant les conjectures de ZIMMER pour les difféomorphismes de surfaces réelles compactes (voir [41] ou [35]).

Pour ce qui concerne les groupes de rang 1, deux situations distinctes apparaissent. Si  $G$  est localement isomorphe à  $\mathrm{Sp}(1, n)$  ou  $F_4^{(-20)}$ , alors  $G$  et  $\Gamma$  ont la propriété (T). On déduit alors du théorème A et des résultats de rigidité de CORLETTE ([19]) que toute action birationnelle de  $\Gamma$  sur une surface projective complexe se réduit à l'action d'un groupe fini. Le cas intéressant est donc celui des réseaux de  $\mathrm{SO}(1, n)$  et de  $\mathrm{SU}(1, n)$ .

**Exemple 4.8** (Surfaces de Coble). Soit  $C$  une courbe sextique plane comportant 10 points doubles, choisie génériquement parmi les courbes de ce type. Soit  $X$  la surface rationnelle obtenue en éclatant ces dix points. Le rang du groupe de NÉRON-SEVERI de  $X$  est donc égal à 11 et le fibré canonique  $K_X$  détermine un élément  $[K_X]$  de  $\mathrm{NS}(X)$  d'auto-intersection  $-1$ . Soit  $M_X$  l'orthogonal de  $[K_X]$  dans  $\mathrm{NS}(X)$ . Puisque le fibré canonique est invariant par tout automorphisme de  $X$ , nous obtenons un morphisme de  $\mathrm{Aut}(X)$  dans le groupe  $\mathrm{O}(M_X)$  des isométries de  $M_X \otimes \mathbf{R}$  pour la forme d'intersection ; puisque  $[K_X]^2$  est négatif, la forme d'intersection est non dégénérée et de signature  $(1, 9)$  sur  $M_X$ . Les travaux de COBLE et DOLGACHEV montrent que ce morphisme plonge  $\mathrm{Aut}(X)$  en un réseau de  $\mathrm{O}(M_X)$ . Ainsi,  $X$  étant rationnelle,  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  contient une copie d'un réseau de  $\mathrm{O}(1, 9)$  (voir [32] et les références qui s'y trouvent).

**Exemple 4.9.** Soit  $\Sigma_g$  la surface de genre  $g$ , avec  $g \geq 2$ . D'après [16], il existe des plongements de  $\pi_1(\Sigma_g)$  dans le groupe  $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$  des automorphismes polynomiaux du plan affine, donc dans  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  qui ne sont pas birationnellement conjugués à un plongement dans un groupe d'automorphismes d'une surface rationnelle. Je ne sais pas s'il existe des réseaux cocompacts de  $\mathrm{SO}(1, 3)$  qui admettent de tels plongements.

**Question :** Quelles sont les valeurs de l'entier  $n$  pour lesquelles existe un réseau de  $\mathrm{SO}(1, n)$  qui s'injecte dans le groupe des transformations birationnelles (resp. des automorphismes) d'une surface projective complexe ?

Je ne sais malheureusement pas répondre à cette question. Si  $X$  est une surface K3, le noyau de l'action de  $\mathrm{Aut}(X)$  sur  $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$  est fini. Puisque la dimension de  $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$  est égale à 20, les théorèmes de rigidité de MOSTOW montrent qu'un réseau de  $\mathrm{O}(1, n)$  ne peut se plonger dans  $\mathrm{Aut}(X)$  si  $n$  est supérieur à 19. À l'inverse, pour tout entier  $n \leq 9$ , il existe un réseau de  $\mathrm{SO}(1, n)$  qui est isomorphe au groupe d'automorphismes d'une surface K3 (ceci résulte du théorème de TORELLI pour les surfaces K3 et des résultats de NIKULIN ; voir [61] corollaire 2.9). La question précédente se réduit donc au cas des plongements de réseaux dans le groupe de CREMONA.<sup>1</sup>

---

1. On dispose maintenant (2012) d'un joli résultat de Delzant et Py pour les morphismes de réseaux uniformes de  $\mathrm{SU}_{1,n}$ , et plus généralement de groupes fondamentaux de variétés kählériennes compactes, dans le groupe de Cremona.

## 5. CENTRALISATEURS ET GROUPES ABÉLIENS

Dans cette partie, nous utilisons l'action sur l'espace de PICARD-MANIN pour décrire les éléments de  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$  lorsque  $f$  est une transformation birationnelle entropique d'une surface complexe compacte kählérienne  $S$ . Une seconde méthode sera exposée dans l'annexe : elle fournit un critère portant sur la dynamique d'une transformation holomorphe, rationnelle ou analytique réelle qui assure que son centralisateur est virtuellement cyclique.

### 5.1. Centralisateur et groupe de PICARD-MANIN.

**Théorème 5.1.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne  $X$  dont le premier degré dynamique  $\lambda(f)$  est strictement supérieur à 1. Il existe un morphisme*

$$\alpha : \text{Cent}(f, \text{Bir}(X)) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$$

tel que

- (i) pour tout élément  $g$  de  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$ ,  $\alpha(g)$  est égal à  $\lambda(g)$  ou  $1/\lambda(g)$  ;
- (ii) le noyau de  $\alpha$  est constitué de transformations d'ordre fini ;
- (iii) si  $G$  est un sous-groupe de type fini dans  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$ ,  $\alpha(G)$  est un groupe cyclique ;
- (iv) Si  $g$  appartient à  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$ , il existe deux entiers  $n > 0$  et  $m \in \mathbf{Z}$  tels que  $g^n = f^m$ .

Ce théorème précise donc le théorème B. La démonstration s'inspire d'arguments classiques dans le groupe  $\text{SO}(1, n)$  et de [29]. La démonstration qui suit, distincte de la démonstration initiale que j'avais obtenue (voir [12]), résulte d'une discussion avec C. FAVRE.

*Démonstration.* Fixons un vecteur propre  $\Theta^+$  de  $f_*$  dans  $Z^+(X)$  pour la valeur propre  $\lambda(f)$ , de sorte que  $\mathbf{R}\Theta^+$  coïncide avec l'espace propre de  $f_*$  associé à  $\lambda(f)$ . Le centralisateur de  $f$  préserve la droite  $\mathbf{R}\Theta^+$ , ce qui détermine un morphisme

$$\alpha : \text{Cent}(f, \text{Bir}(X)) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$$

pour lequel  $g_*(\Theta^+) = \alpha(g)\Theta^+$  quelque soit  $g$  dans  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$  ; d'après la remarque 3.8,  $\alpha(g)$  est égal à  $\lambda(g)$  ou  $1/\lambda(g)$  quelque soit  $g$ .

Puisque  $f$  est entropique, aucun multiple de  $\Theta^+$  ne coïncide avec la classe d'une fibration rationnelle ou elliptique. Le noyau de  $\alpha$  est donc constitué d'éléments elliptiques. Si  $h$  est un élément du noyau de  $\alpha$  nous pouvons donc supposer, quitte à effectuer une conjugaison birationnelle  $X' \dashrightarrow X$ , que  $h$  est un automorphisme de  $X$  dont un itéré  $h^k$  appartient à  $\text{Aut}^0(X)$ . Si  $h^k$  est d'ordre infini, l'adhérence de ZARISKI du groupe

$$\{(h^k)^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$$

dans  $\text{Aut}^0(X)$  est un groupe abélien de dimension strictement positive qui commute avec  $f$ . Ceci montre que  $f$  commute au flot d'un champ de vecteurs holomorphe sur  $X$ , ce qui est impossible pour une transformation birationnelle entropique (voir [15]). Ainsi, tout élément du noyau de  $\alpha$  est d'ordre fini.

Soit  $G$  un sous-groupe de type fini de  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$  pour lequel nous fixons un système de générateurs  $g_1, \dots, g_k$ . Notons  $\alpha_G$  la restriction de  $\alpha$  à  $G$  et étudions son image. Chaque  $\lambda(g_i)$ ,  $0 \leq i \leq k$ , est un entier algébrique dont nous noterons le degré  $d(\lambda(g_i))$  (voir [26]). L'image de  $\alpha_G$  est donc constituée d'entiers algébriques de degré inférieur à

$$d := \prod_{i=1}^k d(\lambda(g_i)).$$

Soit  $t$  un élément de  $\alpha_G(G)$  compris entre  $1/2$  et  $2$ . C'est un entier algébrique de degré  $d(t) \leq d$ , dont nous noterons  $\chi_t(z)$  le polynôme minimal. Puisque  $t$  est un nombre de PISOT ou de SALEM (voir [26]), les racines de  $\chi_t(z)$  qui sont distinctes de  $t$  et  $1/t$  sont de module 1. Comme  $t$  et  $1/t$  sont inférieurs à 2 et  $d(t)$  est inférieur à  $d$ , les coefficients du polynôme  $\chi_t(z)$  sont majorés par  $(2d!)$ . Il n'y a qu'un nombre fini de polynômes à coefficients entiers de degré  $d$  dont les coefficients sont ainsi majorés. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de  $\alpha_G(G)$  dans l'intervalle  $[1/2, 2]$ , si bien que l'image de  $\alpha_G$  est discrète et, par suite, cyclique.

Soient  $g$  un élément de  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$  et  $G$  le groupe engendré par  $f$  et  $g$ . Il existe alors un réel  $\lambda_0 > 1$  tel que  $\alpha(G)$  coïncide avec le groupe cyclique  $\{\lambda_0^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$ . Soient  $n > 0$  un entier tel que  $\alpha(f) = \lambda_0^n$  et  $m \in \mathbf{Z}$  tel que  $\alpha(g) = \lambda_0^m$ . La transformation birationnelle  $g^n \circ f^{-m}$  appartient ainsi au noyau de  $\alpha$  et est donc d'ordre fini. Puisque  $f$  et  $g$  commutent, il existe  $n' > 0$  et  $m' \in \mathbf{Z}$  tels que  $g^{n'}$  soit égal à  $f^{m'}$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**5.2. Centralisateurs des applications birationnelles des surfaces.** Nous venons de décrire les transformations birationnelles qui commutent à une transformation birationnelle entropique. Lorsque  $f$  est un twist de DE JONQUIÈRES (voir la définition 2.4), le calcul du centralisateur est plus délicat et conduit à des situations variées (voir [24]). Lorsque  $f$  est un twist de HALPHEN, il est encore possible de borner la taille du centralisateur de  $f$  :

**Proposition 5.2.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle du plan projectif qui est un twist de HALPHEN. Le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  contient un sous-groupe d'indice fini qui est abélien, libre et de rang inférieur ou égal à 8.*

*Démonstration.* (voir [45]) Quitte à faire un changement de variable birationnelle  $\phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ , nous pouvons supposer que  $f$  est un élément d'une surface rationnelle  $S$  qui est munie d'une fibration elliptique  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et que cette fibration est  $f$ -équivariante. Nous pouvons en outre supposer que cette fibration est minimale (il n'y a pas de courbe lisse d'auto-intersection  $-1$  dans les fibres) et, donc, que  $f$  est un automorphisme. La fibration elliptique étant

l'unique fibration  $f$ -invariante (voir [26]), elle est invariante par le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Bir}(S)$ . Ce groupe est donc contenu dans  $\text{Aut}(S)$ .

Puisque la fibration est minimale, la surface  $S$  est obtenue en éclatant le plan en les neuf points-base d'un pinceau de HALPHEN et le rang de son groupe de NÉRON-SEVERI est donc égal à 10. Le groupe d'automorphismes de  $S$  se plonge en outre dans les endomorphismes de  $H^2(S, \mathbf{Z})$  pour la forme d'intersection et préserve la classe  $[K_X]$  du fibré canonique, c'est-à-dire la classe de la fibration elliptique. L'hyperplan orthogonal à  $[K_X]$  est de dimension 9 et la forme d'intersection, en restriction à cet hyperplan  $[K_X]^\perp$ , est semi-négative : son noyau coïncide avec  $\mathbf{Z}[K_X]$ . Le groupe  $\text{Aut}(X)$  contient donc un groupe abélien d'indice fini dont le rang est inférieur ou égal à 8.  $\square$

Lorsque  $f$  est un twist de JONQUIÈRES, le calcul du centralisateur est plus délicat et conduit à des situations variées (voir [24]).<sup>2</sup>

---

2. On a maintenant (2012) une compréhension complète de ces calculs de centralisateurs dans le groupe de DE JONQUIÈRES (travaux de Cerveau et Déserti, Blanc et Déserti, et Cantat)



## 6. ALTERNATIVE DE TITS

Dans cette partie, nous montrons l'alternative de TITS pour les groupes d'automorphismes des variétés kählériennes compactes et, surtout, le théorème C concernant l'alternative de TITS pour les transformations birationnelles des surfaces.

Dans la version publiée, le premier paragraphe de cette partie (§ 6.1) comportait des erreurs qui m'ont été signalées par Yves de Cornulier, Tien-Cuong Dinh, et Stéphane Lamy. Je les remercie pour leurs conseils.

