

# BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS RODIER

**Sur les représentations non ramifiées des groupes  
réductifs  $p$ -adiques ; l'exemple de  $GS_p(4)$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 116, n° 1 (1988), p. 15-42

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1988\\_\\_116\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_1_15_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES REPRÉSENTATIONS NON RAMIFIÉES  
DES GROUPES RÉDUCTIFS  $p$ -ADIQUES;  
L'EXEMPLE DE  $\mathrm{GSp}(4)$**

PAR

FRANÇOIS RODIER (\*)

RÉSUMÉ. — On étudie les représentations irréductibles non ramifiées des groupes réductifs déployés sur un corps local. Dans le cas de  $\mathrm{GSp}(4)$ , on les détermine toutes, et on étudie certaines de leurs propriétés.

ABSTRACT. — The irreducible unramified representations of  $p$ -adic split groups are studied. For  $\mathrm{GSp}(4)$ , they are all determined, and certain properties are investigated.

**1. Introduction**

Dans ce travail, on étudie les représentations irréductibles non ramifiées des groupes réductifs déployés sur un corps local.

Pour les groupes  $\mathrm{GL}(n)$ , ces représentations ont été classifiées par I.N. BERNSTEIN et A.V. ZELEVINSKII (cf. [B-Z], [Z]). Dans le cas des groupes réductifs déployés en général, j'ai classifié dans un travail antérieur les représentations irréductibles non ramifiées associées à des caractères réguliers (cf. [R2]). D'autres exemples ont été construits par G. LUSZTIG pour des groupes simples de type adjoint (cf. [L]), et par A. BOREL (cf. [Bo]).

Enfin récemment, V. GINSBURG d'une part, D. KAZHDAN et G. LUSZTIG d'autre part ont donné une construction générale de toutes ces représentations (cf. [G], [K-L]).

Ici, on construit de telles représentations par une méthode élémentaire fondée sur les formules de I.G. MACDONALD sur les fonctions sphériques, ainsi qu'une involution construite par N. IWAHORI et H. MATSUMOTO. On

---

(\*) Texte reçu le 2 juin 1986, révisé le 1<sup>er</sup> décembre 1986.

F. RODIER, Université Paris 7, U.F.R. de Mathématiques, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

applique cette construction en déterminant la classification des représentations irréductibles non ramifiées de  $\mathrm{GSp}(4)$ . En outre, parmi ces représentations, on détermine celles qui ont un modèle de Whittaker et celles qui sont unitaires.

Voici plus précisément le contenu de ce travail. Après un premier paragraphe de généralités (paragraphe 2), on applique les résultats de [R2] à la classification des représentations irréductibles non ramifiées régulières de  $\mathrm{GSp}(4)$  (paragraphe 3), puis on détermine les séries réductibles et non régulières (paragraphe 4). Dans le paragraphe 5, on étudie pour un groupe  $G$  semi-simple quelconque des représentations irréductibles non ramifiées associées à certains caractères non réguliers. Il s'agit essentiellement de déterminer leur module de Jacquet (*cf.* PROPOSITIONS 10 et 13). Cette construction permet de retrouver en particulier les représentations construites par G. LUSZTIG dans [L]. Elle est appliquée au paragraphe 6 au cas de  $\mathrm{GSp}(4)$ . Dans le paragraphe 7, on étudie certaines propriétés des représentations construites : modèle de Whittaker, unitarité, représentations de carré intégrable, tempérées.

## 2. Définitions, généralités

**2.1. Le groupe  $\mathrm{GSp}(4)$ .** — Soit  $k$  un corps local non archimédien. On note  $\mathfrak{O}$  l'anneau des entiers de  $k$ ,  $\mathfrak{p}$  l'idéal maximal de  $\mathfrak{O}$ ,  $\varpi$  un élément premier dans  $\mathfrak{O}$ ,  $q$  le nombre d'éléments du corps résiduel  $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$  de  $k$ , val la valuation de  $k$  d'image  $\mathbf{Z}$ , et  $|x|$  la valeur absolue d'un élément  $x$  de  $k$  normalisée par  $|x| = q^{-\mathrm{val} x}$ . On note  $\mathrm{sgn}$  le caractère de  $k^\times$  (ou de  $k^\times/k^{\times 2}$ ) donné par  $\mathrm{sgn}(x) = (-1)^{\mathrm{val} x}$ .

On note  $\tilde{G}$  le groupe  $\mathrm{GSp}(4, k)$  formé des matrices carrées  $g$  d'ordre 4 telles que

$${}^t g J g \in k^\times J$$

où  $J$  est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $g \in \tilde{G}$ , on note  $\tilde{\nu}(g)$  le scalaire tel que

$${}^t g J g = \tilde{\nu}(g) J.$$

On note  $\tilde{P}$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  formé des matrices triangulaires supérieures dans  $\tilde{G}$  : c'est un sous-groupe de Borel de  $\tilde{G}$ . On note  $\tilde{T}$

le sous-groupe de  $\tilde{G}$  formé des matrices diagonales dans  $\tilde{G}$ , c'est-à-dire des matrices  $\text{diag}(a, b, c, d)$  avec  $ad = bc$  : c'est un tore déployé maximal dans  $\tilde{G}$ . On note  $\tilde{U}$  le sous-groupe de  $\tilde{P}$  formé des matrices triangulaires supérieures strictes : c'est le radical unipotent de  $P$ .

On note  $\tilde{B}$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  formé des matrices dont les coefficients au-dessus de la diagonale (resp. sur la diagonale, resp. en dessous de la diagonale) sont dans  $\mathfrak{D}$  (resp. dans  $\mathfrak{D}^\times$ , resp. dans  $\mathfrak{p}$ ) : c'est un sous-groupe d'Iwahori de  $\tilde{G}$ .

Soit  $\tilde{Z}$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  formé des matrices scalaires. On note  $G$  le groupe  $\text{PGSp}(4, k)$ , quotient de  $\tilde{G}$  par  $\tilde{Z}$ . On note  $P, T, B, U$  les images de  $\tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{B}, \tilde{U}$  dans  $G$  : ce sont respectivement un sous-groupe de Borel, un tore déployé maximal, un sous-groupe d'Iwahori de  $G$ , le radical unipotent de  $P$ . Le caractère  $\tilde{\nu}$  de  $\tilde{G}$  passe aux quotients et définit un caractère  $\nu$  de  $G$  à valeurs dans  $k^\times/k^{\times 2}$ .

Soit  $X(T)$  l'ensemble des caractères rationnels de  $T$ . On note  $\Delta$  le système des racines de  $G$  par rapport à  $T$ . Les racines simples associées au sous-groupe de Borel  $P$  sont les racines  $\alpha$  (courte) et  $\beta$  (longue) données respectivement par :

$$\alpha(t) = ab^{-1} \quad \text{et} \quad \beta(t) = bc^{-1}$$

si  $t$  est un élément de  $T$  représenté par la matrice  $\text{diag}(a, b, c, d)$ .

On note  $W$  le groupe de Weyl de ce système de racines. Il opère sur l'espace vectoriel réel  $X_{\mathbf{R}}(T) = X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ . Il comprend huit éléments :

- $e$  : élément neutre,
- $w_\gamma$  : symétrie associée à chacune des 4 racines positives  $\gamma$ ,
- $w_\pm$  : rotations d'angle  $\pm\pi/2$  ( $w_+(\alpha) = \alpha + \beta$ ),
- $w_0$  : symétrie par rapport à l'origine.

Si  $\gamma \in \Delta$ , on note  $\check{\gamma}$  la coracine associée : c'est une forme linéaire sur  $X_{\mathbf{R}}(T)$ . Soit  $X_*(T)$  l'ensemble des sous-groupes à un paramètre rationnels de  $T$  :

$$X_*(T) = \text{Hom}_{\text{rat.}}(k^\times, T).$$

Il y a une forme bilinéaire canonique sur  $X(T) \times X_*(T)$  qui permet d'associer à chaque coracine  $\check{\gamma}$  un sous-groupe à un paramètre  $t_{\check{\gamma}}$  de  $T$  : si  $a \in k^\times$  et  $\omega \in X(T)$ , on a  $\omega(t_{\check{\gamma}}(a)) = a^{\langle \check{\gamma}, \omega \rangle}$ . On note  $a_\gamma = t_{\check{\gamma}}(\varpi)$ .

**2.2. Les représentations lisses.** — Rappelons quelques définitions sur les représentations considérées ici (cf. [R2]).

Soit  $H$  un groupe localement compact totalement discontinu. Une *représentation lisse*  $\pi$  de  $H$  dans un espace vectoriel complexe  $V$  est un homomorphisme de  $H$  dans  $\text{Aut } V$  tel que le fixateur de tout élément de

$V$  soit un sous-groupe ouvert de  $H$ . Une représentation de dimension 1 de  $H$  sera dite un *caractère complexe*, ou plus simplement un *caractère*, s'il n'y a pas risque de confondre avec les caractères rationnels.

Le procédé d'induction permet de construire des représentations. Supposons  $H$  unimodulaire, et soit  $H_1$  un sous-groupe fermé de  $H$ , et  $\sigma$  une représentation lisse de  $H_1$  dans un espace  $V$ . Notons  $\rho_{H_1}$  la racine carrée positive de la fonction module de  $H_1$  (c'est l'homomorphisme de  $H_1$  dans  $\mathbf{R}^+$  tel que, si  $dh$  est une mesure de Haar à gauche sur  $G$ , alors  $\rho_{H_1}^2 dh$  est une mesure de Haar à droite). Alors le groupe  $H$  opère par translations à droite dans l'espace des fonctions  $f$  sur  $H$  à valeurs dans  $V$  vérifiant :

- (i)  $f(hg) = \rho_{H_1}(h)\sigma(h)f(g)$  si  $h \in H_1, g \in H$ ;
- (ii)  $f$  est localement constante et à support compact modulo  $H_1$ .

On définit ainsi une représentation lisse de  $H$ , dite *représentation induite* par  $\sigma$ , et on la note  $\text{Ind}_{H_1}^H \sigma$ .

Si une représentation  $\pi$  de  $H$  admet une suite de composition dont les quotients sont  $\pi_1, \dots, \pi_r$  on dira que  $\pi$  est *composée* de  $\pi_1, \dots, \pi_r$  et que  $\pi_1, \dots, \pi_r$  sont les *composants* de  $\pi$ . On notera  $\tilde{\pi}$  la contragrédiente d'une représentation  $\pi$ .

**2.3. Modules de Jacquet.** — On considérera dans la suite les modules de Jacquet relatifs au sous-groupe de Borel  $P$  de  $G$ .

Soit  $\pi$  une représentation lisse de  $G$  dans un espace  $V$ . On note  $V_U$  l'espace des coïnvariants de  $V$  sous  $U$  : c'est le quotient de  $V$  par le sous-espace engendré par les éléments  $\pi(u)x - x$  avec  $u \in U$  et  $x \in V$ . Par passage au quotient, la restriction de  $\pi$  à  $P$  induit une représentation lisse  $\pi_U$  de  $P$  dans  $V_U$ , triviale sur  $U$ . Le module de Jacquet  $R(\pi)$  s'obtient en tordant  $\pi_U$  par  $\rho_P^{-1}$  :  $R(\pi) = \pi_U \otimes \rho_P^{-1}$ .

#### 2.4. Les représentations non ramifiées.

*Définition.* — Une représentation lisse irréductible  $\pi$  de  $G$  (resp.  $\tilde{G}$ ) est dite *non ramifiée* si elle admet un élément non nul invariant par le sous-groupe d'Iwahori  $B$  (resp.  $\tilde{B}$ ) de  $G$  (resp.  $\tilde{G}$ ).

