Sur les solutions bornées et presque périodiques des équations et inéquations d'évolution.

MARCO BIROLI (*) (**)

Summary. – *We show some existence et uniqueness theorems for the bounded and almost periodic solution of some non linear equations and inequalities of evolution.*

Introduction.

Ce travail concerne les solutions bornées et presque périodiques des équations et inéquations d'évolution.

Nous precisons les notations utilisées dans la suite; nous indiquons par H un espace de HILBERT identifié avec son dual pour le produite scalaire $(\ ,\ )$ et par $|\ |$ la norme induite par $(\ ,\ )$ sur H, par V un espace de BANACH uniformément convexe réel de norme $\|\ \|$, par V^* le dual de V, par $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité entre V et V^* et par $\|\ \|^*$ la norme duale sur V^*.

Nous supposons que V soit identifié avec un sous-espace dense de H et que l'injection de V dans H soit compacte.

Le travail se compose de deux chapitres; le premier concerne les équations et inéquations d'évolution du 1er ordre, le deuxième concerne les équations d'évolution du 2ème ordre.

Le premier chapitre se compose de trois parties:

I) On considère l'équation d'évolution du 1er ordre

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$$

où $u(t)\colon \boldsymbol{R} \to H$ et A est un opérateur linéaire maximal positif sur H; par une méthode, utilisée par AMERIO pour l'extension des théorèmes de FAVARD au cas abstrait [2], on donne des conditions sufficientes pour la faible presque-périodicité d'une solution bornée.

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano; lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Entrata in Redazione il 25 giugno 1971.

II) On considère l'équation d'évolution du premier ordre multivoque non linéaire

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$$

où $u(t)$: $\boldsymbol{R} \to V$ et A est un opérateur multivoque maximal monotone [10], coercif et uniformément monotone.

Sous des hypothèses opportunes sur la function $f(t)$, on démontre que le problème consideré a une unique solution $u(t)$ bornée sur $\boldsymbol{R}$ dans V, telle que

$$g(t) = f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$$

soit bornée sur $\boldsymbol{R}$ dans H et que, si $f(t)$ est presque-périodique dans H, $u(t)$ est presque-périodique dans V.

On considère dans la suite l'équation du 1er ordre multivoque non linéaire

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t)$$

où $u(t)$: $\boldsymbol{R} \to H$, A, B sont des opérateurs multivoques, monotones sur H, aussi non coercives, et B est strictement monotone, i.e. $\forall v, w \in D(B)$ et fixés $x \in Bv$, $y \in Bw$

$$(x - y, v - w) = 0 \Rightarrow v = w .$$

On obtient par une méthode, en partie inspirée par un recent travail de AMERIO-PROUSE [3], des conditions sufficientes pour l'unicité et la presque périodicité d'une solution bornée.

Cette partie abstraite terminée, on considère le problème parabolique

$$\begin{cases} u(t, x) \in H_0^1(\Omega) & \text{p.p. sur } \boldsymbol{R} \\ \dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \beta(u(t, x)) \ni f(t, x) & \text{p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ et β est un graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ avec $D(\beta) = \boldsymbol{R}$, [10]. Pour ce problème on donne une formulation faible; ainsi, supposée $f(t) \in H^{-1}(\Omega)$, on peut étendre les resultats de [6], [13], [14].

III) On considère l'inéquation d'évolution

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle - \langle Au(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle Mu(t), v(t) - u(t)\rangle - \\ - \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle\} \, dt \geq \tfrac{1}{2}\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\} , \qquad t_1 < t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H) \text{ et } v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

où $\boldsymbol{K}$ est un ensemble fermé convexe de V avec $0 \in \boldsymbol{K}$, $A\colon V \to V^*$ un opérateur linéaire borné avec $\langle Av, v\rangle \geqslant \alpha\|v\|^2$ $\forall v \in V$, $\alpha > 0$ et M est un opérateur linéaire borné de $C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*)$ (ex. un opérateur du type « retard »).

On obtient par une méthode de point fixe, que utilise le théorème des contractions, des conditions sufficientes pour l'existance d'une unique solution $u(t)$ de l'inéquation considerée, bornée dans H et S^2-bornée dans V $\left(\text{i.e. } \sup\limits_{t\in\boldsymbol{R}} \int\limits_t^{t+1} \|u(t+\eta)\|^2 d\eta < +\infty\right)$.

On démontre en suite que, sous des conditions simples sur l'opérateur M, si $f(t)$ est presque-périodique (périodique), la solution $u(t)$ est presque-périodique (périodique) dans H et S^2-presque périodique dans V. Dans la suite on considère l'équation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) = f(t)$$

où $A\colon V \to V^*$ a les mêmes proprietés que dans la partie précédente et M est un opérateur linéaire borné de $C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$.

On démontre, par le même procedé de point fixe de la partie précédente, des conditions sufficientes pour l'existence d'une unique solution $u(t)$ de l'équation considerée, bornée dans V et telle que $Au(t)$ est S^2-bornée dans H.

On démontre en suite que, sous des conditions simples sur l'opérateur M, si $f(t)$ est presque-périodique (périodique), la solution $u(t)$ est presque-périodique (périodique dans V et $Au(t)$ est S^2-presque périodique dans H.

On considère, enfin, l'inéquation d'évolution

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\left\langle\frac{dv}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) - f(t)\,,\, v(t) - u(t)\right\rangle\right\} dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\}\,, \qquad t_1 \leqslant t_2$$
$$\forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V)\,, \qquad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H)\,, \qquad v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$
$$u(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V) \qquad\qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

où A et M ont les mêmes proprietés de la partie précédente, A est autoadjoint dans H et $\boldsymbol{K}$ est un ensemble fermé convexe dans H, $0 \in \boldsymbol{K}$.

On démontre par une méthode de point fixe, qui utilise le théorème des mappes compactes, l'existence d'une solution bornée (périodique) dans V et telle que $Au(t)$ est bornée dans H.

Le deuxième chapitre concerne les équations d'évolution du 2ème ordre non linéaires. Dans ce chapitre on considère le problème

$$u(t, x) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H^1_0(\Omega))$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$$
$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \Delta u + \beta\left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right) \ni f(t, x) \qquad \text{p.p. dans } \boldsymbol{R}\times\Omega$$

où $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ et β est une graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ de domaine $\boldsymbol{R}$.

On étend à ce cas un résultat de AMERIO-PROUSE [3], concernant la solution presque périodique de l'équation des ondes non linéaire dans le cas où $D(\beta)$ est un interval ouvert (borné ou non borné). On considère enfin le cas dans le quel $D(\beta)=\boldsymbol{R}$ et on démontre que les conditions concernantes l'unicité et la presque-périodicité d'une solution bornée, données par AMERIO-PROUSE [3], peuvent être améliorées.

CHAPITRE 1er

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU 1er ORDRE

I - Équations d'évolution linéaires du 1er ordre.

Soit $A: D(A) \to H$ un opérateur linéaire maximal positif et $f(t): \boldsymbol{R} \to H$ une fonction faiblement presque-périodique dans H.

Considérons l'équation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \qquad \text{p.p} \tag{I.1}$$

Supposons que (I.1) ait une solution $\overline{u}(t)$, uniformément continue dans H sur $\boldsymbol{R}$ et telle que

$$\int_t^{t+1} |A\overline{u}(\eta)|^2 d\eta \leqslant C, \qquad |\overline{u}(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R} \tag{I.2}$$

Indiquons par Λ_f l'ensemble des solutions $u(t)$ de (I.1), telles que

$$\int_t^{t+1} |Au(\eta)|^2 d\eta \leqslant C\,, \qquad |u(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R} \tag{I.3}$$

$$|u(t+\sigma) - u(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} |\overline{u}(t+\sigma) - \overline{u}(t)| \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R},$$

et

$$J(u) = \operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} |u(t)|\,.$$

On a le résultat suivant (Th. de minimax et faible presque-périodicité):

THÉORÈME I. – *La fonctionelle $J(u)$ a un unique point de minimum dans Λ_f $\tilde{u}(t)$ et $\tilde{u}(t)$ est une fonction faiblement presque périodique dans H.*

Indiquons par $\Lambda_{z,f}$ l'ensemble des solutions de (I.1) telles que

$$\text{(I.4)} \qquad \int_t^{t+1} |Au(\eta)|^2 d\eta \leqslant C\,, \qquad |u(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$|u(t+\sigma) - u(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} |z(t+\sigma) - z(t)|\,, \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}$$

où $z(t)$ est une fonction uniformément continue dans H; supposons que $\Lambda_{z,f} \neq \emptyset$ et démontrons que la fonctionnelle $J(u)$ a une unique point de minimum dans $\Lambda_{z,f}$; la première partie de la thèse sera ainsi démontrée.

Démontrons d'abord un lemme:

LEMME I. – *Soit $A: D(A) \to H$ un opérateur multivoque maximal monotone* [10], *et $S: D(S) \to \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$ l'opérateur*

$$D(S) = \{v(t) | v(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H),\ Av(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)\}$$

$$S(v(t)) = Av(t) \qquad \forall v(t) \in D(S)\,.$$

L'opérateur S est maximal monotone sur $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$.

Pour démontrer la thèse il suffit [8], de démontrer que l'opèrateur $I+S$ est surjectif.

Soit $v(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$ et soit

$$r(t) = (I + A)^{-1} v(t)\,,$$

où $r(t)$ est bien définie, étant $(I+A)^{-1}$, [10], une mappe lipschitzienne definie sur l'entier espace H.

Étant A lipschitzienne sur H, on a

$$r(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

et

$$Ar(t) \ni v(t) - r(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)\,.$$

Donc $r(t) \in D(S)$ et on a

$$(I + S)(r(t)) = v(t)\,.$$

La thèse est ainsi démontrée.

Démontrons maintenant que, sous les hypothèses faites, la fonctionnelle $J(u)$ a un point de minimum dans $\Lambda_{z,f}$:

Soit $\{u_n(t)\}$ une suite minimisante pour la fonctionelle $J(u)$ dans $\Lambda_{z,f}$.

On a $\forall t_1, t_2,\ t_1 \leqslant t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} |Au_n(\eta)|^2 d\eta \leqslant C, \qquad |u(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in [t_1, t_2]$$

$$|u_n(t+\sigma) - u_n(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |z(t+\sigma) - z(t)| \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}.$$

Étant $f(t)$ faiblement presque périodique, donc bornée dans H, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{du_n}{dt}(\eta) \right|^2 d\eta \leqslant C_1 .$$

On peut donc extraire de $\{u_n(t)\}$ une sous-suite, que, pour simplicité, indiquons encore par $\{u_n(t)\}$, telle que

$$\text{(I.5)} \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n(t) = \tilde{u}(t)$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$ dans H

$$\text{(I.6)} \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* Au_n(t) = \chi(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\text{(I.7)} \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{d\tilde{u}}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H).$$

Pour le Lemme I, l'opérateur A induit sur $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$ un opérateur maximal positif linéaire.

Le graphe de l'opérateur consideré est donc un sous-éspace fermé, donc faiblement fermé, de $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H) \times \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$. On a alors

$$\chi(t) = A\tilde{u}(t) .$$

On peut affirmer que $\tilde{u}(t)$ est une solution de (I.1) et que

$$\int_{t}^{t+1} |A\tilde{u}(\eta)|^2 d\eta \leqslant C, \qquad |\tilde{u}(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$|\tilde{u}(t+\sigma) - \tilde{u}(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{\boldsymbol{R}} |z(t+\sigma) - z(t)| \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}$$

donc $\tilde{u}(t) \in A_{z,f}$.

De (I.5) on a

$$\operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |u(t)| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |u_n(t)| .$$

De cette rélation suive que $\tilde{u}(t)$ est un point de minimum pour la fonctionnelle $J(u)$ dans $A_{z,f}$.

Démontrons maintenant que $\tilde{u}(t)$ est l'unique point de minimum de $J(u)$ dans $\Lambda_{z,f}$. Nous utilisons un procédé par l'absurde. Supposons qu'il y ait deux differents points de minimum pour $J(u)$ dans $\Lambda_{z,f}$, $\tilde{u}_1(t)$ et $\tilde{u}_2(t)$.

Observons que $\Lambda_{z,f}$ est un ensemble convexe, donc

$$\frac{\tilde{u}_1(t)+\tilde{u}_2(t)}{2}\in\Lambda_{z,f}\,.$$

On a

$$\frac{d}{dt}\big(\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_2(t)\big)+A\big(\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_2(\tau)\big)=0\,,$$

dont

$$\frac{d}{dt}|\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_2(t)|^2\leqslant 0\,,$$

donc $|\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_2(t)|$ est décroissante.

Étant $\tilde{u}_1(t)\neq\tilde{u}_2(t)$ il y a un point $\bar{t}$ tel que

$$|\tilde{u}_1(\bar{t})-\tilde{u}_2(\bar{t})|=\varrho>0$$

donc

$$|\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_2(t)|\geqslant\varrho \qquad \text{pour } t\leqslant\bar{t}\,.$$

Indiquons

$$\mu=\min_{u\in\Lambda_{z,f}}J(u)\,.$$

On a

$$\left|\frac{\tilde{u}_1(t)+\tilde{u}_2(t)}{2}\right|\leqslant k\mu \qquad k<1,\ t\leqslant\bar{t}.$$

Indiquons

$$w(t)=\frac{\tilde{u}_1(t)+\tilde{u}_2(t)}{2}$$

et soit $\{s_j\}$ une suite réelle tendente à $+\infty$.

Étant $w(t)\in\Lambda_{z,f}$ et $f(t)$ faiblement presque périodique, il y a une sous-suite de $\{s_j\}$, que, pour simplicité, nous indiquons encore par $\{s_j\}$, telle que $\forall t_1, t_2,\ t_1\leqslant t_2$

$$\lim_{j\to\infty}{}^{*}\,f(t-s_j)=f_s(t)$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$ dans H,

$$\lim_{j\to\infty}{}^{*}\,w(t-s_j)=w_s(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$,

$$\lim{}^* Aw(t-s_j) = \chi_s(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\lim_{j\to\infty}{}^* \frac{dw}{dt}(t-s_j) = \frac{dw_s(t)}{dt} \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)\,.$$

Par le même procédé de la partie précédente, on démontre que

$$Aw_s(t) = \chi_s(t) \qquad \text{p.p.}$$

On peut alors affirmer que $w_s(t)$ est solution de l'équation

$$\text{(I.8)} \qquad \frac{dw_s}{dt}(t) + Aw_s(t) = f_s(t) \qquad \text{p.p.}$$

et pour les rélations précédentes on a

$$\text{(I.9)} \qquad \int_t^{t+1} |Aw_s(\eta)|^2 d\eta \leqslant C\,, \qquad |w_s(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.10)} \qquad |w_s(t)| \leqslant k\mu \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.11)} \qquad |w_s(t+\sigma) - w_s(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |z(t+\sigma) - z(t)| \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}.$$

De (I.9), (I.10), (I.11) et étant $f(t)$ faiblement presque-périodique, on peut extraire de $\{s_j\}$ une sous-suite, que, pour simplicité nous indiquons encore par $\{s_j\}$, telle que $\forall t_1, t_2,\ t_1 \leqslant t_2$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^* f_s(t+s_j) = f(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^* w_s(t+s_j) = w_{ss}(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^* Aw_s(t+s_j) = \chi_{ss}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^* \frac{dw_s}{dt}(t) = \frac{dw_{ss}}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)\,.$$

Par la même méthode de la partie précédente on démontre que

$$Aw_{ss}(t) = \chi_{ss}(t) \qquad \text{p.p.}$$

On peut alors affirmer que $w_{ss}(t)$ est solution de (I.1).

De (I.9) et (I.11) on a

$$\int_t^{t+1} |Aw_{ss}(\eta)|^2 d\eta \leqslant C\,, \qquad |w_{ss}(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$|w_{ss}(t+\sigma) - w_{ss}(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |z(t+\sigma) - z(t)| \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}$$

donc

$$w_{ss}(t) \in \Lambda_{z,f}\,.$$

De (I.10) on a

$$J(w_{ss}) = \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |w_{ss}(t)| \leqslant k\mu < \mu\,.$$

On tombe donc dans l'absurde et la thèse est ainsi démontrée.

On a ainsi prouvé que $J(u)$ a un unique point de minimum $\tilde{u}(t)$ dans Λ_f; on doit maintenant démontrer que $\tilde{u}(t)$ est faiblement presque-périodique.

Nous utiliserons un critère de presque périodicité de BOCHNER (étendu par AMERIO à les fonctions presqué périodiques dans les espaces de BANACH faiblement séquentielment complets, [4], en particulier uniformément convexes).

CRITÈRE I. – *Soit X un espace de Banach uniformément convexe réel et soit $g(t)\colon \boldsymbol{R} \to X$ une fonction continue dans X faible.*

La fonction $g(t)$ est faiblement presque périodique si et seulement si pour chaque suite réelle $\{l_j\}$ on peut extraire une sous-suite $\{l'_j\}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty}{}^{*}\, g(t+l'_j) = g_l(t) \qquad \textit{dans } \chi$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$.

Considérons une suite réelle $\{l_j\}$ arbitraire. Étant $\{\tilde{u}(t+l_j)\}$ equicontinue et equibornée dans H, il y a une sous-suite de $\{l_j\}$, que nous indiquons par $\{l'_j\}$, telle que

$$\lim_{j\to+\infty}{}^{*}\, u(t+l'_j) = u_l(t) \qquad \text{dans } H \tag{I.12}$$

uniformément sur tous intervalles bornés. Démontrons que $\{l'_j\}$ peut être choisie de façon que la limite (I.12) soit uniforme sur $\boldsymbol{R}$.

Nous utilisons une procedé par l'absurde. Supposons qu'il n'y a aucune sous-suite $\{l'_j\}$ de $\{l_j\}$, telle que la limite (I.12) soit uniforme sur $\boldsymbol{R}$.