**6.1. Remarques concernant l'alternative de TITS.** La suite des groupes dérivés d'un groupe  $G$  est définie par la récurrence  $D_0(G) = G$ ,  $D_1(G) = [G, G]$ ,  $D_{n+1}(G) = D_1(D_n(G))$ . Un groupe  $G$  est résoluble s'il existe un entier  $n$  tel que  $D_n(G)$  soit réduit à l'élément neutre ; la longueur de résolubilité de  $G$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $D_n(G)$  soit réduit à l'élément neutre. Toute extension d'un groupe résoluble par un autre est résoluble et il en va de même pour les groupes virtuellement résolubles, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 6.1.** *Soit  $G$  un groupe. Supposons que  $G$  soit une extension d'un groupe virtuellement résoluble  $R$  par un autre groupe virtuellement résoluble  $Q$  :*

$$1 \rightarrow R \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

*Alors  $G$  est virtuellement résoluble.*

Pour établir ce résultat, commençons par un lemme préliminaire.

**Lemme 6.2.** *Soit  $B$  un groupe et  $C$  un sous-groupe de  $B$  qui est résoluble, distingué et maximal pour ces propriétés. Alors  $C$  est caractéristique :  $\varphi(C) = C$  pour tout automorphisme  $\varphi$  de  $B$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  un automorphisme. Le groupe  $\varphi(C)$  est un sous-groupe de  $B$  qui est résoluble, distingué, et maximal pour ces propriétés. Il suffit donc de montrer que  $\varphi(C)$  est inclus dans  $C$ . L'image de  $\varphi(C)$  dans  $B/C$  par la projection canonique est un sous-groupe résoluble de  $B/C$  qui est distingué, donc  $\varphi(C)$  est réduit à l'élément neutre car  $C$  est maximal. Ainsi,  $\varphi(C) \subset C$ , comme annoncé.  $\square$

*Démonstration (voir aussi [28]).* Quitte à changer  $Q$  en l'un de ses sous-groupes résolubles d'indice fini, nous pouvons supposer que  $Q$  est résoluble de longueur  $q$ . Les sous-groupes dérivés de  $Q$  forment donc une suite  $(D_i(Q))_{0 \leq i \leq q}$  de sous-groupes emboîtés tels que  $D_i(Q)/D_{i+1}(Q)$  est abélien. L'image réciproque de  $D_i(Q)$  par la projection  $\pi: G \rightarrow G/Q$  est un sous-groupe distingué  $R_i$  de  $G$  ; on a  $R_q = R$  car  $D_q(Q)$  est réduit à l'élément neutre.

Commençons par montrer que  $R_{q-1}$  est virtuellement résoluble. Pour cela, on choisit un sous-groupe  $C_0 \subset R_q$  qui est résoluble et d'indice fini ; comme  $C_0$  est d'indice fini, l'intersection des  $hC_0h^{-1}$  pour  $h$  dans  $R_q$  est aussi d'indice fini et est distingué. Il existe donc un sous-groupe  $C$  de  $R_q$  qui est distingué, résoluble, et maximal pour ces propriétés. Puisque  $R_q$  est distingué dans  $R_{q-1}$ ,

le lemme précédent montre que  $C$  est distingué dans  $R_{q-1}$ . Soit  $R'_{q-1}$  le sous-groupe de  $R_{q-1}$  qui agit trivialement sur  $R_q/C$  par conjugaison ; c'est un sous-groupe d'indice fini car  $R_q/C$  est fini.

Puisque  $R_{q-1}/R_q$  est abélien, le groupe dérivé  $D_1(R'_{q-1})$  est contenu dans  $R_q$  et, par construction, c'est un sous-groupe de  $C$ . Donc  $R'_{q-1}$  est un sous-groupe de  $R_q$  d'indice fini qui est résoluble, de longueur de résolubilité inférieure à  $r+1$  si  $r$  est celle de  $C$ .

On conclut par récurrence en remplaçant  $R_{q-i}$  par  $R_{q-i-1}$  et  $R_{q-i-1}$  par  $R_{q-i-2}$ ,  $i = 0, \dots, q-2$ .  $\square$

Un groupe  $G$  « vérifie l'alternative de TITS » si tout sous-groupe de type fini  $\Gamma$  dans  $G$  contient un groupe libre non abélien ou un sous-groupe résoluble d'indice fini. Nous dirons qu'il vérifie l'alternative de Tits forte si tout sous-groupe  $\Gamma$  de  $G$  contient un groupe libre non abélien ou un sous-groupe résoluble d'indice fini. L'alternative de Tits forte est valable dans les groupes linéaires  $GL_n(\mathbf{C})$  et donc dans les groupes  $GL_n(\mathbf{k})$  où  $\mathbf{k}$  est un corps de caractéristique nulle qui se plonge dans  $\mathbf{C}$  (voir [67]). La proposition suivante se déduit facilement du lemme 6.1.

**Proposition 6.3.** *Si  $G_1$  et  $G_2$  satisfont l'alternative de TITS forte, et si  $G$  est une extension de  $G_1$  par  $G_2$ , alors  $G$  satisfait l'alternative de TITS forte.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $G$  ne contenant pas de sous-groupe libre non abélien. Soit  $\pi(\Gamma)$  l'image de  $\Gamma$  par la projection canonique de  $G$  sur  $G_2$  ; puisque  $\pi(\Gamma)$  ne contient pas non plus de groupe libre non abélien, c'est un groupe virtuellement résoluble. Il en est de même de  $\Gamma \cap G_1$ . Le lemme 6.1 montra alors que  $\Gamma$  est virtuellement résoluble.  $\square$

**Exemple 6.4.** Considérons le groupe  $G$  des bijections de  $\mathbf{Z}$  formées des translations entières par morceaux. Ce groupe est engendré par le sous-groupe  $T$  constitué des translations  $z \mapsto z+k$  et par le sous-groupe  $B$  formé des bijections de  $\mathbf{Z}$  à support fini. Il est donc également engendré par  $z \mapsto z+1$  et la permutation qui échange 0 et 1 et fixe tous les autres éléments de  $\mathbf{Z}$ . Ainsi,  $G$  est un groupe de type fini. À tout élément  $g$  de  $G$  correspond une translation  $t_g \in T$  telle que  $g(z) = t_g(z)$  pour  $z$  suffisamment grand (i.e.  $|z| > a(g)$  où  $a(g)$  dépend de  $g$ ). Ceci définit un morphisme  $\theta: g \mapsto t_g$  à valeurs dans le groupe cyclique  $T$ . Le noyau de  $\theta$  s'identifie au groupe  $B$  ; il n'est donc pas de type fini, mais tout sous-groupe de type fini de  $B$  est fini.

Ainsi,  $B$  et  $T$  satisfont l'alternative de Tits (celle qui porte sur les sous-groupes de type fini),  $B$  ne satisfait pas l'alternative de Tits forte, et  $G$  ne satisfait pas l'alternative de Tits : le groupe  $G$  lui-même est de type fini, ne contient pas de groupe libre, mais ne contient aucun sous-groupe résoluble d'indice fini.

Cet exemple, qui m'a été indiqué par Cornulier, montre que la proposition 6.3 n'était pas correctement énoncée dans la version publiée de ce texte.

**6.2. Surfaces irrationnelles.** Lorsque  $X$  est une surface complexe compacte kählérienne irrationnelle, ou bien  $X$  est réglée ou bien la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive. Dans le premier cas, si  $\pi : X \rightarrow B$  est la fibration associée au réglage, le groupe  $\text{Bir}(X)$  est une extension virtuellement abélienne de  $\text{PGL}(2, \mathcal{M}(B))$  (voir le paragraphe 4.1.3), et l’alternative de TITS découle de la proposition 6.3. Dans le second cas,  $\text{Bir}(X)$  est conjugué à  $\text{Aut}(X_0)$  où  $X_0$  est l’unique modèle minimal de  $X$  (voir le §4.1.2). Il suffit donc d’appliquer le théorème suivant pour conclure.

**Théorème 6.5.** *Si  $M$  est une variété complexe compacte kählérienne, son groupe d’automorphismes satisfait l’alternative de TITS forte.*

*Démonstration.* Le groupe  $\text{Aut}(M)$  agit sur la cohomologie de  $M$ , ce qui détermine un morphisme de  $\text{Aut}(M)$  dans  $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z}))$ , où  $H^*(M, \mathbf{Z})$  est la somme directe des groupes de cohomologie de  $M$ . Dans [55], LIEBERMAN montre que le noyau de ce morphisme est un groupe de LIE complexe n’ayant qu’un nombre fini de composantes connexes et que sa composante connexe  $\text{Aut}^0(M)$  est une extension d’un tore complexe compact par un groupe algébrique complexe. La proposition 6.3 et l’alternative de TITS dans les groupes linéaires montrent donc le résultat.  $\square$

**6.3. Une alternative faible pour les isométries de  $\mathbb{H}^\infty$ .** Dans ce paragraphe, nous montrons une alternative de TITS faible, inspirée de [63], pour le groupe  $\text{O}(1, \infty)$  des isométries de l’espace hyperbolique de dimension infinie  $\mathbb{H}^\infty$ . Fixons les notations, qui sont celles de la partie 3.4, mais dans un cadre général. Soit  $\mathcal{Z}$  un espace de HILBERT séparable. Considérons le produit scalaire défini sur  $\mathcal{Z}$  par la formule

$$\langle x|x \rangle = x_0^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$$

où les coordonnées  $x_i$  sont relatives à une base hilbertienne fixée une fois pour toutes. Le cône de lumière de  $\mathcal{Z}$  est l’ensemble des vecteurs  $x$  satisfaisant  $\langle x|x \rangle = 0$ . On choisit alors l’une des deux nappes  $\mathbb{H}^\infty$  de l’hyperboloïde  $\{x \in \mathcal{Z} \mid \langle x|x \rangle = 1\}$  et l’on munit cet espace de la distance définie au paragraphe 3.4. L’espace  $\mathbb{H}^\infty$  est un espace  $\text{CAT}(-1)$  complet. C’est donc un espace hyperbolique au sens de GROMOV. Nous noterons  $\partial\mathbb{H}^\infty$  son bord : il s’identifie au projectifié du cône de lumière de  $\mathcal{Z}$ .

**Théorème 6.6.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{O}(1, \infty)$ . Si  $\Gamma$  contient une isométrie hyperbolique  $f$ , l’une des propriétés suivantes est satisfaite :*

- (1)  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien,
- (2)  $\Gamma$  permute les deux points fixes de  $f$  au bord de  $\mathbb{H}^\infty$  ou fixe l’un de ces points fixes de  $f$ .

*Si  $\Gamma$  ne contient pas d’isométrie hyperbolique,  $\Gamma$  fixe un point de  $\mathbb{H}^\infty \cup \partial\mathbb{H}^\infty$ .*

**Remarque 6.7.** Dans le cas d’un groupe de transformations birationnelles  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{H}^\infty(S)$ , les points fixes construits appartiennent à  $\mathcal{Z}^+(S)$ , car  $\mathcal{Z}^+(S)$  est invariant sous l’action de  $\Gamma$ .

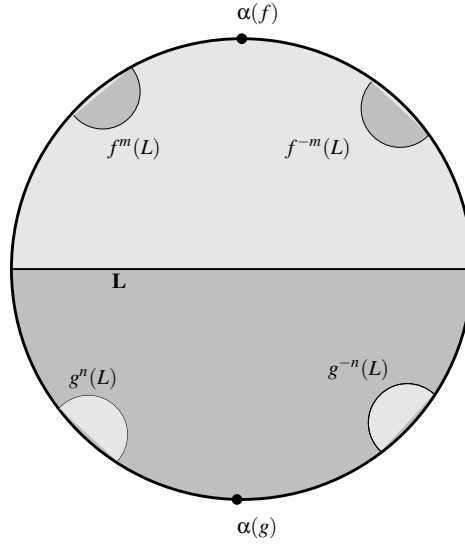


FIGURE 1. Dynamique pour deux isométries paraboliques à points fixes distincts. Le sous-espace  $L$  coupe  $\mathbb{H}^\infty$  en 2 demi-espaces. L'isométrie  $f^m$  et son inverse envoient le demi-espace le plus sombre sur les deux zones sombres proches de  $\alpha(f)$  (le modèle de POINCARÉ est utilisé pour la figure).

La démonstration suivante fait appel à un résultat clé issu de [43], ce qui m'a été suggéré par F. PAULIN.

*Démonstration.* Supposons que  $\Gamma$  contienne deux isométries hyperboliques  $f$  et  $g$  dont les points fixes au bord de  $\mathbb{H}^\infty$  sont distincts deux-à-deux. L'argument de ping-pong montre qu'il existe deux entiers  $n$  et  $m$  tels que  $f^n$  et  $g^m$  engendrent un sous-groupe de  $\Gamma$  isomorphe au groupe libre  $F_2$ .