La proposition suivante permet de ramener l'étude des représentations non-ramifiées de  $\tilde{G}$  à celles de  $G$ .

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $\pi$  une représentation non ramifiée irréductible de  $\tilde{G}$ . Alors il existe un caractère complexe non ramifié  $\xi$  de  $\tilde{G}$  tel que  $\pi \otimes \xi$  soit triviale sur  $\tilde{Z}$ .*

*Démonstration.* — C'est clair.

On a la caractérisation suivante des représentations non ramifiées de  $G$ .

**PROPOSITION 2.** — *Les représentations non ramifiées de  $G$  sont les composants irréductibles des représentations  $\text{Ind}_P^G \chi$  induites à partir d'un caractère  $\chi$  non ramifié d'un sous-groupe de Borel.*

*Démonstration.* — C'est la proposition 2.6. de [C3].

Par la suite, on notera :

$$I(\chi) = \text{Ind}_P^G \chi.$$

Donnons un critère d'irréductibilité pour les représentations  $I(\chi)$ . Si  $\chi$  est un caractère non ramifié de  $T$ , on note  $W(\chi)$  le stabilisateur de  $\chi$  dans  $W$ . Le groupe  $W(\chi)$  contient le sous-groupe  $W_\chi$ , engendré par les réflexions  $w_\alpha$  correspondant aux racines  $\alpha$  telles que  $\chi(a_\alpha) = 1$ .

**PROPOSITION 3.** — *Pour que la représentation  $I(\chi)$  soit irréductible, il faut et il suffit que  $W(\chi) = W_\chi$ , et que, pour toute racine  $\alpha$ ,  $\chi(a_\alpha) \neq q$ .*

*Démonstration.* — C'est la proposition 4.2. de [M].

La proposition suivante nous donne un premier résultat sur  $I(\chi)$ .

**PROPOSITION 4.** — *La représentation  $I(\chi)$  est de longueur finie. Si  $w \in W$ , les représentations  $I(\chi)$  et  $I(\chi^w)$  ont des suites de Jordan-Hölder équivalentes.*

*Démonstration.* — cf. [B-Z] ou [Ca] ou [C1].

**2.5. Décomposition polaire des caractères.** — Si  $\chi$  est un caractère complexe de  $T$ , il se décompose de manière unique en produit de deux caractères,  $\chi_{\mathbf{R}}$  à valeurs réelles positives et  $\chi_U$  unitaire. L'application  $\xi \mapsto |\xi|_k$  induit une injection de l'ensemble  $X(T)$  des caractères rationnels de  $T$  dans l'ensemble  $\text{Hom}(T, \mathbf{R}^+)$  des caractères réels positifs de  $T$ . On vérifie facilement que cette injection se prolonge en un isomorphisme :

$$X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \rightarrow \text{Hom}(T, \mathbf{R}^+).$$

On notera  $\lambda_\chi$  l'image réciproque de  $\chi_{\mathbf{R}}$  par cet isomorphisme. Si  $\gamma$  est une racine, on a en particulier :

$$\chi_{\mathbf{R}}(a_\gamma) = q^{-\langle \gamma, \lambda_\chi \rangle}.$$

D'après la PROPOSITION 4, toute représentation non ramifiée de  $G$  est un composant d'une représentation  $I(\chi)$  telle que  $\lambda_\chi$  soit dans l'adhérence de la chambre de Weyl positive dans  $X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ . C'est ce qu'on supposera par la suite. Cela revient à dire :

$$|\chi(a_\alpha)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\chi(a_\beta)| \leq 1.$$

### 3. Les séries principales régulières

Dans ce paragraphe, on étudie la décomposition de la représentation  $I(\chi)$  dans le cas où  $\chi$  est régulier.

On suppose dans ce paragraphe que  $\chi$  est régulier, c'est-à-dire que le stabilisateur de  $\chi$  dans  $W$  est réduit à l'élément neutre. Alors, la décomposition de  $I(\chi)$  est donnée par le théorème de [R2]. Soit  $S$  l'ensemble des racines  $\gamma$  telles que  $\chi(a_\gamma) = q^{-1}$ .

Si  $S = \emptyset$ , alors  $I(\chi)$  est irréductible. Si  $S = \{\gamma\}$ , alors une suite de Jordan-Hölder de  $I(\chi)$  contient deux termes, qui ont respectivement pour module de Jacquet :

$$\bigoplus_{w(\gamma) > 0} w(\chi) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{w(\gamma) < 0} w(\chi).$$

Si  $S$  a deux éléments, alors  $I(\chi)$  est composée de quatre représentations non équivalentes. Comme  $\lambda_\chi$  est dans la chambre de Weyl dominante de  $\chi_{\mathbf{R}}(T)$  et vérifie  $\langle \check{\gamma}, \lambda_\chi \rangle = 1$  pour au moins deux racines  $\gamma$ ,  $\lambda_\chi$  ne peut être qu'un des éléments suivants :  $2\alpha + 3\beta/2$ ,  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha + \beta/2$ .

*Premier cas :*  $\lambda_\chi = 2\alpha + 3\beta/2$ . — Alors on a  $S = \{\alpha, \beta\}$  et on vérifie facilement que  $\chi$  est égal à  $\rho_P$  ou à  $\rho_P \cdot \text{sgn} \circ \nu$ . La représentation  $I(\rho_P)$  admet quatre composantes irréductibles : la représentation triviale, la représentation de Steinberg (cf. [C2]), et deux autres sous-quotients ayant respectivement pour module de Jacquet (on a noté ici  $w^{-1}(\rho_P)$  ce qui était noté  $\rho_P^w$  dans [R2]) ; en particulier  $w_-(\rho_P) = \rho_P^{w+}$  :

$$w_\alpha(\rho_P) \oplus w_-(\rho_P) \oplus w_{2\alpha+\beta}(\rho_P) \quad \text{et} \quad w_\beta(\rho_P) \oplus w_+(\rho_P) \oplus w_{\alpha+\beta}(\rho_P).$$

La représentation  $I(\rho_P \cdot \text{sgn} \circ \nu)$  est composée des mêmes représentations, tordues par le caractère  $\text{sgn} \circ \nu$  de  $G$ .

*Deuxième cas :*  $\lambda_\chi = \alpha + \beta$ . — Dans ce cas,  $S = \{\beta, 2\alpha + \beta\}$ . Comme on a  $\check{\alpha} = (2\alpha + \beta)^- - \check{\beta}$ , on a  $a_\alpha = a_{2\alpha+\beta} a_\beta^{-1}$ , donc  $\chi(a_\alpha) = \chi(a_{2\alpha+\beta}) \chi(a_\beta)^{-1} = 1$  et donc  $w_\alpha(\chi) = \chi$ , ce qui montre que dans ce cas,  $\chi$  ne peut pas être régulier.

*Troisième cas :*  $\lambda_\chi = \alpha + \beta/2$ . — Dans ce cas,  $\chi$  est de la forme  $\chi(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2} \chi_U(t)$  et on a  $S \subset \{\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha + \beta\}$ . Les cas où  $2\alpha + \beta \in S$  s'excluent immédiatement comme dans le cas précédent. Il reste donc  $S = \{\alpha, \alpha + \beta\}$ , ce qui implique  $\chi_U(a_\alpha) = \chi_U(a_{\alpha+\beta}) = 1$ . On a donc  $\chi_U(a_\beta^2) = \chi_U(a_{\alpha+\beta}) \chi_U(a_\alpha^{-1}) = 1$  car  $\check{\beta} = ((\alpha + \beta)^- - \check{\alpha})/2$ . Si  $\chi_U(a_\beta) = 1$ , on a  $\chi(a_\beta) = 1$  et le caractère  $\chi$  n'est pas régulier. On a donc  $\chi_U(a_\beta) = -1$ , et le caractère  $\chi$  est de la forme

$$\chi'(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2} \text{sgn } t^\alpha \quad \text{ou} \quad \chi''(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2} \text{sgn } t^{\alpha+\beta}.$$

Notons que ces deux caractères sont dans la même orbite par  $W$  : on a  $\chi' = w_\beta \chi''$ . La représentation  $I(\chi)$  admet quatre composants irréductibles, qui admettent respectivement pour module de Jacquet (cf. exemple V.3 de [R2]) :

$$\chi \oplus w_\beta \chi; \quad w_\alpha \chi \oplus w_- \chi; \quad w_+ \chi \oplus w_{\alpha+\beta} \chi; \quad w_0 \chi \oplus w_{2\alpha+\beta} \chi.$$

Parmi celles-ci, la première est de carré intégrable, et la dernière est sphérique (cf. *loc. cit.*).

#### 4. Les séries principales non régulières

**4.1. Détermination des caractères  $\chi$  non réguliers.** — Si  $w(\chi) = \chi$ , on a  $w(\lambda_\chi) = \lambda_\chi$ . Comme  $\lambda_\chi$  est supposé être dans la chambre de Weyl dominante, cela laisse les trois seules possibilités suivantes pour un caractère  $\chi$  non régulier :

$$\begin{aligned} \lambda_\chi &= 0, \\ \lambda_\chi &\in \mathbf{R}^+(2\alpha + \beta) \text{ et le stabilisateur de } \chi \text{ dans } W \text{ est égal à } \{e, w_\beta\}, \\ \lambda_\chi &\in \mathbf{R}^+(\alpha + \beta) \text{ et le stabilisateur de } \chi \text{ dans } W \text{ est égal à } \{e, w_\alpha\}. \end{aligned}$$

**4.2. Cas où  $\chi$  est unitaire (i.e.  $\lambda_\chi = 0$ ).** — Les caractères unitaires non ramifiés de  $T$  sont donnés par la proposition suivante dont la vérification est facile.

PROPOSITION 5. — *L'application qui à  $(\xi, \lambda)$  dans  $X(T) \times \mathbf{R}$  fait correspondre le caractère*

$$t \mapsto \exp(-2\pi i \lambda \text{ val } \xi(t))$$

*de  $T$ , induit un homomorphisme de  $X(T) \otimes \mathbf{R}$  sur l'ensemble des caractères unitaires non ramifiés de  $T$ . Le noyau est égal à  $X(T) \otimes \mathbf{Z}$ .*

D'après cette proposition, tout caractère unitaire non ramifié de  $T$  peut être représenté par un élément  $x$  de  $X(T) \otimes \mathbf{R}$  vérifiant

$$-1 \leq \langle x, \check{\alpha} \rangle \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \langle x, (\alpha + \beta)^\vee \rangle \leq 1.$$

Comme, de plus, les représentations  $I(\chi^w)$  pour  $w \in W$  sont équivalentes, on peut se limiter aux caractères  $\chi$  représentés par les éléments  $x$  dans l'alcôve  $\mathcal{A}$  définie par

$$\langle x, \check{\alpha} \rangle \geq 0; \quad \langle x, \check{\beta} \rangle \geq 0; \quad \langle x, (\alpha + \beta)^\vee \rangle \leq 1.$$

D'après la PROPOSITION 3, la représentation  $I(\chi)$  est toujours irréductible. En effet, si  $\chi$  correspond à l'élément  $x$  de l'alcôve  $\mathcal{A}$ , on vérifie sur chaque facette de  $\mathcal{A}$  que l'on a  $W(\chi) = W_\chi$ .