Il y a alors, $\forall v \in V$, une suite $\{t_j\}$ et deux sous-suites de $\{l_j\}$, $\{l'_{1j}\}$ et $\{l'_{2j}\}$, telles que

$$|(\tilde{u}(t_j + l_{1j}) - \tilde{u}(t_j + l_{2j}), v)| \geqslant \varrho > 0\,.$$

Indiquons

$$t_j + l_{1j} = \gamma_{1j}\,, \qquad t_j + l_{2j} = \gamma_{2j}$$

on a alors

$$|(\tilde{u}(\gamma_{1j}) - \tilde{u}(\gamma_{2j}), v)| \geqslant \varrho > 0 .$$

Observons maintenant que on a

$$\text{(I.13)} \qquad \int_t^{t+1} |A\tilde{u}(\eta + \gamma_{1j})|^2 d\eta \leqslant C , \qquad |\tilde{u}(t + \gamma_{1j})| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.14)} \qquad |\tilde{u}(t + \sigma + \gamma_{1j}) - \tilde{u}(t + \gamma_{1j})| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |\overline{u}(t + \sigma) - \overline{u}(t)| \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.15)} \qquad \int_t^{t+1} |A\tilde{u}(\eta + \gamma_{2j})|^2 d\eta \leqslant C , \qquad |u(t + \gamma_{2j})| \leqslant C , \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.16)} \qquad |u(t + \gamma_{2j} + \sigma) - u(t + \gamma_{2j})| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} |\overline{u}(t + \sigma) - \overline{u}(t)| , \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}.$$

On peut alors extraire de $\{\gamma_{1j}\}$ et $\{\gamma_{2j}\}$ deux sous-suites, que, pour simplicité, nous indiquons encore par $\{\gamma_{1j}\}$ et $\{\gamma_{2j}\}$, telles que $\forall t_1, t_2,\ t_1 \leqslant t_2$

$$\text{(I.17)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j\to+\infty} f(t + \gamma_{1j}) = f_{\gamma_1}(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$

$$\text{(I.18)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j+\to\infty} f(t + \gamma_{2j}) = f_{\gamma_2}(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$

$$\text{(I.19)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j+\to\infty} \tilde{u}(t + \gamma_{1j}) = \tilde{u}_{\gamma_1}(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$

$$\text{(I.20)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j+\to\infty} \tilde{u}(t + \gamma_{2j}) = \tilde{u}_{\gamma_2}(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$

$$\text{(I.21)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j+\to\infty} A\tilde{u}(t + \gamma_{1j}) = A\tilde{u}_{\gamma_1}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\text{(I.22)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j+\to\infty} A\tilde{u}(t + \gamma_{2j}) = A\tilde{u}_{\gamma_2}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\text{(I.23)} \qquad \operatorname*{lim^*}_{j+\to\infty} \frac{d\tilde{u}}{dt}(t + \gamma_{1j}) = \frac{d\tilde{u}_{\gamma_1}}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\text{(I.24)} \qquad \lim_{j+\to\infty} \frac{d\tilde{u}}{dt}(t + \gamma_{2j}) = \frac{d\tilde{u}_{\gamma_2}}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H) .$$

On peut alors affirmer que les fonctions $u_{\gamma_1}(t)$ et $u_{\gamma_2}(t)$ sont des solutions des équations

$$\frac{du_{\gamma_1}}{dt}(t) + Au_{\gamma_1}(t) = f_{\gamma_1}(t) \qquad \text{p.p.}$$

$$\frac{du_{\gamma_2}}{dt}(t) + Au_{\gamma_2}(t) = f_{\gamma_2}(t) \qquad \text{p.p.}$$

Étant $f(t)$ faiblement presque périodique dans H, on peut supposer sans, perdre de generalité, que

$$\lim_{j\to+\infty} f(t + l'_{1j}) = \lim_{j\to+\infty} f(t + l''_{1j}) \qquad \text{dans } H$$

où les limites sont uniformes sur $\boldsymbol{R}$; de cette relation on a

$$f_{\gamma_1}(t) = f_{\gamma_2}(t) = f_\gamma(t)\,.$$

De (I.13), (I.14), (I.15), (I.16), (I.19), (I.20), (I.21), (I.22) on a

$$\text{(I.25)} \qquad \int_t^{t+1} |A\tilde{u}_{\gamma_1}(\eta)|^2 d\eta \leqslant C\,, \qquad |\tilde{u}_{\gamma_1}(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.26)} \qquad \int_t^{t+1} |A\tilde{u}_{\gamma_2}(\eta)|^2 d\eta \leqslant C\,, \qquad |\tilde{u}_{\gamma_2}(t)| \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.27)} \qquad |\tilde{u}_{\gamma_1}(t+\sigma) - \tilde{u}_{\gamma_1}(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in R} |\overline{u}(t+\sigma) - \overline{u}(t)|\,, \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.28)} \qquad |\tilde{u}_{\gamma_2}(t+\sigma) - \tilde{u}_{\gamma_2}(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in R} |\overline{u}(t+\sigma) - \overline{u}(t)|\,, \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{(I.29)} \qquad |\tilde{u}_{\gamma_1}(t)|,\ |\tilde{u}_{\gamma_2}(t)| \leqslant m$$

où m est le minimum de $J(u)$ sur Λ_f

$$\text{(I.30)} \qquad |(\tilde{u}_{\gamma_1}(0) - \tilde{u}_{\gamma_2}(0),\, v)| \geqslant \varrho > 0\,.$$

Démontrons maintenant que $\tilde{u}_{\gamma_1}(t) = \tilde{u}_{\gamma_2}(t)$. On a

$$\tilde{u}_{\gamma_1}(t),\ \tilde{u}_{\gamma_2}(t) \in \Lambda_{\overline{u},f_\gamma}\,.$$

Si alors on démontre que m est le minimum de $J(u)$ dans $\Lambda_{\overline{u},f_\gamma}$, de la première partie de la démonstration on peut deduir la thèse.

Nous utilisons un procédé par l'absurde; si le minimum de $J(u)$ sur $\Lambda_{\overline{u},f_\gamma}$ est mineur de m, il y a une fonction $\tilde{\tilde{u}}_\gamma(t)$ telle que

$$\frac{d\tilde{\tilde{u}}_\gamma}{dt}(t) + A\tilde{\tilde{u}}_\gamma(t) = f_\gamma(t) \qquad \text{p.p.}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_\gamma(t) \in \Lambda_{\overline{u},f_\gamma}\,, \qquad |\tilde{\tilde{u}}_\gamma(t)| \leqslant m - \varepsilon \qquad \forall t \in \boldsymbol{R},\ \varepsilon > 0\,.$$

On peut alors extraire de $\{\gamma_{1j}\}$ une sous-suite que, pour simplicité, indiquons encore par $\{\gamma_{1j}\}$ telle que $\forall t_1, t_2,\ t_1 \leqslant t_2$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^{*} f_\gamma(t-\gamma_{1j}) = f(t) \quad \text{dans } H \tag{I.31}$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^{*} \tilde{\tilde{u}}_\gamma(t-\gamma_{1j}) = \tilde{\tilde{u}}(t) \quad \text{dans } H \tag{I.32}$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$

$$\lim_{j\to+\infty}{}^{*} A\tilde{\tilde{u}}_\gamma(t-\gamma_{1j}) = A\tilde{\tilde{u}}(t) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H) \tag{I.33}$$

$$\lim_{j\to\infty}{}^{*} \frac{d}{dt}\tilde{\tilde{u}}_\gamma(t-\gamma_{1j}) = \frac{d\tilde{\tilde{u}}}{dt}(t) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)\,. \tag{I.34}$$

De (I.31), (I.32), (I.33), (I.34) on deduit que $\tilde{\tilde{u}}(t)$ est une solution de (I.1).

Étant

$$\tilde{\tilde{u}}(t) \in A_{\tilde{u},f}\,, \qquad |(t)| \leqslant m-\varepsilon \qquad \forall t \in \boldsymbol{R},$$

on a

$$\tilde{\tilde{u}} \in A_f\,, \qquad J(\tilde{\tilde{u}}_\gamma) \leqslant m-\varepsilon\,.$$

On tombe donc dans l'absurde, puisque m est le minimum de $J(u)$ dans A_f.

On a ainsi démontreé que

$$\tilde{u}_{\gamma_1}(t) = \tilde{u}_{\gamma_2}(t);$$

alors pour (I.30) on tombe dans l'absurde et la thèse est démontrée.

On peut donc extraire de $\{l_j\}$ une sous-suite $\{l'_j\}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty}{}^{*} \tilde{u}(t+l_j) = \tilde{u}_l(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$.

Du critère de faible presque-périodicité de Bochner on a alors que $\tilde{u}(t)$ est faiblement presque-périodique.

Le Th. I est ainsi demontré.

Du Th. I on deduit immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire I. – *Si la solution $\tilde{u}(t)$ de l'équation* (I.1) *caractérisée par le Th. I a trajectoire relativement compacte dans H, $\tilde{u}(t)$ est presque-périodique dans H.*

Nous donnons maintenant un exemple d'application. Nous rappelons que un système symétrique d'équations d'évolution sur $\boldsymbol{R}$ est un système de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x) = f(t,x)$$

où

$$u(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ \cdots\cdots \\ u_p(t, x) \end{pmatrix}$$

est une fonction sur $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$ avec des valeurs dans $\boldsymbol{R}^p$ et les A_i sont des matrices symètriques réelles $p\times p$.

Considérons l'opérateur sur $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$

$$D(A) = \left\{v(x)|v(x) \in (\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p,\ \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) \in (\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p\right\}$$

$$Av = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)\,.$$

On peut démontrer [5], que l'opérateur A est antiautoadjoint et donc, pour le théorème de STONE, générateur d'un semigroupe de contractions linéaires; l'opérateur A sur $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ est donc un particulière opérateur linéaire maximal positif.

Appliquons donc le Th. I.

Supposons que $f(t, \cdot)\colon \boldsymbol{R}\to(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ soit faiblement presque périodique et que il y ait une solution $\bar{u}(t, x)$ du problème consideré, telle que

$$\int_t^{t+1} \|A\bar{u}(\eta)\|^2_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p} d\eta \leqslant C\,, \quad \|\bar{u}(t)\|_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p} \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

et $\bar{u}(t, \cdot)\colon \boldsymbol{R}\to(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ soit uniformément continue dans $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$.

Pour le Th. I on peut alors affirmer que, indiqué

$$A_f = \left\{|u(t, x)|\int_t^{t+1} \|Au(\eta)\|^2_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p} d\eta \leqslant C,\ \|u(t)\|_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p} \leqslant C \qquad \forall t \in \boldsymbol{R},\right.$$
$$\left.\|u(t+\sigma) - u(t)\|_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p} \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} \|\bar{u}(t+\sigma) - \bar{u}(t)\|_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p} \qquad \forall \sigma \in \boldsymbol{R}\right\}$$

$$J(u) = \operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}} \|u(t)\|_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p}\,,$$

la fonctionnelle $J(u)$ a un unique point de minimim $\tilde{u}(t, x)$ dans A_f et la fonction $\tilde{u}(t, \cdot)\colon \boldsymbol{R}\to(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ est faiblement presque périodique.

REMARQUE I. – Dans le Théorème I on a consideré le cas non homogène; pour le problème homogène on a un théorème qui a une démonstration trés facile.

THÉORÈME II. – *Soit* $A\colon D(A)\to H$ *un opérateur antiautoadjoint; considérons l'équation homogène*

(I.35) $$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0\,.$$

Toutes solutions de (I.35) *avec une trajectoire rélativement compacte dans* H *sont presque-périodiques dans* H.

Soit $u(t)$ une solution de (I.35) à trajectoire rélativement compacte.
Observons que $\forall\sigma\in\boldsymbol{R}$ on a

$$\frac{d}{dt}\big(u(t+\sigma)-u(t)\big)+A\big(u(t+\sigma)-u(t)\big)=0$$

dont

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t+\sigma)-u(t)|^2=0$$

dont

$$|u(t+\sigma)-u(t)|=\mathrm{Cst}\,.$$

La thèse suive alors d'une critère de presque-pèriodicité dû à BOCHNER:

CRITÈRE II. – *Soit* X *un espace de Banach et soit* $g(t)\colon \boldsymbol{R}\to X$ *une fonction continue à trajectoire rélativement compacte dans* X; *si*, $\forall\sigma\in\boldsymbol{R}$,

$$\operatorname*{Inf}_{t\in\boldsymbol{R}}\|g(t+\sigma)-g(t)\|_x\geqslant\mu\operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}}\|g(t+\sigma)-g(t)\|_x$$

où μ *est une constante positive indipendente de* σ, *alors* $g(t)$ *est presque périodique dans* H.

Nous terminons enfin en observant que le Th. II n'est pas valable en général pour les inéquations d'évolution linéaires.

THÉORÈME III. – *Soit* $\boldsymbol{K}\subset H$ *un ensemble fermé convexe avec* $0\in\boldsymbol{K}$.
Supposons qu'il y ait un ensemble D *dense dans* H, *tel que* $\forall v\in D$ *il y ait* $\lambda_v>0$ *réel tel que* $\lambda_v v\in\boldsymbol{K}$.
Considérons l'inéquation d'évolution

$$\text{(I.36)}\qquad\begin{cases}\left(\dfrac{du}{dt}(t)+Au(t),\,v-u(t)\right)\geqslant 0 & \forall v\in\boldsymbol{K}\ \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\\ u(t)\in\boldsymbol{K}\cap D(A) & \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\end{cases}$$

où $A\colon D(A)\to H$ *est un opérateur antiautoadjoint linéaire sur* H. *Soit* $u(t)$ *une solution presque périodique de* (I.36), *alors* $u(t)$ *est une solution de l'équation*

$$\frac{du}{dt}(t)+Au(t)=0\,.$$

Posons dans (I.36) $v=0$

$$\left(\frac{du}{dt}(t),\, u(t)\right)\leqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}$$

dont

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2\leqslant 0$$

donc $|u(t)|$ est décroissante et, étant $u(t)$ presque périodique, on a

$$|u(t)|=\text{Cst}$$

dont

$$\left(\frac{du}{dt}(t),\, u(t)\right)=0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\,.$$

On a alors

$$\left(\frac{du}{dt}(t)+Au(t),\, v\right)\geqslant 0 \qquad \forall v\in \boldsymbol{K}$$

donc, pour l'hypothèse sur **K**, on a

$$\left(\frac{du}{dt}(t)+Au(t),\, v\right)\geqslant 0 \qquad \forall v\in H$$

dont

$$\frac{du}{dt}(t)+Au(t)=0 \qquad \text{p.p.}$$

dont la thèse.

II - Équations d'évolution du premièr ordre non-linéaires.

a) Le cas uniformément monotone.

§ 1. – Le problème de la solution bornée.

Considérons un opérateur $A\colon D(A)\to H$, [10], multivoque maximal monotone et tel que $\forall v_i\in D(A)$, $w_i\in Av_i$, $i=1,2$

$$\langle w_1-w_2,\, v_1-v_2\rangle\geqslant\alpha\|v_1-v_2\|^2, \qquad \alpha>0\,.$$

Pour simplicité nous écrirons cette rélation ou des rélations du même type

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle \geqslant \alpha \| v_1 - v_2 \|^2, \qquad \alpha > 0 .$$

Nous indiquons par $(\boldsymbol{K})^0$ le vecteur de norme minime dans l'ensemble convexe fermé $\boldsymbol{K}$.

Considérons l'équation

$$\text{(II.}a\text{.1.1.)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \qquad \text{p.p.}$$

et le problème de la solution bornée pour (II.a.1.1.).

Nous rappelons un théorème concernant la solution du problème de CAUCHY par (II.a.1.1.) [9]:

THÉORÈME IV. – *Considérons le problème de Cauchy*

$$\text{(II.}a\text{.1.2.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) & t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où

$$f(t) \in C(0, T; H), \qquad \frac{df}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; H)$$

et $u_0 \in D(A)$.

Il y a une unique solution $u(t)$ *de* (II.a.1.2.), *tel que*

a) $u(t) \in D(A)$ *dans* $[0, T]$

b) $u(t)$ *est lipschitzienne dans* H *sur* $[0, T]$

c) $u(t)$ *est dérivable à droite dans* $[0, T]$

d) $\dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \qquad$ p.p. dans $[0, T]$

$$\frac{d^+}{dt} u(t) + (Au(t) - f(t))^0 = 0 \qquad \text{dans } [0, T];$$

e) $$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leqslant \exp(-\alpha t) |(f(0) - Au_0)^0| + \int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau)) \left| \frac{df}{dt}(\tau) \right| d\tau \qquad \text{p.p. dans } [0, T].$$

Pour le problème de la solution bornée on obtient le resultat suivant:

THÉORÈME V. – *Soit* $f(t)\in C(\boldsymbol{R}; H)\cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ *et* $(df/dt)(t)\in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$; *l'équation* (II.*a*.1.1.) *a une unique solution* $u(t)$ *bornée dans* V *et telle que* $g(t)=f(t)-(du/dt)(t)\in \in Au(t)$ *soit bornée dans* H.

On peut supposer sans perdre de generalité $0\in A(D)$, $0\in A0$.

Démontrons d'abord qu'il y a une solution $u(t)$ de (II.*a*.1.1.) bornée dans V et telle que $g(t)$ soit bornée dans H.

Considérons le problème

$$\text{(II.}a\text{,1,3,)}\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t)+Au(t)\ni f(t) \\ u(0)=0\,. \end{cases}$$

Pour le Th. IV (II.*a*.1.3.) a une unique solution $u_0(t)\in C(0,+\infty; H)$ telle que

$$\text{(II.}a\text{.1.4.)}\qquad \left|\frac{du_0}{dt}(t)\right|\leqslant \exp(-\alpha t)|(f(0)-A0)^0| + \int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau))\left|\frac{df}{dt}(\tau)\right|d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_1 + C_2\int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau)) \leqslant C_1 + C_2(1+\exp(-\alpha t)) \leqslant C_3$$

p.p. dans $[0,+\infty[$.

En multipliant scalairement l'équation pour $u_0(t)$

$$\left\langle \frac{du_0}{dt}(t), u_0(t)\right\rangle \leqslant \langle f(t), u_0(t)\rangle - \alpha\|u_0(t)\|^2$$

dont

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_0(t)|^2 \leqslant C_2|u_0(t)| - \alpha\gamma^2|u_0(t)|^2$$

où γ est la constante d'injection de V dans H. Démontrons maintenant que

$$|u_0(t)|\leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2}\qquad \text{pour } t\geqslant 0\,.$$

On a

$$\text{(II.}a\text{.1.5.)}\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_0(t)|^2 \leqslant \alpha\gamma^2|u_0(t)|\left(\frac{C_2}{\alpha\gamma^2}-|u_0(t)|\right).$$

Nous utilisons un procedé par l'absurde; supposons qu'il y ait un point $\bar{t}$ tel que

$$|u_0(\bar{t})| > \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} + \delta\,,\qquad \delta > 0\,.$$

Étant $u_0(t)$ continue dans H et $u_0(0)=0$, il y a un interval $[t_1, t_2]$, tel que

$$|u_0(t_1)| = \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} + \delta \qquad |u_0(t)| > \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} + \delta \qquad t \in]t_1, t_2].$$

De (II.a.1.5.) on a alors

$$\frac{d}{dt}|u_0(t)|^2 \leqslant 0 \qquad \text{dans } [t_1, t_2] \text{ p.p.}$$

donc $|u_0(t)|$ est decroissante.