Supposons que  $\Gamma$  contient au moins une isométrie hyperbolique  $f$ . Soit  $\alpha$  (resp.  $\omega$ ) le point fixe répulsif (resp. attractif) de  $f$  au bord de  $\mathbb{H}^\infty$ . S'il existe un élément  $h$  de  $\Gamma$  tel que  $\{h(\alpha), h(\omega)\}$  et  $\{\alpha, \omega\}$  soient disjoints, alors  $f$  et  $hfh^{-1}$  sont deux isométries hyperboliques auxquelles on peut appliquer l'argument précédent. Dans le cas contraire, c'est que  $\Gamma$  fixe le doubleton  $\{\alpha, \omega\}$  ou l'un des deux points de ce doubleton ; ainsi, il existe un sous-groupe de  $\Gamma$  d'indice deux qui fixe  $\alpha$  ou  $\omega$ .

Supposons maintenant que  $\Gamma$  comporte deux isométries paraboliques  $f$  et  $g$  dont les points fixes  $\alpha(f)$  et  $\alpha(g)$  sur le bord de  $\mathbb{H}^\infty$  sont distincts. Choisissons deux éléments du cône de lumière de  $\mathcal{Z}$ , encore noté  $\alpha(f)$  et  $\alpha(g)$ , qui représentent ces deux points du bord de  $\mathbb{H}^\infty$ . Soit  $l$  un point de  $\mathcal{Z}$  satisfaisant  $\langle \alpha(f) | l \rangle < 0$  et  $\langle \alpha(g) | l \rangle > 0$ . L'hyperplan de  $\mathcal{Z}$  orthogonal à  $l$  coupe  $\mathbb{H}^\infty$  sur un sous-espace  $L$  qui sépare  $\alpha(f)$  de  $\alpha(g)$ . Il existe alors un entier  $n$  et un entier  $m$  tels que  $f^m(L)$ ,  $f^{-m}(L)$ ,  $g^n(L)$  et  $g^{-n}(L)$  soient comme dans la figure 6.3. L'isométrie  $f^m g^n$  a alors deux points fixes au bord de  $\mathbb{H}^\infty$  : un point fixe attractif

dans la zone entourée par  $f^m(L)$  et un point fixe répulsif dans la zone entourée par  $g^{-n}(L)$ . Cette isométrie est donc hyperbolique et l'on peut appliquer le premier argument pour montrer que le groupe engendré par  $f$  et  $g$  contient un groupe libre.

Lorsque  $\Gamma$  contient au moins une isométrie parabolique, nous obtenons alors l'alternative : ou bien  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien, ou bien  $\Gamma$  fixe un point du bord de  $\mathbb{H}^\infty$  qui est l'unique point fixe de toutes les isométries paraboliques de  $\Gamma$ .

Il reste à traiter le cas où tous les éléments de  $\Gamma$  sont elliptiques ; c'est le cas le plus délicat. Le lemme 35 et la preuve du corollaire 36 du chapitre 8 de [43] montrent que : ou bien l'orbite de tout point  $x$  de  $\mathbb{H}^\infty$  est bornée, et en ce cas le lemme du centre ([21], page 37) montre que  $\Gamma$  fixe un point de  $\mathbb{H}^\infty$ , ou bien l'ensemble limite de  $\Gamma$  est réduit à un point, et  $\Gamma$  fixe donc un point du bord de  $\mathbb{H}^\infty$ . Ceci termine la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 6.8.** Telle que présentée dans [43], la preuve du lemme et du corollaire que nous venons d'utiliser nécessite une hypothèse de compacité locale qui n'est pas satisfaite par l'espace  $\mathbb{H}^\infty$ . Plus précisément, le lemme 35 du chapitre 8 de [43] utilise le corollaire 22, donc en fait l'implication (ii)  $\implies$  (i) de la proposition 21 qui, à son tour, nécessite de montrer que toute quasi-géodésique est à une distance bornée d'une géodésique. Cette dernière propriété est valable dans  $\mathbb{H}^\infty$ , par la même preuve que dans les espaces  $\mathbb{H}^n$  en utilisant que  $\mathbb{H}^\infty$  est complet, mais elle n'est démontrée dans [43] que pour des espaces localement compacts.

**6.4. Groupes de DE JONQUIÈRES et automorphismes.** Avant de montrer le théorème C, nous résumons quelques propriétés concernant les automorphismes des surfaces rationnelles et le groupe de DE JONQUIÈRES. Il s'agit de préliminaires un peu techniques.

**6.4.1. Le groupe de DE JONQUIÈRES.** Le groupe de DE JONQUIÈRES  $\text{Jonq}$  est le groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  qui préservent les fibres de la projection sur le premier facteur,  $\pi_x : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Ses éléments sont donc de la forme  $f(x, y) = (A(x), B(x)(y))$  où  $A$  est un élément de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$  et  $B$  est un élément de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$ . Le groupe  $\text{Jonq}$  s'identifie ainsi au produit semi-direct

$$\text{Jonq} \simeq \text{PGL}(2, \mathbf{C}) \ltimes \text{PGL}(2, \mathbf{C}(x)).$$

Appliquant la proposition 6.3 et l'alternative de TITS dans les groupes linéaires, nous obtenons le lemme suivant.

**Lemme 6.9.** *Le groupe de DE JONQUIÈRES vérifie l'alternative de TITS.*

**Remarque 6.10.** 1.— Soient  $S$  une surface rationnelle et  $\pi : S \rightarrow B$  une fibration rationnelle de  $S$ . Il existe alors une application birationnelle  $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et un isomorphisme  $\eta : B \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  tels que  $\eta \circ \pi = \pi_x \circ \varepsilon$ .

Ainsi, tout sous-groupe de  $\text{Bir}(S)$  permutant les fibres de  $\pi$  est conjugué à un sous-groupe de  $\text{Jonq}$ .

2.— Considérons le groupe des automorphismes algébriques de  $\mathbf{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Puisque  $\mathbf{C}$  ne contient pas de sous-variété complexe compacte de dimension 1, les fibres de la projection sur  $\mathbf{C}$  sont permutées entre elles par l'action de  $\text{Aut}(\mathbf{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ . Ce groupe et, de manière analogue, le groupe  $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  se plongent donc dans le groupe de DE JONQUIÈRES.

#### 6.4.2. Automorphismes isotopes à l'identité.

**Lemme 6.11.** *Il existe un entier  $M$  tel que les propriétés suivantes soient vérifiées pour toute surface rationnelle  $S$  et tout sous-groupe de type fini  $G$  de  $\text{Aut}(S)$  :*

- (i) *si  $G$  est fini il contient un sous-groupe résoluble d'indice majoré par  $M$  ;*
- (ii) *si  $G$  est virtuellement résoluble et ne contient que des automorphismes virtuellement isotopes à l'identité,  $G$  contient un sous-groupe résoluble de longueur de résolubilité inférieure à  $M$  et d'indice majoré par  $M$ .*

Pour  $M$  on peut prendre la constante  $60^2 = 3600$ . Avant de montrer ce lemme, signalons qu'il s'agit de propriétés classiques pour les groupes linéaires. Par exemple, le premier point est un théorème de JORDAN : pour tout entier positif  $n$ , il existe une constante  $k(n)$  tel que tout sous groupe fini de  $\text{GL}(n, \mathbf{C})$  contienne un sous-groupe central abélien d'indice inférieur à  $k(n)$  (voir [20]).

**Remarque 6.12.** Nous utiliserons que tout sous-groupe fini de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$  contient un sous-groupe abélien distingué d'indice inférieur à 60 (voir [51], corollaire 2.13.7, pour la classification des groupes de MÖBIUS finis). De même, si  $G$  est un sous-groupe virtuellement résoluble de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ , alors  $G$  contient un sous-groupe résoluble distingué d'indice inférieur à 60 dont la longueur de résolubilité est inférieure ou égale à 2.

*Démonstration de (i).* Le point (i) résulte du B, A, BA de la classification des sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Si  $G$  est un tel groupe, il préserve une fibration méromorphe  $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  dont les fibres sont rationnelles ou elliptiques. Il existe donc un morphisme  $\rho$  de  $G$  dans  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  tel que  $\rho(g) = \pi \circ g$  pour tout  $g$  dans  $G$ . L'image de  $G$  est un sous-groupe fini de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ . Elle contient donc un sous-groupe abélien  $I_0$  d'indice majoré par 60. Lorsque la fibration est rationnelle, le noyau de  $\rho$  est un sous-groupe fini de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$ . Mais tout sous-groupe fini de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$  se plonge en un sous-groupe fini de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$  (par spécialisation de la variable  $x$ ) et contient donc également un sous-groupe abélien central d'indice majoré par 60. L'image réciproque de  $I_0$  dans  $G$  par  $\rho$  contient donc un sous-groupe résoluble d'indice inférieur à  $(60)^2$ . Lorsque la fibration est elliptique, le noyau de  $\rho$  contient un sous-groupe abélien d'indice inférieur à 12 et le même argument s'applique.  $\square$

Avant de démontrer le second point, remarquons que l'existence d'une telle constante  $M$  est facile à établir pour le groupe de DE JONQUIÈRES  $\text{Jonq} =$

$\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$ , et donc aussi pour les groupes  $\mathrm{Aut}(\mathbf{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  et  $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ .

**Remarque 6.13.** Si  $G$  est un sous-groupe de  $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ , le théorème 2.4 de [53] montre que  $G$  satisfait l'une des trois propriétés suivantes : (i)  $G$  est contenu dans le groupe affine  $\mathrm{Aff}(\mathbf{C}^2)$  ou le groupe  $\mathrm{El}(\mathbf{C}^2)$  des automorphismes polynomiaux qui préservent la fibration par droites horizontales (ce groupe est résoluble, de longueur 3) ; (ii)  $G$  contient un groupe libre non abélien ; (iii)  $G$  est isomorphe au produit semi-direct de  $\mathbf{Z}$  par un groupe fini cyclique. En particulier, si  $G$  est virtuellement résoluble, alors  $G$  contient un sous-groupe résoluble d'indice inférieur à 60 dont la longueur de résolubilité est inférieure à 3. Une propriété analogue s'obtient sans difficulté pour les groupes  $\mathrm{Aut}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*)$  et  $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)$ .

*Démonstration de (ii).* Nous utiliserons les résultats rappelés au paragraphe 4.2.1. Dorénavant, le groupe  $G$  est un sous-groupe de type fini résoluble de  $\mathrm{Aut}(S)$ , où  $S$  est une surface rationnelle, et tous les éléments de  $G$  sont virtuellement isotopes à l'identité ; l'image  $G^*$  de  $G$  dans  $\mathrm{GL}(H^*(S, \mathbf{Z}))$  est un groupe linéaire de type fini et de torsion, donc fini (voir [20]). Notons  $G_0$  l'intersection de  $G$  avec  $\mathrm{Aut}^0(S)$ ,  $\overline{G_0}$  l'adhérence de ZARISKI de  $G_0$  dans  $\mathrm{Aut}^0(S)$  et  $G_1$  la composante connexe de l'identité dans  $\overline{G_0}$  ; puisque  $G^*$  est fini, le théorème de LIEBERMAN [55] montre que  $G_1$  est d'indice fini dans  $G$ . Si  $G_1$  est réduit à l'identité, c'est que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe fini d'une surface rationnelle ; le résultat découle alors du premier point. Nous pouvons donc supposer que la dimension de  $G_1$  est supérieure ou égale à 1.

Considérons maintenant le dernier sous-groupe dérivé de  $G_1$  qui ne soit pas réduit à l'identité. Ce groupe abélien, noté  $G_2$ , est un sous-groupe de LIE complexe connexe de  $\mathrm{Aut}^0(S)$  de dimension strictement positive. Notons  $Q$  la quadrique  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . D'après [9], pages 87–88, il existe un changement de variable birationnel  $\varepsilon : S \dashrightarrow Q$  tel que  $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$  soit un sous-groupe de  $\mathrm{Aut}^0(Q)$ . Le groupe  $G$  est alors conjugué au sous-groupe  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  de  $\mathrm{Bir}(Q)$ .

Puisque  $G$  agit par conjugaison sur son sous-groupe distingué  $G_0$ , il agit également par conjugaison sur  $G_1$  et  $G_2$  ; le groupe  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  agit donc par conjugaison sur  $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$ . Si  $f$  est un élément de  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  et  $\phi$  est un élément de  $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$ , il existe donc un autre automorphisme  $\psi \in \varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$  tel que  $f \circ \phi = \psi \circ f$ . Toute courbe contractée par  $f$  est donc  $\phi$ -invariante. Ceci montre que  $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$  stabilise les courbes contractées par les éléments de  $\varepsilon G \varepsilon^{-1} \subset \mathrm{Bir}(Q)$ . Ainsi,

- ou bien les orbites de  $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$  sont confinées dans des courbes algébriques (rationnelles) et, en ce cas,  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  préserve une fibration rationnelle ; le groupe  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  est donc isomorphe à un sous-groupe de Jonq (cf. remarque 6.10) et le résultat cherché en découle ;

- ou bien l'ensemble des courbes contractées par  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  est formé d'au plus deux verticales  $\{\star\} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et deux horizontales  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \{\star\}$  ; en ce cas, le groupe  $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$  est isomorphe à un sous-groupe de Jonq, de  $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ , de

$\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C})$  ou de  $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)$  et la remarque 6.13 conclut la démonstration.  $\square$

**6.5. Alternative de TITS pour le groupe de CREMONA.** Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'alternative de TITS pour le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ , ce qui terminera la preuve du théorème C.

