

Publications citées.

[1] J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, *Studia Mathematica* 11 (1949), p. 41-70.

[2] — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, *Studia Mathematica* 12 (1951), p. 208-224.

(Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1951)

Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. Soit

$$(1) \quad \Phi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

une série à rayon de convergence positif. Si $f = \{f(t)\}$ est une fonction (complexe de variable réelle) continue pour $t \geq 0$, la série

$$(2) \quad \Phi(f\lambda) = a_1 f\lambda + a_2 f^2\lambda^2 + \dots,$$

considérée comme une série d'opérateurs, est uniformément convergente dans tout cercle $|\lambda| \leq \rho^{-1}$.

Nous démontrerons ici deux théorèmes plus généraux.

2. Soit \mathcal{L}_0 la classe des fonctions f (complexes de variable réelle $t \geq 0$) qui sont sommables dans tout intervalle fini $0 \leq t \leq k$. Nous allons considérer \mathcal{L}_0 comme un espace du type B_0^2 , en posant

$$\|f\|_k = \int_0^k |f(t)| dt \quad \text{pour } k=1, 2, \dots$$

La pseudonorme $\|f\|_k$ jouit des propriétés suivantes:

$$1^\circ \quad \|fg\|_k \leq \|f\|_k \cdot \|g\|_k^2;$$

2° si $|g(t)| \leq M$ pour $0 \leq t \leq k$, on a

$$\|g^\nu\|_k \leq \frac{1}{\nu!} (kM)^\nu \quad \text{pour } \nu=1, 2, \dots$$

¹⁾ Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, *Studia Math.* 11 (1950), p. 63, § 21.

²⁾ Voir S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, *Studia Math.* 10 (1948), p. 184-208.

³⁾ Nous employons la notation de Mikusiński: $fg = \left\{ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right\}$.

Lemme 1. Si $f \in \mathcal{L}_0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|_k = 0$$

pour tout k naturel.

Démonstration. Fixons k arbitrairement. Cela posé, on peut décomposer $f(t)$ en deux fonctions

$$f = g + h,$$

de manière que $|g(t)| \leq M$ pour $0 \leq t \leq k$ (M constant) et que $\|h\|_k \leq 1/3$. On a

$$f^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} g^\nu h^{n-\nu},$$

d'où, en vertu de 1° et 2°,

$$\|f^n\|_k \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{1}{\nu!} (kM)^\nu \frac{1}{3^{n-\nu}} < \sum_{\nu=0}^n 2^\nu \frac{(3kM)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{3kM}.$$

Théorème 1. Si (1) a le rayon de convergence positif, la série (2), où $f \in \mathcal{L}_0$, converge (au sens de la métrique introduite) uniformément dans tout cercle $|\lambda| \leq \varrho$, c'est-à-dire on a

$$\|\alpha_1 f \lambda + \dots + \alpha_n f^n \lambda^n - \Phi(f \lambda)\|_k \leq \varepsilon_{nk} \quad \text{pour } |\lambda| \leq \varrho,$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{nk} = 0$ pour $k=1, 2, \dots$

Démonstration. En vertu de l'hypothèse sur la convergence de (1), il existe un nombre A , tel que

$$|\alpha_n| \leq A^n \quad \text{pour } n=1, 2, \dots;$$

on a donc

$$\|\alpha_n f^n \lambda^n\|_k \leq \frac{1}{2^n} \|(2Afe)^n\|_k \quad \text{pour } |\lambda| \leq \varrho,$$

d'où le théorème.

Corollaire 1. Si (1) a le rayon de convergence positif, la série (2), où $f \in \mathcal{L}_0$, converge au sens opératoire uniformément dans tout cercle $|\lambda| \leq \varrho$.

3. Une fonction f (complexe de variable réelle t) est dite de variation V dans l'intervalle J , lorsque

$$V = \sup \sum_{\nu=1}^n |f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})|,$$

où t_0, \dots, t_n est une suite finie croissante de nombres de J .

Soit V_0 la classe des fonctions f (complexes de variable réelle $t \geq 0$) qui sont

- (i) nulles au point $t=0$,
- (ii) continues à gauche,
- (iii) à variation bornée dans tout intervalle fini.