On a alors

$$|u_0(t)| \leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} + \delta \qquad \text{dans } [t_1, t_2]$$

dont l'absurde.

On peut donc affirmer que

$$|u_0(t)| \leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} + \delta \qquad t \geqslant 0 \text{ p.p.}$$

et, pour la genericité de δ,

$$|u_0(t)| \leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} \qquad \text{pour } t \geqslant 0 \text{ p.p.}$$

Soit maintenant n un entier positif et considérons le problème

$$\text{(II.}a\text{.1.7.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} u_n(t) + A u_n(t) \ni f(t) \\ u_n(-n) = 0 \,. \end{cases}$$

Ce problème a une unique solution $u_n(t) \in C(-n, +\infty; H)$.

Posons

$$g_n(t) = f(t) - \frac{du_n(t)}{dt} \in A u_n(t) \,.$$

Par la même méthode de la partie precedente on démontre que

$$\text{(II.}a\text{.1.8.)} \qquad \left|\frac{du_n}{dt}(t)\right| \leqslant C_3 \qquad \text{p.p. sur } [-n, +\infty[$$

$$\text{(II.}a\text{.1.9.)} \qquad |u_n(t)| \leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} \qquad \text{p.p. sur } [-n, +\infty[$$

et de (II.a.1.7.)

(II.a.1.10.) $$|g_n(t)| \leqslant C_4 \, .$$

On prolonge les fonction $u_n(t)$ et $g_n(t)$ à $\boldsymbol{R}$ par 0. On a alors

(II.a.1.11.) $$g_n(t) \in A u_n(t) \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}$$

(II.a.1.12.) $$|u_n(t)| \leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}$$

(II.a.1.13.) $$\left|\frac{d}{dt} u_n(t)\right| \leqslant C_3 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}$$

(II.a.1.14.) $$|g_n(t)| \leqslant C_4 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R};$$

de (II.a.1.12) et (II.a.1.14) on a

(II.a.1.15.) $$\|u_n(t)\| \leqslant C_5 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}.$$

De (II.a.1.13.), (II.a.1.14.), (II.a.1.15.) on peut extraire de $\{u_n(t)\}$ une sous-suite, que, pour simplicité, nous indiquerons encore par $\{u_n(t)\}$, telle que $\forall t_1, t_2$, $t_1 \leqslant t_2$

(II.a.1.16.) $$\lim_{n\to+\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$

(II.a.1.17.) $$\lim_{n\to+\infty}{}^{**} \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty(t_1, t_2; H)$$

(II.a.1.18.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{**} g_n(t) = g(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty(t_1, t_2; H)\, .$$

Étant A maximal monotone, $g_n(t) \in A u_n(t)$ et pour le Lemme I, Chap. I, (II.a.1.16.) et (II.a.1.18.) on peut affirmer que

(II.a.1.19.) $$g(t) \in A u(t)\, .$$

De (II.a.1.17.), (II.a.1.18.), (II.a.1.19.) on a que $u(t)$ est une solution du problème (II.a.1.1.).

De (II.a.1.16.) et (II.a.1.18.) on a

$$|u(t)| \leqslant \frac{C_2}{\alpha\gamma^2} \qquad \text{sur } \boldsymbol{R} \text{ p.}$$

$$|g(t)| \leqslant C_4 \qquad \text{sur } \boldsymbol{R} \text{ p.p.}$$

dont

$$\|u(t)\| \leqslant C_5 \qquad \text{sur } \boldsymbol{R} \text{ p.p.}$$

On a ainsi démontré la partie de la thèse concernante l'existence.

Démontrons maintenant que la solution de (II.a.1.1.) bornée dans H est unique. Nous utilisons un procedé par l'absurde. Supposons que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ soient deux solutions differentes de (II.a.1.1.).

On a alors

$$\frac{d}{dt}\big(u_1(t)-u_2(t)\big)+\big(Au_1(t)-Au_2(t)\big)\ni 0\,.$$

En multipliant scalairement pour $\big(u_1(t)-u_2(t)\big)$ on a

$$\text{(II.}a\text{.1.20.)}\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1(t)-u_2(t)|^2\leqslant-\alpha\|u_1(t)-u_2(t)\|^2\leqslant-\alpha\gamma^2|u_1(t)-u_2(t)|^2\leqslant 0\,.$$

De (II.a.1.20.) on a que $|u_1(t)-u_2(t)|$ est decroissante.

Étant $u_1(t)\neq u_2(t)$, on a qu'il y a $\bar t$, tel que

$$|u_1(\bar t)-u_2(\bar t)|\geqslant\varrho>0$$

et donc

$$|u_1(t)-u_2(t)|\geqslant\varrho>0\,,\qquad t\leqslant\bar t\,.$$

Soient maintenant $t_1\leqslant t_2\leqslant\bar t$ et integrons (II.a.1.20.) sur (t_1,t_2); on a

$$\tfrac{1}{2}\{|u_1(t_2)-u_2(t_2)|^2-|u_1(t_1)-u_2(t_1)|^2\}\leqslant-\alpha\gamma^2\int_{t_1}^{t_2}|u_1(t)-u_2(t)|^2dt\leqslant-\alpha\gamma^2\varrho^2(t_2-t_1)$$

dont

$$\tfrac{1}{2}|u_1(t_1)-u_2(t_1)|^2\geqslant\alpha\gamma^2\varrho^2(t_2-t_1)+\tfrac{1}{2}|u_1(t_2)-u_2(t_2)|^2\geqslant\alpha\gamma^2\varrho^2(t_2-t_1)\,.$$

On a alors

$$\lim_{t_1\to-\infty}|u_1(t_1)-u_2(t_1)|=+\infty\,.$$

On tombe donc dans l'absurde et l'unicité de la solution bornée dans H de (II.a.1.1.) est démontrée.

Le Th. V est ainsi demontré.

§ 2. – Le problème de la solution presque-périodique.

Dans ce paragraphe nous considérons le problème de la solution presque-périodique pour l'équation (II.a.1.1.).

On a le resultat suivant:

Théorème VI. – *Supposons que les hypothèses du Th. V soient valables et que $f(t)$ soit presque-périodique dans H; il y a une unique solution de* (II.a.1.1.) *presque-périodique dans V.*

L'unicité de la solution presque-périodique de (II.a.1.1.) suive du Th. V.

Pour le Th. V il y a une solution unique $u(t)$ de (II.a.1.1.) bornée dans V et telle que $g(t)=f(t)-(du/dt)(t)\in Au(t)$ p.p. soit bornée dans H.

Démontrons que $u(t)$ est presque-périodique dans H.

Soit σ un nombre réel arbitraire et indiquons

$$\operatorname*{Sup}_{t\in R}|f(t+\sigma)-f(t)|=M(\sigma)\,.$$

On a

$$\frac{d}{dt}\big(u(t+\sigma)-u(t)\big)+\big(Au(t+\sigma)-Au(t)\big)\ni f(t+\sigma)-f(t)\,.$$

En multipliant scalairement l'équation pour $\big(u(t+\sigma)-u(t)\big)$ on a

$$\text{(II.}a\text{.2.1.)}\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t+\sigma)-u(t)|^2\leqslant\langle f(t+\sigma)-f(t),\,u(t+\sigma)-u(t)\rangle-$$
$$-\alpha\|u(t+\sigma)-u(t)\|^2\leqslant|f(t+\sigma)-f(t)|\,|u(t+\sigma)-u(t)|-\alpha\gamma^2|u(t+\sigma)-u(t)|^2\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\gamma^2|u(t+\sigma)-u(t)|\left(\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}-|u(t+\sigma)-u(t)|\right).$$

Supposons qu'il y ait un point $\bar t$, tel que

$$|u(\bar t+\sigma)-u(\bar t)|\leqslant\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}+\delta\,,\quad\delta>0$$

et démontrons que pour $t\geqslant\bar t$, on a

$$|u(t+\sigma)-u(t)|\leqslant\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}+\delta\,.$$

Nous utilisons un procedé pour l'absurde; supposons qu'il y ait un point $\tilde t$, tel que $\tilde t\geqslant\bar t$ et

$$|u(\tilde t+\sigma)-u(\tilde t)|\geqslant\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}+\delta\,.$$

Étant $u(t)$ continue dans H sur $\boldsymbol{R}$, il y a alors un interval $[t_1,t_2]$, tel que

$$|u(t_1+\sigma)-u(t_1)|=\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}+\delta$$

$$|u(t+\sigma)-u(t)|>\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}+\delta,\ t\in\,]t_1,t_2]\,.$$

De (II.a.2.1.) on a alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t+\sigma)-u(t)|^2\leqslant 0\qquad\text{dans }[t_1,t_2]$$

dont $|u(t+\sigma)-u(t)|$ est decroissante dans $[t_1, t_2]$; on a alors

$$|u(t+\sigma)-u(t)| \leqslant \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2} + \delta \qquad \text{dans } [t_1, t_2]\,.$$

On tombe donc dans l'absurde; on a ainsi démontré que pout $t \geqslant \bar{t}$

$$|u(t+\sigma)-u(t)| \leqslant \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2} + \delta\,.$$

Démontrons maintenant que, $\forall a \in \boldsymbol{R}$, il y a $\bar{t} \leqslant a$ tel que

$$|u(\bar{t}+\sigma)-u(\bar{t})| \leqslant \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2} + \delta\,.$$

Nous utilisons un procedé par l'absurde; supposons que pour $t \leqslant a$

$$|u(t+\sigma)-u(t)| > \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2} + \delta\,.$$

En intégrant (II.a.2.1.) sur $[t, a]$, on a alors

$$\frac{1}{2}\{|u(a+\sigma)-u(a)|^2 - |u(t+\sigma)-u(t)|^2\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\gamma^2 \int_t^a |u(\eta+\sigma)-u(\eta)| \left(\frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2} - |u(\eta+\sigma)-u(\eta)|\right) d\eta \leqslant \alpha\gamma^2 \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}\,\delta(a-t)\,.$$

On a alors

$$\frac{1}{2}|u(t+\sigma)-u(t)|^2 \geqslant -\alpha\gamma^2 \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}\,\delta\,(a-t)$$

dont

$$\lim_{t\to-\infty} |u(t+\sigma)-u(t)| = +\infty\,.$$

On tombe donc dans l'absurde, étant $u(t)$ bornée dans H; la thèse est ainsi démontrée.

De (II.a.2.2.) on a

$$|u(t+\sigma)-u(t)| \leqslant \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2} + \delta$$

sur $\boldsymbol{R}$ et, pour la generecité de δ, on a

$$|u(t+\sigma)-u(t)| \leqslant \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}\,. \tag{II.a.2.3.}$$

Étant $f(t)$ presque périodique dans H, de (II.a.2.3.) on deduit que $u(t)$ est presque-périodique dans H.

On a enfin

$$\alpha\|u(t+\sigma)-u(t)\|^2 \leqslant \langle g(t+\sigma)-g(t), u(t+\sigma)-u(t)\rangle \leqslant C_4 \frac{M(\sigma)}{\alpha\gamma^2}$$

dont $u(t)$ est presque-périodique dans V. Le Th. VI est ainsi démontré.

§ 3. – Exemples.

Soit $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ regulière.

Considérons l'équation parabolique non linéaire

$$\text{(II.}a\text{.3.1.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \Delta u(t,x) + \beta(u(t,x)) \ni f(t,x) & \text{p.p. } \boldsymbol{R}\times\Omega \\ u(t,x)|_\Gamma = 0 \qquad \text{p.p. } \boldsymbol{R} \end{cases}$$

où β est un graphe maximal monotone, de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$.

On peut démontrer, [9], que l'opérateur

$$D(-\Delta) = \{u(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\} \quad -\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}, \; u(x) \in D(-\Delta)$$

et l'opérateur

$$D(\beta) = \{u(x) | u(x) \in D(\beta) \text{ p.p. sur } \Omega, \; u(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega),$$
$$\exists w(x) \in \beta(u(x)) \text{ p.p. sur } \Omega \text{ et } w(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)\}$$

$$\beta(u(x)) = \{w(x) | w(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega), \; w(x) \in \beta(u(x)) \text{ p.p. dur } \Omega\} \qquad \forall u(x) \in D(\beta)$$

sont maximal monotones sur $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et on peut aussi démontrer, que l'opérateur $-\Delta + \beta$ est maximal monotone.

Soit $f(t,\cdot)$ bornée dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$ et dérivable dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ avec une dérivée bornée dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$.

Pour les Th. V et Th. VI on a alors qu'il y a une unique solution $u(t,x)$ de (II.a.3.1.) sur $\boldsymbol{R}\times\Omega$, telle que $u(t,\cdot)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et, indiqué par

$$g(t,x) = -\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \Delta u(t,x) + f(t,x)\,,$$

$g(t,\cdot) - \Delta u(t,\cdot)$ est bornée dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$.

On démontre [9],

$$-\int_\Omega \Delta u(t,x) g(t,x)\,dx \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\,.$$

On a alors que $\Delta u(t, \cdot)$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, donc $u(t, \cdot)$ est bornée dans $H^2(\Omega)$. Du Th. VI on a que, si $f(t, \cdot)$ est presque-périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, $u(t, \cdot)$ est presque-périodique dans $H_0^1(\Omega)$, donc, étant $u(t, \cdot)$ bornée dans $H^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$, $u(t, \cdot)$ est faiblement presque périodique dans $H^2(\Omega)$.

Dans ce cas, donc, les Th. V et VI améliorent, bien que sous des hypothèses plus fortes, les resultats de [6].

Indiquons maintenant par ν la normale extérieure à Ω sur Γ, par γ un deuxième graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ et considérons le problème

$$(\mathrm{II}.a.3.2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) + u(t,x) + \beta(u(t,x)) \ni f(t,x) & \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\times\Omega \\ -\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \nu} \in \gamma(u(t,x)) \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\times\Gamma . \end{cases}$$

On peut démontrer, [9], que l'opérateur

$$D(-\Delta + I) = \left\{ u(x) \in H^2(\Omega),\ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \in \gamma(u(x)) \ \text{ p.p. sur } \Gamma \right\}$$

$$(-\Delta + I)u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} + u(x) \qquad \forall u(x) \in D(-\Delta + I)$$

et l'opérateur β défini comme à la partie précédente sont maximal monotones sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et on peut aussi démontrer, [9], que $-\Delta + I + \beta$ est encore un opérateur maximal monotone sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Soit $f(t, \cdot)$ bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$ et dérivable dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ avec une dérivée bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$.

Pour le Th. V on peut alors affirmer, qu'il y a une unique solution $u(t,x)$ de (II.a.3.2.), telle que $u(t, \cdot)$ soit bornée dans $H^1(\Omega)$ et, indiqué

$$g(t,x) = -\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \Delta u(t,x) - u(t,x) + f(t,x)\,, \qquad g(t,x) - \Delta u(t,x) + u(t,x)$$

est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$.

On démontre, [9],

$$\int_\Omega (-\Delta u(t,x) + u(t,x))\, g(t,x)\, dx \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\,.$$

On a alors que $-\Delta u(t, \cdot) + u(t,x)$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, donc, [9], $u(t, \cdot)$ est bornée dans $H^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$.

Pour le Th. VI, si $f(t, \cdot)$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$, $u(t, \cdot)$ est presque-périodique dans $H^1(\Omega)$ et, étant bornée sur $\boldsymbol{R}$ dans $H^2(\Omega)$, est presque périodique faiblement dans $H^2(\Omega)$.

Voyons maintenant deux exemples, qu'on peut ramener à la formulation (II.a.3.1.), et (II.a.3.2.)

1) Considérons (II.a.3.1.) et soit

$$\beta(r) = \begin{cases} = 0 & r \in]a, b[\\ =]-\infty, 0] & r = a \\ = [0, +\infty[& r = b \\ = \emptyset & r \notin [a, b] . \end{cases}$$

On verifie facilement, [9], que β est un graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. Dans ce cas (II.$a$.3.1.) equivale au problème

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) = f(t, x) \qquad \text{sur } \{a < u(t, x) < b\} \text{ p.p.}$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) \leqslant f(t, x) \qquad \text{sur } \{u(t, x) = a\} \text{ p.p.}$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) \geqslant f(t, x) \qquad \text{sur } \{u(t, x) = b\} \text{ p.p.}$$

$$a \leqslant u(t, x) \leqslant b \qquad \text{p.p. sur } \Omega\times\boldsymbol{R}$$

$$u(t, x)|_{\Gamma} = 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}.$$

2) Considérons (II.a.3.2.) et soit

$$\beta(r) = 0 .$$

$$\gamma(r) = \begin{cases} = 0 & r \in]a, b[\\ =]-\infty, 0] & r = a \\ = [0, +\infty[& r = b \\ = \emptyset & r \notin [a, b] . \end{cases}$$

On vérifie facilement, [9], que β et γ sont des graphes maximal monotones de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. Dans cet cas (II.$a$.3.2.) equivale au problème

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + u(t, x) = f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\times\Omega$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{q.o. } \{(t, x) | (t, x) \in \boldsymbol{R}\times\Gamma,\ a < u(t, x) < b\}$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \nu} \geqslant 0 \qquad \text{q.o. } \{(t, x) | (t, x) \in \boldsymbol{R}\times\Gamma,\ u(t, x) = a\}$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \nu} \leqslant 0 \qquad \text{q.o. } \{(t, x) | (t, x) \in \boldsymbol{R}\times\Gamma,\ u(t, x) = b\} .$$

b) Cas strictement monotone.

§ 1. – Le problème de la solution presque-périodique.

Soient $A: D(A) \to H$ et $B: D(B) \to H$ deux opérateurs multivoques maximal monotones.

Nous supposons que B soit strictement monotone, i.e. si $v, w \in D(B)$, $x \in Bv$, $y \in Bw$

$$(x-y, v-w) = 0 \Rightarrow v = w .$$

Considérons l'équation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) \qquad \text{p.p.} \tag{II.b.1.1.}$$

et pour cette équation le problème de la solution presque périodique.

THÉORÈME VII. – *Soit $u(t)$ une solution de* (II.*b*.1.1.) *à trajectoire rélativement compacte et telle qu'il y ait une $g'(t) \in Au(t)$ et*

$$g''(t) = f(t) - g(t) - \frac{du}{dt}(t) \in Bu(t)$$

avec

$$\int_t^{t+1} \left(\left| \frac{du}{dt}(\eta) \right|^2 + |g'(\eta)|^2 \right) d\eta \leq C \qquad \forall t \in \mathbf{R} . \tag{II.b.1.2.}$$

Soit $f(t)$ preque périodique dans H; $u(t)$ est l'unique solution à trajectoire rélativement compacte, qui satisfait à (II.*b*.1.2.), *et $u(t)$ est presque périodique dans H.*

Démontrons l'unicité de la solution à trajectoire rélativement compacte de (II.*b*.1.1.), qui satisfait (II.*b*.1.2.).