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de type fini de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ . Le groupe  $\Gamma$  se plonge donc dans le groupe des isométries de  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  et nous identifierons  $\Gamma$  à son image dans le groupe des isométries de  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ ; puisqu'il suffit d'éclater les points d'indéterminations des éléments de  $\Gamma$  (cf. remarque 3.5) ceci permet aussi d'identifier  $\Gamma$  à un sous-groupe du groupe  $\text{O}(1, \infty)$  des isométries de  $\mathbb{H}^\infty$ . Le théorème 6.6 s'applique donc et permet de supposer que l'une des situations suivantes est satisfaite :

- (i)  $\Gamma$  fixe un point  $x$  à l'intérieur de  $\mathbb{H}^\infty$ .
- (ii) le groupe  $\Gamma$  ne contient pas de transformation hyperbolique, ne fixe pas de point à l'intérieur de  $\mathbb{H}^\infty$ , mais fixe un point du bord de  $\mathbb{H}^\infty$ .
- (iii)  $\Gamma$  contient un élément hyperbolique  $f$  et, quitte à remplacer  $\Gamma$  par un sous-groupe d'indice au plus 2, l'un des deux points fixes  $\alpha$  de  $f$  est fixé par  $\Gamma$ .
- (iv)  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien.

Il s'agit désormais d'étudier les trois premières situations : le cas elliptique (i), le cas parabolique (ii) et le cas hyperbolique (iii).

**6.5.1. Situation elliptique.** Supposons que  $\Gamma$  fixe un point  $x$  de  $\mathbb{H}^\infty$ . Puisque  $\Gamma$  est de type fini, la proposition 3.11 montre que  $\Gamma$  est conjugué à un sous-groupe des automorphismes d'une surface rationnelle  $S$ . Le théorème 6.5 montre alors que  $\Gamma$  satisfait l'alternative de TITS.

**6.5.2. Situation parabolique et stabilisateurs d'une classe nef.** Plaçons nous maintenant dans la situation (ii). L'ensemble limite de  $\Gamma$  est donc réduit à un singleton  $\{\alpha\} \subset \partial\mathbb{H}^\infty$ . Soit  $l$  un élément de  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  qui détermine  $\alpha$ ; puisque  $\Gamma$  ne contient aucune isométrie hyperbolique, chaque élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  fixe  $l$  :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma(l) = l. \quad (6.1)$$

**Proposition 6.14.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini. S'il existe un élément non nul  $l$  de  $\mathcal{Z}^+(S)$  qui est fixé par  $\Gamma$ , l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :*

- (a) *il existe une transformation birationnelle  $\phi : S' \dashrightarrow S$  et une fibration elliptique ou rationnelle  $\pi : S' \rightarrow B$  dont les fibres sont permutées par  $\phi^{-1} \circ \Gamma \circ \phi$ ;*
- (b) *il existe une transformation birationnelle  $\phi : S' \dashrightarrow S$  et un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$  tel que  $\phi^{-1} \circ \Gamma_0 \circ \phi$  soit contenu dans  $\text{Aut}^0(S')$ .*

*Dans les deux cas,  $\Gamma$  vérifie l'alternative de TITS.*

**Démonstration en présence d'un élément parabolique.** Si  $\Gamma$  contient un élément parabolique  $\gamma$ ,  $l$  est proportionnel à la classe du fibré en droites associé à



l'unique fibration  $\gamma$ -invariante. L'équation 6.1 montre alors que cette fibration est  $\Gamma$ -invariante. Il reste à voir que l'alternative de TITS est satisfaite.

Si  $\gamma$  est un twist de HALPHEN, la fibration est elliptique et le groupe  $\Gamma$  est virtuellement abélien (voir le §5.2). Si  $\gamma$  est un twist de DE JONQUIÈRES, la fibration est rationnelle et  $\Gamma$  est isomorphe à un sous-groupe de Jonq. On conclut à l'aide du lemme 6.9.  $\square$

Ceci ne termine pas la démonstration de la proposition, car il se peut a priori que  $\Gamma$  ne contienne aucun élément parabolique. Nous aurons besoin dans ce cas de la construction suivante.

6.5.3. *Graphes duaux et éclatements.* Soit  $D = \sum a_i E_i$ ,  $a_i > 0$  pour tout  $i$ , un diviseur effectif à croisements normaux dont les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles lisses. Soit  $\mathcal{G}$  le graphe dual de  $D$ , i.e. le graphe d'incidence des courbes  $C_i$  : les sommets de  $\mathcal{G}$  sont en bijection avec les courbes  $C_i$  et les arêtes joignant  $C_i$  à  $C_j$ ,  $i \neq j$ , sont en bijection avec les points d'intersection de  $C_i$  avec  $C_j$ . Le graphe  $\mathcal{G}$  est un graphe fini non orienté. La donnée du diviseur  $D$  permet alors de munir  $\mathcal{G}$  d'une distance  $\text{dist}_{\mathcal{G}}$  définie en imposant que la longueur de toute arête joignant deux courbes adjacentes  $C_i$  et  $C_j$  est égale à

$$\text{dist}_{\mathcal{G}}(C_i, C_j) = \frac{1}{a_i a_j}.$$

Si l'on éclate un point  $p$  de  $D$ , la transformée totale  $D'$  de  $D$  fait apparaître le diviseur exceptionnel  $E$  avec multiplicité  $a_i$  si  $p$  appartient à une unique courbe  $C_i$ , et  $a_i + a_j$  si  $p$  est à l'intersection de  $C_i$  et  $C_j$ . Dans le premier cas, le graphe  $\mathcal{G}'$  de  $D'$  s'obtient en ajoutant un sommet  $E$  et une unique arête de longueur  $1/a_i^2$  reliant  $E$  à  $C_i$ ; dans le second cas, un sommet  $E$  est ajouté sur l'arête de  $\mathcal{G}$  déterminée par  $p$ , et ce sommet découpe l'arête en deux nouvelles arêtes  $[C_i, E]$  et  $[E, C_j]$  de longueurs respectives

$$\frac{1}{a_i(a_i + a_j)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_j(a_i + a_j)}.$$

En particulier, la distance entre  $C_i$  et  $C_j$  calculée dans  $\mathcal{G}$  est égale à celle calculée dans  $\mathcal{G}'$ .

Considérant l'ensemble des éclatements possibles de  $D$  (y compris infiniment proches), nous obtenons ainsi une famille de graphes métrisés dont nous pouvons prendre la limite inductive. Nous noterons  $\overline{\mathcal{G}}$  l'espace limite. Cet espace métrique est muni de structures supplémentaires : si  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$  désigne l'union des sommets des graphes finis  $\mathcal{G}'$ , alors  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$  est une partie dénombrable dense de  $\overline{\mathcal{G}}$  telle que

- (i)  $\overline{\mathcal{G}}$  a localement une structure d'arbre réel dont l'union des points de branchement coïncide avec  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$
- (ii) la structure de  $\mathbf{R}$ -arbre locale de  $\overline{\mathcal{G}}$  induit une structure locale de  $\mathbf{Q}$ -arbre sur  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ .

Le lecteur pourra consulter les chapitres 3 et 6 de [37] pour une démonstration de ces résultats, l'article de revue [60] pour les actions de groupes sur les  $\Lambda$ -arbres, et [44] pour une situation proche de celle que nous étudions.

6.5.4. *Démonstration de la proposition 6.14.* Reprenons donc maintenant les hypothèses de la proposition 6.14 en supposant de surcroît que  $\Gamma$  ne contient que des éléments elliptiques. La proposition 3.11 permet de supposer que  $l$  est un élément de  $Z(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{R}$ . Nous pouvons donc conjuguer  $\Gamma$  à un sous-groupe de  $\text{Bir}(S)$  où  $S$  est une surface rationnelle,  $l$  appartient à  $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$  et  $\langle l|l \rangle \geq 0$ . Les courbes  $E_i$  de  $S$  contractées par un élément de  $\Gamma$  sont donc orthogonales à  $l$  (voir la proposition 3.9 et la remarque qui l'accompagne) :  $\langle l|E_i \rangle = 0$ . Ainsi, ou bien  $l$  est proportionnel à la classe du fibré en droites associé à une fibration rationnelle, ou bien les  $E_i$  sont en nombre fini. Dans le premier cas, la fibration rationnelle est  $\Gamma$ -invariante,  $\Gamma$  vérifie donc l'alternative de TITS et la proposition 6.14 est démontrée. Nous pouvons donc supposer que les courbes contractées  $E_1, \dots, E_k$  sont en nombre fini et d'auto-intersection négative ou nulle. Soit  $\Delta$  l'union des courbes  $E_i$ ; le groupe  $\Gamma$  agit biholomorphiquement sur  $S \setminus \Delta$ .

Soit  $W$  le sous- $\mathbf{Z}$ -module de  $\text{NS}(S)$  engendré par les classes des courbes contractées  $E_i$ ;  $W$  est contenu dans l'orthogonal de  $l$ . Si la forme d'intersection est définie négative en restriction à  $W$ , le critère de contraction de MUMFORD-GRAUERT permet de conjuguer  $\Gamma$  à un groupe d'automorphismes (voir la démonstration de la proposition 3.11), et l'on conclut à l'aide du théorème 6.5. Si la forme d'intersection n'est pas définie négative en restriction à  $W$ , c'est que  $l^2 = 0$  et que  $W$  intersecte la droite  $\mathbf{R}l$  sur un diviseur effectif  $D$ , unique à multiplication près par un entier positif. Nous noterons

$$D = \sum_{i=1}^m a_i E_i, \quad E_i \subset \Delta, \quad a_i \geq 0,$$

la décomposition de  $D$  en composantes irréductibles; quitte à diviser  $a_i$  par leur plus grand diviseur commun et à contracter les courbes  $E_j$  pour lesquelles  $a_j = 0$ , nous pouvons supposer que les  $a_j$  sont strictement positifs et premiers entre eux dans leur ensemble.

Nous adaptons maintenant un argument issu de [44]. Pour cela nous noterons  $\mathcal{G}$  le graphe associé au diviseur  $D$ .

Notons  $\overline{\mathcal{G}}$  la limite inductive des graphes  $\mathcal{G}'$  ainsi construits lorsqu'on considère toutes les surfaces  $S'$  dominant  $S$  qui sont obtenues en éclatant les points d'indétermination d'éléments de  $\Gamma$ . Cet espace métrique est localement un arbre réel, de valence infinie a priori, dont l'ensemble des points de branchement forme localement un  $\mathbf{Q}$ -arbre  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ . Cet espace est plus petit que l'ensemble  $\overline{\mathcal{G}}$  défini au paragraphe précédent car nous n'éclatons que des points d'indétermination d'éléments de  $\Gamma$ . Puisque  $l$  est une classe  $\Gamma$ -invariante, le groupe  $\Gamma$  agit sur cet arbre par isométries.

Notons qu'avec les hypothèses en cours  $\Gamma$  ne peut avoir de point fixe global dans  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ . Par construction, en effet, chaque élément  $e$  de  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$  correspond à une courbe  $E$  (dans une surface  $S'$  dominant  $S$ ) qui est contractée sur un point  $q$  par au moins un élément  $g$  de  $\Gamma$ . Le point  $e$  n'est donc pas fixé par  $g$  : son image correspond à une courbe irréductible obtenue après éclatements de  $S'$  au-dessus du point  $q$ .

Si  $g$  est un élément de  $\Gamma$ ,  $g$  est elliptique, donc  $g$  est birationnellement conjugué à un automorphisme  $g_0$  d'une surface  $S_0$ , et un des itérés  $g_0^{k(g)}$  de  $g_0$  est isotope à l'identité. Vue dans  $S_0$ , la transformée totale de  $\Delta$  est une union de courbes rationnelles qui sont fixées par  $g_0^{k(g)}$ . Ceci montre que chaque élément  $g$  de  $\Gamma$  possède au moins une orbite finie, de longueur divisant  $k(g)$ , dans  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{G}$  est un arbre. Dans ce cas,  $\overline{\mathcal{G}}$  est un arbre réel et  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$  est un  $\mathbf{Q}$ -arbre. Puisque chaque élément  $g$  de  $\Gamma$  a une orbite périodique dans  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ , chaque élément de  $\Gamma$  y a un point fixe. Comme  $\Gamma$  est de type fini, le corollaire 2 de [65], §6.5, page 90, montre que  $\Gamma$  fixe un point de  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ . Ceci contredit les affirmations précédentes.