La variation de $f \in V_0$ dans l'intervalle $\langle 0, t \rangle$ sera désignée par $\text{Var}_t(f)$. On a les formules, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \text{Var}_t(\lambda f) &= |\lambda| \text{Var}_t(f) & (\lambda \text{ complexe}), \\ \text{Var}_t(f+g) &\leq \text{Var}_t(f) + \text{Var}_t(g), \\ \sup_{0 \leq \tau < t} |f(\tau)| &\leq \text{Var}_t(f). \end{aligned} \quad (3)$$

Si $f, g \in V_0$ posons généralement

$$f * g = \int_{\langle 0, t \rangle} f(t-\tau) dg(\tau),$$

où l'intégrale est entendue au sens de Lebesgue-Stieltjes.

La fonction $f * g$ jouit évidemment des propriétés (i) et (iii). De plus, on a, en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration des suites,

$$\lim_{t_n \rightarrow t^-} \int_{\langle 0, t_n \rangle} f(t_n - \tau) dg(\tau) = \int_{\langle 0, t \rangle} f(t - \tau) dg(\tau),$$

car f est continue à gauche. D'où la propriété (ii). On voit donc que $f * g \in V_0$.

Nous démontrerons que

$$\text{Var}_t(f * g) \leq \text{Var}_t(f) \cdot \text{Var}_t(g). \quad (4)$$

En effet, si $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$, on a

$$\left| \int_{\langle t_{\nu-1}, t_\nu \rangle} f(t-\tau) dg(\tau) \right| \leq \sup_{\langle t_{\nu-1}, t_\nu \rangle} |f(t-\tau)| [\text{Var}_{t_\nu}(g) - \text{Var}_{t_{\nu-1}}(g)]$$

pour $\nu=1, 2, \dots, n$.

En sommant les n inégalités précédentes, on trouve facilement

$$\text{Var}_t(f * g) \leq \sup_{\langle 0, t \rangle} |f(\tau)| \cdot \text{Var}_t(g),$$

d'où la proposition, en vertu de (3).

On a encore les formules suivantes:

$$(5) \quad f * g = g * f,$$

$$(6) \quad f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Ces formules s'obtiennent aisément au moyen du calcul opératoire. En effet, faisons correspondre l'opérateur

$$s \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}$$

à toute fonction $f \in V_0$; cette correspondance est biunivoque. On a

$$(7) \quad fg = l \cdot (f * g);$$

ce qui équivaut à l'égalité

$$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t dt \int_{\langle 0, t \rangle} f(t-\tau) dg(\tau).$$

La formule (5) résulte aussitôt de (7). La formule (6) résulte de l'égalité

$$l^2[f * (g * h)] = fg h = l^2[(f * g) * h],$$

qui est une conséquence de (7).

Adoptons la notation suivante:

$$f_*^1 = f \quad \text{et} \quad f_*^n = f_* f_*^{n-1} \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \dots$$

Lemme 2. Si $f \in V_0$ et $f(0+) < 1$, on a

$$(8) \quad \lim \text{Var}_t(f_*^n) = 0$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. Soit δ un nombre positif, tel que

$$\text{Var}_t(f) \leq \theta < 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Posons

$$f = g + h,$$

où

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \delta, \\ f(\delta) & \text{pour } \delta < t < \infty. \end{cases}$$

On a évidemment $\text{Var}_t(g) \leq \theta$ pour tout $t \geq 0$, d'où, en vertu de (4),

$$\text{Var}_t(g_*^n) \leq \theta^n \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

On a encore $h(t) = 0$ pour $0 \leq t \leq \delta$, d'où

$$h_*^n(t) = 0$$

dans l'intervalle $0 \leq t \leq n\delta$.

Cela étant, on peut écrire

$$\text{Var}_{t_0}(f_*^n) \leq \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \text{Var}_{t_0}(g_*^{n-r}) \text{Var}_{t_0}(h_*^r).$$

Si $n \geq n_0 > t/\delta$, il s'ensuit

$$\text{Var}_t(f_*^n) \leq \sum_{r=1}^{n_0} \binom{n}{r} \theta^{n-r} \text{Var}_t(h_*^r),$$

d'où (8).