**4.3. Cas où  $\lambda_\chi$  est non nul et proportionnel à  $2\alpha + \beta$ .** — Dans ce cas, si  $\chi$  est non régulier, il est fixé par  $w_\beta$ , et il en va de même de  $\chi_U$ . D'après le paragraphe précédent sur les caractères unitaires, cela revient à dire que  $\chi_U$  est de la forme

$$t \mapsto \exp(-2\pi i \lambda \operatorname{val}(t^{2\alpha+\beta})) \quad \text{avec } -1/2 < \lambda \leq 1/2.$$

Remarquons que  $W(\chi) \subset W(\lambda_\chi) = \{e, w_\beta\} = W_\chi$ , donc  $W(\chi) = W_\chi$ . Par conséquent, si la représentation  $I(\chi)$  est réductible, il existe, d'après la PROPOSITION 3, une racine  $\gamma$  telle que  $\chi(a_\gamma) = q$ . Cela entraîne que  $\lambda_\chi = \alpha + \beta/2$  et que l'on est dans un des cas suivants :

$$\lambda = 0 \text{ et } \chi_U = 1, \quad \text{ou} \quad \lambda = 1/2 \text{ et } \chi_U : t \mapsto \operatorname{sgn} t^\beta = \operatorname{sgn} \circ \nu(t).$$

Remarquons que le deuxième cas se déduit du premier par multiplication par le caractère  $\operatorname{sgn} \circ \nu$  de  $T$ .

Finalement, si  $\lambda_\chi$  est proportionnel à  $2\alpha + \beta$ , en combinant avec les cas où  $\chi$  est régulier, on obtient le résultat suivant. La représentation  $I(\chi)$  est irréductible, sauf si  $\chi$  est de l'une des formes suivantes :

$$\chi(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2} \operatorname{sgn} t^\alpha, \quad \chi(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2},$$

ou le produit d'un de ces caractères par  $\operatorname{sgn} \circ \nu$

**4.4. Cas où  $\lambda_\chi$  est non nul et proportionnel à  $\alpha + \beta$ .** — Dans ce cas, si  $\chi$  est non régulier, il est fixé par  $w_\alpha$ . Le caractère  $\chi_U$  est donc de l'une des formes suivantes

$$t \mapsto \exp(-2\pi i \lambda \operatorname{val}(t^{\alpha+\beta})), \quad \text{avec } -1/2 < \lambda \leq 1/2,$$

ou

$$t \mapsto \exp(-2\pi i \lambda \operatorname{val}(t^{\alpha+\beta})) \operatorname{sgn} t^\alpha, \quad \text{avec } -1/2 < \lambda \leq 1/2.$$

Dans le premier cas, on voit comme plus haut que si  $I(\chi)$  est réductible, il existe une racine  $\gamma$  telle que  $\chi(a_\gamma) = q$ . Cela entraîne que l'on est dans l'un des cas suivants

$$\lambda_\chi = \alpha + \beta, \quad \lambda = 0 \text{ et } \chi_U = 1,$$

$$\text{ou} \quad \lambda_\chi = (\alpha + \beta)/2, \quad \lambda = 0 \text{ et } \chi_U = 1,$$

$$\text{ou} \quad \lambda_\chi = (\alpha + \beta)/2, \quad \lambda = 1/2 \text{ et } \chi_U(t) = \operatorname{sgn} t^{\alpha+\beta}.$$

Dans le deuxième cas, si  $I(\chi)$  est réductible, on est dans l'un des cas suivants

$$\lambda_\chi = \alpha + \beta, \quad \lambda = 1/2 \text{ et } \chi_U : t \mapsto \operatorname{sgn} t^\beta,$$

$$\text{ou} \quad \lambda_\chi = (\alpha + \beta)/2, \quad \lambda = 0 \text{ et } \chi_U = \operatorname{sgn} t^\alpha,$$

$$\text{ou} \quad \lambda_\chi = (\alpha + \beta)/2, \quad \lambda = 1/2 \text{ et } \chi_U : t \mapsto \operatorname{sgn} t^\beta.$$

Comme plus haut, on remarque que le deuxième cas se déduit du premier par multiplication par le caractère  $\text{sgn} \circ \nu$  de  $T$ .

Pour  $\lambda_\chi$  proportionnel à  $\alpha + \beta$ , on obtient donc le résultat suivant. La représentation  $I(\chi)$  est irréductible, sauf si  $\chi$  est de l'une des formes suivantes

$$\chi(t) = |t^{\alpha+\beta}|, \quad \chi(t) = |t^{\alpha+\beta}|^{1/2}, \quad \chi(t) = |t^{\alpha+\beta}|^{1/2} \text{sgn } t^{\alpha+\beta},$$

ou le produit d'un de ces caractères par  $\text{sgn} \circ \nu$ .

### 5. Construction de représentations non ramifiées : le cas général

**5.1. Les représentations sphériques.** — Dans ce paragraphe, on prend plus généralement pour  $G$  un groupe semi-simple déployé sur  $k$ . On prend pour  $P$  un sous-groupe de Borel de  $G$  et pour  $T$  un tore déployé maximal de  $P$ . On note encore  $\Delta$  le système des racines de  $G$  par rapport à  $T$  et  $W$  le groupe de Weyl de  $\Delta$ . Si  $\gamma$  est une racine, on note encore  $w_\gamma$  la réflexion associée.

On prend pour  $\chi$  un caractère complexe de  $T$  tel que  $W_\chi = \{1, w_\eta\}$  où  $\eta \in \Delta$ . On note encore  $I(\chi)$  la représentation  $\text{Ind}_P^G \chi$ . On va étudier des composants de  $I(\chi)$ .

Soit  $\mathcal{B}$  l'immeuble de Bruhat-Tits associé à  $G$ ,  $\mathcal{A}$  l'appartement de  $\mathcal{B}$  associé à  $T$ , et soit  $K$  le stabilisateur dans  $G$  d'un sommet spécial de  $\mathcal{A}$ . Le groupe  $K$  est alors un bon sous-groupe compact maximal de  $G$  (cf. [B-T]) et on a la décomposition d'Iwasawa  $G = PK$ .

Les éléments invariants par  $K$  dans la représentation  $I(\chi)$  forment donc un sous-espace de dimension 1. Par conséquent, un seul quotient d'une suite de Jordan-Hölder de  $I(\chi)$  admet un élément non nul invariant par  $K$ . Notons  $\pi_\chi$  ce composant.

### 5.2. Le module de Jacquet de $\pi_\chi$ .

LEMME 1. — *Le module de Jacquet  $R(\pi_\chi)$  est somme de représentations  $R(\pi_\chi)_w$ , pour  $w \in W/W(\chi)$ , chacune étant indécomposable, de dimension au plus 2, et composée de caractères  $w\chi$ .*

*Démonstration.* — On va d'abord montrer que le module de Jacquet  $R(\pi_\chi)$  est composé de caractères  $w(\chi)$ , avec multiplicité 1 ou 2. En effet, la représentation  $R(\pi_\chi)$  est un sous-quotient de  $R(I(\chi))$ . Or cette dernière représentation est composée des caractères  $w(\chi)$ , comptés avec leur multiplicité, qui est égale à 2 (cf. [B-Z], lemme 2.12 ou [C1], théorème 6.3.5). Il reste à voir que  $R(\pi_\chi)$  admet au plus un quotient isomorphe à  $w(\chi)$

pour un  $w$  donné; cela montrera que les  $R(\pi_\chi)_w$  sont indécomposables. En effet,

$$\dim \text{Hom}_T(R(\pi_\chi), w(\chi)) = \dim \text{Hom}_G(\pi_\chi, I(w(\chi))) \leq 1$$

car  $I(w(\chi))$  ne contient qu'une droite formée d'éléments invariants par  $K$ , donc admet au plus un sous-espace isomorphe à  $\pi_\chi$ .

Les coefficients de  $R(\pi_\chi)$  sont liés à ceux de  $\pi_\chi$  par la proposition suivante (cf. [C1], proposition 4.2.3 et théorème 4.2.4). Notons  $\bar{R}$  le foncteur de Jacquet relatif au sous-groupe de Borel  $\bar{P}$  contenant  $T$  et opposé à  $P$ ; si  $\epsilon$  est un réel positif, notons  $T(\epsilon)$  l'ensemble des éléments  $t$  de  $T$  vérifiant  $|t^\gamma| \leq \epsilon$  pour toute racine  $\gamma$  positive.

**PROPOSITION 6.** — *Soit  $\pi$  une représentation admissible irréductible de  $G$ . Il existe une forme bilinéaire invariante non dégénérée sur  $R(\pi) \times \bar{R}(\bar{\pi})$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$  telle que si les éléments  $x$  de  $\pi$  et  $y$  de  $\bar{\pi}$  ont pour image  $x_U$  dans  $R(\pi)$  et  $y_U$  dans  $\bar{R}(\bar{\pi})$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\langle \pi(t)x, y \rangle = \rho_P(t) \langle R(\pi)(t)x_U, y_U \rangle_R$  pour tout  $t$  dans  $T(\epsilon)$ .*

On va maintenant effectuer le calcul d'un coefficient de  $\pi_\chi$ . Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $\pi_\chi$  et  $\bar{\pi}_\chi$  respectivement, invariants par  $K$  et tels que  $\langle x, y \rangle = 1$ . Le coefficient  $g \mapsto \langle \pi_\chi(g)x, y \rangle$  est alors la fonction sphérique  $\Gamma_\chi$  associée à  $\chi$ . La fonction sphérique  $\Gamma_\xi$  associée à un caractère régulier  $\xi$  de  $T$  est donnée par la formule de Macdonald (cf. [C3], [Mcd2]) :

$$\Gamma_\xi(t) = Q^{-1} \sum_{w \in W} ((w\xi) \cdot \rho_P)(t) \prod_{\gamma > 0} \frac{1 - q^{-1}(w\xi)(a_\gamma)^{-1}}{1 - (w\xi)(a_\gamma)^{-1}} \quad \text{pour } t \in T(1),$$

où  $Q$  est un scalaire non nul, indépendant de  $t$  et  $\xi$ . Pour  $\chi$  non régulier, on obtient la formule pour  $\Gamma_\chi$  par prolongement par continuité, ou par le procédé suivant (cf. [Mcd1]).

Soit  $Y$  le groupe des copoids du système de racines  $\Delta$ . Le groupe  $X_* = X_*(T)$  des sous-groupes à un paramètre rationnels de  $T$  est un sous-groupe de  $Y$ . Soit  $\mathbb{C}[Y]$  l'algèbre du groupe  $Y$ . C'est une algèbre intègre (elle est isomorphe à une algèbre de polynômes de Laurent). Si  $\omega \in Y$ , on note  $e(\omega)$  son image canonique dans  $\mathbb{C}[Y]$ . Si  $\lambda \in X_*$ , on considère l'élément suivant du corps des fractions de  $\mathbb{C}[X_*]$  :

$$\gamma_\lambda = \sum_{w \in W} e(-w\lambda) \prod_{\gamma > 0} \frac{1 - q^{-1}e(w\tilde{\gamma})}{1 - e(w\tilde{\gamma})}.$$

**PROPOSITION 7.**

- (i)  $\gamma_\lambda \in \mathbb{C}[X_*]$ .
- (ii) Si  $\lambda$  est dans la chambre de Weyl dominante,  $Q(\rho_P^{-1}\Gamma_\xi)(t_\lambda(\varpi))$  est l'image de  $\gamma_\lambda$  par le caractère de  $\mathbb{C}[X_*]$  qui envoie  $e(\omega)$  sur  $\xi(t_\omega(\varpi))^{-1}$ .