Supposons maintenant que le groupe fondamental du graphe fini  $\mathcal{G}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . En ce cas, il existe un unique lacet fermé sans aller retour dans  $\mathcal{G}$  engendrant  $\pi_1(\mathcal{G})$ , appelé cœur de  $\mathcal{G}$  et noté  $C(\mathcal{G})$ , sur lequel  $\mathcal{G}$  se rétracte par déformation. Utilisant à nouveau que tout élément  $g$  de  $\Gamma$  provient d'un automorphisme virtuellement isotope à l'identité, nous en déduisons que le cœur est  $\Gamma$ -invariant. Le groupe  $\Gamma$  agit donc par isométries sur la limite des graphes finis  $C(\mathcal{G}')$ , c'est-à-dire sur un cercle  $\mathbb{S}^1$  contenu dans  $\overline{\mathcal{G}}$ . Nous obtenons ainsi une action du groupe de type fini  $\Gamma$  par isométries du cercle, dont tous les éléments ont une orbite finie. Ceci montre qu'un sous-groupe d'indice fini dans  $\Gamma$  agit identiquement sur ce cercle. Ce sous-groupe fixe chaque courbe du cœur  $C(\mathcal{G})$ , et vérifie donc la propriété (b) de la proposition 6.14.

Lorsque le groupe fondamental de  $\mathcal{G}$  est un groupe libre non abélien, un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$  agit trivialement sur  $\pi_1(\mathcal{G})$ . L'argument précédent s'applique à ce sous-groupe, ce qui permet de conclure.

Ceci termine la démonstration de la proposition 6.14, et donc celle de l'alternative de TITS lorsque  $\Gamma$  ne contient pas d'élément hyperbolique.

**6.5.5. Situation hyperbolique.** Supposons enfin que  $\Gamma$  ne contient pas de groupe libre non abélien, qu'il contient une isométrie hyperbolique  $f$  et que l'un des points fixes  $\alpha \in \partial\mathbb{H}^\infty$  de  $f$  est fixé par  $\Gamma$ . Soit  $l$  un élément de  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  qui détermine le point  $\alpha$  de  $\partial\mathbb{H}^\infty$ . Soit  $D$  la droite  $\mathbf{R}l$ . Puisque cette droite est invariante sous l'action de  $\Gamma$ , nous obtenons un morphisme de  $\Gamma$  vers le groupe abélien  $\mathrm{GL}(D) = \mathbf{R}^*$ . Le noyau  $\Gamma_0$  de ce morphisme ne contient aucune isométrie hyperbolique. A priori,  $\Gamma_0$  n'est pas de type fini. Cependant, par les étapes précédentes et le paragraphe 6.4, il existe une constante  $M$  telle que tout sous-groupe de type fini dans  $\Gamma_0$  contient un sous-groupe résoluble d'indice

inférieur à  $M$  dont la longueur de résolubilité est inférieure à  $M$ . Ceci montre que  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  sont résolubles.

## 7. APPLICATION

**7.1. Groupes de torsion.** Dans  $GL(n, \mathbf{C})$ , tout groupe de torsion  $G$  est relativement compact, donc contenu dans un conjugué du groupe unitaire (voir les théorèmes de SCHUR, [20]). Le théorème suivant montre à la fois que cet énoncé n'a pas d'analogue au sein du groupe de CREMONA, que la proposition 3.11 ne peut être étendue à des groupes  $G$  qui ne sont pas de type fini, et que l'hypothèse «  $\Gamma$  est de type fini » est cruciale dans 6.5.4.

**Théorème 7.1** (WRIGHT, [68]). *Il existe un sous-groupe  $G$  de  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  - donc de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  - isomorphe au groupe abélien  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  tel que la fonction degré  $g \mapsto \deg(g)$ , ne soit pas bornée sur  $G$ .*

Dans le cas des groupes de type fini, nous disposons du résultat suivant.

**Théorème 7.2.** *Soit  $S$  une surface complexe compacte kählérienne. Tout sous-groupe de torsion de  $\text{Bir}(S)$  de type fini est fini.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un tel groupe. Par l'alternative de TITS,  $G$  est virtuellement résoluble. Comme tout groupe de torsion résoluble et de type fini est fini, le groupe  $G$  est fini.  $\square$

Le théorème de BURNSIDE pour les groupes linéaires a donc un analogue pour le groupe de CREMONA. Les questions suivantes semblent ouvertes :

- *Analogie du théorème de JORDAN.*- Soit  $n$  un entier strictement positif. Existe-t-il une constante  $b(n)$  telle que tout sous-groupe de torsion de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbf{C}))$  contienne un sous-groupe abélien d'indice inférieur à  $b(n)$  ?
- *Analogie du théorème de BURNSIDE.*- Un sous-groupe de torsion et de type fini dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbf{C}))$ ,  $n \geq 3$ , est-il nécessairement fini ?

**7.2. Groupes résolubles.** L'alternative de TITS et la partie 5 permettent aussi de décrire les sous-groupes résolubles de  $\text{Bir}(S)$  qui ne sont pas virtuellement abéliens (voir [12] pour une preuve et des compléments).

**Théorème 7.3.** *Soit  $S$  une surface complexe compacte kählérienne. Si  $G$  est un sous-groupe de type fini de  $\text{Bir}(S)$  qui est résoluble et sans torsion, il existe un sous-groupe d'indice fini de  $G$  qui est abélien ou qui préserve un feuilletage.*

Ce résultat est analogue au théorème de MAL'CEV suivant lequel tout groupe résoluble linéaire possède un sous-groupe d'indice fini triangularisable. Les groupes de symétries birationnelles des surfaces feuilletées ayant été classés dans [15], ce théorème ramène l'étude des groupes résolubles à celle des groupes préservant une fibration rationnelle. Nous renvoyons le lecteur à [25], qui décrit les sous-groupes nilpotents de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  et contient des arguments proches de ceux que nous allons maintenant présenter.

**Exemple 7.4.** Notons  $D \subset \mathbf{C}^2$  la droite propre de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour la valeur propre  $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$ . Le groupe affine engendré par  $A$  et les translations le long de  $D$  est un groupe résoluble que nous noterons  $R$ .  $C$  est un produit semi-direct de  $\mathbf{Z}$  par  $D$ , isomorphe au groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda^k & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{C} \right\}.$$

Fixons maintenant une courbe elliptique  $E = \mathbf{C}/\Lambda$ . Puisque  $\Lambda \times \Lambda$  est  $A$ -invariant, nous obtenons un plongement de  $R$  dans  $\text{Aut}(E \times E)$ . Ce groupe résoluble préserve le feuilletage par droites parallèles à  $D$ .

Un exemple similaire peut-être construit à partir de la transformation monomiale  $B(x, y) = (x^2y, xy)$ . Ceci fournit alors un groupe résoluble non nilpotent de transformations birationnelles du plan qui préserve un feuilletage et qui sont des automorphismes sur un ouvert de ZARISKI isomorphe à  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ .

*Démonstration.* Soit  $X$  une surface complexe compacte kählérienne. Soit  $G$  un sous-groupe résoluble et de type fini dans  $\text{Bir}(X)$ .

Puisque  $G$  est résoluble, nous savons grace au théorème 6.6 que l'action de  $G$  sur  $\mathbb{H}^\infty(X)$  possède un point fixe. Si  $G$  ne contient que des éléments elliptiques ou paraboliques, ou bien  $G$  préserve une fibration, ou bien  $G$  est conjugué à un groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(X')$  (où  $X'$  est birationnelle à  $X$ ) et, à indice fini près,  $G$  est contenu dans la composante connexe de l'identité  $\text{Aut}^0(X')$ . La conclusion résulte alors du fait que tout sous-groupe résoluble de  $\text{Aut}^0(X')$  contient un sous-groupe d'indice fini qui préserve un feuilletage.

Supposons maintenant que  $G$  contient un élément hyperbolique  $f$ . Puisque  $G$  est résoluble, nous pouvons supposer que la droite propre de  $f_*$  pour la valeur propre  $\lambda(f)$  est  $G$ -invariante ; si ce n'est pas le cas, il suffit en effet de changer  $f$  en son inverse  $f^{-1}$ . Ceci détermine un morphisme  $\alpha : G \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  tel que

$$g_*(l) = \alpha(g)l$$

pour tout vecteur  $l \in Z(X)$  situé sur la droite propre. Le groupe dérivé de  $G$  est contenu dans le noyau du morphisme  $\alpha$ , et tous ses éléments sont elliptiques. L'image de  $\alpha$  est un groupe cyclique (voir la preuve du théorème B) et nous supposerons dans la suite que  $\alpha(f)$  engendre ce groupe.

Par hypothèse, il existe un entier positif  $k$  tel que le  $k$ -ième groupe dérivé de  $G$  soit distinct de l'identité, tandis que le  $(k+1)$ -ième est trivial. Ce groupe  $D_k(G)$  est un sous-groupe distingué de  $G$ . Ainsi, si  $g$  appartient à  $D_k(G)$ , les transformations  $g$ ,  $h = fgf^{-1}$  et  $i = f^2gf^{-2}$  sont trois transformations birationnelles elliptiques qui préservent le même point au bord de  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous pouvons donc supposer que  $g$ ,  $h$  et  $i$  sont trois automorphismes d'une même surface  $X'$  birationnelle à  $X$ . Puisque  $G$  est sans torsion, l'intersection de  $\langle g \rangle$  (resp.  $\langle h \rangle$ ,  $\langle i \rangle$ ) avec  $\text{Aut}^0(X')$  est de dimension positive : il existe donc trois flots  $\Phi_t$ ,  $\Psi_t$  et  $\Xi_t$  sur  $X'$  qui commutent, et qui satisfont

$$f \circ \Phi_t \circ f^{-1} = \Psi_t, \quad f^2 \circ \Phi_t \circ f^{-2} = \Xi_t.$$

Puisque  $X'$  est une surface, les champs de vecteurs associés à ces flots sont linéairement dépendants. Si on les note  $u$ ,  $v$  et  $w$ , il existe donc trois constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $au + bv + cw = 0$ . Les propriétés d'invariance vis-à-vis de  $f$  montrent alors qu'il existe un champ de vecteurs  $x$  et un scalaire  $\lambda$  tel que

$$f_*x = \lambda x.$$

On en déduit que le flot  $\Theta_t$  de  $x$  satisfait

$$f \circ \Theta_t \circ f^{-1} = \Theta_{\lambda t},$$

que  $f$  préserve le feuilletage dont les feuilles sont les orbites de  $\Theta_t$ , et que  $\lambda$  est égal à  $\lambda_f$ .

Le feuilletage est constitué des variétés instables de  $f$ , et est uniquement déterminé par la droite propre de  $f_*$ . Il est donc  $G$ -invariant.  $\square$

**Théorème 7.5.** *Soit  $G$  un groupe polycyclique de transformations birationnelles d'une surface. Ou bien  $G$  préserve un feuilletage, ou bien  $G$  est fini-par-abélien-par fini.*

*Démonstration.* Puisque  $G$  est polycyclique, c'est un groupe résoluble dont tous les sous-groupes sont de type fini. Si  $G$  ne contient pas d'éléments entropiques, la démonstration précédente montre qu'un sous-groupe d'indice fini dans  $G$  préserve un feuilletage. Si  $G$  contient un élément entropique, et si  $D_k(G)$  contient un élément d'ordre infini, on conclut comme précédemment. Reste le cas où  $D_k(G)$  serait un groupe de torsion ; dans ce cas c'est un groupe fini distingué, et on conclut par récurrence en considérant l'action de  $G/D_k(G)$  sur la surface quotient  $X/D_k(G)$ .  $\square$

**7.3. Une preuve alternative de l'alternative ?** Soit  $V$  une variété réelle lisse munie d'une forme volume  $\Omega$ . Dans [46], paragraphe 6.A.IV, GROMOV remarque que l'espace des métriques riemanniennes de  $V$  dont la forme volume coïncide avec  $\Omega$  peut être muni d'une métrique riemannienne (en dimension infinie) de courbure négative qui est invariante sous l'action du groupe  $\text{Diff}(V, \Omega)$  puis il propose d'utiliser cette remarque pour étudier  $\text{Diff}(V, \Omega)$ . En quelque sorte, les preuves proposées précédemment sont une adaptation de cette idée pour le groupe de CREMONA, où l'on a remplacé les métriques riemanniennes par les (classes de cohomologie des) courants positifs fermés.