Nous utilisons un procedé par l'absurde; supposons qu'il y a deux solutions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ differents de (II.*b*.1.1.) qui ont cettes propriétés.

Soient

$$g_1'(t) \in Au_1(t) , \qquad g_1''(t) \in Bu_1(t) \qquad \text{p.p.}$$

$$g_2'(t) \in Au_2(t) , \qquad g_2''(t) \in Bu_2(t) \qquad \text{p.p.}$$

telles que

$$\frac{du_1}{dt}(t) + g_1'(t) + g_1''(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

$$\int_t^{t+1}\left(\left|\frac{du_1(\eta)}{dt}\right|^2+|g_1'(\eta)|^2\,d\eta\leqslant C\right.$$

$$\frac{du_2}{dt}(t)+g_2'(t)+g_2''(t)=f(t)\qquad \text{p.p.}$$

$$\int_t^{t+1}\left(\left|\frac{du_2}{dt}(\eta)\right|^2+|g_2'(\eta)|^2\right)d\eta\leqslant C\,.$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}(u_1(t)-u_2(t))+(g_1'(t)-g_2'(t))+(g_1''(t)-g_2''(t))=0\,.$$

En multipliant cette rélation scalairement pour $(u_1(t)-u_2(t))$, on a

(II.*b*.1.3.) $$\frac{d}{dt}|u_1(t)-u_2(t)|^2\leqslant-(g_1''(t)-g_2''(t),\,u_1(t)-u_2(t))\leqslant 0\,.$$

De (II.*b*.1.3.) on a que $|u_1(t)-u_2(t)|$ est decroissante.

Étant $u_1(t)\neq u_2(t)$, il y a $\bar t$ tel que

$$|u_1(\bar t)-u_2(\bar t)|\geqslant\varrho>0$$

dont

$$|u_1(t)-u_2(t)|\geqslant\varrho>0\qquad t\leqslant\bar t\,.$$

Indiquons

$$N_1=\liminf_{t\to+\infty}|u_1(t)-u_2(t)|^2<+\infty\,,$$

$$N_2=\limsup_{t\to-\infty}|u_1(t)-u_2(t)|^2<+\infty\,.$$

De (II.*b*.1.3.) on a que, choisi un entier $n<\bar t$ et un entier positif arbitraire m, on a

$$N_1-N_2=-2\int_{n-m}^{n}(g_1''(t)-g_2''(t),\,u_1(t)-u_2(t))\,dt\leqslant$$

$$\leqslant-2\sum_{j=n-m}^{n-1}\int_0^1(g_1''(j+\eta)-g_2''(j+\eta),\,u_1(j+\eta)-u_2(j+\eta))\,d\eta\,.$$

Démontrons maintenant le lemme suivante:

LEMME II. – *Soit X un espace de Hilbert identifié avec son dual pour le produite scalaire $(\ ,\ )_x$ et soit $|\ |_x$ la norme induite de $(\ ,\ )_x$ sur X.*

Soit $S: D(S) \to X$ *un opérateur multivoque maximal monotone sur* X *et* K_1 *et* K_2 *deux ensembles rélativement compactes de* X *dans* $D(S)$.

Supposons que S *soit strictement monotone et soient* Σ_1 *et* Σ_2 *deux sections de* SK_1 *et* SK_2 (*pour la définition de section cfr.* [10]).

Soient $v, w \in D(S)$, *tels que*

$$|v-w|_x \geqslant \varrho > 0 ; \qquad v \in K_1, \, w \in K_2,$$

il y a alors une constante $\sigma > 0$, *qui depende uniquement de* ϱ, *telle que pour* $x \in \Sigma_1 \cap Sv$, $y \in \Sigma_2 \cap Sw$, *on a*

$$(x-y, \, v-w)_x \geqslant \sigma .$$

Pour démontrer le lemme nous utilisons un procedé par l'absurde.

Si la thèse est fausse, il y a deux suite $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ dans K_1 et K_2 telles que

$$|v_n - w_n|_x \geqslant \varrho > 0 \tag{II.b.1.4.}$$

et telles qu'il y a $x_n \in \Sigma_1 \cap Sv$, $y_n \in \Sigma_2 \cap Sw$,

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n - y_n, \, v_n - w_n) = 0 . \tag{II.b.1.5.}$$

Étant K_1 et K_2 rélativement compacte, on peut supposer, sans perdre de generalité, que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v , \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = w \qquad \text{dans } X.$$

Étant Σ_1 et Σ_2 bornées dans X, on peut supposer, sans perdre de generalité

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} x_n = x , \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} y_n = y \qquad \text{dans } x .$$

Étant S maximal monotone, [10], on a

$$x \in Sv , \qquad y \in Sw .$$

On a de (II.b.1.4.) et (II.b.1.5.)

$$|v-w|_x \geqslant \varrho > 0 , \qquad (x-y, \, v-w)_x = 0 .$$

On tombe donc dans l'absurde, étant S strictement monotone.

On peut maintenant términer la démonstration du théorème considéré.

Observons, que pour $j \leqslant \bar{n} - 1 \leqslant \bar{t} - 1$, on a

$$\left(\int_0^1 |u_1(j+\eta) - u_2(j+\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \varrho > 0 .$$

Observons que les fonctions $u_1(j+\eta)$ et $u_2(j+\eta)$ ont des trajectoires contenues dans deux ensembles rélativement compacts fixés, $\forall j \leqslant n-1$, et que

$$\int_0^1 \left|\frac{du_1}{dt}(j+\eta)\right|^2 d\eta \leqslant C \qquad \int_0^1 \left|\frac{du_2}{dt}(j+\eta)\right|^2 d\eta \leqslant C \qquad \forall j \leqslant \overline{n}-1 .$$

Les deux suite $\{u_1(j+\eta)\}$ et $\{u_2(j+\eta)\}$ sont donc rélativement compactes dans $\mathfrak{L}^\infty(0,1;H)$ donc dans $\mathfrak{L}^2(0,1;H)$.

Observons que l'opérateur S induit de B sur $\mathfrak{L}^2(0,1;H)$ est, pour le Lemme I du Chapitre I, maximal monotone et on peut facilement vérifier que cet opérateur est strictement monotone sur $\mathfrak{L}^2(0,1;H)$.

Observons enfin que $\{g_1''(j+\eta)\}$ et $\{g_2''(j+\eta)\}$ sont des sections de $S\{u_1(j+\eta)\}$ et $S\{u_2(j+\eta)\}$ et

$$\int_0^1 |g_1''(j+\eta)|^2 d\eta \leqslant C \qquad \int_0^1 |g_2''(j+\eta)|^2 d\eta \leqslant C \qquad j \leqslant \overline{n}-1 .$$

En appliquant le Lemme II, on peut déduir que

$$\int_0^1 \big(g_1''(j+\eta)-g_2''(j+\eta),\, u_1(j+\eta)-u_2(j+\eta)\big)\, d\eta \geqslant \sigma > 0 \qquad \forall j \leqslant \overline{n}-1$$

dont

$$N_1 - N_2 \leqslant -2\sigma(m-1) .$$

De cette rélation, étant m positif arbitraire, on déduit que

$$N_2 = +\infty .$$

On tombe donc dans l'absurde et la thèse est ainsi démontrée.

Démontrons maintenant que $u(t)$ est presque périodique dans H.

Pour démontrer la thèse nous utilisons un critère classique de presque périodicité dû a BOCHNER:

CRITÈRE III. – *Soit X un éspace de Banach et soit $g(t)$ une function continue de* $\boldsymbol{R}$ *dans X.*

La fonction $g(t)$ est presque périodique dans X si et seulement si pour toutes suites réelles $\{l_j\}$, il y a une sous-suite $\{l_j'\}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty} g(t+l_j') = g_1(t) \qquad \textit{dans } X$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$.

Soit $\{l_j\}$ une arbitraire suite réelle; on a

$$\int_0^1 \left|\frac{du}{dt}(t+l_j+\eta)\right|^2 d\eta = \int_t^{t+1} \left|\frac{du}{dt}(\eta+l_j)\right|^2 d\eta \leqslant C$$

$$\int_0^1 |g'(t+l_j+\eta)|^2 d\eta = \int_t^{t+1} |g'(\eta+l_j)|^2 d\eta \leqslant C$$

dont

$$\int_0^1 |g''(t+l_j+\eta)|^2 d\eta = \int_t^{t+1} |g''(\eta+l_j)|^2 d\eta \leqslant C$$

et les fonctions $u(t+l_j)$ ont les valeurs dans un ensemble rélativement compact de H.

Indiquons

$$\tilde{g}'(t+l_j) = \{g'(t+l_j+\eta)\} : \boldsymbol{R} \to \mathfrak{L}^2(0,1;H)$$

$$\tilde{g}''(t+l_j) = \{g''(t+l_j+\eta)\} : \boldsymbol{R} \to \mathfrak{L}^2(0,1;H)\,.$$

Il y a alors une sous-suite de $\{l_j\}$, que, pour simplicité, nous indiquons encore par $\{l_j\}$, telle que $\forall t_1, t_2,\ t_1 \leqslant t_2$

(II.*b*.1.6.) $$\lim_{j\to+\infty} u(t+l_j) = u_l(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$

(II.*b*.1.7.) $$\lim_{j\to+\infty}{}^{*}\, g'(t+l_j) = g_l(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1,t_2;H)$$

et de (II.*b*.1.7.)

(II.*b*.1.8.) $$\lim_{j\to+\infty}{}^{*}\, \tilde{g}'(t+l_j) = \tilde{g}_l(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0,1;\boldsymbol{R})$$

sur $\boldsymbol{R}$.

Démontrons maintenant que il y a une sous-suite de $\{l_j\}$, $\{l'_j\}$, telle que

$$\lim_{j\to+\infty} u(t+l'_j) = u_l(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$.

Nous utilisons un procedé par l'absurde. Si la thèse est fausse, il y a une suite $\{t_j\}$ et deux sous-suites de $\{l_j\}$, $\{l_{1j}\}$ et $\{l_{2j}\}$, telles que

(II.*b*.1.9.) $$|u(t_j+l_{1j}) - u(t_j+l_{2j})| \geqslant \varrho > 0$$

(II.*b*.1.10.) $$\lim_{j\to\infty} f(t+l_{1j}) = \lim_{j\to\infty} f(t+l_{2j})$$

où les limites sont uniformes dans H sur $\boldsymbol{R}$.

Indiquons $t_j + l_{1j} = \gamma_{1j}$, $t_j + l_{2j} = \gamma_{2j}$; on a p.p. sur $\boldsymbol{R}$

$$\int_0^1 \left| \frac{du}{dt}(t + \gamma_{ij} + \eta) \right|^2 d\eta = \int_t^{t+1} \left| \frac{du}{dt}(\eta + \gamma_{ij}) \right|^2 d\eta \leqslant C \qquad i = 1, 2$$

$$\int_0^1 |g'(t + \gamma_{ij} + \eta)|^2 d\eta = \int_t^{t+1} |g'(\eta + \gamma_{ij})|^2 d\eta \leqslant C \qquad i = 1, 2$$

$$\int_0^1 |g''(t + \gamma_{ij} + \eta)|^2 d\eta = \int_t^{t+1} |g''(\eta + \gamma_{ij})|^2 d\eta \leqslant C \qquad i = 1, 2$$

et les fonctions $u(t+\gamma_{1j})$ et $u(t+\gamma_{2j})$ ont les valeurs dans un ensemble rélativement compact fixé de H et de (II.b.1.9.)

$$|u(\gamma_{1j}) - u(\gamma_{2j})| \geqslant \varrho > 0 \; .$$

De les rélations précédentes on a qu'il y a deux sous-suites de $\{\gamma_{1j}\}$ et $\{\gamma_{2j}\}$, que, nous, pour simplicité, indiquons encore par $\{\gamma_{1j}\}$, $\{\gamma_{2j}\}$, telles que $\forall t_1, t_2$, $t_1 \leqslant t_2$

(II.b.1.11.) $$\lim_{j \to +\infty} u(t + \gamma_{ij}) = u_{\gamma_i}(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$, $i = 1, 2$

(II.b.1.12.) $$\lim_{j \to +\infty}{}^{*} \frac{du}{dt}(t + \gamma_{ij}) = \frac{du_{\gamma_i}}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H), \; i = 1, 2$$

(II.b.1.13.) $$\lim_{j \to +\infty}{}^{*} g'(t + \gamma_{ij}) = g'_{\gamma_i}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H), \; i = 1, 2$$

(II.b.1.14.) $$\lim_{j \to +\infty}{}^{*} g''(t + \gamma_{ij}) = g''_{\gamma_i}(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H), \; i = 1, 2$$

De (II.b.1.11.), (II.b.1.13.), (II.b.1.14.) et du Lemme I du Chapitre I, suive

$$g'_{\gamma_i}(t) \in A u_{\gamma_i}(t) \qquad i = 1, 2 \text{ p.p.}$$

$$g''_{\gamma_i}(t) \in B u_{\gamma_i}(t) \qquad i = 1, 2 \text{ p.p.}$$

et de (II.b.1.10.) suive

(II.b.1.15.) $$\lim_{j \to +\infty} f(t + \gamma_{ij}) = f_{\gamma}(t) \qquad i = 1, 2$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$ dans H.

De (II.b.1.11.) on a

(II.b.1.16.) $$|u_{\gamma_1}(0) - u_{\gamma_2}(0)| \geqslant \varrho > 0 \; .$$

De (II.b.1.11.), (II.b.1.12.), (II.b.1.13.), (II.b.1.14.), (II.b.1.15.) on a que $u_{\gamma_1}(t)$ et $u_{\gamma_2}(t)$ sont des solutions du problème

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t) \in f_\gamma(t) \qquad \text{p.p.}$$

De (II.b.1.11.) suive que $u_{\gamma_1}(t)$ et $u_{\gamma_2}(t)$ ont les valeurs dans un ensemble rélativament compact fixé dans H et de (II.b.1.12.) et (II.b.1.13.) on a que

$$\int_0^1 \left| \frac{du_{\gamma_i}}{dt}(t+\eta) \right|^2 d\eta \geqslant C \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R},\ i = 1, 2$$

$$\int_0^1 |g'_{\gamma_i}(t+\eta)|^2 d\eta \leqslant C \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R},\ i = 1, 2 .$$

De la partie précédente, concernante l'unicité, on a alors

$$u_{\gamma_1}(t) = u_{\gamma_2}(t) \qquad \text{sur } \boldsymbol{R} .$$

Pour (II.b.1.16.) on tombe dans l'absurde et la thèse est démontrée.

On a alors que $u(t)$ est presque périodique dans H.

Par une méthode analogue, en utilisant (II.b.1.8.) et du Critère I, on démontre que $g(t)$ est faiblement S^2-presque périodique.

§ 2. – Un exemple d'application du Th. VII.

Considérons le système d'équations d'évolution sur $\boldsymbol{R}^n$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + \beta(u(t,x)) = f(t,x)$$

où

$$u(t,x) = \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ \cdots\cdots \\ u_p(t,x) \end{pmatrix}$$

est une fonction de $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}^p$, les A_i sont des matrices symetriques $p \times p$ réelles et

$$\beta(u(t,x)) = \begin{pmatrix} \beta_1(u(t,x)) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_p(u(t,x)) \end{pmatrix}$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_p$ sont des graphes maximals monotones de $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.

Considérons les opérateurs sur $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$

$$D(A)=\left\{v(x)|v(x)\in(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p,\ \sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\in(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p\right\}$$

$$Av=\sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\qquad \forall v\in D(A)$$

$$D(\beta)=\{v(x)|v(x)\in(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p,\ \exists w(x)\in\beta(v(x))\ \text{p.p. dans}\ \boldsymbol{R}^n\ w(x)\in(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p\}$$

$$\beta v=\{w(x)|w(x)\in\beta v(x)\ \text{p.p. sur}\ \boldsymbol{R}^n,\ w(x)\in(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p\}\qquad \forall v\in D(\beta)\,.$$

On peut facilement vérifier que A est linéaire antiautodjoint donc maximal monotone sur $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$, [5], et β est maximal monotone et strictement monotone sur $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$, [9]. Appliquons le Th. VII.

Supposons que $f(t,\cdot)\colon \boldsymbol{R}\to(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ soit presque périodique dans $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ et qu'il y ait une solution $u(t,x)$, telle que $u(t,\cdot)\colon \boldsymbol{R}\to(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ a trajectoire rélativement compacte dans $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ et

$$\text{(II.}b\text{.2.1.)}\qquad \int_t^{t+1}\|Au(\eta)\|^2_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p}d\eta\leqslant C$$

$$\text{(II.}b\text{.2.2.)}\qquad \int_t^{t+1}\left\|\frac{du}{dt}(\eta)\right\|^2_{(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p}d\eta\leqslant C.$$

Du Th. VII on a que $u(t,x)$ est l'unique solution du problème consideré à trajectoire rélativement compacte dans $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ et vérifiante (II.b.2.1.), (II.b.2.2.); on a enfin que $u(t,\cdot)\colon \boldsymbol{R}\to(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$ est presque-périodique dans $(\mathfrak{L}^2(\boldsymbol{R}^n))^p$.

c) *Sur un problème parabolique non linéaire particulière.*

Soit $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ et β un graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ avec $D(\beta)=\boldsymbol{R}$.

Considérons le problème parabolique non linéaire

$$\text{(II.}c\text{.1.)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)-Au(t,x)+\beta(u(t,x))\ni f(t,x) & \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\times\Omega\\ u(t,x)=0 \qquad \text{sur } \boldsymbol{R}\times\Gamma \text{ p.p.} & \end{cases}$$

Dans [6] et au point a) de ce chapitre on a obtenu des resultats concernantes le problème de la solution bornée et presque périodique pour (II.c 1.).

Les resultats sont valables sous des hypothèses fortes sur $f(t, x)$; le bût de cet paragraphe est obtenir des resultats sur ces problèmes sous des hypothèses plus faibles sur $f(t)$, en utilisant une opportune formulation faible de (II.*c*.1.).

DÉFINITION I. – *On dit que une fonction $u(t, x)$ est une solution faible de* (II.*c*.1.) *si*

(1) $u(t, x) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; H^1_0(\Omega))$

(2) $\dfrac{du}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^1(\Omega)) + \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; H^{-1}(\Omega))$

3) *il y a une section $\sigma(t, x)$ de $\beta(u(t, x))$* (pour la définition de section (cfr. [10]), *qui est dans $\mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^1(\Omega))$, telle que*

$$\frac{du}{dt}(t) - \Delta u(t) + \sigma(t) = f(t)$$

dans $\mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^1(\Omega)) + \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; H^{-1}(\Omega))$.