*Démonstration.*

(i) Soit  $\sigma$  la demi-somme des coracines positives. D'après [B] (Chap. 6, § 3, Proposition 2),  $e(-\sigma)\prod_{\gamma>0}(1 - e(\tilde{\gamma}))$  est un élément anti-invariant de  $\mathbf{C}[Y]$  c'est-à-dire que l'on a

$$e(-w\sigma) \prod_{\gamma>0} (1 - e(w\tilde{\gamma})) = \epsilon(w)e(-\sigma) \prod_{\gamma>0} (1 - e(\tilde{\gamma}))$$

si  $w \in W$  ( $\epsilon(w)$  est le caractère signe de  $W$ , qui vaut  $(-1)$  sur les éléments  $w_\gamma$ ). On a donc

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \sum_{w \in W} e(-w\lambda) \frac{\prod_{\gamma>0} (1 - q^{-1}e(w\tilde{\gamma}))}{\epsilon(w)e(w\sigma - \sigma) \prod_{\gamma>0} (1 - e(\tilde{\gamma}))} \\ &= \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w)e(-w\sigma - w\lambda) \prod_{\gamma>0} (1 - q^{-1}e(w\tilde{\gamma}))}{e(-\sigma) \prod_{\gamma>0} (1 - e(\tilde{\gamma}))}. \end{aligned}$$

Le numérateur de l'expression est clairement anti-invariant. On en déduit que  $\gamma_\lambda \in \mathbf{C}[Y]$  d'après [B] (*loc. cit.*). On voit alors facilement que

$$\gamma_\lambda \in \mathbf{C}[X_*] = \mathbf{C}(X_*) \cap \mathbf{C}[Y].$$

La partie (ii) de la proposition est alors claire.

Posons

$$A = e(-\sigma - \lambda)\prod_{\gamma>0}(1 - q^{-1}e(\tilde{\gamma})),$$

où  $\sigma$  est comme plus haut la demi-somme des coracines positives. D'après la démonstration précédente, on a

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= e(\sigma) \left[ \prod_{\gamma>0} (1 - e(\tilde{\gamma}))^{-1} \right] \sum_{w \in W} \epsilon(w)w.A \\ &= e(\sigma) \left[ \prod_{\gamma>0} (1 - e(\tilde{\gamma}))^{-1} \right] \sum_{\substack{w \in W \\ w^{-1}(\eta)>0}} \epsilon(w)(wA - w_\eta wA). \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $wA - w_\eta wA$ . Soit  $D$  la dérivation de l'algèbre  $\mathbf{C}[Y]$  qui envoie  $e(\omega)$  sur  $-\langle \eta, \omega \rangle e(\omega)$ .

LEMME 2. — Si  $u \in \mathbf{C}[Y]$ , on a :

- (i)  $\frac{u - w_\eta u}{1 - e(\tilde{\eta})} \in \mathbf{C}[Y]$ ,
- (ii)  $\frac{u - w_\eta u}{1 - e(\tilde{\eta})} = Du \pmod{1 - e(\tilde{\eta})}$ .

*Démonstration.* — Il suffit de montrer le lemme pour un élément de la forme  $e(\omega)$ . On a, si  $\langle \eta, \omega \rangle \leq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{e(\omega) - w_\eta e(\omega)}{1 - e(\tilde{\eta})} &= \frac{e(\omega) - e(\omega - \langle \eta, \omega \rangle \tilde{\eta})}{1 - e(\tilde{\eta})} \\ &= e(\omega) \frac{1 - e(\tilde{\eta})^{-\langle \eta, \omega \rangle}}{1 - e(\tilde{\eta})} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \langle \eta, \omega \rangle = 0, \\ e(\omega) (1 + e(\tilde{\eta}) + \dots + e(\tilde{\eta})^{-\langle \eta, \omega \rangle - 1}) & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= -\langle \eta, \omega \rangle e(\omega) \pmod{(1 - e(\tilde{\eta}))} \end{aligned}$$

et de même si  $\langle \eta, \omega \rangle \geq 0$ .

On en déduit le calcul de  $\gamma_\lambda$  modulo  $1 - e(\tilde{\eta})$ .

PROPOSITION 8. — On a

$$\gamma_\lambda = \left[ \prod_{\substack{\gamma > 0 \\ \gamma \neq \eta}} (1 - e(\tilde{\gamma}))^{-1} \right] \sum_{\substack{w \in W \\ w^{-1}(\eta) > 0}} \epsilon(w) a(w, \lambda) e(\sigma - w\sigma - w\lambda) \pmod{(1 - e(\tilde{\eta}))}$$

avec

$$\begin{aligned} a(w, \lambda) &= \langle \eta, w\sigma + w\lambda \rangle \prod_{\gamma > 0} (1 - q^{-1} e(w\tilde{\gamma})) \\ &\quad + q^{-1} \sum_{\gamma > 0} \langle \eta, w\tilde{\gamma} \rangle e(w\tilde{\gamma}) \prod_{\substack{\zeta > 0 \\ \zeta \neq \gamma}} (1 - q^{-1} e(w\tilde{\zeta})). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — D'après le LEMME 2, on obtient

$$\gamma_\lambda = e(\sigma) \left[ \prod_{\substack{\gamma > 0 \\ \gamma \neq \eta}} (1 - e(\tilde{\gamma}))^{-1} \right] \sum_{\substack{w \in W \\ w^{-1}(\eta) > 0}} \epsilon(w) D(wA) \pmod{1 - e(\tilde{\eta})}.$$

La formule s'obtient alors en calculant la dérivée logarithmique de  $wA$  :

$$\frac{D(wA)}{wA} = \langle \eta, w\sigma + w\lambda \rangle + \sum_{\gamma > 0} \frac{q^{-1} \langle \eta, w\tilde{\gamma} \rangle e(w\tilde{\gamma})}{1 - q^{-1} e(w\tilde{\gamma})}.$$

PROPOSITION 9. — Soit  $\chi$  un caractère de  $T$  tel que  $W_\chi = \{e, w_\eta\}$ . Si  $t \in T(1)$ , on a

$$\Gamma_\chi(t) = \sum_{\substack{w \in W \\ w(\eta) > 0}} B(w, \chi) A(w, t, \chi) (\rho_P \cdot (w\chi))(t)$$

avec

$$B(w, \chi) = Q^{-1} \epsilon(w) \chi(t_{w^{-1}\sigma-\sigma}(\varpi)) \prod_{\substack{\gamma > 0 \\ \gamma \neq \eta}} (1 - \chi(a_\gamma)^{-1})^{-1}$$

et

$$A(w, t, \chi) = \left[ \langle w\eta, \sigma \rangle + \text{val } t^{w(\eta)} \right] \prod_{\gamma > 0} (1 - q^{-1}(w\chi)(a_\gamma)^{-1}) \\ + q^{-1} \sum_{\gamma > 0} \langle w\eta, \check{\gamma} \rangle (w\chi)(a_\gamma)^{-1} \prod_{\substack{\zeta > 0 \\ \zeta \neq \gamma}} (1 - q^{-1}(w\chi)(a_\zeta)^{-1}).$$

*Démonstration.* — Il suffit de calculer l'image de  $\gamma_\lambda$  par le caractère  $\chi$ . Comme  $\chi \circ t_{\check{\eta}} = 1$ , il suffit pour cela de connaître  $\gamma_\lambda \pmod{1 - e(\check{\eta})}$ .

On obtient :

$$Q \cdot (\rho_p^{-1} \Gamma_\chi)(t_\lambda(\varpi)) \\ = \prod_{\substack{\gamma > 0 \\ \gamma \neq \eta}} (1 - \chi(a_\gamma)^{-1})^{-1} \sum_{\substack{w \in W \\ w^{-1}(\eta) > 0}} A_1(w, \lambda, \chi) \epsilon(w) \chi(t_{w\sigma-\sigma+w\lambda}(\varpi))$$

avec

$$A_1(w, \lambda, \chi) = \langle \eta, w\sigma + w\lambda \rangle \prod_{\gamma > 0} (1 - q^{-1}(w^{-1}\chi)(a_\gamma)^{-1}) \\ + q^{-1} \sum_{\gamma > 0} \langle \eta, w\check{\gamma} \rangle (w^{-1}\chi)(a_\gamma)^{-1} \prod_{\substack{\zeta > 0 \\ \zeta \neq \gamma}} (1 - q^{-1}(w^{-1}\chi)(a_\zeta)^{-1}).$$

On remarque que  $\langle \eta, w\lambda \rangle = \langle w^{-1}\eta, \lambda \rangle = \text{val } t_\lambda(\varpi)^{w^{-1}(\eta)}$ . On pose alors  $A(w, t_\lambda(\varpi), \chi) = A_1(w^{-1}, \lambda, \chi)$ .

**PROPOSITION 10.** — *La multiplicité du caractère  $w\chi$  dans  $R(\pi_\chi)$  est égale à 2 si  $(w\chi)(a_\gamma) \neq q^{-1}$  pour toute racine positive  $\gamma$ , à 1 s'il existe une seule racine positive  $\gamma$  telle que  $(w\chi)(a_\gamma) = q^{-1}$  et que cette racine n'est pas orthogonale à  $w\eta$ , et à 0 sinon.*

*Démonstration.* — D'après le LEMME 1, le module de Jacquet  $R(\pi_\chi)$  est somme de représentations  $R(\pi_\chi)_w$ , pour  $w \in W/W(\chi)$ , qui sont indécomposables, de dimension au plus 2, et composées de caractères  $(w\chi)$ .

Soient  $x$  et  $y$  des éléments invariants par  $K$  de  $\pi_\chi$  et  $\tilde{\pi}_\chi$  respectivement, tels que  $\langle x, y \rangle = 1$ . Soient  $x_U$  et  $y_U$  les images de  $x$  et  $y$  dans  $R(\pi_\chi)$  et  $\tilde{R}(\tilde{\pi}_\chi)$  respectivement, et  $x_{U,w}$  l'image de  $x_U$  dans  $R(\pi_\chi)_w$ .

Montrons d'abord que l'élément  $x_{U,w}$  engendre la représentation  $R(\pi_\chi)_w$ . En effet, comme on a la décomposition d'Iwasawa  $G = PK$  et que  $\pi_\chi$  est irréductible, l'orbite  $\pi_\chi(P) \cdot x$  engendre l'espace de  $\pi_\chi$ . Par passage au quotient, il s'ensuit que  $R(\pi_\chi)(P) \cdot x_{U,w}$  engendre l'espace de  $R(\pi_\chi)_w$ .

Si  $u$  est un élément de l'espace de la représentation  $R(\pi_\chi)$ , notons  $c_u$  le coefficient :  $t \mapsto \langle R(\pi_\chi)(t)u, y_U \rangle_R$ . L'application  $u \mapsto c_u$  est un opérateur d'entrelacement injectif de  $R(\pi_\chi)$  dans l'espace  $C^\infty(T)$  des fonctions localement constantes sur  $T$ . En effet, si  $c_u$  est nul, on a pour tout  $t$  dans  $T$  :

$$\langle R(\pi_\chi)(t)u, y_U \rangle_R = 0,$$

donc (cf. PROPOSITION 6)

$$\langle u, \bar{R}(\bar{\pi}_\chi)(t^{-1})y_U \rangle_R = 0,$$

et on montre comme plus haut que  $y_U$  engendre l'espace de la représentation  $\bar{R}(\bar{\pi}_\chi)$  : on a donc  $u = 0$ .

Montrons de plus que  $c_u$  est déterminé par sa restriction à  $T(\epsilon)$  pour tout  $\epsilon > 0$ . En effet, comme  $R(\pi_\chi)$  est de dimension finie,  $c_u$  est déterminé par sa restriction à une partie finie  $T_1$  de  $T$ ; si  $t_1$  est un élément de  $T$  tel que  $t_1 T_1 \subset T(\epsilon)$ ,  $c_u$  est aussi déterminé par sa restriction à  $t_1 T_1$ .