Une idée pour montrer l'alternative de TITS au sein du groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  est en effet d'utiliser un argument de ping-pong dans l'ensemble  $\mathcal{C}^+$  des courants positifs fermés de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ . On sait par exemple depuis [5] que les transformations birationnelles entropiques du plan présentent une dynamique de type « nord-sud » sur l'ensemble  $\mathcal{C}^+$  : il existe deux courants positifs fermés  $T^+$  et  $T^-$  tels que

$$f_*(T^+) = \lambda(f)T^+ \quad \text{et} \quad f_*(T^-) = \lambda(f)T^-$$

et lorsqu'on itère un courant positif suffisamment régulier  $R$ , la suite

$$\frac{1}{\lambda(f)^n} f_*^{\pm n}(R)$$

tend vers  $T^\pm$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (voir [66] et les références qui s’y trouvent). En présence de deux transformations birationnelles entropiques dont les courants sont distincts, il est donc envisageable de construire un groupe libre par le lemme du ping-pong.

Les pages précédentes utilisent cet argument avec une simplification notable : il suffit de considérer les classes d’homologie de ces courants, mais dans un espace d’homologie suffisamment gros, à savoir l’espace de PICARD-MANIN, qui a le bon goût d’être à courbure négative. Il serait toutefois intéressant de développer une preuve différente de l’alternative de TITS en étudiant plus en détails l’action de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$  sur  $\mathcal{C}^+$ .

#### 7.4. Caractéristique positive et dimension supérieure.

7.4.1. Soit  $S$  une surface projective définie sur un corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique nulle. Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini de transformations birationnelles de  $S$  définies sur  $\mathbf{k}$ . Les générateurs de  $\Gamma$  et les équations de  $S$  ne font intervenir qu’un nombre fini de coefficients  $a_i \in \mathbf{k}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . La surface  $S$  et le groupe  $\Gamma$  sont donc définis sur le corps  $\mathbf{Q}(a_1, \dots, a_l)$ . Puisqu’un tel corps se plonge dans celui des nombres complexes, les résultats de cet article s’appliquent mot-à-mot dans cette situation. Il serait intéressant d’étudier le cas des corps de caractéristique positive.<sup>3</sup>

7.4.2. Si  $M$  est une variété kählérienne compacte de dimension  $n$ , le groupe de ses difféomorphismes holomorphes  $\text{Aut}(M)$  satisfait l’alternative de TITS (voir la proposition ??) et un analogue de la conjecture de ZIMMER (voir [11]) car l’on peut borner la taille de ses sous-groupes abéliens les plus intéressants (voir [29]).<sup>4</sup> Rappelons ici à quel point il serait intéressant de déterminer si des résultats analogues valent pour le groupe  $\text{Bir}(M)$  des transformations birationnelles de  $M$ .

7.5. **Questions.** Pour conclure, rassemblons quelques questions qui nous semblent digne d’intérêt.

7.5.1. *Dimension supérieure.* Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n(\mathbf{C}))$ , et plus généralement les groupes  $\text{Bir}(M)$  où  $M$  est une variété projective de dimension  $n$ , satisfont-ils l’alternative de TITS ? Rappelons que si la réponse à cette question est positive, certains groupes non linéaires importants, comme les groupes  $\text{Out}(F_k)$ , satisfont automatiquement l’alternative de TITS (voir l’introduction).

---

3. Remarques (2012 + 2013) : De nombreux résultats restent valables en toute caractéristique. Voir le survey de Cantat aux proceedings du sixième congrès de l’EMS, et le texte de Blanc et Cantat sur les degrés dynamiques.

4. Remarque (2012) : Voir aussi le texte de Cantat et Zeghib qui complète [11] et les travaux de De-Qi Zhang et ses co-auteurs



7.5.2. *Réseaux.* Quels réseaux de  $SO(1, n)$  ou de  $SU(1, n)$  agissent fidèlement par transformations birationnelles sur le plan ? Lesquels agissent fidèlement par automorphismes sur des surfaces rationnelles ? Il semble que ces deux questions soient encore largement ouvertes. Nous avons vu l'exemple de COBLE au paragraphe 4.3.<sup>5</sup>

7.5.3. *Centralisateurs.* Soit  $f$  une transformation birationnelle entropique d'une surface complexe compacte. Montrer que son centralisateur est virtuellement cyclique.<sup>6</sup> C'est presque ce qu'affirme le théorème C, à ceci près que le centralisateur pourrait contenir un sous-groupe infini de torsion (qui ne serait donc pas de type fini). Plus intéressant, est-il vrai que le centralisateur d'une transformation birationnelle  $f$  d'une variété kählérienne compacte de dimension  $n$  contient toujours un sous-groupe abélien libre d'indice fini et de rang inférieur à  $n - 1$ , dès lors que  $f$  ne préserve aucune famille couvrante de sous-variétés strictes de  $M$  ?

---

5. Remarque (2012) : Delzant et Py ont traité le cas  $SU(1, n)$ .

6. Remarque (2012) : Fait par Blanc et Cantat. Cette première partie de la question a donc maintenant une réponse positive.

## 8. ANNEXE : DYNAMIQUE ET CENTRALISATEUR

Nous donnons deux arguments qui permettent de redémontrer le théorème B concernant les centralisateurs des éléments hyperboliques du groupe de Cremona. Le premier est de nature dynamique ; le second, plus élémentaire, introduit la notion de point d'indétermination persistant et s'appuie sur cette notion pour traiter les cas laissés en suspens par la première méthode.

**8.1. Le cas des difféomorphismes.** Soit  $S$  une surface complexe et  $f$  une transformation holomorphe de  $S$ . Soit  $q$  un point périodique de période  $k$  pour  $f$ . Nous dirons que  $q$  est hyperbolique si une valeur propre de la différentielle  $Df_q^k$  a un module strictement plus grand que 1 et l'autre un module strictement plus petit que 1. Nous noterons  $W_{loc}^s(q)$  et  $W_{loc}^u(q)$  (resp.  $W^s(q)$  et  $W^u(q)$ ) les variétés stables et instables locales (resp. globales) de  $f$  en  $q$ .

Soit  $g$  un difféomorphisme holomorphe de  $S$  qui commute avec  $f$ . La transformation  $g$  permute les points périodiques hyperboliques de période  $k$  de  $f$ . Si cet ensemble de points périodiques est fini, de cardinal  $N_k$  strictement positif, alors le sous-groupe  $A_k$  de  $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$  constitué des difféomorphismes de  $S$  qui fixent chacun de ces points est d'indice inférieur à  $N_k!$  dans  $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$ . Les variétés stables et instables de chacun de ces points  $q$  sont également invariantes sous l'action de  $A_k$ .

Fixons maintenant l'un des  $N_k$  points  $q$ . La variété instable  $W^u(q)$  (resp. stable  $W^s(q)$ ) est paramétrée par une application holomorphe injective  $\xi_q^+ : \mathbf{C} \rightarrow S$  (resp.  $\xi_q^-$ ) satisfaisant  $\xi_q^+(0) = q$  (resp.  $\xi_q^-(0) = q$ ). On dispose donc d'un morphisme

$$\alpha : \begin{cases} A_k & \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \\ g & \mapsto \alpha(g) = (\alpha^-(g), \alpha^+(g)) \end{cases}$$

tel que  $\xi_q^-(\alpha^-(g)z) = g(\xi_q^-(z))$  et  $\xi_q^+(\alpha^+(g)z) = g(\xi_q^+(z))$  pour tout  $z \in \mathbf{C}$ .

Lorsque l'union des variétés stables et instables de  $q$  est ZARISKI-dense dans  $S$ , la restriction de tout élément  $g \in A_k$  aux germes  $W_{loc}^s(q)$  et  $W_{loc}^u(q)$  détermine entièrement la transformation  $g : S \rightarrow S$ , si bien que  $\alpha$  est injectif. En particulier,  $A_k$  est abélien et  $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$  contient un sous-groupe abélien d'indice inférieur à  $(N_k!)$ .

Considérons le sous-ensemble  $\Lambda$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  constitué des couples  $(x, y)$  pour lesquels  $\xi_q^-(x)$  est égal à  $\xi_q^+(y)$  et montrons que  $\Lambda$  est un sous-ensemble discret de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ . Soit  $(x, y)$  un point de  $\Lambda$  et  $m$  le point de  $S$  défini par  $m = \xi_q^-(x) = \xi_q^+(y)$ . Dans un voisinage suffisamment petit de  $m$ , les composantes connexes de  $W^s(q)$  et  $W^u(q)$  contenant  $m$  sont deux sous-variétés complexes distinctes. Elles ne peuvent donc s'intersecter qu'un nombre fini de fois. Il existe ainsi un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $y$  tels que  $\xi_q^-(\mathcal{U})$  et  $\xi_q^+(\mathcal{V})$  ne s'intersectent qu'au point  $m$ . Le point  $(x, y)$  est donc l'unique point de  $\Lambda$  dans l'ouvert  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ , ce qui montre que  $\Lambda$  est discret. Par ailleurs, l'ensemble  $\Lambda$

ne coupe les axes  $\{0\} \times \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C} \times \{0\}$  qu'au point  $(0,0)$  car  $\xi_q^+$  et  $\xi_q^-$  sont injectives.

**Proposition 8.1.** *Soit  $f$  un difféomorphisme holomorphe d'une surface complexe connexe  $S$ . Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que*

- (i) *l'ensemble des points périodiques hyperboliques de  $f$  de période  $k$  est fini et non vide,*
- (ii) *pour l'un de ces points périodiques  $q$ , les variétés stables et instables s'intersectent en au moins un point distinct de  $q$ .*

*Le groupe cyclique engendré par  $f$  est alors d'indice fini dans le groupe des difféomorphismes holomorphes de  $S$  qui commutent avec  $f$ .*

*Démonstration.* Conservons les notations employées jusqu'à présent et notons  $A$  l'image du groupe  $A_k$  par le morphisme  $\alpha$ . Puisque  $W^-(q)$  et  $W^+(q)$  se coupent ailleurs qu'en  $q$ , ces deux « variétés » se coupent infiniment et forment un ensemble ZARISKI-dense, au sens où il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $q$  tel que toute fonction holomorphe sur  $\mathcal{U}$  qui est nulle sur  $W^+(q) \cap \mathcal{U}$  est identiquement nulle. Nous pouvons donc affirmer que le morphisme  $\alpha$  est injectif et que l'ensemble  $\Lambda$  est une partie discrète et infinie de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  qui est invariante sous l'action diagonale de  $A$ . Soit  $\bar{A}$  l'adhérence de  $A$  dans  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ . Si  $A$  n'était pas discret,  $\bar{A}$  contiendrait un sous-groupe à un paramètre non trivial de la forme  $t \mapsto (e^{tu}, e^{tv})$ . Puisque  $\Lambda$  est discret,  $\Lambda$  est  $\bar{A}$ -invariant et l'une des trois propriétés suivantes devrait alors être satisfaite : (i)  $\Lambda = \{(0,0)\}$ , (ii)  $u = 0$  et  $\Lambda \subset \mathbf{C} \times \{0\}$ , ou (iii)  $v = 0$  et  $\Lambda \subset \{0\} \times \mathbf{C}$ . Ceci est impossible car  $\Lambda$  est infini et ne coupe pas les axes de coordonnées. Cette contradiction montre que  $A$  est discret ; en particulier,  $A$  contient un sous-groupe abélien libre  $A'$  d'indice fini de rang au plus 2. L'automorphisme  $f^k$  engendre un sous-groupe cyclique infini de  $A_k$ . Le rang de  $A'$  est donc minoré par 1 et, s'il vaut 1,  $f$  engendre un sous-groupe d'indice fini de  $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$ . Il suffit donc de montrer que le rang de  $A'$  ne peut être égal à 2. Si c'était le cas,  $A'$  serait un sous-groupe discret et cocompact de  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$  ; le point  $(0,0)$  serait donc une valeur d'adhérence de  $\Lambda$ . Ceci contredit la discrétude de  $\Lambda$  et termine la preuve.  $\square$

**Corollaire 8.2** (Théorème de LAMY renforcé, voir [53]). *Soit  $h$  un automorphisme de type HÉNON du plan  $\mathbf{C}^2$ . Le groupe cyclique engendré par  $h$  est d'indice fini dans le groupe des biholomorphismes de  $\mathbf{C}^2$  qui commutent à  $h$ .*

*Démonstration.* Si  $k$  est suffisamment grand,  $h$  possède un nombre fini strictement positif de points périodiques hyperboliques de période  $k$  dont les variétés stables et instables se recoupent (voir [4]).  $\square$

**Théorème 8.3.** *Soit  $f$  un difféomorphisme analytique d'une surface réelle, compacte et connexe  $\Sigma$ . Si l'entropie topologique de  $f$  est positive, le centralisateur de  $f$  dans le groupe des difféomorphismes analytiques de  $\Sigma$  est virtuellement cyclique.*

*Démonstration.* D'après [52],  $f$  possède des points périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables se recoupent et sont donc ZARISKI-denses,

au sens où toute fonction analytique nulle le long de ces variétés est identiquement nulle. Soit  $q$  un tel point périodique, soit  $k$  sa période, et soit  $\xi : \mathbf{R} \rightarrow \Sigma$  une paramétrisation de  $W^u(q)$  qui linéarise  $f^k$ . Si  $g$  commute à  $f$  et préserve  $q$ , alors  $g$  préserve  $W^u(q)$  et est également linéaire le long de  $\xi(t)$ . Le paragraphe précédent s'applique maintenant mot à mot.  $\square$

Cette stratégie s'applique en dimension plus grande, et fournit une explication dynamique heuristique au théorème principal de [29] (voir [12]); voir aussi [14] pour une application.