Avant d'examiner le problème de la solution faible bornée et de la solution faible presque périodique de (II.*c*.1.), nous démontrons un lemme, que nous utiliserons. (J'exprime à H. BRÉZIS mes remerciements pour m'avoir donné verbalment la méthode de démonstration du Lemme IV, que, avec plusieurs indispensables précautions, est utilisée pour la démonstration du Lemme III).

LEMME III. – *Indiquons par*

$$\beta_\lambda = \frac{I - (I + \lambda\beta)^{-1}}{\lambda} \qquad \lambda > 0$$

la régularisée de Yoshida de β et soit $\{u_{\lambda_n}(x)\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0\right)$ une suite des fonctions, sur un ouvert Q borné, telles que $u_{\lambda_n}(x) \in \mathfrak{L}^1(Q)$ et

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n}(x) = u(x) \qquad p.p. \textit{ dans } Q$$

et

$$\int_Q \beta_{\lambda_u}(u_{\lambda_n}(x))\, u_{\lambda_n}(x)\, dx \leqslant C\,.$$

Il y a une sous-suite que nous indiquons par $\{\beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x)) = \sigma(x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(Q)$ et

$$\sigma(x) \in \beta(u(x)) \qquad p.p. \textit{ dans } Q\,.$$

Pour démontrer que la solution $\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))$ est rélativement compacte dans la topologie faible dans $\mathfrak{L}^1(Q)$ nous utilisons un critère de compacité, dû à DUNFORD et PETTIS, [11]:

CRITÈRE IV. – *Soit $\{\sigma_n(x)\}$ une suite des fonctions dans $\mathfrak{L}^1(Q)$, telle que*

$$\lim_{m(E)\to 0}\int_E |\sigma_n(x)|\,dx = 0 \qquad E\subset Q$$

$$\int_Q |\sigma_n(x)|\,dx \leqslant C\,.$$

uniformément pour n.

La suite $\{\sigma_n(x)\}$ est alors faiblement rélativement compacte dans $\mathfrak{L}^1(Q)$.

On a

$$\int_Q |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant \int_{\{x\in Q\,|\,|u_{\lambda_n}(x)|\leqslant 1\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx + \int_{\{x\in Q\,|\,|u_{\lambda_n}(x)|>1\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx\,.$$

Nous rappellons, [10], que on a $|\beta_{\lambda_n}(z)|\leqslant|\beta^0(z)|$ pour $z\in\boldsymbol{R}$; étant $D(\beta)=\boldsymbol{R}$, on a

$$\operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1}|\beta_{\lambda_n}(z)|\leqslant \operatorname*{Sup}_{|z|\leqslant 1}|\beta^0(z)|\leqslant C_1$$

où C_1 ne dépende pas de n.

On a donc

$$\int_{\{x\in Q\,|\,|u_{\lambda_n}(x)|\leqslant 1\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant C_1 \operatorname{mis}(Q)$$

On a

$$\int_{\{x\in Q\,|\,|u_{\lambda_n}(x)|\geqslant 1\}} \beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant \int_{\{x\in Q\,|\,|u_{\lambda_n}(x)|\geqq 1\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,|u_{\lambda_n}(x)|\,dx =$$

$$= \int_{\{x\in Q\,|\,|u_{\lambda_n}(x)|\geqslant 1\}} \beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))\,u_{\lambda_n}(x)\,dx \leqslant \int_G \beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))\,u_{\lambda_n}(x)\,dx \leqslant C\,.$$

On a donc

$$\int_Q |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant C_3$$

uniformément pour n.

Démontrons maintenant que, pour $E\subset Q$,

$$\lim_{\operatorname{mis}(E)\to 0}\int_E |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx = 0$$

uniformément pour n.

Soit $\varrho > 0$ une nombre réel; on a

$$\int_E |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant \int_{\{x\in E|\,|\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\leqslant\varrho\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx + \int_{\{x\in E|\,|\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|>\varrho\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx$$

dont

$$\int_E |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant \operatorname{mis}(E)\,\varrho + \\ + \int_{\{x\in E|\,|\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|>\varrho\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant \operatorname{mis}(E)\,\varrho + \int_{\{x\in E|\,|\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|>\varrho\}} |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,\frac{1}{|u_{\lambda_n}(x)|}\,|u_{\lambda_n}(x)|\,dx\,.$$

Fixé $\varepsilon > 0$ arbitrairement, on peut choisir

$$\varrho \geqslant \operatorname*{Sup}_{[-2c/\varepsilon,\,2c/\varepsilon]} |\beta(z)| \geqslant \operatorname*{Sup}_{[-2c/\varepsilon,\,2c/\varepsilon]} |\beta_{\lambda_n}(z)|\,;$$

on a alors

$$\int_E |\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))|\,dx \leqslant \operatorname{mis}(E)\,\varrho + \frac{\varepsilon}{2C}\int_Q \beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))\,u_{\lambda_n}(x)\,dx \leqslant \operatorname{mis}(E)\,\varrho + \frac{\varepsilon}{2}$$

dont, pour la généricité de ε, on a la thèse.

Du critère de DUNFORD-PETTIS on a alors qu'il y a une sous-suite $\{\beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\}$ de $\{\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(x))\}$, telle que

$$\text{(II.c.3.)} \qquad \lim_{n_k\to+\infty}{}^{*}\, \beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x)) = \sigma(x) \qquad \text{in } \mathfrak{L}^1(Q)\,.$$

Démontrons maintenant que $\sigma(x)\in\beta(u(x))$ p.p. dans Q.

Fixé $\varepsilon > 0$ arbitraire, est possible déterminer $T\subset Q$ tel que

$$M(Q-T)\leqslant\varepsilon\,.$$

$$|u(x)|\leqslant N \qquad \text{p.p. sur } T$$

et tel qu'on peut supposer, sans perdre de generalité

$$\lim_{n_k\to\infty} u_{\lambda_{n_k}}(x) = u(x)$$

uniformément sur T.

Soit maintenant

$$j_\lambda(z) = \int_0^z \beta_\lambda(\eta)\,d\eta$$

et indiquons par $j(z)$ une fonction convexe s.c.i. définie sur $\boldsymbol{R}$, avec $j(0)=0$, telle que $\beta(z)$ soit la sous-différentielle de $j(z)$. On a, [8],

(II.c.5.) $$\lim_{\lambda\to 0} j_\lambda(z) \uparrow j(z) \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}\,.$$

Soit maintenant $v(x) \in \mathfrak{L}^\infty(T)$; on a

$$j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x)) \geqslant \beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\,(v(x) - u_{\lambda_{n_k}}(x))$$

dont, en intégrant sur T

$$\int_T \Big(j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\Big)\,dx \geqslant \int_T \beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\,(v(x) - u_{\lambda_{n_k}}(x))\,dx\,.$$

On a pour (II.c.3.), (II.c.4.)

(II.c.6.) $$\lim_{n_k\to+\infty} \int_T \beta_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}})(v(x) - u_{\lambda_{n_k}}(x))\,dx = \int_T \sigma(x)(v(x) - u(x))\,dx\,.$$

L'intégral au premier membre peut se découper dans

$$\int_T \Big(j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u(x))\Big)dx + \int_T \Big(j_{\lambda_{n_k}}(u(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\Big)dx\,.$$

Considérons le premier intégral; pour (II.c.5.) on a

$$\lim_{n_k\to+\infty} \Big(j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u(x))\Big) = j(v(x)) - j(u(x))\,.$$

On a

$$\begin{aligned}-|\beta^0(u(x))||v(x) - u(x)| \leqslant -|\beta_{\lambda_{n_k}}(u(x))||v(x) - u(x)| \leqslant j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u(x)) \leqslant\\ \leqslant |\beta_{\lambda_{n_k}}(v(x))||v(x) - u(x)| \leqslant |\beta^0(v(x))||v(x) - u(x)|\,.\end{aligned}$$

Donc

$$|j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u(x))|$$

sont uniformément bornées, donc

(II.c.7.) $$\lim_{n_k\to+\infty} \int_T \Big(j_{\lambda_{n_k}}(v(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u(x))\Big)\,dx = \int_T \Big(j(v(x)) - j(u(x))\Big)\,dx\,.$$

Par la même méthode on a que

$$|j_{\lambda_{n_k}}(u(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))|$$

sont uniformément bornées.

Pour le lemme de FATOUT on a alors

$$\text{(II.}c\text{.8.)}\qquad \limsup_{n_k\to+\infty}\int_T \Big(j_{\lambda_{n_k}}(u(x)) - j_{\lambda_{n_k}}(u_{\lambda_{n_k}}(x))\Big)\,dx \leq$$
$$\leq \limsup_{n_k\to+\infty}\int_T |\beta^0(u(x))|\,|u(x) - u_{\lambda_{n_k}}(x)|\,dx = 0\ .$$

De (II.c.6.), (II.c.7.), (II.c.8.) on a

$$\text{(II.}c\text{.9.)}\qquad \int_T \Big(j(v(x)) - j(u(x))\Big)\,dx \geq \int_T \sigma(x)(v(x) - u(x))\,dx\ .$$

Soit maintenant $A\subset T$ arbitraire; indiquons

$$v(x) = \begin{cases} w\,, & w\in \boldsymbol{R} \quad x\in A \\ u(x)\,, & x\notin A \end{cases} \qquad x\in T.$$

On a de (II.c.9.)

$$\int_A j(w) - j(u(x))\,dx \geq \int_A \sigma(x)(w - u(x))\,dx$$

dont

$$j(w) - j(u(x)) \geq \sigma(x)(w - u(x))$$

p.p. dans T, donc p.p. dans Q, donc $\sigma(x)\in\beta(u(x))$ p.p. dans Q.

Par la même méthode on démontre le lemme suivante:

LEMME IV. – *Soit $\{u_n(x)\}$ une suite de fonctions définies dans l'ouvert borné Q, telle que $u_n(x)\in \mathfrak{L}^1(Q)$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x) \qquad p.p.\ dans\ Q\ .$$

Soit maintenant $\sigma_n(x)\in\beta(u_n(x))$ et

$$\int_Q \sigma_n(x)\,u_n(x)\,dx \leq C\ .$$

Il y a une sous-suite $\{\sigma_{n_k}(x)\}$ de $\{\sigma_n(x)\}$, telle que

$$\lim_{n_k\to+\infty}{}^{*}\ \sigma_{n_k}(x) = \sigma(x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(Q)$ et $\sigma(x)\in\beta(u(x))$ p.p. dans Q.

Démontrons maintenant les suivants resultats sur la solution faible $u(t, x)$ bornée ou presque périodique de (II.c.1.).

THÉORÈME VIII. – *Soit* $f(t)\colon \boldsymbol{R}\to H^{-1}(\Omega)$ *bornée dans* $H^{-1}(\Omega)$; *il y a une solution faible de* (II.c.1.) *bornée dans* $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ *et* S^2*-bornée dans* $H_0^1(\Omega)$.

Soit $f(t)\colon \boldsymbol{R}\to H^{-1}(\Omega)$ *presque périodique dans* $H^{-1}(\Omega)$; *il y a une solution faible de* (II.c.1.) *presque périodique dans* $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ *et* S^2*-presque périodique dans* $H_0^1(\Omega)$.

Indiquons par $\langle\, , \rangle$ la dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

De [7] suive que le problème

$$u_\lambda(t,x)\in\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};H_0^1(\Omega))$$

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\in\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};H^{-1}(\Omega))$$

$$\left\langle\frac{d}{dt}u_\lambda(t),v\right\rangle-\langle\Delta u_\lambda(t),v\rangle+\langle\beta_\lambda(u_\lambda(t)),v\rangle=\langle f(t),v\rangle\qquad\text{p.p. }\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

a une solution $u_\lambda(t,x)$ equibornée dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et S^2-equi-bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Si $f(t)$ est presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$, les $u_\lambda(t,x)$ sont equi-presque périodiques et équicontinues dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et S^2-equi-presque périodiques dans $H_0^1(\Omega)$.

On a $\forall t_1,t_2,\ t_1\leqslant t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2}\langle\beta_\lambda(u_\lambda(t)),u_\lambda(t)\rangle\,dt\leqslant C\,.$$

Du Lemme III on a

(II.c.10.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{**}\,u_{\lambda_n}(t)=u(t)\qquad\text{dans }\mathfrak{L}^\infty(t_1,t_2;\mathfrak{L}^2(\Omega))$$

(II.c.11.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\,u_{\lambda_n}(t)=u(t)\qquad\text{dans }\mathfrak{L}^2(t_1,t_2;H_0^1(\Omega))$$

(II.c.12.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{**}\,u_{\lambda_n}(t)=u(t)\qquad\text{dans }S^2(H_0^1(\Omega))$$

(où $S^2(H_0^1(\Omega))$ indique l'espace des fonctions $w(t)\colon \boldsymbol{R}\to H_0^1(\Omega)$, telles que

$$\int_t^{t+1}\|w(\eta)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,d\eta\leqslant C\qquad\text{p.p.}$$

doté de la norme

$$\|w\|_{S^2(H_0^1(\Omega))}=\operatorname*{Sup}_{t\in\boldsymbol{R}}\int_t^{t+1}\|w(\eta)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,d\eta\Bigg)$$

(II.c.13.) $$\lim_{n\to+\infty}{}^{*}\,\beta_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t))=\sigma(t)\qquad\text{dans }\mathfrak{L}^1(t_1,t_2;\mathfrak{L}^1(\Omega))$$

avec $\sigma(t,x)\in\beta(u(t,x))$ p.p. dans $[t_1,t_2]\times\Omega$, dont

(II.c.14.) $$\lim_{n\to+\infty}{}^{*}\,\frac{d}{dt}u_{\lambda_n}(t)=\frac{d}{dt}u(t)$$

dans $\mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega)) + \mathcal{L}^1(t_1, t_2; \mathcal{L}^1(\Omega))$ pour une opportune sous-suite de $\{u_\lambda(t, x)\}$, $\{u_{\lambda_n}(t, x)\}$. De (II.*c*.10.), (II.*c*.11.), (II.*c*.12.), (II.*c*.13.), (II.*c*.14.) on a que $u(t, x)$ est solution faible de (II.*c*.1.).

Si $f(t)$ est bornée dans $H^{-1}(\Omega)$, on a donc que $u(t, x)$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et S^2-bornée dans $H_0^1(\Omega)$; si $f(t)$ est presque périodique dans $H^{-1}(\Omega)$, de (II.*c*.10.), (II.*c*.12.) on a que $u(t, x)$ est presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et S^2-presque périodique dans $H_0^1(\Omega)$.

III - Sur les perturbations des inéquations d'évolution linéaires.

§ 1. – Sur les perturbations $M \in \mathcal{L}(C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H);\ \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*))$.

Soit $A: V \to V^*$ un opérateur linéaire borné, tel que

$$\langle Av, v\rangle \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall v \in V, \alpha > 0 ,$$

et M un opérateur linéaire borné de $C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*)$, tel que

$$\|Mv(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};V^*)} \leq \mu \|v(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)} \qquad \mu > 0$$

$\forall v(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$; soit, enfin, $f(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V^*)$.

Indiquons par $\boldsymbol{K}$ un ensemble fermé convexe de V avec $0 \in \boldsymbol{K}$ et considérons l'inéquation

$$\text{(III.1.1.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t)\rangle + \\ + \langle Mu(t), v(t) - u(t)\rangle - \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle\}\, dt \geq \\ \geq \tfrac{1}{2}\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\} , \qquad t_1 \leq t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; H) \qquad v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

Le bût de ce paragraphe est obtenir un résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution bornée et de la solution presque périodique de l'inéquation d'évolution (III.1.1.).

THÉORÈME IX. – *Indiquons par γ la constante d'injection de V dans H; supposons $\mu/\alpha\gamma < 1$ et $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*)$.*

Il y a une unique solution bornée dans H et S^2-bornée dans V de (III.1.1.).

Démontrons d'abord deux lemmes que nous utiliserons:

LEMME V. – *Supposons verifiées les hypothèses du Th. IX et supposons $M = 0$; il y a une unique solution bornée dans H et S^2-bornée dans V de* (III.1.1.).

Nous utilisons la méthode de pénalisation. Soit $\beta\colon V \to V^*$ un opérateur de pénalisation pour $\boldsymbol{K}$ et considérons l'équation, posé $\beta = J(v - P_K v)$, $\forall v \in V$ (P_K projection sur $\boldsymbol{K}$),

(III.1.2.) $$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta u(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

Cette équation a, [7], une solution $u_\varepsilon(t)$, telle que

(III.1.3.) $$|u_\varepsilon(t)| \leqslant C$$

(III.1.4.) $$\int_t^{t+1} \|u_\varepsilon(\eta)\|^2 d\eta \leqslant C$$

(III.1.5.) $$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+1} \langle \beta u_\varepsilon(\eta), u_\varepsilon(\eta)\rangle\, d\eta \leqslant C$$

où C ne depende pas de ε.
De (III.1.5.) on a

(III.1.6.) $$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+1} (\|\beta u_\varepsilon(\eta)\|^*)^2 d\eta \leqslant C\,.$$

Considérons maintenant un interval $[t_1, t_2]$ et démontrons que la suite $\{u_\varepsilon(t)\}$ est rélativement compacte dans $\mathcal{L}^\infty(t_1, t_2; H)$.
De (III.1 6.) on peut supposer sans perdre de géneralité

$$\frac{1}{\varepsilon}\big(\|\beta(u_\varepsilon(t_1))\|^*\big)^2 \leqslant K$$

$$\|u_\varepsilon(t_1)\| \leqslant K$$

pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, au moins d'extraction de sous-suites.
De (III.1.2.) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)|^2 \leqslant \|f(t)\|^*\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)\| + \|Au_\varepsilon(t)\|^*\|u_\varepsilon(t_1)\| -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)\rangle \leqslant \|f(t)\|^*\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)\| + \|Au_\varepsilon(t)\|^*\|u_\varepsilon(t_1)\| -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t), P_K u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)\rangle \leqslant \|f(t)\|^*\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)\| + \|Au_\varepsilon(t)\|^*\|u_\varepsilon(t_1)\| +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t), P_K u_\varepsilon(t_1) - u_\varepsilon(t_1)\rangle \leqslant \|f(t_1)\|^*\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_1)\| + \|Au_\varepsilon(t)\|^*\|u_\varepsilon(t_1)\| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\beta u_\varepsilon(t)\|^* K.$$

dont il y a δ_0 tel que pour $0<\delta\leqslant\delta_0$ on a

$$|u(t_1+\delta)-u(t_1)|\leqslant\sigma$$

σ fixé arbitrairement.