Notons  $c_u^\infty$  le germe de  $c_u$  suivant la base de filtre des  $T(\epsilon)$  pour  $\epsilon > 0$ . On vient de voir que l'application  $u \mapsto c_u^\infty$  est injective. La PROPOSITION 6 nous permet de calculer le germe  $c_{x_U}^\infty$  :

$$c_{x_U}^\infty \text{ est le germe de } \rho_P(t)^{-1} \langle \pi_\chi(t)x, y \rangle = \rho_P(t)^{-1} \Gamma_\chi(t).$$

D'après ce qui précède, la représentation  $R(\pi_\chi)$  se réalise dans l'espace engendré par les germes  $c_{R(\pi_\chi)(t)x_U}^\infty$ . D'après le calcul de  $\Gamma_\chi(t)$ , on en déduit que  $R(\pi_\chi)_w$  se réalise dans l'espace engendré par le germe de

$$t \mapsto B(w, \chi)A(w, t, \chi)(w\chi)(t)$$

(avec les notations de la PROPOSITION 9). Comme  $B(w, \chi) \neq 0$ , on en déduit que  $\dim R(\pi_\chi)_w = 2$  si le coefficient de val  $t^{w(\eta)}$  dans  $A(w, \chi, t)$  est non nul, que  $\dim R(\pi_\chi)_w = 1$  si ce coefficient est nul et que  $A(w, \chi, t) \neq 0$ , et que  $\dim R(\pi_\chi)_w = 0$  sinon. On en déduit la proposition.

**5.3. Étude d'une involution.** — Soit  $x_0$  le sommet de l'appartement  $\mathcal{A}$  fixé par  $K$ . Soit  $C$  l'alcôve dans  $\mathcal{A}$  de sommet  $x_0$ , et contenue dans la chambre de Weyl vectorielle positive de sommet  $x_0$  associée au sous-groupe de Borel  $P$ . Le fixateur  $B$  de  $C$  dans  $G$  est un sous-groupe d'Iwahori de  $G$ .

Soit  $\mathcal{H}$  l'algèbre des fonctions sur  $G$  invariantes à droite et à gauche par  $B$ , munie du produit de convolution (pour la mesure de Haar  $dg$  sur  $G$  donnant à  $B$  la masse 1). Si  $\pi$  est une représentation lisse de  $G$  dans un espace  $V$ , l'algèbre  $\mathcal{H}$  opère sur le sous-espace  $V^B$  de  $V$  formé des éléments invariants par  $B$  : notons  $\pi^B$  cette représentation de  $\mathcal{H}$ . La proposition suivante résulte de [Bo] (Proposition 2.4, théorème 4.10, corollaire 4.11) (cf. aussi [Be]).

PROPOSITION 11. — *Il existe une bijection de l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles non ramifiées de  $G$  sur l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de  $\mathcal{H}$ , qui, à la classe de la représentation  $\pi$ , fait correspondre la classe de la représentation  $\pi^B$ .*

Si  $x \in G$ , notons  $q_x$  le volume de  $BxB$  et  $T_x$  la fonction caractéristique de  $BxB$ . Notons  $\text{sgn } q_x = 1$  si  $q_x \in q^{2\mathbb{Z}}$  et  $\text{sgn } q_x = -1$  sinon. L'algèbre  $\mathcal{H}$  admet pour base l'ensemble des  $T_x$  où  $x$  parcourt un système de représentants de  $B \backslash G / B$ .

PROPOSITION 12.

- (i) *Les éléments  $T_x$  sont inversibles dans  $\mathcal{H}$ .*
- (ii) *L'application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  définie par*

$$T_x \mapsto q_x \text{sgn } q_x (T_{x^{-1}})^{-1}$$

*est une involution de l'algèbre  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* — cf. [I-M], chap. 3.2.

Notons  $f \mapsto \hat{f}$  cette involution. D'après la PROPOSITION 11, cette involution induit une involution sur l'ensemble des classes de représentations irréductibles non ramifiées de  $G$  : notons-la encore  $\pi \mapsto \hat{\pi}$ . On a donc  $\pi(\hat{f}) = \hat{\pi}(f)$  si  $f \in \mathcal{H}$ .

LEMME 3. — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible non ramifiée de  $G$  dans un espace  $V$ . Alors*

- (i) *l'application canonique  $V^B \rightarrow V_U$  est un isomorphisme,*
- (ii) *si  $t \in T(1)$ , et si l'élément  $x$  de  $V^B$  a pour image  $x_U$  dans  $V_U$ , alors  $\pi(T_t)x$  a pour image  $q_t \pi_U(t)x_U$  dans  $V_U$ .*

*Démonstration.* — cf. [C3], prop. 2.4 et prop. 2.5.

Soit  $w_0$  l'élément de  $W$  de plus grande longueur, et soit  $\tilde{w}_0$  un représentant de  $w_0$  dans  $K$  (cf. [B-T], prop. 4.4.2).

LEMME 4. — *Si  $t \in T(1)$ , on a  $T_{t\tilde{w}_0} = T_t T_{\tilde{w}_0}$  et  $q_{t\tilde{w}_0} = q_t q_{\tilde{w}_0}$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de voir que  $BtB\tilde{w}_0B = Bt\tilde{w}_0B$ .



PROPOSITION 13. — *La représentation  $R(\hat{\pi})$  est équivalente à  $R(\pi) \circ \text{Int } w_0$ , où  $\text{Int } w_0$  est l'automorphisme de  $T$  défini par  $w_0$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de voir que la représentation  $(\hat{\pi})_U$  est équivalente à  $\rho_P^2 \cdot (\pi_U \circ \text{Int } w_0)$ . Soit  $x$  un élément invariant par  $B$  de l'espace  $V$  de  $\pi$ . On notera  $y_U$  l'image dans  $V_U$  d'un élément  $y$  de  $V$ . D'après le LEMME 3, on a, si  $t \in T(1)$

$$\begin{aligned} q_t(\hat{\pi})_U(t) (\hat{\pi}(T_{\tilde{w}_0})x)_U &= (\hat{\pi}(T_t)\hat{\pi}(T_{\tilde{w}_0})x)_U \\ &= (\hat{\pi}(T_{t\tilde{w}_0})x)_U && \text{[d'après le LEMME 4]} \\ &= q_{t\tilde{w}_0} \text{sgn } q_{t\tilde{w}_0} (\pi((T_{\tilde{w}_0 t^{-1}})^{-1})x)_U && \text{[par définition de } \hat{\pi}] \\ &= q_{t\tilde{w}_0} \text{sgn } q_{t\tilde{w}_0} (\pi((T_{w_0(t^{-1})}T_{\tilde{w}_0})^{-1})x)_U && \text{[d'après le LEMME 4]} \\ &= q_{t\tilde{w}_0} \text{sgn } q_{t\tilde{w}_0} (\pi(T_{\tilde{w}_0}^{-1})\pi((T_{w_0(t^{-1})})^{-1})x)_U \end{aligned}$$

(notons que  $\tilde{w}_0$  et  $\tilde{w}_0^{-1}$  sont dans la même classe modulo  $B$ ).

D'après le LEMME 3, il existe une unique application linéaire  $A : V_U \rightarrow V_U$  telle que  $Ay_U = (\pi(T_{\tilde{w}_0})^{-1}y)_U$  si  $y \in V^B$ . On a donc, d'après ce qui précède

$$q_t q_{\tilde{w}_0} \text{sgn } q_{\tilde{w}_0} (\hat{\pi})_U(t) \cdot Ax_U = q_{t\tilde{w}_0} \text{sgn } q_{t\tilde{w}_0} A(\pi((T_{w_0(t^{-1})})^{-1})x)_U.$$

On a  $q_t = \rho_P(t)^{-2}$  (cf. [C1], lemme 1.5.1). On obtient donc, à l'aide du LEMME 4 :

$$((\hat{\pi})_U(t) \circ A)x_U = A(\pi((T_{w_0(t^{-1})})^{-1})x)_U.$$

Le LEMME 3 appliqué à  $\pi((T_{w_0(t^{-1})})^{-1})x$  montre que

$$(\pi(T_{w_0(t^{-1})})^{-1}x)_U = q_{w_0(t)} \pi_U(w_0(t))x_U.$$

On a donc

$$(\hat{\pi})_U(t) \circ A = \rho_P(t)^2 A \circ \pi_U(w_0(t)).$$

Comme  $T(1)$  engendre  $T$ , cette relation est vraie sur tout  $T$ , ce qui montre la proposition.

**5.4. Exemples.** — Dans le cas où  $G$  est de type adjoint, les représentations de carré intégrable construites par G. LUSZTIG dans [L] sont du type  $\hat{\pi}_\chi$ , où  $\chi$  est un caractère convenablement choisi. Les PROPOSITIONS 10 et 13 permettent donc de retrouver ses résultats.

**6. Les représentations non ramifiées de  $G$  associées aux caractères non réguliers**

**6.1. Généralités.** — On revient ici au groupe  $G$  défini en 2.1. et on étudie dans ce paragraphe les derniers cas : on suppose donc que  $\chi$  est non régulier, non unitaire, et que  $I(\chi)$  est réductible. Le caractère  $\chi$  est donc de l'une des formes suivantes :

$$t \mapsto |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2}, \quad t \mapsto |t^{\alpha+\beta}|, \quad t \mapsto |t^{\alpha+\beta}|^{1/2}, \quad t \mapsto |t^{\alpha+\beta}|^{1/2} \operatorname{sgn} t^{\alpha+\beta},$$

ou le produit de l'un de ces caractères par  $\operatorname{sgn} \nu$ . En particulier,  $W(\chi)$  et  $W_\chi$  sont des groupes égaux à deux éléments.

Dans toute la suite, on notera  $\eta$  l'unique racine positive telle que  $W_\chi = \{e, w_\eta\}$ .

**PROPOSITION 14.** — *Soit  $\gamma$  une racine telle que  $\chi(a_\gamma) = q, M_\gamma$  le centralisateur dans  $G$  de la composante connexe du noyau de  $\gamma$ ,  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  admettant  $M_\gamma$  pour sous-groupe de Lévi, et  $P_1$  le sous-groupe de Borel de  $Q$  contenant  $T$  pour lequel  $\gamma$  est une racine positive. Alors*

(i) *il existe un caractère  $\chi_1$  de  $M_\gamma$  dont la restriction à  $T$  soit égale à  $\rho_{P_1 \cap M_\gamma} \cdot \chi$ ,*

(ii) *la représentation  $\operatorname{Ind}_{P_1}^G \chi$  admet  $\operatorname{Ind}_Q^G \chi_1$  comme sous-représentation,*

(iii)  *$R(\operatorname{Ind}_Q^G \chi_1)$  est composé des caractères  $w\chi$  tels que  $w(\gamma) > 0$ .*

*Démonstration.*

(i) On a  $\rho_{P_1 \cap M_\gamma}(t_\gamma(x)) = |x|_k$  si  $x \in k^\times$ . Le groupe dérivé  $M'_\gamma$  de  $M_\gamma$  contient  $t_\gamma(k^\times)$ , et comme c'est un groupe de rang 1, on a  $M'_\gamma \cap T = t_\gamma(k^\times)$ . Le caractère  $\rho_{P_1 \cap M_\gamma} \cdot \chi$  de  $T$  est donc trivial sur  $M'_\gamma \cap T$  et définit un caractère de  $M_\gamma/M'_\gamma$  (qui est un groupe isomorphe à  $\hat{T}/(M'_\gamma \cap T)$ ).

Le point (ii) est alors clair. Le point (iii) résulte de [C1] (proposition 6.3.3) ou de [B-Z] (corollaire 2.13).

**6.2. Cas où  $\chi(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2}$ .** — On a  $(w\chi)(a_\gamma) = q^{-1/2 \langle w^{-1}\tilde{\gamma}, 2\alpha+\beta \rangle}$ . C'est égal à  $q^{-1}$  si  $w^{-1}\tilde{\gamma} \in \{\tilde{\alpha}, (2\alpha + \beta), (\alpha + \beta)\}$ . D'après la PROPOSITION 10, on voit que  $R(\pi_\chi)$  est composé de  $w_0\chi$  avec la multiplicité 2, et de  $w_{\alpha+\beta}\chi$  avec la multiplicité 1. La représentation  $R(\hat{\pi}_\chi)$ , d'après la PROPOSITION 13, est composée de  $\chi$  avec la multiplicité 2, et de  $w_\alpha\chi$  avec la multiplicité 1.