Théorème 2. Si le rayon de convergence R de (1) est positif, la série

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n g_*^n,$$

où $g \in V_0$, converge uniformément dans tout domaine

$$0 \leq t \leq t_0, \quad |\lambda| \leq q < \frac{R}{|g(0+)|}.$$

La somme de cette série est encore une fonction de V_0 .

Démonstration. Soit $|g(0+)| < \beta < R/q$. En vertu du lemme 2, on a

$$\text{Var}_{t_0} \left(\frac{g}{\beta} \right)_*^n \leq M \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Donc, en vertu de (3),

$$|\alpha_n \lambda^n g_*^n| \leq \text{Var}_{t_0}(\alpha_n \lambda^n g_*^n) \leq |\alpha_n (\lambda \beta)^n| M \leq M |\alpha_n (\beta q)^n|$$

pour $0 \leq t \leq t_0$, d'où le théorème.

4. Pour adapter le théorème précédent à la théorie des opérateurs, considérons la classe des opérateurs $d = sg$, où $g \in V_0$; ces opérateurs seront dits *densités*⁴⁾. En particulier, tout nombre et toute fonction $f \in \mathcal{L}_0$ est une densité.

⁴⁾ Cette notion correspond à celle de distribution de masse de Laurent-Schwarz, cette masse étant distribuée sur la demi-droite $t \geq 0$.

Si $d_1=sg_1$ et $d_2=sg_2$ sont deux densités, leur somme et leur produit le sont encore:

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = s(g_1 + g_2), \quad \bar{d}_1 \bar{d}_2 = s(g_1 * g_2).$$

Remarquons encore que $\bar{d} = sg$ ($g \in V_0$) entraîne

$$(10) \quad \bar{d}^n = sg_n^*.$$

Théorème 3. *Si le rayon de convergence R de (1) est positif, le rayon de convergence de la série (2), où $f=sg$ est une densité, et \bar{u} est $R/|g(0+)|$. Cette dernière série converge uniformément dans tout cercle $|\lambda| \leq \rho < R/|g(0+)|$.*

Démonstration du théorème 3 (partie 1). En multipliant (2) par l on obtient, en vertu de (10), la série (9). D'où la convergence uniforme pour $|\lambda| \leq \rho$.

Corollaire 2. *Si $f=sg$ est une densité et si $g(0+) \neq 0$, alors $1/f$ est encore une densité et l'on a $1/f = sg_1$, où $g(0+)g_1(0+) = 1$.*

Démonstration. On peut écrire $f = g(0+) + sg_0$, où g_0 est encore une fonction de V_0 , telle que $g_0(0+) = 0$. On a donc

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g(0+) + sg_0} = \frac{1}{g(0+)} - \frac{sg_0}{g(0+)^2} + \frac{(sg_0)^2}{g(0+)^3} - \dots,$$

ce qui rend la proposition évidente, en vertu des théorèmes 2 et 3.

Corollaire 3. *Si $f=sg$ est une densité et si $|g(0+)| > 1$, la suite f^{n_k} est divergente (au sens opératoire), pourvu que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.*

Démonstration. En vertu du corollaire 2 et du lemme 2, on trouve facilement $\lim_{k \rightarrow \infty} (1/f)^{n_k} = 0$. Or, on a $f^{n_k}(1/f)^{n_k} = 1$, la suite f^{n_k} ne peut donc pas converger.

Démonstration du théorème 3 (partie 2). Si $|\lambda| > p > R/|g(0+)|$, on a

$$(11) \quad |\alpha_{n_k}| |pg(0+)|^{n_k} > m > 0$$

pour une suite d'indices n_k , convenablement choisis. On peut écrire

$$\alpha_{n_k} \lambda^{n_k} f^{n_k} = \alpha_{n_k} [pg(0+)]^{n_k} \cdot \left(\frac{\lambda f}{pg(0+)} \right)^{n_k}.$$

Or, la densité $\lambda f/pg(0+)$ satisfait à l'hypothèse du corollaire 3, donc la suite $\alpha_{n_k} \lambda^{n_k} f^{n_k}$ diverge, en vertu de (11). Par conséquent la série (2) ne peut pas converger.

Remarque. Le corollaire 1 du théorème 1 peut être aussi déduit du théorème 3. En effet, toute fonction $f \in \mathcal{L}_0$ est une densité $f=sg$, où g est une fonction absolument continue et nulle pour $t=0$.

(Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1951)