On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|^2\leqslant\langle f(t+\delta)-f(t),\,u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)\rangle$$

dont il y a $\bar{\delta}_0$ tel que pour $0<\delta\leqslant\bar{\delta}_0$ on a

$$\text{(III.1.7.)}\qquad |u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|\leqslant 2\sigma$$

dans $[t_1, t_2]$.

De (III.1.4.), (III.1.7.) on a qu'il y a une sous-suite de $u_\varepsilon(t)$, que, pour semplicité, nous indiquons encore par $u_\varepsilon(t)$, telle que

$$\text{(III.1.8.)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(t)=u_\varepsilon(t)\qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty(t_1, t_2; H)\,.$$

De (III.1.4.) et (III.1.6.) on a qu'on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\text{(III.1.9.)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\,u_\varepsilon(t)=u(t)\qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V)$$

$$\text{(III.1.10.)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\beta u_\varepsilon(t)=0\qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V^*)$$

dont $u(t)\in\boldsymbol{K}$ p.p. dans $[t_1, t_2]$.

Soit maintenant $v(t)\in\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V)$ avec $v'(t)\in\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$, $v(t)\in\boldsymbol{K}$ p.p.; de (III.1.2.) on a

$$\text{(III.1.11.)}\qquad \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\langle v'(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle+\langle Au_\varepsilon(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle-\\ -\langle f(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle\Big\}\,dt\geqslant\tfrac{1}{2}\Big\{|v(t_2)-u_\varepsilon(t_2)|^2-|v(t_1)-u_\varepsilon(t_1)|^2\Big\}\,.$$

De (III.1.8.), (III.1.9.) on a

$$\text{(III.1.12.)}\qquad \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\langle v'(t)+Au(t)-f(t), v(t)-u(t)\rangle\Big\}\,dt\geqslant\tfrac{1}{2}\Big\{|v(t_2)-u(t_2)|^2-|v(t_1)-u(t_1)|^2\Big\}$$

dont $u(t)$ est solution de (III.1.1.) et on a

$$\text{(II.1.13.)}\qquad |u(t)|\leqslant C\int_t^{t+1}\|u(\eta)\|^2d\eta\leqslant C\qquad \forall t\in\boldsymbol{R}$$

dont la thèse.

L'unicité de le solution de (III.1.1.) verifiante (III.1.13.) peut être démontrée par les mêmes méthodes utilisées dans le travail de l'A.: « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, vol. XLVIII, fasc. 4, 1970.

LEMME VI. – *Considérons les inéquations d'évolution*

$$\text{(III.1.14.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) - f_1(t),\, v(t) - u(t)\rangle\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\right\}, \qquad t_1 \leqslant t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\, V) \qquad \textit{avec } v'(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\, H)\ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R};\, H) \cap \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\, V) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$\text{(III.1.15.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) - f_2(t),\, v(t) - u(t)\rangle\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\right\} \qquad t_1 \leqslant t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\, V) \qquad \textit{avec } v'(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\, H),\ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R};\, H) \cap \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\, V) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

où $f_1(t),\ f_2(t) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};\, V^*)$.

Il y a une unique solution $u_1(t)$, $\big(u_2(t)\big)$ de (III.1.14.), $\big(\text{(III.1.15.)}\big)$ *bornée dans* H *et* S^2*-bornée dans* V *et on a*

$$\text{(III.1.16.)} \qquad \|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)} \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma}\, \|f_1(t) - f_2(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};V^*)}\,.$$

Indiquons

$$w(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2}\,.$$

Fixons t_1, t_2 arbitrairement avec $t_1 \leqslant t_2$.

On peut supposer sans perdre de generalité que $w(t_1) \in V$.

Définons $w_\eta(t)$ par les rélations

$$\text{(III.1.17.)} \qquad \begin{cases} \eta w_\eta'(t) + w_\eta(t) = w(t) \\ w_\eta(t_1) = w(t_1)\,. \end{cases}$$

On a, [8],

$$\text{(III.1.18.)} \qquad \lim_{\eta\to 0}{}^{*}\, w_\eta(t) = w(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(t_1, t_2;\, V)$$

$$\text{(III.1.19.)} \qquad \lim_{\eta\to 0}\, w_\eta(t) = w(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^\infty(t_1, t_2;\, H)$$

$$\langle w_\eta'(t),\, w_\eta(t) - w(t)\rangle \leqslant 0 \qquad w_\eta'(t) \in \mathcal{L}^2(t_1, t_2;\, H), \qquad w_\eta(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. dans } [t_1, t_2]\,.$$

Posons dans (III.1.14.) et (III.1.15.) $v(t) = w_\eta(t)$; on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle w'_\eta(t) + Au_1(t) - f_1(t),\ w_\eta(t) - u_1(t)\rangle\, dt \geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|w_\eta(t_2) - u_1(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u(t_1)|^2\right\}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle w'_\eta(t) + Au_2(t) - f_2(t),\ w_\eta(t) - u_2(t)\rangle\, dt \geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|w_\eta(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u_2(t_1)|^2\right\} .$$

De ces deux rélations on a

$$\text{(III.1.20.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Big\{2\langle w'_\eta(t),\ w_\eta(t) - w(t)\rangle + \langle Au_1(t),\ w_\eta(t) - u_1(t)\rangle +$$
$$+ \langle Au_2(t),\ w_\eta(t) - u_2(t)\rangle - \langle f_1(t),\ w_\eta(t) - u_1(t)\rangle - \langle f_2(t),\ w_\eta(t) - u_2(t)\rangle\Big\}\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\Big\{\big[|w_\eta(t_2) - u_1(t_2)|^2 + |w_\eta(t_2) - u_2(t_2)|^2\big] - \big[|w_\eta(t_1) - u_1(t_1)|^2 + |w_\eta(t_1) - u_2(t_1)|^2\big]\Big\} ,$$

dont, en passant à la limite dans (III.1.20.) pour $\eta \to 0$, on a pour (III.1.18.), (III.1.19.)

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{\langle Au_1(t),\ w(t) - u_1(t)\rangle + \langle Au_2(t),\ w(t) - u_2(t)\rangle -$$
$$- \langle f_1(t), w(t) - u_1(t)\rangle - \langle f_2(t),\ w(t) - u_2(t)\rangle\Big\}\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\Big\{\big[|w(t_2) - u_1(t_2)|^2 + |w(t_2) - u_1(t_2)|^2\big] - \big[|w(t_1) - u_1(t_1)|^2 + |w(t_1) - u_2(t_1)|^2\big]\Big\}$$

dont

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{- \langle Au_1(t) - Au_2(t),\ u_1(t) - u_2(t)\rangle + \langle f_1(t) - f_2(t),\ u_1(t) - u_2(t)\rangle\Big\}\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|u_1(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |u_1(t_1) - u_2(t_1)|^2\right\} .$$

On a donc

$$\text{(III.1.21.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Big\{-\alpha\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|f_1(t) - f_2(t)\|^* \|u_1(t) - u_2(t)\|\Big\}\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|u_1(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |u_1(t_1) - u_2(t_1)|^2\right\} .$$

Indiquons

$$M = \operatorname*{Sup}_{R} \|f_1(t) - f_2(t)\|^*$$

et démontrons que

$$\operatorname*{Sup}_{R} |u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} .$$

Pour démontrer la thèse, il suffit de démontrer que $\forall \delta > 0$

$$\operatorname*{Sup}_{\boldsymbol{R}} |u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta .$$

De (III.1.21.) on a

$$\text{(III.1.22.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{M}{\alpha\gamma} - |u_1(t) - u_2(t)| \right) \alpha\gamma \| u_1(t) - u_2(t) \| dt \geqslant \\ \geqslant \tfrac{1}{2} \left\{ |u_1(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |u_1(t_1) - u_2(t_1)|^2 \right\} .$$

Démontrons d'abord que, s'il y a un point $\bar{t}$, tel que

$$|u_1(\bar{t}) - u_2(\bar{t})| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta$$

on a

$$\text{(III.1.23.)} \qquad |u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta \qquad t \geqslant \bar{t} .$$

Nous utilisons un procedé par l'absurde et supposons qu'il y a $\tilde{t} \geqslant \bar{t}$ tel que

$$|u_1(\tilde{t}) - u_2(\tilde{t})| > \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta .$$

Étant $u_1(t), u_2(t) \in C(\boldsymbol{R}; H)$, il y a un interval $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2[$, tel que

$$|u_1(\tilde{t}_1) - u_2(\tilde{t}_1)| = \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta$$

$$|u_1(t) - u_2(t)| > \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta \qquad t \in]\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] .$$

De (III.1.22.) suive que $|u_1(t) - u_2(t)|^2$, et donc $|u_1(t) - u_2(t)|$, est décroissante dans $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, dont

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta \qquad \text{sur } [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2];$$

on tombe donc dans l'absurde et la thèse est ainsi démontrée.

Démontrons maintenant que, $\forall a \in \boldsymbol{R}$, il y a $\bar{t} \leqslant a$ tel que

$$\text{(III.1.24.)} \qquad |u_1(\bar{t}) - u_2(\bar{t})| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta .$$

Nous utilisons encore un procedé par l'absurde et supposons que pour $t \leqslant a$ on a

$$|u_1(t) - u_2(t)| > \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta;$$

de (III.1.22.) on a

$$\frac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|^2 \geqslant \frac{1}{2}|u_1(a) - u_2(a)|^2 + \int_t^a \delta \frac{1}{\gamma}\left(\frac{M}{\alpha\gamma} + \delta\right) dt \geqslant C_1(a - t)$$

dont

$$\lim_{t \to -\infty} |u_1(t) - u_2(t)|^2 = +\infty .$$

On tombe donc dans l'absurde étant $u_1(t), u_2(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$.

De (III.1.23.), (III.1.24.) on a

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \frac{M}{\alpha\gamma} + \delta \qquad \text{p.p.}$$

dont la thèse.

Démontrons maintenant le Th. IX.

Considérons l'inéquation d'évolution

(III.1.25.)
$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) + Mz(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \geqslant \geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\right\}$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H),\ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

où

$$f(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*) \qquad \text{et} \qquad z(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H) .$$

L'inéquation (III.1.25.) a une unique solution $u_z(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$.

Considérons la transformation

(III.1.26.)
$$T: z(t) \to u_z(t) .$$

Du Lemme VI on a

$$\|u_{z_1}(t) - u_{z_2}(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)} \leqslant \frac{1}{\alpha\gamma}\|Mz_1(t) - Mz_2(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V^*)} \leqslant \frac{\mu}{\alpha\gamma}\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)} .$$

Étant $\mu/\alpha\gamma < 1$, la transformation T est alors une contraction sur $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H) \cap \cap C(\boldsymbol{R}; H)$ et a donc un unique point fixe $u(t)$. Observons maintenant que une fonction de $C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ est une solution si et seulement si est un point fixe pour la transformation T.

On a ainsi démontré que l'inéquation (III.1.1.) a une unique solution dans $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$. Posons $v(t) = 0$ dans (III.1.1.); on a

$$\int_t^{t+1} \langle Au(\eta), u(\eta) \rangle \, d\eta \leqslant C_2$$

où C_2 est une constante qui ne depende pas de t, dont $u(t)$ est S^2-bornée dans V.

Le théorème IX est ainsi demontré.

Un immediate conséquence du Th. IX est le suivant Th. X:

THÉORÈME X. – *Soient les conditions du Th. IX vérifiées; supposons que $f(t)$ soit périodique de période T et que M transforme des fonctions de $C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ périodiques de période T dans des fonctions de $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*)$ periodiques de période T.*

La solution $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ de (III.1.1.) *est l'unique solution périodique de période T dans $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ de* (III.1.1.).

Observons que si on pose $v(t)$ périodique de période T, l'inéquation d'évolution (III.1.1.) est invariante pour les translations de T, dont suive que $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ unique solution dans $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ est périodique de période T.

L'unicité de la solution périodique de période T dans $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ suive du Th. IX.

Considérons maintenant le problème de la solution presque-périodique de (III.1.1.).

THÉORÈME XI. – *Soient les conditions du Th. IX vérifiées; supposons que $f(t)$ soit presque périodique dans V^* et que M transforme des fonctions presque périodiques dans H dans des fonctions presque périodiques dans V^*.*

La solution $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ de (III.1.1.) *est presque périodique dans H et S^2-presque périodique dans V.*

Soit $M = 0$; dans cet cas (III.1.1.) a une unique solution presque périodique dans H et S^2-presque périodique dans V. Dans les cas consideré la transformation T transforme des fonctions presque périodiques dans H dans des fonctions presque périodiques dans H et S^2-presque périodiques dans V.

En se rappelant que les fonctions presque périodiques dans H sont un sous-espace fermé de $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ et que T est une contraction sur $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$, on deduit que T a un point fixe dans l'espace des fonctions presque periodiques dans H.

L'inéquation (III.1.1.) a donc une solution presque périodique dans H et S^2-presque périodique dans V.

L'unicité de cette solution suive du Th. IX étant une fonction presque périodique dans H bornée dans H.

§ 2. – Exemples d'application des théorèmes IX, X, XI.

Pour les exemples nous nous réferons à les inéquations avec retard.

Soit $B: H \to V^*$ un opérateur linéaire borné de H dans V^* avec

$$\|Bv\|^* \leqslant \mu |v| \qquad \forall v \in H, \ \mu > 0$$

et soit $\omega(t)$ une fonction mesurable, non negative sur $\boldsymbol{R}$.

Soit maintenant $v(t) \in C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ et indiquons

$$Mv(t) = Bv(t-\omega(t)) \ .$$

Il est facil de vérifier que $M: C(\boldsymbol{R}; H) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H) \to \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*)$ est linéaire et

$$\|Mv(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V^*)} \leqslant \mu \|v(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)} \ .$$

Considérons l'inéquation d'évolution avec retard

$$\text{(III.2.1.)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) + Bu(t-\omega(t)) - f(t), v(t) - u(t)\rangle dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|v(t_2)-u(t_2)|^2 - |v(t_1)-u(t_1)|^2\right\}, \qquad t_1 \leqslant t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H), \ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

$$u(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \cap C(\boldsymbol{R}; H) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}$$

Supposons $\mu/\alpha\gamma < 1$ et $f(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V^*)$; en appliquant les Th. IX, X, XI on a:

a) il y a une unique solution bornée dans H et S^2-bornée dans V de (III.2.1.);

b) si $\omega(t)$ est périodique de période T et $f(t)$ est périodique de période T, il y a une unique solution de (III.2.1.) périodique de période T, bornée dans H.

c) si $\omega(t)$ est presque périodique et $f(t)$ est presque périodique dans V^*, il y a une unique solution de (III.2.1.) presque périodique dans H et S^2-presque périodique dans V.

Particularisons maintenant (III.2.1.); posons

$$V = H^1(\Omega) \ , \qquad H = \mathfrak{L}^2(\Omega)$$

$$\boldsymbol{K} = \left\{v(x) | v(x) \in H^1(\Omega), \ v(x) \geqslant 0 \text{ sur } \Gamma \text{ p.p.}\right\}$$

où $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ.

Definissons A par la rélation

$$\langle Aw, v\rangle = \int_{\Omega} \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + w(x)v(x)\right\} dx \qquad \forall w, v \in H^1(\Omega)$$

$$\langle Bw, v\rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} v(x)\, dx \qquad \forall w, v \in H^1(\Omega)$$

et indiquons encore par B l'opérateur défini par la fermeture du graphe de B dans $H \times V^*$.

Supposons $a_i(x) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Sup}_{\Omega} |a_i(x)| \leqslant \frac{\mu}{(\text{mis}\, \Omega)^{\frac{1}{2}}}$$

avec $\mu/\alpha\gamma < 1$.

Soit $f(t)$ une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $(H^1(\Omega))^*$ avec $f(t) \in \mathcal{L}^\infty\big(\boldsymbol{R}; (H^1(\Omega))^*\big)$:

a) dans le cas considéré, il y a une unique solution $u(t, x)$ de (III.2.1.) telle que $u(t, \cdot)$ est borné dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et S^2-bornée dans $H^1(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$.

b) dans le cas considéré, si $\omega(t)$ est périodique de période T et $f(t)$ est périodique de période T dans $(H^1(\Omega))^*$, il y a une unique solution de (III.2.1.) $u(t, x)$, telle que $u(t, \cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$ et $u(t, \cdot)$ est périodique de période T;

c) dans le cas considéré, si $\omega(t)$ est presque périodique et $f(t)$ est presque périodique dans $(H^1(\Omega))^*$, il y a une unique solution de (III.2.1.) $u(t, x)$, telle que $u(t, \cdot)$ est presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et S^2-presque périodique dans $H^1(\Omega)$.

Observons que, si $f(t) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ p.p., (III.2.1.) est formellement equivalent au problème unilatéral

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + u(t, x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} = f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R} \times \Omega$$

$$u(t, x) \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R} \times \Gamma$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial n} \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R} \times \Gamma$$

$$u(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = 0 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R} \times \Gamma$$

où par n nous indiquons la normale à Γ exterieure a Ω.

§ 3. – Sur les pérturbations $M \in \mathcal{L}(C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V); \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H))$.

Soit $A: V \to V^*$ un opérateur linéaire borné autoadjoint comme opérateur non borné sur H et tel que

$$\langle Av, v\rangle \geqslant \alpha \|v\|^2 \qquad \forall v \in V, \ \alpha > 0 .$$

On peut donc supposer sans perdre de generalité $\langle Av, v\rangle = \|v\|^2$.

Supposons que l'espace $D(A) = \{v | v \in V, \ Av \in H\}$, normé par $|Av|$, soit un sous-espace fermé de V, que s'injecte avec compacité dans V; il y a une base de V, qui est une base orthonormale de H, composée par des vectors propres de A dans H.

Soit M un opérateur linéaire borné de $C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$, tel que $\forall v(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$

$$\|Mv(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)} \leqslant \mu \|v(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)} \qquad \mu > 0$$

et soit $f(t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H)$.

Considérons l'équation d'évolution

$$\text{(III.3.1.)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

Notre bût est maintenant obtenir un résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution bornée et de la solution presque périodique de l'équation d'évolution (III.3.1.).