**8.2. Dynamique des transformations rationnelles et centralisateur.** Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface projective complexe  $S$  pour laquelle  $\lambda(f) > 1$ . D'après le paragraphe 2.2, nous pouvons supposer que  $f$  est algébriquement stable, ce qui signifie que les orbites positives  $f^n(x)$ ,  $n \geq 0$ , des éléments  $x$  de  $\text{Ind}(f^{-1})$  n'intersectent pas  $\text{Ind}(f)$ . Nous dirons que  $f$  satisfait la « condition de BEDFORD et DILLER » si la somme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda(f)^n} \log(\text{dist}(f^n(x), \text{Ind}(f)))$$

est une somme finie pour tout point  $x$  de  $\text{Ind}(f^{-1})$ . On remarquera que cette condition est vérifiée de manière triviale si  $f$  est un automorphisme ou si les points d'indétermination de  $f^{-1}$  ont une orbite positive finie ; cette condition « générique » n'est pas toujours satisfaite (voir [3], proposition 4.5, et [36]).

Nous dirons qu'un point  $q$  de  $S$  est un point périodique de  $f$  de période  $k$  si  $f$  et ses itérés  $f^2, \dots, f^k$  sont holomorphes sur un voisinage de  $q$ , si  $f^k(q) = q$  et si  $f^l(q)$  est distinct de  $q$  lorsque  $l$  est compris entre 1 et  $k - 1$ . Les notions de point périodique hyperbolique et de variété stable ou instable locale s'étendent de manière similaire. Les variétés stables et instables globales sont définies par

$$W^\pm(q) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^n(W_{loc}^\pm(q))$$

où l'on prend ici l'union des transformées strictes de  $W_{loc}^\pm(q)$  par  $f^n$  ;  $W^-(q)$  et  $W^+(q)$  sont les prolongements analytiques des germes  $W_{loc}^-(q)$  et  $W_{loc}^+(q)$ . Ils sont paramétrés par des applications holomorphes  $\xi_q^\pm : \mathbf{C} \rightarrow S$  envoyant l'origine sur  $q$  et réalisant un biholomorphisme local d'un voisinage de l'origine sur la variété  $W_{loc}^\pm(q)$ . Ces applications peuvent ne pas être injectives : si une courbe  $E$  est contractée par  $f$  sur un point  $p$  et si  $W^+(q)$  coupe  $E$   $l$  fois, alors  $W^+(q)$  passe  $l$  fois par le point  $p$  (voir les figures de [59]).

Le théorème suivant permet d'étendre la stratégie du paragraphe précédent aux transformations birationnelles.

**Théorème 8.4** ([5], [10] [3], [33]). *Si  $f$  est une transformation birationnelle d'une surface projective complexe qui est entropique et satisfait la condition de BEDFORD et DILLER, alors  $f$  possède une infinité de points périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables se recourent. Ces points*

périodiques s'équidistribuent vers une mesure de probabilité  $f$ -invariante dont l'entropie vaut  $\log(\lambda(f))$ .

**Lemme 8.5.** *Soit  $q$  un point périodique hyperbolique et  $\xi_q^-$  et  $\xi_q^+$  les paramétrisations de ses variétés stable et instable. L'ensemble  $\Lambda$  des couples  $(x, y)$  tels que  $\xi_q^+(x) = \xi_q^-(y)$  est un sous-ensemble discret de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  qui ne rencontre les axes de coordonnées qu'en l'origine.*

*Démonstration.* Soient  $(x, y)$  un point de  $\Lambda$  et  $m$  le point  $\xi_q^+(x) = \xi_q^-(y)$ . Les variétés stables et instables peuvent a priori passer une infinité de fois par le point  $m$ . Cependant, puisque chacune de ces variétés est l'union croissante des  $f^{\pm n}(W_{loc}^{\pm}(q))$ , il existe deux ouverts  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  de  $\mathbf{C}$  contenant respectivement  $x$  et  $y$  et un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $S$  contenant  $m$  tels que  $\xi_q^+(\mathcal{U}) \cap \mathcal{W}$  et  $\xi_q^-(\mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$  sont deux courbes analytiques distinctes de  $\mathcal{W}$ . Quitte à restreindre ces ouverts, nous pouvons supposer que  $\xi_q^+(\mathcal{U})$  et  $\xi_q^-(\mathcal{V})$  ne se coupent qu'une fois, c'est-à-dire que  $(x, y)$  est le seul point de  $\Lambda$  dans l'ouvert  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ . L'ensemble  $\Lambda$  est donc discret. Il ne coupe les axes de coordonnées qu'à l'origine car  $\xi_q^+$  (resp.  $\xi_q^-$ ) ne repasse pas par  $q$  : en effet,  $q$  étant un point périodique hyperbolique, aucune courbe n'est contractée sur  $q$  par un itéré de  $f$ .  $\square$

**Proposition 8.6.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface projective complexe  $S$ . Si  $\lambda(f) > 1$ , et si  $f$  vérifie la condition de BEDFORD et DILLER, le groupe engendré par  $f$  est d'indice fini dans  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$ .*

*Démonstration.* L'ensemble des points périodiques hyperboliques de  $f$  de période  $k$  est un ensemble fini. Le théorème 8.4 permet de choisir un entier  $k$  pour lequel existe un tel point périodique  $q$  dont les variétés stables et instables se recoupent une infinité de fois et forment chacune un ensemble ZARISKI-dense de  $S$  (voir le §8.2).

Soit  $g$  une transformation birationnelle de  $S$  qui commute avec  $f$ . Si  $W^+(p)$  est une variété instable ZARISKI-dense de  $f$  en un point périodique  $p$ ,  $g$  est holomorphe au point générique de  $W^+(p)$  ; ceci permet de définir  $g$  par prolongement analytique le long de toute la variété  $W^+(p)$ , même si celle-ci passe par les points d'indétermination de  $g$  (en d'autres termes, on considère la transformée stricte de cette variété par  $g$ ). Avec cette convention,  $g$  permute les variétés stables et instables des points périodiques hyperboliques de  $f$ . Puisque  $f$  a un nombre fini  $N_k$  de points périodiques hyperboliques de période  $k$ , il existe un sous-groupe  $B_k$  dans  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$  d'indice majoré par  $(N_k!)$  dont tous les éléments fixent les variétés stables et instables  $W^-(q)$  et  $W^+(q)$ . Le reste de la démonstration de la proposition 8.1 s'applique mot à mot.  $\square$

**8.3. Centralisateur et points d'indétermination persistants.** Dans ce paragraphe, nous exposons un second argument qui complètera la preuve du théorème B lorsque la condition de BEDFORD et DILLER n'est pas satisfaite.

Soit  $f$  une transformation birationnelle algébriquement stable sur une surface complexe  $S$ . Soit  $x$  un point d'indétermination de  $f$ . Si  $C$  est une courbe

contractée sur  $x$  par un itéré  $f^{-n}$  de  $f$ ,  $n > 0$ , nous dirons que  $C$  est issue, ou qu'elle provient, du point  $x$ . De même, si  $q$  est un point de  $S$  pour lequel il existe un entier  $m \in \mathbf{N}$  vérifiant

- (i)  $\forall 0 \leq l < m$ ,  $f^l(q)$  n'appartient pas à  $\text{Ind}(f)$ ,
- (ii)  $f^m(q) = x$ ,

nous dirons que  $q$  est un point d'indétermination de  $f$  à l'instant  $m$  passant par  $x$ . Puisque  $f$  est algébriquement stable, les itérés  $f^{-m}$  de  $f$ ,  $m \geq 0$ , sont tous holomorphes au voisinage de  $x$ , donc l'unique point  $q$  passant par  $x$  à l'instant  $m$  est  $f^{-m}(x)$ . Nous dirons que  $x$  a une orbite négative infinie si l'ensemble  $\{f^{-m}(x); m \geq 0\}$  est infini.

**Lemme 8.7.** *Soit  $x$  un point d'indétermination de  $f$  dont l'orbite négative est infinie. L'une des deux assertions suivantes est vérifiée.*

- a.- *Il existe une infinité de courbes irréductibles contractées sur  $x$  par les itérés  $f^{-n}$  de  $f$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .*
- b.- *Il existe un morphisme birationnel  $\pi : S \rightarrow S'$  tel que  $\pi \circ f \circ \pi^{-1}$  soit une transformation birationnelle algébriquement stable de  $S'$  dont tous les itérés sont holomorphes au voisinage de  $\pi(x)$ .*

Nous dirons qu'un point d'indétermination  $x$  est « persistant » s'il n'existe aucun morphisme birationnel  $\pi : S \rightarrow S'$  vers une autre surface projective  $S'$  satisfaisant la propriété (b).

*Démonstration.* Supposons que l'union des courbes contractées par un itéré négatif  $f^{-n}$  sur le point  $x$  forme une union finie  $D$  de courbes. Soit  $D'$  une courbe contenue dans  $D$  qui est contractée par un itéré  $f^m$ ,  $m > 0$ , au sens où  $f^m$  est holomorphe le long de  $D' \setminus \text{Ind}(f^{-1})$  et  $f^m(D')$  est réduit à un point. On peut alors contracter le diviseur  $D'$  par un morphisme birationnel  $\pi : S \rightarrow S'$  et l'application  $\pi \circ f \circ \pi^{-1}$  reste algébriquement stable. Cette procédure fait baisser le rang du groupe de NÉRON-SEVERI de  $S$ . En l'appliquant un nombre fini de fois nous pouvons dorénavant supposer que  $D$  ne contient plus de telle courbe  $D'$ .

Si  $D$  est vide, l'alternative (b) du lemme est satisfaite. Dans le cas contraire, les courbes contenues dans  $D$  sont envoyées sur des courbes de  $D$  par les itérés positifs  $f^m$  : en effet, si  $C$  est contenue dans  $D$ , il existe un entier positif  $k$  tel que  $f^{-k}(C \setminus \text{Ind}(f^{-1})) = x$ , et donc  $f^m(C \setminus \text{Ind}(f))$  est contracté sur  $x$  par  $f^{-k-m}$ , donc l'image de  $C$  par  $f^m$  est contenue dans  $D$ .

Nous pouvons donc supposer que  $D$  est invariant par  $f^m$  pour tout entier  $m$  positif. Dans ce cas,  $D$  est invariant par tous les itérés  $f^n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  et les images réciproques  $f^{-n}(x)$ ,  $n \geq 0$ , forment donc une suite de points de  $D$ .

Soit  $C$  une composante irréductible de  $D$  passant par le point  $x$ . Puisque  $D$  est constitué de courbes issues de  $x$ , il existe un entier  $k$  tel que  $f^{-k}$  soit holomorphe le long de  $C$  et contracte  $C$  sur le point  $x$ . Ainsi, l'orbite négative de  $x$  repasse périodiquement en  $x$  et ne peut être infinie, contrairement à l'hypothèse faite dans l'énoncé du lemme.  $\square$

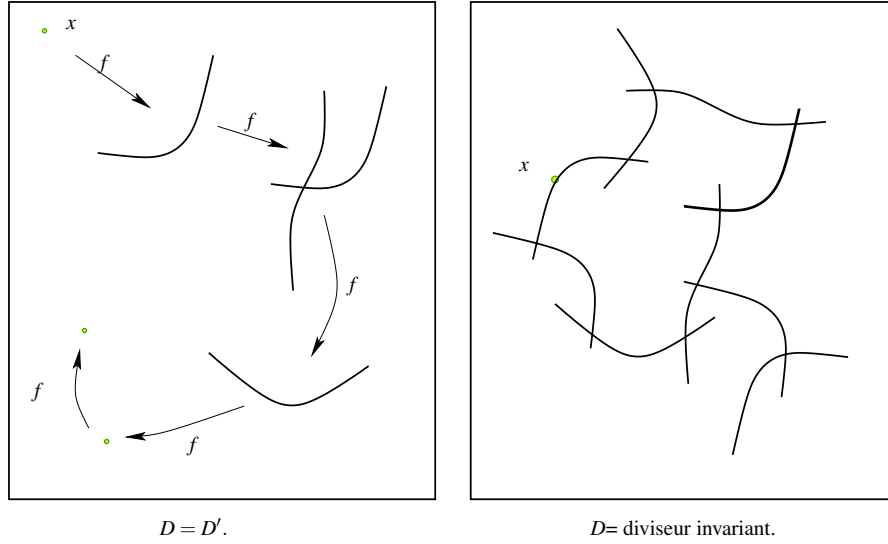


FIGURE 2. Orbites finies. Deux situations extrêmes. À gauche,  $D$  et  $D'$  coïncident, à droite  $D'$  est vide.