Appliquons la PROPOSITION 14 avec  $\gamma = -\alpha$ . On prend  $Q = M_\alpha P$  et on a  $P_1 = w_\alpha P w_\alpha^{-1}$ . La PROPOSITION 14 montre qu'il existe une sous-représentation  $\operatorname{Ind}_Q^G \chi_1$  de  $\operatorname{Ind}_{P_1}^G \chi$  telle que  $R(\operatorname{Ind}_Q^G \chi_1)$  soit composée

de  $w_0\chi$  (avec multiplicité 2) et de  $w_\alpha\chi$  et  $w_{\alpha+\beta}\chi$  (avec multiplicité 1). Comme  $\text{Ind}_{P_1}^G \chi$  et  $I(\chi)$  ont des suites de Jordan-Hölder équivalentes, on en déduit que  $\text{Ind}_Q^G \chi_1$  est composée de  $\pi_\chi$  et d'une représentation  $\pi'_\chi$  telle que  $R(\pi'_\chi) = w_\alpha\chi$  (et donc  $\pi'_\chi$  est irréductible).

Finalement,  $I(\chi)$  est composée de 4 représentations irréductibles :  $\pi_\chi$ ,  $\pi'_\chi$ ,  $\hat{\pi}_\chi$ ,  $\hat{\pi}'_\chi$ . Le tableau suivant donne la multiplicité des caractères  $w\chi$  dans leur module de Jacquet.

	$\chi$	$w_\alpha\chi$	$w_{\alpha+\beta}\chi$	$w_0\chi$
$\pi_\chi$	0	0	1	2
$\pi'_\chi$	0	1	0	0
$\hat{\pi}_\chi$	2	1	0	0
$\hat{\pi}'_\chi$	0	0	1	0

**6.3. Cas où  $\chi(t) = |t^{\alpha+\beta}|$ .** — On a  $(w\chi)(a_\gamma) = q^{-(w^{-1}\tilde{\gamma}, \alpha+\beta)}$ . C'est égal à  $q^{-1}$  si  $w^{-1}\tilde{\gamma} \in \{\tilde{\beta}, (2\alpha+\beta)^\sim\}$ . La PROPOSITION 10 montre que  $R(\pi_\chi)$  est composée de  $w_0\chi$  avec la multiplicité 2, et de  $w_\beta\chi$  et  $w_{2\alpha+\beta}\chi$  avec la multiplicité 1. La PROPOSITION 13 détermine  $R(\hat{\pi}_\chi)$  et montre donc que  $I(\chi)$  est composée des deux représentations irréductibles  $\pi_\chi$  et  $\hat{\pi}_\chi$ .

**6.4. Cas où  $\chi(t) = |t^{\alpha+\beta}|^{1/2}$ .** — On a  $(w\chi)(a_\gamma) = q^{-1/2(w^{-1}\tilde{\gamma}, \alpha+\beta)}$ . C'est égal à  $q^{-1}$  si  $w^{-1}\tilde{\gamma} = \alpha + \beta$ . Par conséquent,  $R(\pi_\chi)$  est composée de  $w_0\chi$  et de  $w_{2\alpha+\beta}\chi$ , chacun avec multiplicité 2. La PROPOSITION 13 détermine  $R(\hat{\pi}_\chi)$  et montre donc que  $I(\chi)$  est composée des deux représentations irréductibles  $\pi_\chi$  et  $\hat{\pi}_\chi$ .

**6.5. Cas où  $\chi(t) = |t^{\alpha+\beta}|^{1/2} \text{sgn } t^{\alpha+\beta}$ .** — On a  $(w\chi)(a_\gamma) = q^{-1/2(w^{-1}\tilde{\gamma}, \alpha+\beta)} (-1)^{(w^{-1}\tilde{\gamma}, \alpha+\beta)}$ , et c'est égal à  $q^{-1}$  si  $w^{-1}\tilde{\gamma} = \alpha + \beta$ . Comme précédemment, on voit que  $I(\chi)$  est composée de  $\pi_\chi$  et  $\hat{\pi}_\chi$ .

### 6.6. Récapitulation.

**THÉORÈME 1.** — *Le tableau ci-dessous donne, pour chaque caractère  $\chi$  non ramifié de  $T$ , à conjugaison par  $W$  près, la longueur de  $I(\chi)$  ainsi que le paragraphe où sont décrits les composants de  $I(\chi)$ .*

caractère $\chi$	longueur de $I(\chi)$	description des composants
$\rho_P$	4	3
$t \mapsto  t^{2\alpha+\beta} ^{1/2} \operatorname{sgn} t^\alpha$	4	3
$t \mapsto  t^{2\alpha+\beta} ^{1/2}$	4	6.2
$t \mapsto  t^{\alpha+\beta} $	2	6.3
$t \mapsto  t^{\alpha+\beta} ^{1/2}$	2	6.4
$t \mapsto  t^{\alpha+\beta} ^{1/2} \operatorname{sgn} t^{\alpha+\beta}$	2	6.5
$\chi \cdot (\operatorname{sgn} \circ \nu)$ où $\chi$ est comme ci-dessus	comme $I(\chi)$	comme $I(\chi)$
$\chi$ différent des caractères ci-dessus, vérifiant $\chi(a_\gamma) = q$ pour une racine $\gamma$	2	3
$\chi$ vérifiant $\chi(a_\gamma) \neq q$ pour toute racine $\gamma$	1	—

### 7. Propriétés des représentations non ramifiées

**7.1. Modèle de Whittaker.** — Un caractère  $\theta$  de  $U$  sera dit *principal* si sa restriction aux sous-groupes de  $U$  formés respectivement des éléments

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } a \in k \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } a \in k$$

est non triviale.

Si  $\theta$  est ainsi, on note  $\mathcal{W}_\theta$  l'espace des fonctions  $f$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  qui vérifient  $f(ug) = \theta(u)f(g)$  si  $u \in U$  et  $g \in G$ . On dit qu'une représentation de  $G$  admet un *modèle de Whittaker* si elle est équivalente à une sous-représentation de  $\mathcal{W}_\theta$  (sur lequel  $G$  agit par translations à droite). Notons que cette notion est indépendante du choix de  $\theta$ , car le groupe des matrices diagonales opère transitivement sur l'ensemble des caractères principaux de  $U$ .

**PROPOSITION 15.** — *Soit  $\chi$  un caractère non ramifié de  $T$  tel que  $|\chi(a_\alpha)| \leq 1$  et  $|\chi(a_\beta)| \leq 1$ , et  $\pi$  un composant irréductible de  $I(\chi)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\pi$  admet un modèle de Whittaker;
- (ii)  $\pi$  est équivalent à  $\hat{\pi}_\chi$ ;
- (iii)  $R(\pi)$  contient le caractère  $\chi$ .

*Démonstration.* — L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de la formule de Macdonald pour les fonctions sphériques, et des PROPOSITIONS 6 et 13 si  $\chi$  est régulier. Sinon elle résulte des PROPOSITIONS 10 et 13.

Remarquons maintenant qu'un seul composant de  $I(\chi)$  admet un modèle de Whittaker. En effet, on a

$$\dim \text{Hom}_U(I(\chi)|_U, \theta) = \dim \text{Hom}_G(I(\chi), \mathcal{W}_\theta) = 1$$

(cf. [R1]), et le foncteur  $\sigma \mapsto \text{Hom}_U(\sigma, \theta)$  défini sur la catégorie des représentations lisses de  $U$  est exact (cf. [B-Z], proposition 1.9). Si  $\chi$  est régulier, l'équivalence de (i) et (iii) résulte de la proposition 4 de [R2]. Si  $\chi$  est singulier, il reste à vérifier que tout composant  $\sigma$  de  $I(\chi)$  distinct de  $\hat{\pi}_\chi$  n'admet pas de modèle de Whittaker. Pour cela on montre que  $\sigma$  est un composant d'une représentation de la forme  $\text{Ind}_Q^G \chi_1$  (comme dans la PROPOSITION 14), et on a comme plus haut (cf. [R1], théorème 3)

$$\dim \text{Hom}_G(\sigma, \mathcal{W}_\theta) \leq \dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_Q^G \chi_1, \mathcal{W}_\theta) = 0.$$

Pour montrer que  $\sigma$  est un composant de  $\text{Ind}_Q^G \chi_1$ , on applique la PROPOSITION 14. Par exemple, si  $\chi(t) = |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2}$ , la représentation  $\text{Ind}_Q^G \chi_1$  construite à partir de  $\gamma = -\alpha$  (cf. 6.2) est composée de  $\pi_\chi$  et de  $\pi'_\chi$ ; la représentation  $\text{Ind}_Q^G \chi_1$  construite à partir de  $\gamma = -\alpha - \beta$  est composée de  $\pi_\chi$  et de  $\hat{\pi}'_\chi$ .

**7.2. Représentations unitaires.** — Dans ce paragraphe, on suppose que le caractère  $\chi_U$  est représenté par un élément  $x$  de  $X(T) \otimes \mathbf{R}$  (cf. PROPOSITION 5) situé dans l'alcôve  $\mathcal{A}$  définie en 4.2. Le caractère  $\chi_{\mathbf{R}}$  n'est plus confiné dans la chambre de Weyl positive.

Une condition nécessaire pour qu'un sous-quotient  $\pi$  de  $I(\chi)$  soit unitaire est qu'il soit hermitien, c'est-à-dire que  $\hat{\pi}$  soit équivalent à  $\bar{\pi}$ , ce qui impose que la condition (H) suivante soit vérifiée : il existe un élément  $w$  de  $W$  tel que  $w\chi^{-1} = \bar{\chi}$  (c'est-à-dire  $w\chi_U = \chi_U$  et  $w\lambda_\chi + \lambda_\chi = 0$ ).

PROPOSITION 16. — Soit  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$ , de sous-groupe de Lévi  $M$ . Soit  $S$  un ensemble connexe de caractères complexes non ramifiés de  $M$ . Soit  $\sigma$  une représentation irréductible de  $M$ . Supposons que les représentations  $\text{Ind}_Q^G \sigma \otimes \xi$  soient irréductibles et hermitiennes pour  $\xi \in S$ , et que l'une d'entre elles soit unitaire. Alors

- (i)  $\text{Ind}_Q^G \sigma \otimes \xi$  est unitaire pour tout  $\xi \in S$ ;

(ii) tous les composants irréductibles de  $\text{Ind}_Q^G \sigma \otimes \xi$  sont unitaires si  $\xi$  est dans l'adhérence de  $S$ .

*Démonstration.*

(i) On note  $\tau_\xi = \text{Ind}_Q^G \sigma \otimes \xi$ . Sa restriction à  $K$  est indépendante de  $\xi$  et sera notée  $\tau$ . Le groupe  $K$  admet une représentation  $\delta$  qui intervient une seule fois dans  $\tau$  : c'est soit la représentation unité de  $K$  si  $\tau_\xi = \pi_\xi$ , soit la restriction à  $K$  d'un modèle de Whittaker convenablement choisi si  $\tau_\xi = \hat{\pi}_\xi$  (PROPOSITION 15). On choisit une forme hermitienne  $\{\cdot, \cdot\}$  non nulle invariante par  $K$  sur  $\delta$ , et on la prolonge pour  $\xi \in S$  en l'unique forme hermitienne  $\{\cdot, \cdot\}_\xi$  invariante par  $G$ . Soit  $v$  un élément non nul de  $\delta$ ,  $\xi_1$  un élément de  $S$ , et  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $G$  vérifiant les conditions de [Be, 3.7] (il en existe d'arbitrairement petits). On peut trouver des fonctions  $u_i$  telles que les  $\tau_{\xi_1}(u_i)v$  forment une base de  $\tau_{\xi_1}^H$  donc de  $\tau^H$ . Donc pour  $x \in \tau^H$ , il existe des fonctions  $c_i$  définies et continues dans un voisinage de  $\xi_1$  telles que

$$x = \sum_i c_i(\xi) \tau_\xi^H(u_i)v$$

pour  $\xi$  dans un voisinage de  $\xi_1$ .