THÉORÈME XII. – *Indiquons par γ' la constante d'injection de $D(A)$ dans V et supposons $\mu/\gamma' < 1$.*

Soit $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$; il y a une unique solution de (III.3.1.) *bornée dans V et S^2-bornée dans $D(A)$.*

Démontrons d'abord un lemme:

LEMME VII. – *Supposons que les hypothèses du Th. XII soient verifiées et supposons $M = 0$; il y a une unique solution de* (III.3.1.) *borné dans V et S^2-borné dans $D(A)$.*

Nous utilisons la méthode de FAEDO-GALERKIN. Soit $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$ la base de V composée par des vectors propres de A dans H, qui est une base orthonormale de H, et indiquons par V_n l'espace engendré par les vectors $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Considérons système approximant

$$\frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) = f_n(t)$$

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) v_i , \qquad f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (f(t), v_i)$$

Ce système a, [7], une solution $u_n(t)$ borné dans V_n et continue dans V_n. On a

$$\left\langle \frac{d}{dt} u_n(t), Au_n(t) \right\rangle + |Au_n(t)|^2 \leqslant (f(t), Au_n(t)) \tag{III.3.2.}$$

dont

$$\frac{d}{dt} \langle Au_n(t), u_n(t) \rangle \leqslant |f(t)||Au_n(t)| - |Au_n(t)|^2. \tag{III.3.3.}$$

De (III.3.3.) on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 \leqslant (|f(t)| - \gamma' \|u_n(t)\|) |Au_n(t)| . \tag{III.3.4.}$$

Indiquons $\operatorname{Sup}_R |f(t)| = C$ et démontrons que

$$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'}.$$

Démontrons d'abord que si

$$\|u_n(\bar{t})\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} + \delta , \qquad \delta > 0,$$

on a

$$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} + \delta \qquad t \geqslant \bar{t} . \tag{III.3.5.}$$

Nou utilisons un procedé par l'absurde; supposons qu'il y ait un point $\tilde{t} \geqslant \bar{t}$, tel que

$$\|u_n(\tilde{t})\| > \frac{C}{\gamma'} + \delta .$$

De la continuité de $u_n(t)$ suive qu'il y a un interval $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, tel que

$$\|u_n(\tilde{t}_1)\| = \frac{C}{\gamma'} + \delta$$

$$\|u_n(t)\| > \frac{C}{\gamma'} + \delta \qquad t \in]\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] .$$

De (III.3.4.) on deduit que $\|u_n(t)\|^2$, donc $\|u_n(t)\|$, est décroissante, dont

$$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} + \delta \qquad t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$$

dont l'absurde, et la thèse est ainsi démontrée.

Démontrons maintenant que, $\forall a \in \boldsymbol{R}$, il y a $\bar{t} \leqslant a$, tel que

(III.3.6.) $$\|u_n(\bar{t})\| < \frac{C}{\gamma'} + \delta \,.$$

Nous utilisons encore un procedé par l'absurde; supposons que

$$\|u_n(t)\| > \frac{C}{\gamma'} + \delta \qquad t \leqslant a$$

On a

$$\tfrac{1}{2}\{\|u_n(a)\|^2 - \|u_n(t)\|^2\} \leqslant -2\delta \int_t^a |Au_n(\eta)|\, d\eta$$

dont

$$\|u_n(t)\|^2 \geqslant 2\delta C(a-t)$$

dont

$$\lim_{t \to -\infty} \|u_n(t)\| = +\infty \,.$$

On tombe donc dans l'absurde et la thèse est démontrée.

De (III.3.5.) et (III.3.6.) on a que

(III.3.7.) $$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} + \delta \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

donc

(III.3.8.) $$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

De (III.3.4.) et (III.3.8.), en intégrant, on a

(III.3.9.) $$\int_t^{t+1} |Au_n(\eta)|^2 d\eta \leqslant C_1 \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

donc de l'équation considerée on a

(III.3.10.) $$\int_t^{t+1} \left|\frac{du_n}{dt}(\eta)\right|^2 d\eta \leqslant C_2 \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

De (III.3.8.), (III.3.9.), (III.3.10.) on a qu'on peut extraire de $\{u_n(t)\}$ une sous-suite, que pour simplicité, indiquons encore par $\{u_n(t)\}$, telle que

(III.3.11.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{**} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$$

(III.3.12.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{*} Au_n(t) = Au(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H)$$

(III.3.13.) $$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{du_n(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H).$$

De (III.3.11.), (III.3.12.), (III.3.13.), étant

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H),$$

on a que $u(t)$ est solution de l'équation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$$

et que

(III.3.14.) $$\|u(t)\| < \frac{C}{\gamma'}$$

(III.3.15.) $$\int_t^{t+1} |Au(\eta)|^2 d\eta \leqslant C_1 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}.$$

De (III.3.14.), (III.3.15.) on a que

(III.3.16.) $$\int_t^{t+1} \left|\frac{du}{dt}(\eta)\right|^2 d\eta \leqslant C_2 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R},$$

de (III.3.15.) et (III.3.16.) on a que $u(t) \in C(\boldsymbol{R}; V)$.

Démontrons maintenant le Th. XII.

Soit $z(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ et considérons l'équation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mz(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

Du Lemme VII on a que cette équation a une unique solution $u_z(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap$ $\cap\, \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$. Considérons la transformation sur $C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$

$$T\colon z(t) \to u_z(t)$$

et démontrons que, dans les hypothèses faites, cette transformation est une contraction.

Soient $z_1(t), z_2(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$; on a

$$\frac{d}{dt} u_{z_1}(t) + A u_{z_1}(t) + M z_1(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

$$\frac{d}{dt} u_{z_2}(t) + A u_{z_2}(t) + M z_2(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

dont

$$\frac{d}{dt}\big(u_{z_1}(t) - u_{z_2}(t)\big) + A\big(u_{z_1}(t) - u_{z_2}(t)\big) = M\big(z_2(t) - z_1(t)\big) \qquad \text{p.p.}$$

Du Lemme VII on a

$$\|u_{z_1}(t) - u_{z_2}(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)} \leqslant \frac{\mu}{\gamma'} \|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)}$$

et, étant $\mu/\gamma' < 1$, la thèse est ainsi démontrée.

La transformation T a donc un unique point fixe sur $C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ et tel point fixe est solution de l'équation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) = f(t)\,, \tag{III.3.17.}$$

mais toutes solutions de (III.3.17.) dans $C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ sont un point fixe pour T. On peut donc deduir que $u(t)$ est l'unique solution de (III.3.17.) dans $C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ et, du Lemme VII, on a que $Au(t)$ est S^2-bornée dans H.

Une immédiate consequence du Th. XII est le suivant Th. XIII:

Théorème XIII. – *Soient verifiées les hypothèses du Th. XII; supposons que $f(t)$ soit périodique de période T dans H et que M transforme des fonctions périodiques de période T de $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V) \cap C(\boldsymbol{R}; V)$ dans des fonctions périodiques de période T de $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$.*

La solution $u(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ de (III.3.17.) *est périodique de période T et est l'unique solution périodique de période T de* (III.3.17.).

Dans les hypothèses faites l'équation est invariante pour des translations de T, alors $u(t)$ est périodique de période T.

L'unicité suive immediatement du Th. XII.

Considérons maintenant le problème de la solution presque périodique pour (III.3.17.).

Théorème XIV. – *Soient verifiées les hypothèses du Th. XII; supposons que $f(t)$ soit presque périodique dans H et que M transforme des fonctions presque périodiques dans V dans des fonctions presque périodiques dans H. La solution $u(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ de* (III.3.17.) *est l'unique solution de* (III.3.17.) *presque périodique dans V avec $Au(t)$ S^2-presque périodique dans H.*

Posons $M=0$ et considérons l'équation

$$\frac{du}{dt}(t)+Au(t)=f(t) \qquad \text{p.p.}$$

On a

$$\frac{d}{dt}\big(u(t+\tau)-u(t)\big)+A\big(u(t+\tau)-u(t)\big)=f(t+\tau)-f(t) \qquad \text{p.p. } \forall \tau \in \boldsymbol{R},$$

dont pour le Lemme VII

$$\text{(III.3.18.)} \qquad \|u(t+\tau)-u(t)\| \leqslant \frac{1}{\gamma'} \operatorname*{Sup}_{\boldsymbol{R}} |f(t+\tau)-f(t)|;$$

donc $u(t)$ est presque périodique, dont $Au(t)$ est S^2-presque périodique dans H.

La transformation T est donc une contraction sur les sous-espace de $C(\boldsymbol{R};V)\cap \cap\, \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)$ composé par les fonctions presque périodiques, dont T a un point fixe unique dans cet espace.

On peut donc déduir que l'équation (III.3.17.) a une unique solution $u(t)$ presque périodique dans V avec $Au(t)$ S^2-presque périodique dans H.

Considérons maintenant le cas de l'inéquation. Dans la suite nous supposons que $\boldsymbol{K}$ soit un ensemble fermé convexe, avec $0\in \boldsymbol{K}$, dans H et que, indiqué par $\beta v=v-P_{\boldsymbol{K}}v$ ($P_{\boldsymbol{K}}$ projection de v sur $\boldsymbol{K}$ dans H) $\forall v\in H$, on ait

$$(Av,\beta v)\geqslant 0\,, \qquad \forall v\in D(A).$$

Soit M un opérateur linéaire de $C(\boldsymbol{R};V_f)\cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)$ dans $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)$ (où par $C(\boldsymbol{R};V_f)$ nous indiquons l'espace des fonctions faiblement continues dans V).

Nous supposons que, $\forall v(t)\in C(\boldsymbol{R};V_f)\cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)$, on ait

$$\|Mv(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};H)}\leqslant \mu \|v(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)}\,, \qquad \mu>0\,.$$

Nous supposons aussi que si $\{v_n(t)\}\subset C(\boldsymbol{R};V_f)\cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R};V)$ et

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} v_n(t)=v(t) \qquad \text{dans } V$$

uniformément sur chaque interval $[t_1,t_2]$, on ait

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} Mv_n(t)=Mv(t) \qquad \text{dans } H$$

uniformément sur chaque interval $[t_1,t_2]$. Notre bût est de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME XV. – *Soit* $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$. *Considérons l'inéquation*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) + Mu(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \geq \geq \tfrac{1}{2}\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\}, \qquad t_1 \leq t_2 \tag{III.3.19.}$$

$$\forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; H), \ v(t) \in \boldsymbol{K}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R}; V_f) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V), \qquad u(t) \in \boldsymbol{K}.$$

Si $\mu/\gamma' < 1$, *il y a une solution* $u(t)$ *de* (III.3.19.) *avec* $Au(t)$ S^2*-bornée dans* H.

Démontrons d'abord trois lemmes.

LEMME VIII. – *Considérons, fixé* $\varepsilon > 0$, *le problεme*

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u(t) = f(t) \tag{III.3.20.}$$

$$u(0) = 0.$$

Il y a une solution de (III.3.20.) *bornée dans* V *avec* $Au(t)$ S^2*-bornée dans* H *sur* $\boldsymbol{R}_+$.

Nous utilisons la méthode de FAEDO-GALERKIN; indiquons par $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ la base orthonormale de H, qui est une base de V, composée par des vectors propres de A dans H.

Considérons le système d'approximation

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + \frac{1}{\varepsilon} P_n \beta u(t) = P_n f(t)$$

$$u(0) = 0, \qquad u(t) \in V_n$$

où V_n est l'espace engendré par les vectors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et P_n est la projection de H sur V_n.

Il y a une solution $u_n(t)$; en multipliant scalairement l'équation pour $Au_n(t)$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 + |Au_n(t)|^2 \leq \langle f(t), Au_n(t) \rangle$$

d'où, si $C = \operatorname{Sup}_{\boldsymbol{R}} |f(t)|$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 \leq (|f(t)| - |Au_n(t)|)|Au_n(t)| \leq (|f(t)| - \gamma'\|u_n(t)\|)|Au_n(t)|. \tag{III.3.21.}$$

On a alors par la même méthode du Lemme VII

(III.3.22.) $$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'}, \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}_+ .$$

En intégrant (III.3.21.) on a de (III.3.22.)

(III.3.23.) $$\int_t^{t+1} |Au_n(\eta)|^2 d\eta \leqslant C_1 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}_+$$

où C_1 dépende uniquément de C.

De (III.3.22.), (III.3.23.) on a

(III.3.24.) $$\int_t^{t+1} \left| \frac{du_n}{dt}(\eta) \right|^2 d\eta \leqslant C_2 \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}_+$$

où C_2 dépende uniquément de C et de ε.

Les éstimations (III.3.22.), (III.3.23.), (III.3.24.) permettent de passer à la limite et obtenir la thèse.

LEMME IX. – *Considèrons le problème, fixé* $\varepsilon > 0$,

(III.3.25.) $$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

Il y a une solution de (III.3.25.) *bornée dans* V, $u(t)$ *avec* $Au(t)$ S^2*-bornée dans* H.

Considérons le problème

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u(t) = f(t), \qquad u(-n) = 0$$

où n est un entier positif.

Cet problème a une solution $u_n(t)$, telle que, indiquée encore par $u_n(t)$ sa prolongée a $\boldsymbol{R}$ par 0, on a

(III.3.26.) $$\|u_n(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} \qquad \text{p.p.}$$

(III.3.27.) $$\int_t^{t+1} |Au_n(\eta)|^2 d\eta \leqslant C_1 \qquad \text{p.p.}$$

(III.3.28.) $$\int_t^{t+1} \left| \frac{d}{dt} u_n(\eta) \right|^2 d\eta \leqslant C_2 \qquad \text{p.p.}$$

Les éstimations (III.3.26.), (III.3.27.), (III.3.28.) permettent de passer à la limite pour $n \to +\infty$ et prouver ainsi la thèse.

LEMME X. – *Considérons l'inéquation*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \geq \tfrac{1}{2}\left\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\right\}, \qquad t_1 \leq t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; H),\ v(t) \in \boldsymbol{K}$$

$$u(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \cap C(\boldsymbol{R}; H) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K}.$$

Cette inéquation a une unique solution $u(t)$ bornée dans V et avec $Au(t)$ S^2-bornée dans H.

Indiquons par $u_\varepsilon(t)$ une solution bornée dans V et avec $Au_\varepsilon(t)$ S^2-bornée dans H du problème

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u(t) = f(t) \qquad \text{p.p.} \tag{III.3.29.}$$

On a

$$\|u_\varepsilon(t)\| \leq \frac{C}{\gamma'} \qquad \text{p.p.} \tag{III.3.30.}$$

$$\int_t^{t+1} |Au_\varepsilon(\eta)|^2 d\eta \leq C_1 \qquad \text{p.p.} \tag{III.3.31.}$$

Fixons t_1, t_2 arbitraires avec $t_1 \leq t_2$.

On peut supposer sans perdre de generalité

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} Au_\varepsilon(t) = Au(t) \tag{III.3.32.}$$

dans $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{**} u_\varepsilon(t) = u(t) \tag{III.3.33.}$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(t_1, t_2; V)$.

En multipliant (III.3.29.) pour $u_\varepsilon(t)$ et en intégrant, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt \leq C_4 \tag{III.3.34.}$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} |\beta u_\varepsilon(t)|^2 dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} |u(t) - P_{\boldsymbol{K}} u(t)|^2 dt \leq C_4. \tag{III.3.35.}$$

De (III.3.34.) et (III.3.35.), étant $\beta\colon H \to H$ monotone, on a

(III.3.36.) $$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, \beta u_\varepsilon(t) = \beta u(t) = 0$$

dans $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; \boldsymbol{K})$, donc $u(t) \in \boldsymbol{K}$ dans $[t_1, t_2]$.

De (III.3.35.) on deduit que pour presque chaque fixé $t \in [t_1, t_2]$, au moins d'extraction de sous-suites,

$$\frac{1}{\varepsilon}|\beta u_\varepsilon(t)|^2 = \frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon(t) - P_{\boldsymbol{K}} u_\varepsilon(t)|^2$$

est bornée pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(t)$.

On peut alors supposer, sans perdre de generalité, que $(1/\sqrt{\varepsilon})\beta u_\varepsilon(t_1) \leqslant k_{t_1}$ pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon(t_1)$.

De (III.3.29.) on a

(III.3.37.) $$\frac{d}{ds} u_\varepsilon(t_1 + s) + A u_\varepsilon(t_1 + s) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_\varepsilon(t_1 + s) = f(t_1 + s)\,.$$

En multipliant scalairement pour $u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)$, (III.3.37.), on a, pour $s > 0$,

$$|u(t_1 + s) - u(t_1)|^2 \leqslant K_3 s + K_1 s^{\frac12}\left(\int_0^T |A u_\varepsilon(\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac12} -$$

$$-\int_0^s \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t_1 + s),\, u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)\rangle\, ds \leqslant K_3 s + \tilde{K}_1 s^{\frac12} -$$

$$-\int_0^s \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t_1 + s),\, P_{\boldsymbol{K}} u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)\rangle\, ds \leqslant K_3 s + \tilde{K}_1 s^{\frac12} -$$

$$-\int_0^s \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t_1 + s),\, P_{\boldsymbol{K}} u_\varepsilon(t_1) - u_\varepsilon(t_1)\rangle\, ds \leqslant K_3 s + \tilde{K} s^{\frac12} + K_{t_1}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\beta u_\varepsilon(t_1 + s)|\, ds.$$

Fixon $\sigma > 0$ arbitraire; on peut choisir δ_0, qui depende de C, σ et K_{t_1}, tel que

$$|u_\varepsilon(t_1 + \delta) - u_\varepsilon(t_1))| \leqslant \sigma$$

pour $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(t_1)$.

De (III.3.29.) on a pour $t \geqslant t_1$

$$\tfrac12 |u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)|^2 \leqslant \tfrac12 |u_\varepsilon(t_1 + \delta) - u_\varepsilon(t_1)|^2 + \int_{t_1}^t \langle f(s + \delta) - f(s),\, u(s + \delta) - u(s)\rangle\, ds$$

donc il y a $\varrho > 0$, qui depende de C et σ, tel que

$$|u(t+\delta) - u(t)| \leqslant 2\sigma$$

pour $0 < \delta \leqslant \delta_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(t_1)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varrho$.

On peut découper, maintenant, l'interval $[t_1, t_2]$ par des intervalles partiels de mésure inférieure à ϱ par des points $\{t_3, \ldots, t_n\}$ tels que

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |\beta u_\varepsilon(t_i)| \leqslant K$$

pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (toujours au moins d'extraction de sous-suites), où ε_0 depend uniquément da σ et on peut affirmer que on a pour $\varepsilon \leqslant 0$, $t, t+\delta \in [t_1, t_2]$, $0 \leqslant \delta < \bar{\delta}_0$, où $\bar{\delta}_0$ depende uniquément de σ,

$$|u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)| \leqslant 2\sigma .$$

Rappellons le lemme suivant, qui a la même démonstration du Th. de ASCOLI-ARZELÀ vectoriel:

LEMME XI. – *Soit $\{v_\varepsilon(t)\}$ une suite de $C(0, T; H)$; supposons qu'il y ait une suite $\{t_m\}$ dans $[0, T]$, telle que $\{v_\varepsilon(t_m)\}$ soit rélativement compacte dans H, $\forall m$, et que, fixé $\sigma > 0$ arbitraire, il y a δ_0 et ε_0, qui dependent de σ, tels que*

$$|v_\varepsilon(t+\delta) - v_\varepsilon(t)| \leqslant \sigma$$

$$0 < \delta \leqslant \delta_0 , \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 , \qquad t+\delta,\ t \in [0, T].$$

La suite $\{v_\varepsilon(t)\}$ est rélativament compacte dans $C(0, T; H)$.