**Proposition 8.8.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle algébriquement stable d'une surface complexe compacte  $S$ . Soit  $x$  un point d'indétermination de  $f$  qui est persistant et dont l'orbite négative est infinie. Si  $g$  est une transformation birationnelle de  $S$  qui commute avec  $f$ , ou bien  $g$  préserve un pinceau de courbes rationnelles ou bien l'un des itérés  $g^m$  de  $g$ ,  $m \neq 0$ , coïncide avec l'un des itérés  $f^n$  de  $f$ .*

*Démonstration.* Soit  $N$  le cardinal de l'ensemble  $\text{Ind}(f)$ . Remplaçons  $g$  par  $g^{N!}$ . Puisque l'orbite négative de  $x$  est infinie, il existe un entier  $k_0$  tel que  $g$  soit holomorphe au voisinage des points  $f^{-k}(x)$  pour tout  $k \geq k_0$ . Pour tout entier positif  $n$ , notons  $C_n$  l'union des courbes issues de  $x$  à l'instant  $n$ . Puisque  $x$  est un point périodique persistant, le lemme 8.7 assure que les courbes issues de  $x$  sont en nombre infini. Il existe donc un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $g$  ne contracte pas  $C_n$ . Ces deux remarques, et le fait que  $g$  et  $f$  commutent, montrent que  $g(f^{-k}(x))$  est un point d'indétermination de  $f^m$  pour au moins un entier positif  $m$  compris entre 0 et  $n_0 + k + 1$  ( $\forall k \geq k_0$ ). Puisque nous avons changé  $g$  en  $g^{N!}$ , ce point d'indétermination passe par  $x$ . Quitte à changer  $g$  en  $g \circ f^l$ , avec  $l$  convenable, nous pouvons donc supposer que  $g(f^{-k}(x))$  est un point d'indétermination de  $f$  à l'instant  $k$  passant par  $x$ , et donc que

$$g(f^{-k}(x)) = f^{-k}(x),$$

ceci pour tout  $k \geq k_0$ . Ce choix étant fait, nous obtenons de même

$$g(C_n) = C_n$$

pour tout  $n$  suffisamment grand et l'on conclut avec le lemme suivant. □

**Lemme 8.9** (voir [18] et [27]). *Soit  $S$  une surface complexe compacte et  $g$  une transformation birationnelle de  $S$ . Si  $g$  préserve une infinité de courbes alors  $g$  préserve une fibration.*

**Corollaire 8.10.** *Soit  $f$  une transformation birationnelle algébriquement stable sur une surface complexe compacte  $S$ . Supposons que le premier degré dynamique  $\lambda(f)$  est strictement plus grand que 1, et que  $f$  possède un point d'indétermination persistant dont l'orbite négative est infinie.*

*Alors, pour toute transformation birationnelle  $g$  de  $S$  qui commute à  $f$ , il existe un entier  $m$  strictement positif et un entier  $n$  tels que  $g^m = f^n$ .*

**Remarque 8.11.** Si le point d'indétermination  $x$  persistant a une orbite négative ZARISKI-dense, la démonstration montrera que  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$  est virtuellement isomorphe au groupe cyclique engendré par  $f$ .

*Démonstration.* Soit  $g$  un élément du centralisateur de  $f$ . Supposons que  $g$  préserve un pinceau de courbes  $\mathcal{P}$ . Puisque  $\lambda(f) > 1$ ,  $f$  ne préserve aucun pinceau de courbes. La transformation  $g$  doit donc préserver au moins deux pincesaux distincts, à savoir  $\mathcal{P}$  et  $f(\mathcal{P})$ . D'après [26], ceci entraîne que  $g$  est elliptique : quitte à effectuer une conjugaison birationnelle  $\phi : S \mapsto S'$ , nous pouvons supposer que  $g$  est un automorphisme de  $S'$  dont un itéré  $g^k$  est isotope à l'identité. Continuons à noter  $g$  et  $f$  les transformations de  $S'$  obtenues par cette conjugaison. Supposons que  $g$  soit d'ordre infini et notons  $G$  l'adhérence de ZARISKI du groupe cyclique engendré par  $g^k$  au sein du groupe  $\text{Aut}^0(S')$ . C'est un groupe de LIE abélien qui commute à  $f$ , donc chaque sous-groupe à un paramètre de  $G$  détermine un flot  $\phi_t$  qui commute à  $f$  :

$$f \circ \phi_t = \phi_t \circ f.$$

Si les orbites de  $\phi_t$  sont des courbes algébriques,  $f$  préserve un pinceau de courbes, ce qui contredit  $\lambda(f) > 1$ . Dans le cas contraire,  $\phi_t$  ne fixe qu'un nombre fini de courbes algébriques et, parmi celles-ci, on trouve toutes les courbes contractées par  $f$  ou l'un de ses itérés  $f^n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Il n'y a donc qu'un nombre fini de telles courbes, ce qui contredit l'existence d'un point périodique persistant.  $\square$

**Remarque 8.12.** Sous les hypothèses de cette proposition, il est facile de montrer que  $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$  est virtuellement abélien. Il se pourrait a priori que ce groupe contienne un sous-groupe de torsion infini analogue à ceux décrits au paragraphe 7. C'est un cas que je n'ai pas su exclure.

## RÉFÉRENCES

- [1] Hyman Bass and Alexander Lubotzky. Automorphisms of groups and of schemes of finite type. *Israel J. Math.*, 44(1) :1–22, 1983.
- [2] Arnaud Beauville.  $p$ -elementary subgroups of the Cremona group. *J. Algebra*, 314(2) :553–564, 2007.
- [3] Eric Bedford and Jeffrey Diller. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math. J.*, 128(2) :331–368, 2005.



- [4] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . *Invent. Math.*, 114(2) :277–288, 1993.
- [5] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1) :77–125, 1993.
- [6] Mladen Bestvina, Mark Feighn, and Michael Handel. The Tits alternative for  $\text{Out}(F_n)$ . II. A Kolchin type theorem. *Ann. of Math. (2)*, 161(1) :1–59, 2005.
- [7] Sébastien Boucksom, Charles Favre, and Mattias Jonsson. Degree growth of meromorphic surface maps. *Duke Math. J.*, 141(3) :519–538, 2008.
- [8] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [9] Marco Brunella. *Birational geometry of foliations*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004.
- [10] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces  $K3$ . *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.
- [11] Serge Cantat. Version kählérienne d’une conjecture de Robert J. Zimmer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(5) :759–768, 2004.
- [12] Serge Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles du plan (version longue). *preprint*, <http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/publications.html>, 2006.
- [13] Serge Cantat. Transformations rationnelles, exemples et rigidité (notes de cours). *États de la recherche de la Société Mathématique de France*, pages 1–85, 2006.
- [14] Serge Cantat and Dominique Cerveau. Analytic actions of mapping class groups on surfaces. *J. Topol.*, 1(4) :910–922, 2008.
- [15] Serge Cantat and Charles Favre. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :199–235, 2003.
- [16] Serge Cantat and Stéphane Lamy. Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan. *Geometriae Dedicata*, 123(1) :201–221, 2006.
- [17] Pierre-Alain Cherix, Michael Cowling, Paul Jolissaint, Pierre Julg, and Alain Valette. *Groups with the Haagerup property*, volume 197 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov’s a-T-menability.
- [18] Julian Lowell Coolidge. *A treatise on algebraic plane curves*. Dover Publications Inc., New York, 1959.
- [19] Kevin Corlette. Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. *Ann. of Math. (2)*, 135(1) :165–182, 1992.
- [20] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [21] Pierre de la Harpe and Alain Valette. La propriété  $(T)$  de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger). *Astérisque*, (175) :158, 1989. With an appendix by M. Burger.
- [22] Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :507–588, 1970.

- [23] Julie Déserti. Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 71701, 27, 2006.
- [24] Julie Déserti. Sur les automorphismes du groupe de cremona. *Compos. Math.*, 142(6) :1459–1478, 2006.
- [25] Julie Déserti. Sur les sous-groupes nilpotents du groupe de Cremona. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3) :377–388, 2007.
- [26] Jeffrey Diller and Charles Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [27] Jeffrey Diller, Daniel Jackson, and Andrew Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *to appear in Trans. AMS*, 2006.
- [28] Tien Cuong Dinh. Tits alternative for automorphism groups of compact kaehler manifolds. *Acta Math. Vietnamica*, 37(4) :513–529, 2012.
- [29] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Groupes commutatifs d’automorphismes d’une variété kählérienne compacte. *Duke Math. J.*, 123(2) :311–328, 2004.
- [30] Igor V. Dolgachev. On rational surfaces with a pencil of elliptic curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30 :1073–1100, 1966. en russe.
- [31] Igor V. Dolgachev and Vassily A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane cremona group. *preprint, math.AG/0610595*, pages 1–88, 2006.
- [32] Igor V. Dolgachev and De-Qi Zhang. Coble rational surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(1) :79–114, 2001.
- [33] Romain Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J.*, 131(2) :219–247, 2006.
- [34] Jacques Faraut and Khélifa Harzallah. Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 24(3) :xiv, 171–217, 1974.
- [35] Benson Farb and Peter Shalen. Real-analytic actions of lattices. *Invent. Math.*, 135(2) :273–296, 1999.
- [36] Charles Favre. Points périodiques d’applications birationnelles de  $\mathbf{P}^2$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(4) :999–1023, 1998.
- [37] Charles Favre and Mattias Jonsson. *The valuative tree*, volume 1853 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [38] Charles Favre and Mattias Jonsson. Eigenvaluations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(2) :309–349, 2007.
- [39] Edward Formanek and Claudio Procesi. The automorphism group of a free group is not linear. *J. Algebra*, 149(2) :494–499, 1992.
- [40] John Franks and Michael Handel. Distortion elements in group actions on surfaces. *Duke Math. J.*, 131(3) :441–468, 2006.
- [41] Étienne Ghys. Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l’identité. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 24(2) :137–178, 1993.
- [42] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4) :329–407, 2001.
- [43] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [44] M. H. Gizatullin and V. I. Danilov. Automorphisms of affine surfaces. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(3) :523–565, 703, 1975.

- [45] Marat Kh. Gizatullin. Rational  $G$ -surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1) :110–144, 239, 1980.
- [46] Mikhaïl Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [47] John Hubbard, Peter Papadopol, and Vladimir Veselov. A compactification of Hénon mappings in  $\mathbb{C}^2$  as dynamical systems. *Acta Math.*, 184(2) :203–270, 2000.
- [48] John H. Hubbard and Peter Papadopol. Newton’s method applied to two quadratic equations in  $\mathbb{C}^2$  viewed as a global dynamical system. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 191(891) :vi+146, 2008.
- [49] Vasilii A. Iskovskikh and Igor R. Shafarevich. Algebraic surfaces [ MR1060325 (91f :14029)]. In *Algebraic geometry, II*, volume 35 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 127–262. Springer, Berlin, 1996.
- [50] Nikolai V. Ivanov. Mapping class groups. In *Handbook of geometric topology*, pages 523–633. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [51] Gareth A. Jones and David Singerman. *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. An algebraic and geometric viewpoint.
- [52] Anatole Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (51) :137–173, 1980.
- [53] Stéphane Lamy. L’alternative de Tits pour  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.
- [54] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.
- [55] David I. Lieberman. Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, pages 140–186. Springer, Berlin, 1978.
- [56] Wilhelm Magnus. Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups. *Math. Z.*, 170(1) :91–103, 1980.
- [57] Yuri I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [58] Gregory A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [59] Curtis T. McMullen. Gallery : Dynamics on blowups of  $\mathbb{P}^2$ . <http://www.math.harvard.edu/ctm/gallery/index.html>, 2005.
- [60] John W. Morgan.  $\Lambda$ -trees and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(1) :87–112, 1992.
- [61] D. R. Morrison. On  $K3$  surfaces with large Picard number. *Invent. Math.*, 75(1) :105–121, 1984.
- [62] Keiji Oguiso. Tits alternative in hyperkähler manifolds. *Math. Res. Lett.*, 13(2-3) :307–316, 2006.

- [63] Isabelle Pays and Alain Valette. Sous-groupes libres dans les groupes d'automorphismes d'arbres. *Enseign. Math. (2)*, 37(1-2) :151–174, 1991.
- [64] Felice Ronga and Thierry Vust. Birational diffeomorphisms of the real projective plane. *Comment. Math. Helv.*, 80(3) :517–540, 2005.
- [65] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [66] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbf{P}^k$ . In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [67] Jacques Tits. Free subgroups in linear groups. *J. of Algebra*, 20 :250–270, 1972.
- [68] David Wright. Abelian subgroups of  $\text{Aut}_k(k[X, Y])$  and applications to actions on the affine plane. *Illinois J. Math.*, 23(4) :579–634, 1979.

IRMAR, UMR 6625 DU CNRS, UNIVERSITÉ DE RENNES I, 35042 RENNES, FRANCE  
E-mail address: cantat@univ-rennes1.fr