Il existe un isomorphisme  $A_\xi$  de  $\tau_\xi$  vers  $\check{\tau}_\xi$  tel que  $\{x, y\}_\xi = \langle A_\xi x, \bar{y} \rangle$  où  $\bar{y}$  dénote le même élément que  $y$  dans  $\check{\tau}_\xi$ . C'est un opérateur d'entrelacement de  $\tau_\xi$  vers  $\check{\tau}_\xi$ . On a alors, pour  $x$  et  $y$  dans  $\tau^H$

$$\begin{aligned} \{x, y\}_\xi &= \sum_i c_i(\xi) \{\tau_\xi(u_i)v, y\}_\xi \\ &= \sum_i c_i(\xi) \{A_\xi^{-1} \check{\tau}_\xi(u_i) A_\xi v, y\}_\xi \\ &= \sum_i c_i(\xi) \langle \check{\tau}_\xi(u_i)v', \bar{y} \rangle \end{aligned}$$

car  $A_\xi v = v'$  ne dépend que de  $v$ . Par conséquent la forme hermitienne sur  $\tau^H : (x, y) \mapsto \{x, y\}_\xi$  est continue en  $\xi$  pour  $\xi \in S$ . Comme il y a un  $\xi_0$  telle qu'elle soit définie positive, elle l'est pour tout  $\xi \in S$ . Comme cela est vrai pour tout  $H$  assez petit, la représentation  $\tau_\xi$  est unitaire pour  $\xi \in S$ .

La partie (ii) est montrée dans [T] (Proposition 2.7. et lemme 2.8.).

Pour chaque facette de l'alcôve  $\mathcal{A}$ , on détermine ci-dessous les représentations unitaires.

a) *Le point  $x$  est intérieur à l'alcôve  $\mathcal{A}$ .* — Alors le seul élément  $w$  tel que  $w\chi_U = \chi_U$  est l'élément neutre, et la condition  $w\lambda_x + \lambda_x = 0$

implique alors  $\lambda_\chi = 0$ . Le caractère  $\chi$  est unitaire et la représentation  $I(\chi)$  est unitaire irréductible.

b) *Le point  $x$  est intérieur au segment d'extrémités 0 et  $(\alpha + \beta)/2$ .* Alors on a  $W(\chi_U) = \{e, w_\alpha\}$ . La condition  $w_\alpha \lambda_\chi + \lambda_\chi = 0$  est réalisée si et seulement si  $\lambda_\chi$  est proportionnel à  $\alpha$ . Dans ce cas, le caractère  $\chi$  s'écrit :

$$\chi(t) = \chi_U(t) |t^\alpha|^\lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$

La représentation  $I(\chi)$  est réductible si et seulement si  $\lambda = \pm 1/2$ . Elle est unitaire si  $\lambda = 0$ , et elle reste donc unitaire si  $-1/2 < \lambda < +1/2$  (cf. PROPOSITION 16). Pour  $\lambda = \pm 1/2$ , la représentation  $I(\chi)$  est de longueur 2, et ses deux composants sont unitaires (cf. PROPOSITION 16). Quand  $\lambda$  tend vers l'infini, on voit, grâce à la PROPOSITION 6 que des coefficients de  $I(\chi)$  deviennent non bornés. Par conséquent  $I(\chi)$  n'est pas unitaire. En utilisant la PROPOSITION 16, on conclut que  $I(\chi)$  n'est pas unitaire si  $\lambda > 1/2$  ou  $\lambda < -1/2$ .

c) *Le point  $x$  est intérieur au segment d'extrémités 0 et  $(2\alpha + \beta)/2$ .* Les mêmes arguments montrent que  $\chi$  vérifie la condition (H) si et seulement si  $\chi$  est de la forme

$$\chi(t) = \chi_U(t) |t^\beta|^\lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$

La représentation  $I(\chi)$  est unitaire irréductible si  $-1/2 < \lambda < 1/2$ . Si  $\lambda = \pm 1/2$ , elle admet deux composants unitaires. Si  $|\lambda| > 1/2$ , la représentation  $I(\chi)$  est irréductible non unitaire.

d) *Le point  $x$  est intérieur au segment d'extrémités  $(\alpha + \beta)/2$  et  $(2\alpha + \beta)/2$ .* — De même, on voit que  $\chi$  vérifie la condition (H) si et seulement si  $\chi$  est de la forme

$$\chi(t) = \chi_U(t) |t^{\alpha+\beta}|^\lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$

La représentation  $I(\chi)$  est unitaire irréductible si  $-1/2 < \lambda < 1/2$ . Elle admet deux composants unitaires si  $\lambda = \pm 1/2$ . Elle est irréductible non unitaire si  $|\lambda| > 1/2$ .

e) *Le point  $x$  est égal à  $(\alpha + \beta)/2$ .* — Alors on a  $\chi_U(t) = \text{sgn } t^{\alpha+\beta}$ , et  $W(\chi_U) = \{e, w_\alpha, w_{\alpha+\beta}, w_0\}$ . Comme la condition  $w_0 \lambda_\chi + \lambda_\chi = 0$  est toujours réalisée, la condition (H) est toujours vérifiée par  $\chi = \chi_U \chi_{\mathbf{R}}$ , quel que soit le caractère positif  $\chi_{\mathbf{R}}$ . La représentation  $I(\chi)$  est réductible si et seulement si

$$\langle \lambda_\chi, \tilde{\alpha} \rangle = \pm 1 \quad \text{ou si} \quad \langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^\vee \rangle = \pm 1.$$

Elle est unitaire si  $\lambda_\chi = 0$ , et elle reste donc unitaire si

$$|\langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle| < 1 \quad \text{et} \quad |\langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^\vee \rangle| < 1.$$

Si  $\langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle = \pm 1$ , ou si  $\langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^\vee \rangle = \pm 1$ , tous les composants de  $I(\chi)$  (au nombre de quatre si  $\lambda_\chi = \pm\beta/2$  ou  $\lambda_\chi = \pm(\alpha + \beta/2)$ , au nombre de deux sinon) sont unitaires (cf. PROPOSITION 16). Comme plus haut, on voit que les composants de  $I(\chi)$  pour les autres  $\chi$  ne sont pas unitaires.

f) *Le point  $x$  est égal à 0* (Voir figure 1). — Alors on a  $\chi_U(t) = 1$ , et  $W(\chi_U) = W$ . La condition (H) est vérifiée par tous les  $\chi = \chi_U \chi_R$ , quel que soit le caractère positif  $\chi_R$ . Comme  $\chi_U$  est invariant par  $W$ , on peut se limiter à étudier les  $I(\chi)$  tels que  $\langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle \geq 0$  et  $\langle \lambda_\chi, \check{\beta} \rangle \geq 0$ . La représentation  $I(\chi)$  est réductible si et seulement s'il existe une racine positive  $\gamma$  telle que  $\langle \lambda_\chi, \check{\gamma} \rangle = 1$ . Les mêmes raisonnements que plus haut montrent que  $I(\chi)$  est unitaire irréductible si  $\langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^\vee \rangle < 1$ , que tous ses composants (au nombre de quatre si  $\lambda_\chi = \alpha + \beta/2$ , de deux sinon) sont unitaires si  $\langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^\vee \rangle = 1$ , qu'aucun composant de  $I(\chi)$  n'est unitaire si  $\langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle > 1$  ou si  $\langle \lambda_\chi, \check{\beta} \rangle > 1$ .

Si  $\langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle = \langle \lambda_\chi, \check{\beta} \rangle = 1$ , c'est-à-dire si  $\lambda_\chi = 2\alpha + 3\beta/2$ , la représentation  $I(\chi)$  admet quatre composants dont deux sont unitaires (la représentation triviale et la représentation de Steinberg) et les deux autres ne le sont pas (cf. [B-W], théorème XI.4.5).

Considérons les représentations  $I(\chi)$ , avec  $\lambda_\chi$  sur le segment fermé d'extrémité  $\alpha + \beta$  et  $2\alpha + 3\beta/2$ , c'est-à-dire

$$0 \leq \langle \check{\alpha}, \lambda_\chi \rangle \leq 1 \quad \text{et} \quad \langle \lambda_\chi, \check{\beta} \rangle = 1.$$

D'après la PROPOSITION 14, il existe un caractère  $\chi_1$  de  $M_\beta$  dont la restriction à  $T$  soit égale à  $\rho_{P \cap M_\beta} \cdot \chi$ ; les représentations  $I(\chi)$  contiennent la sous-représentation propre  $J(\chi) = \text{Ind}_{M_\beta P}^G \chi_1$ . Si  $\lambda_\chi \neq 2\alpha + 3\beta/2$ , les représentations  $I(\chi)$  sont de longueur 2, donc les représentations  $J(\chi)$  sont irréductibles. Avec les mêmes hypothèses, on voit que les représentations  $J(\chi)$  sont hermitiennes. En effet,  $J(\bar{\chi})$  (resp.  $J(\check{\chi})$ ) est l'unique composant de  $I(\bar{\chi})$  (resp.  $I(\check{\chi})$ ) qui contienne un élément invariant par  $K$ , et la condition (H) montre que  $I(\bar{\chi})$  et  $I(\check{\chi})$  ont les mêmes composants. La PROPOSITION 16 (i) montre que si  $J(\chi)$  était unitaire pour  $\lambda_\chi = \alpha + \beta$ , il en serait de même pour  $\lambda_\chi$  à l'intérieur du segment d'extrémités  $\alpha + \beta$  et  $2\alpha + 3\beta/2$ , donc pour tous les composants irréductibles de  $J(\chi)$  (PROPOSITION 16 (ii)) si  $\lambda_\chi = 2\alpha + 3\beta/2$ . Or la PROPOSITION 14 montre que, pour  $\lambda_\chi = 2\alpha + 3\beta/2$ ,  $J(\chi)$  est composé de la représentation triviale et d'une autre représentation, dont on a vu plus haut qu'elle n'est pas



unitaire. On en déduit que  $J(\chi)$  n'est pas unitaire pour les  $\lambda_\chi$  considérés. On raisonne de façon analogue pour l'autre composant de  $I(\chi)$ .

En appliquant la PROPOSITION 16, on en déduit finalement que les composants des représentations  $I(\chi)$  telles que

$$\langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^- \rangle > 1/2, \quad \langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle \geq 0, \quad \langle \lambda_\chi, (2\alpha + \beta)^- \rangle \leq 1$$

ne sont pas unitaires.

Finalement, les représentations unitaires trouvées sont:

les composants des  $I(\chi)$  pour

$$\langle \lambda_\chi, \check{\alpha} \rangle \geq 0, \quad \langle \lambda_\chi, \check{\beta} \rangle \geq 0 \text{ et } \langle \lambda_\chi, (\alpha + \beta)^- \rangle \leq 1;$$

la représentation triviale;

la représentation de Steinberg.

g) *Le point  $x$  est égal à  $\alpha + \beta/2$ .* — Alors on a  $\chi_U(t) = \text{sgn } t^\beta = \text{sgn } \nu(t)$ . Comme  $\text{sgn } \nu$  s'étend en un caractère unitaire de  $G$ , on retrouve les mêmes représentations que dans le paragraphe précédent, à torsion près par  $\text{sgn } \nu$ .

**THÉORÈME 2.** — *Les représentations unitaires irréductibles non ramifiées de  $G$  sont les suivantes.*

- a)  $I(\chi)$  avec  $\chi$  unitaire;
- b)  $I(\chi)$  pour  $\chi(t) = \chi_U(t)|t^\alpha|^\lambda$  avec  $\chi_U$  unitaire,  $\chi_U(a_\alpha) = 1$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \lambda < 1/2$ ;
- c) les composants des  $I(\chi)$  ci-dessus avec  $\lambda = +1/2$ ;
- d)  $I(\chi)$  pour  $\chi(t) = \chi_U(t)|t^\beta|^\lambda$  avec  $\chi_U$  unitaire,  $\chi_U(a_\beta) = 1$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \lambda < 1/2$ ;
- e) les composants des  $I(\chi)$  ci-dessus avec  $\lambda = +1/2$ ;
- f)  $I(\chi)$  pour  $\chi(t) = \chi_U(t)|t^{\alpha+\beta}|^\lambda$  avec  $\chi_U$  unitaire,  $\chi_U(a_{\alpha+\beta}) = -1$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \lambda < 1/2$ ;
- g) les composants des  $I(\chi)$  ci-dessus avec  $\lambda = +1/2$ ;
- h)  $I(\chi)$  pour  $\chi(t) = \text{sgn } t^{\alpha+\beta}|t^\alpha|^\lambda|t^{\alpha+\beta}|^\mu$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \lambda < 1/2$ ,  $0 < \mu < 1/2$ ;
- i) les composants des  $I(\chi)$  ci-dessus avec  $\lambda = 1/2$ ,  $0 < \mu < 1/2$  ou  $0 < \lambda < 1/2$ ,  $\mu = 1/2$  ou  $\lambda = \mu = 1/2$ ;
- j) la représentation triviale;
- k) le caractère  $\text{sgn } \nu$ ;
- l) la représentation de Steinberg;
- m) la représentation de Steinberg tordue par  $\text{sgn } \nu$ ;

- n)  $I(\chi)$  pour  $\chi = |t^{\alpha+\beta}|^\lambda |t^{2\alpha+\beta}|^\mu$  ou  $\chi = \text{sgn } \nu |t^{\alpha+\beta}|^\lambda |t^{2\alpha+\beta}|^\mu$  avec  $\lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu < 1/2$  ;
- o) les composants de  $I(\chi)$  pour  $\chi = |t^\alpha|^\lambda |t^\beta|^{1/2}$  avec  $1/2 < \lambda < 1$  ;
- p) les composants de  $I(\chi)$  pour  $\chi = \text{sgn } \nu |t^\alpha|^\lambda |t^\beta|^{1/2}$  avec  $1/2 < \lambda < 1$ .

La PROPOSITION 5 et la PROPOSITION 6 de [R2] (et des raisonnements analogues dans le cas d'un caractère non régulier) permettent de décrire les représentations non ramifiées de carré intégrable, ou tempérées de  $G$ .

THÉORÈME 3. — *Les représentations non ramifiées de carré intégrable de  $G$  sont les suivantes :*

- (i) la représentation de Steinberg,
- (ii) la représentation de Steinberg tordue par  $\text{sgn } \nu$ ,
- (iii) la représentation  $\hat{\pi}_\chi$  où  $\chi$  est le caractère  $\chi : t \mapsto |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2} \text{sgn } t^\alpha$  (cf. 3).

THÉORÈME 4. — *Les représentations non ramifiées tempérées de  $G$  sont les suivantes :*

- (i) les représentations de carré intégrable données par le THÉORÈME 3,
- (ii) les représentations  $\hat{\pi}_\chi$  où  $\chi$  est comme dans le cas c) ou e) du THÉORÈME 2,
- (iii) la représentation  $\pi'_\chi$  définie en 6.2, et sa tordue par  $\text{sgn } \nu$ ,
- (iv) les représentations  $I(\chi)$  où  $\chi$  est un caractère unitaire.

*Remarque.* — Notons que toutes les représentations décrites dans le théorème ci-dessus sont de la forme  $\hat{\pi}_\chi$ , sauf  $\pi'_\chi$  et  $\pi'_\chi \cdot \text{sgn } \nu$  où  $\chi$  est le caractère  $t \mapsto |t^{2\alpha+\beta}|^{1/2}$ . Notons encore que ce caractère et son produit par  $\text{sgn } \nu$  sont les seuls tels que  $I(\chi)$  admette plus d'un composant tempéré : dans ce cas,  $I(\chi)$  admet  $\hat{\pi}_\chi$  et  $\pi'_\chi$  comme composants tempérés.

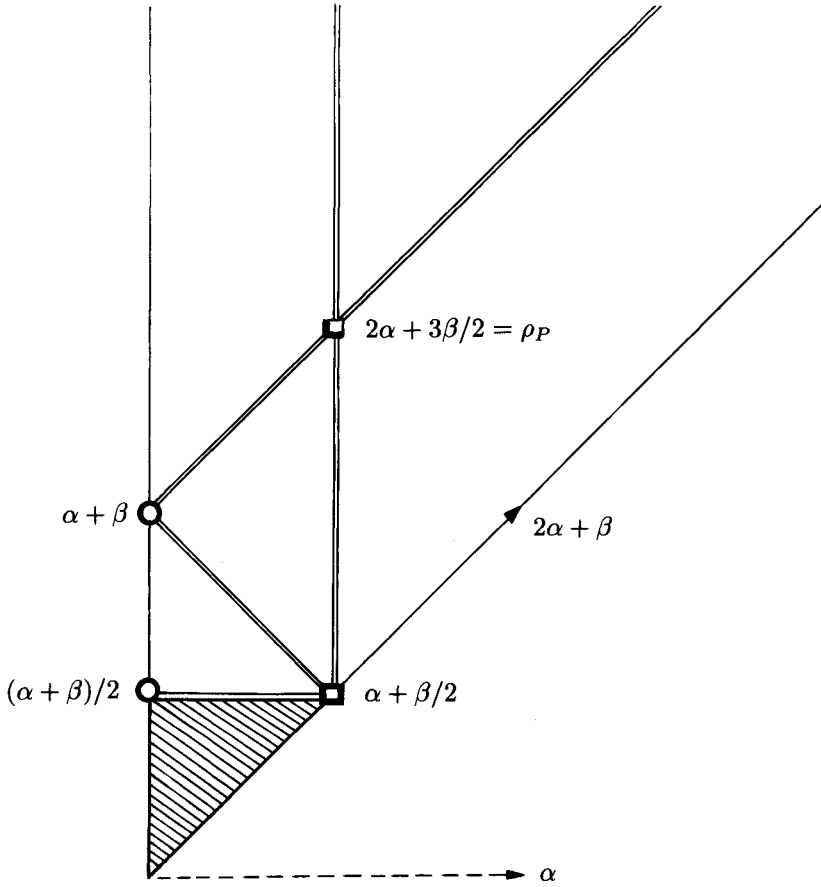


Figure 1

Cas où  $\chi_U = 1$ .

Le plan de la figure représente  $X_R$  et chaque point représente  $\lambda_\chi$ .

○ : rond formé d'un trait gras (comme aux points  $\alpha + \beta$  et  $(\alpha + \beta)/2$ );  $I(\chi)$  est de longueur 2,

== : deux traits fins parallèles;  $I(\chi)$  est de longueur 2,

■ : un carré dont deux côtés sont gras et deux côtés sont fins (comme au point  $2\alpha + 3\beta/2$ );  $I(\chi)$  est de longueur 4, avec 2 composants unitaires,

■ : un carré en traits gras (comme au point  $\alpha + \beta/2$ );  $I(\chi)$  est de longueur 4, avec 4 composants unitaires,

▼ : un triangle hachuré en traits gras;  $I(\chi)$ , ou tous ses composants, sont unitaires.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Be] BERNSTEIN (I.N.). — Le "centre" de Bernstein, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, p. 1-32. — Paris, Hermann, 1984.
- [B-Z] BERNSTEIN (I.N.) and ZELEVINSKII (A.V.). — Induced representation of reductive  $p$ -adic groups I, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **10**, 1977, p. 441-472.
- [Bo] BOREL (A.). — Admissible Representations of a Semisimple Group over a Local Field with Vector Fixed under an Iwahori Subgroup, *Invent. Math.*, t. **35**, 1976, p. 233-259.
- [B-W] BOREL (A.) and WALLACH (N.). — *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. — Princeton, Princeton University Press, 1980.
- [B] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5 et 6. — Paris, Hermann, 1968.
- [B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). — Groupes réductifs sur un corps local I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **41**, 1972, p. 1-251.
- [Ca] CARTIER (P.). — Representations of  $p$ -adic groups : A survey, *Automorphic forms, representations and L-functions*, p. 111-155. — Providence, Amer. Math. Soc., 1979 (*Proc. Symp. Pure Math.*, **33**).
- [C1] CASSELMAN (W.). — Introduction to the theory of admissible representations of  $p$ -adic reductive groups, notes polycopiées.
- [C2] CASSELMAN (W.). — The Steinberg character as a true character, *Harmonic Analysis on homogeneous spaces* p. 413-417. — Providence, Amer. Math. Soc., 1973 (*Proc. Symp. Pure Math.*, n°26).
- [C3] CASSELMAN (W.). — The Unramified principal series of  $p$ -adic groups I. The spherical function, *Comp. Math.*, t. **40**, n° 3, 1980, p. 387-406.
- [G] GINSBURG (V.). — Deligne-Langlands conjecture and representations of affine Hecke algebras, prépublication, 1985.
- [I-W] IWAHORI (N.) and MATSUMOTO (H.). — On some Bruhat decompositions and the structure of the Hecke ring of the  $p$ -adic groups, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **25**, 1965, p. 5-48.
- [K] KEYS (D.). — On the decomposition of reducible principal series representations of  $p$ -adic Chevalley groups, *Pacific J. Math.*, t. **101**, 1982, p. 351-388.
- [K-L] KAZHDAN (D.) and LUSZTIG (G.). — Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, prépublication, 1985.
- [L] LUSZTIG (G.). — Some examples of square integrable representations of semisimple  $p$ -adic groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **277**, 1983, p. 623-653.
- [Mcd1] MACDONALD (I.G.). — Spherical functions on a  $p$ -adic Chevalley group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **74**, 1968, p. 520-525.

- [Mcd2] MACDONALD (I.G.). — *Spherical functions on a group of  $p$ -adic type.* — Univ. of Madras, 1971.
- [M] MULLER (I.). — Intégrales d'entrelacement pour un groupe de Chevalley sur un corps  $p$ -adique, *Analyse Harmonique sur les groupes de Lie*, p. 367–403. Berlin, Springer-Verlag, 1979 (*Lecture Notes in Math.* **739**).
- [R1] RODIER (F.). — Modèles de Whittaker des représentations admissibles des groupes réductifs  $p$ -adiques déployés, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, t. **275**, 1972, p. 1045–1048.
- [R2] RODIER (F.). — Décomposition de la série principale des groupes réductifs  $p$ -adiques, *Non commutative Harmonic Analysis and Lie groups*, p. 408–423. Berlin, Springer-Verlag, 1981 (*Lecture Notes in Math.*, **880**).
- [T] TADIC (M.). — Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **19**, 1986, p. 335–382.
- [Z] ZELEVINSKII (A.V.). — Induced representations of reductive  $p$ -adic groups II. On irreducible representations of  $GL(n)$ , *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **13**, 1980, p. 165–210.
-