On peut alors supposer, sans perdre de generalité,

(III.3.38.) $$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = u(t) \qquad \text{dans } C(t_1, t_2; H)$$

donc

(III.3.39.) $$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} u_\varepsilon(t) = u(t) \qquad \text{dans } V$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$.

Observons que de (III.3.29.) on a

(III.3.40.) $$\int_{t^1}^{t_2} \langle v'(t) + Au_\varepsilon(t) - f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt \geqslant \tfrac{1}{2}\{|v(t_2) - u_\varepsilon(t_2)|^2 - |v(t_1) - u_\varepsilon(t_1)|^2\}$$

où $v(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V)$ avec $v'(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$, $v(t) \in \boldsymbol{K}$ dans $[t_1, t_2]$.

De (III.3.40.), (III.3.32.), (III.3.39.), en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$, on a que $u(t)$ est solution de l'inéquation considerée et

$$\|u(t)\| \leqslant \frac{C}{\gamma'} \quad \text{p.p.} \tag{III.3.41.}$$

$$\int_t^{t+1} |Au(\eta)|^2 d\eta \leqslant C_1 \quad \text{p.p.} \tag{III.3.42.}$$

L'unicité peut être démontrée par une méthode standard (BIROLI M.: « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, vol. XLVIII, fasc. 4, 1970).

Nous sommes maintenant en condition de démontrer le Th. XV.

Soit $z(t) \in C(\boldsymbol{R}; V_f) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ et considérons l'inéquation

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) + Mz(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \geqslant \geqslant \frac{1}{2}\left\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\right\}, \qquad t_1 \leqslant t_2. \tag{III.3.43.}$$

Indiquons par $u_z(t)$ la solution de (III.3.43.) bornée dans V et avec $Au(t)$ S^2-bornée dans H. Soit

$$D > \frac{1}{\gamma'(1 - \mu/\gamma')} C. \tag{III.3.44.}$$

Considérons la transformation $T: z(t) \to u_z(t)$ définie sur le convexe de $\mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}(R; V) \cap \cap C(\boldsymbol{R}; V_f)$

$$\mathcal{K} = \left\{z(t) | z(t) \in \mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \cap C(\boldsymbol{R}; V_f), \|z(t)\| \leqslant D\right\}. \tag{III.3.45.}$$

Nous considérons $\mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \cap C(\boldsymbol{R}; V_f)$ doté de la topologie définie par la convergence uniforme dans V faible sur chaque interval borné. Observons que $\mathcal{K}$ est un ensemble convexe fermé borné pour la topologie considerée. Il est facil de voir que $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Considérons $\{z_n(t)\} \subset \mathcal{K}$ et la suite $\{u_{z_n}(t)\}$; démontrons que $\{u_{z_n}(t)\}$ est rélativement compacte pour la topologie considerée.

Posons dans (III.3.43.) $v(t) = u_{z_n}(t_1) \in \boldsymbol{K} \cap V$; on a

$$\int_{t_-}^{t} \langle Au_{z_n}(s) + Mz_n(s) - f(s), v_{z_n}(t_1) - u_{z_n}(s) \rangle ds \geqslant \frac{1}{2} |u_{z_n}(t_1) - u_{z_n}(t)|^2. \tag{II.3.4.6.}$$

On a du Lemme X

$$\int_t^{t+1} |Au_{z_n}(s)|^2 ds \leqslant C_1 \quad \text{p.p.}$$

où C_1 depende uniquément de D et de C.

On peut donc affirmer que, fixé $\varepsilon > 0$, il y a δ_0, qui depends uniquément de D et de C, tel que

$$|u_{z_n}(t_1+\delta) - u_{z_n}(t_1)|^2 \leq \varepsilon \qquad 0 \leq \delta \leq \delta_0 .$$

Par un procedé standard, [7], on obtient pour $t \geq t_1$

$$|u_{z_n}(t+\delta) - u_{z_n}(t)|^2 \leq |u_{z_n}(t_1+\delta) - u_{z_n}(t_1)|^2 + 2\int_{t_1}^{t} \langle f(s+\delta) - f(s),\, u_{z_n}(s+\delta) - u_{z_n}(s)\rangle\, ds .$$

Par le même procedé du Lemme X on peut affirmer qu'il y a una sous-suite de $\{u_{z_n}(t)\}$ que, pour simplicité, nous indiquons encore par $\{u_{z_n}(t)\}$, telle que

$$\lim_{n\to+\infty}{}^{*}\, u_{z_n}(t) = u(t) \qquad \text{dans } V$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$, $\forall t_1 \leq t_2$.

Donc on peut affirmer que $\overline{T\mathcal{K}}$ est compact. De la même façon on démontre que T est continue sur $\mathcal{K}$ pour la topologie considerée. On peut donc affirmer (HUKUHARA M.: « Jap. J. of Nat. », t. 20 (1950) pag. 1-4), que T a au moins un point fixe dans $\mathcal{K}$.

La thèse est ainsi démontrée.

De la même façon on démontre le théorème suivante.

THÉORÈME XVI. – *Soient valables les hypothéses du Th. XV et soit $f(t)$ périodique dans H de période T et M transforme des fonctions périodiques de période T de $C(\boldsymbol{R}; V_f) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V)$ dans des fonctions périodiques de période T dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$; il y a une solution $u(t)$ périodique de période T de* (III.3.19.).

§ 4. – Exemples d'application des Th. XII, XIII, XIV, XV, XVI.

Soit B un opérateur linéaire borné de V dans H, tel que

$$|Bv| \leq \mu \|v\|, \qquad \forall v \in V,\ \frac{\mu}{\gamma'} < 1$$

et $\omega(t)$ une fonction mesurable et

$$Mv(t) = Bv(\omega(t)) \qquad \forall v(t) \in C(\boldsymbol{R}; V) \cap \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V) .$$

Considérons l'équation d'évolution

$$\text{(III.4.1.)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) = f(t) \qquad \text{p.p.}$$

où $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$.

En appliquant les Th. XII, XIII, XIV, on a:

a) l'équation (III.4.1.) a une unique solution $u(t)$ bornée dans V avec $Au(t)$ S^2-bornée dans H;

b) si $\omega(t)$ est périodique de période T et $f(t)$ est périodique de période T, $u(t)$ est périodique de période T;

c) si $\omega(t)$ est presque périodique et $f(t)$ est presque périodique, $u(t)$ est presque périodique.

Particularisons maintenant (III.4.1.); indiquons

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \qquad H = \mathcal{L}^2(\Omega)$$

ou $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ regulière.
Definissons A par la rélation

$$\langle Aw, v\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\, dx \qquad \forall v, w \in H_0^1(\Omega)\,,$$

$$Bv(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où $a_i(x) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ et

$$\sum_{i=1}^n \operatorname*{Sup}_\Omega a_i(x) \leqslant \frac{\mu}{(\operatorname{mis}\Omega)^{\frac12}}\,, \qquad \frac{\mu}{\gamma'} < 1\,.$$

Soit enfin $f(t) = f(t, \cdot)$ où $f(t, x) \in \mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$:

a) dans le cas considéré il y a une unique solution $u(t, x)$ de (III.1.4.) tel que $u(t, \cdot)$ soit bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et S^2-bornée dans $H^2(\Omega)$;

b) si $\omega(t)$ est périodique de période T et $f(t)$ est périodique de période T, $u(t, \cdot)$ est périodique de période T;

c) si $\omega(t)$ est presque périodique et $f(t)$ est presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, $u(t, \cdot)$ est presque périodique dans $H_0^1(\Omega)$ et S^2-presque périodique dans $H^2(\Omega)$.

Observons que, dans cet cas, (III.4.1.) peut s'écrire

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(\omega(t), x)}{\partial x_i} = f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}\times\Omega$$

$$u(t, x) = 0 \qquad \text{sur } \boldsymbol{R}\times\Gamma \text{ p.p.}$$

Soit $B\colon H \to V$ comme à la partie précédente et supposons que $\omega(t)$ soit une fonction mesurable sur $\boldsymbol{R}$ qui transforme des intervalles bornés dans des inter valles bornés.

Soit $f(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; H)$ et considérons l'inéquation d'évolution

$$\text{(III.4.2)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + Au(t) + Bu(\omega(t)) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left\{|v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2\right\}, \qquad t_1 \leqslant t_2$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H),\ v(t) \in \boldsymbol{K}$$

$$u(t) \in C(\boldsymbol{R}; V_f) \cap \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; V),\ u(t) \in \boldsymbol{K}$$

où $\boldsymbol{K}$ est un convexe de H avec $0 \in \boldsymbol{K}$, tel que, si $\beta v = v - P_{\boldsymbol{K}} v$, $\forall v \in H$,

$$(Av, \beta v) \geqslant 0 , \qquad \forall v \in D(A).$$

En appliquant les Th. XV, XVI, on a:

a) il y a une solution de (III.4.2.) avec $Au(t)$ S^2-bornée dans H;

b) si $\omega(t)$ est une fonction périodique de période T et $f(t)$ est périodique de période T, il y a une solution de (III.4.2.) périodique de période T.

Particularisons (III.4.2.); on a

$$V = H^1_0(\Omega) , \qquad H = \mathfrak{L}^2(\Omega)$$
$$K = \left\{v(x) | v(x) \in H^1_0(\Omega)\ v(x) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Omega\right\}$$

ou $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ est un ouvert avec frontière Γ regulière.

Definissons A e B comme à la partie precedente et soit $f(t, x) \in \mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

On a:

a) dans ce cas il y a une solution $u(t, x)$ de (III.4.2.) bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et S^2-bornée dans $H^2(\Omega)$;

b) si $\omega(t)$ est périodique de période T et $f(t, \cdot)$ est périodique de période T, il y a une solution de (III.4.2.) S^2-bornée dans $H^2(\Omega)$ périodique de période T.

Observons que (III.4.2.), dans cet cas, est formellement équivalant au problème

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u(\omega(t), x)}{\partial x_i} = f(t, x)$$
$$\text{p.p. dans } \left\{(t, x) | u(t, x) > 0 \text{ dans } \Omega\right\}$$

$$u(t, x) = 0 \qquad \text{p.p. ailleurs.}$$

CHAPITRE II

SUR LA SOLUTION BORNÉE ET PRESQUE PÉRIODIQUE DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES D'ÉVOLUTION DE DEUXIÈME ORDRE

§ 1. – Le cas général.

Soit $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ et β un graphe monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ de domaine $[a, b]$ ou $]a, b[$ ($\alpha < 0 < b$ fini dans le premier cas, fini ou non fini dans le deuxième cas).

De [12] suive que, dans le cas $D(\beta) =]a, b[$, β coïncide avec une fonction $\tilde{\beta}(z)$ croissante sur $]a, b[$, i.e.

$$\beta(z) = \begin{cases} \tilde{\beta}(z) & \text{dans les points de continuité pour } \tilde{\beta}(z) \\ [\tilde{\beta}(z^-), \tilde{\beta}(z^+)] & \text{dans le points de discontinuité pour } \tilde{\beta}(z). \end{cases}$$

Il a donc un sens parler de continuité de β dans le points intérieurs à $D(\beta)$. On dit espace de l'énergie

$$E(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times \mathfrak{L}^2(\Omega)$$

et on pose pour $y(t, x) \in H_0^1(\Omega)$ p.p. avec $\partial y/\partial t(t, x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ p.p.

$$\|y(t)\|^2_{E(\Omega)} = \left\{\|y(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}\right\}.$$

Considérons le problème d'évolution du deuxième ordre

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) + \beta\left(\dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right) \ni f(t, x) & \text{p.p. dans } \boldsymbol{R}\times\Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{p.p. dans } \boldsymbol{R}\times\Gamma \end{cases}$$

que, par une forme vectorielle, on peut écrire

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) + Au(t) + \beta\left(\dfrac{du}{dt}(t)\right) \ni f(t) & \text{p.p.} \\ u(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega)), \quad \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) \in \mathfrak{L}^2(\Omega) & \text{p.p.} \end{cases}$$

où A est l'opérateur defini par

$$\langle Aw, v\rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx$$

$\forall w, v \in H_0^1(\Omega)$ ($\langle\, ,\,\rangle$ dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$) et β est l'opérateur maximal monotone multivoque, induit par le graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ $\beta(z)$ sur $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

AMERIO e PROUSE [3], ont démontré dans le cas $D(\beta) =]a, b[$, le résultat suivant:

THÉORÈME XVII. – *Supposons que le graphe maximal monotone $\beta(z)$ sur $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ soit strictement monotone et que $0 = \beta 0$ et $\beta(z)$ soit continu dans* 0.

Supposons que $f(t)$ soit presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et qu'il y ait une solution $u(t)$ de (1.2), *telle que*

$$\int_0^1 \left\{\left\|\frac{du}{dt}(t+\eta)\right\|^2_{E(\Omega)}\right\} + \|Au(t+\eta)\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}\, d\eta \leqslant C \qquad \text{p.p. sur } \boldsymbol{R}. \tag{1.3}$$

La fonction $u(t)$ est l'unique solution de (1.2) *satisfaisante* (1.3) *et est presque périodique dans $E(\Omega)$ avec $Au(t)$ S^2-bornée et faiblement S^2-presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.*

Notre bût est maintenant étendre le résultat du Th. XVII au cas $D(\beta) = [a, b]$.

Supposons donc $D(\beta) = [a, b]$ (a, b fini) et démontrons le resultat suivant:

THÉORÈME XVII. – *Supposons que le graphe maximal monotone $\beta(z)$ sur $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ soit strictement monotone et $0 = \beta 0$ avec $\beta(z)$ continu dans* 0.

Supposons que $f(t)$ soit presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et que il y ait une solution $u(t)$ de (1.2) *satisfaisante* (1.3).

La fonction $u(t)$ est l'unique solution de (1.2) *satisfaisante* (1.3) *et $u(t)$ est presque périodique dans $E(\Omega)$ avec $Au(t)$ faiblement S^2-presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.*

Démontrons d'abord l'unicité.

Supposons que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ soient deux solutions de (1.2) satisfaisantes (1.3).

Observons, [3], que de (1.3) suive que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont uniformément continues et à trajectoires rélativement compactes dans $E(\Omega)$.

On a

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}(t) + Au_1(t) + \beta\left(\frac{du_1}{dt}(t)\right) \ni f(t) \qquad \text{p.p.}$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2}(t) + Au_2(t) + \beta\left(\frac{du_2}{dt}(t)\right) \ni f(t) \qquad \text{p.p.}$$

Indiquons

$$g_1(t) = f(t) - \frac{d^2u_1}{dt^2}(t) - Au_1(t) \in \beta\left(\frac{du_1}{dt}(t)\right)$$

$$g_2(t) = f(t) - \frac{d^2u_2}{dt^2}(t) - Au_2(t) \in \beta\left(\frac{du_2}{dt}(t)\right).$$

On a donc

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(u_1(t)-u_2(t)\big)+A\big(u_1(t)-u_2(t)\big)+\big(g_1(t)-g_2(t)\big)=0 \qquad \text{p.p.}$$

dont

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{E(\Omega)}\leqslant-\big(g_1(t)-g_2(t),\,u_1(t)-u_2(t)\big)\leqslant 0\,. \tag{1.4}$$

Si $u_1(t)\neq u_2(t)$, il y a un point $\bar{t}$, tel que

$$\|u_1(\bar{t})-u_2(\bar{t})\|_{E(\Omega)}\geqslant\varrho>0\,.$$

De (1.4) suive que $\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{E(\Omega)}$, donc $\|u_1(t)-u_2(t)\|_{E(\Omega)}$, est décroissante; on a donc

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{E(\Omega)}\geqslant\varrho \qquad t\leqslant\bar{t}. \tag{1.5}$$

Considérons maintenant les suites $\{u_1(j+\eta)\}$, $\{u_2(j+\eta)\}$, $\eta\in[0,1]$, j entier mineur de $\bar{t}-1$.

Démontrons que

$$\liminf_{j\to-\infty}\left\|\frac{du_1}{dt}(j+\eta)-\frac{du_2}{dt}(j+\eta)\right\|_{\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))}\geqslant\sigma>0\,.$$

Nous utilisons un procedé par l'absurde et supposons que la thèse soit fausse.

Dans cet cas il y a une suite $\{j_n\}$, tel que

$$\lim_{j_n\to-\infty}\left\|\frac{du_1}{dt}(j_n+\eta)-\frac{du_2}{dt}(j_n+\eta)\right\|_{\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))}=0\,. \tag{1.6}$$

Observons maintenant que de (1.3) on peut supposer sans perdre de généralité

$$\operatorname*{lim^*}_{j_n\to-\infty}\frac{du_i}{dt}(j_n+\eta)=\frac{d\tilde{u}_i}{dt}(\eta) \qquad i=1,2 \tag{1.7}$$

dans $\mathfrak{L}^2(0,1;\,\mathfrak{L}^2(\Omega))$.

Étant $\{u_1(j_n+\eta)\}$ et $\{u_2(j_n+\eta)\}$ equicontinues dans $E(\Omega)$ et avec des trajectoires contenues dans un fixé ensemble compacte de $E(\Omega)$, on peut supposer

$$\lim_{j_n\to-\infty}u_i(j_n+\eta)=\tilde{u}_i(\eta) \qquad i=1,2 \tag{1.8}$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(0,1;\,E(\Omega))$.

De (1.3) suive

$$\int_0^1\|g_1(t+\eta)\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}\,d\eta\leqslant C \qquad \text{p.p.}$$

$$\int_0^1\|g_2(t+\eta)\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}\,d\eta\leqslant C \qquad \text{p.p.}$$

On peut alors supposer sans perdre de generalité

$$\lim_{j_n \to -\infty}{}^{*} g_i(j_n + \eta) = \tilde{g}_i(\eta) \qquad i = 1, 2 \tag{1.9}$$

dans $\mathcal{L}^2(0, 1; \mathcal{L}^2(\Omega))$.

De (1.7) et (1.8) suive que, [10],

$$\tilde{g}_i(\eta) \in \beta\left(\frac{d\tilde{u}_i}{dt}(\eta)\right) \qquad \text{p.p. dans } [0, 1]. \tag{1.10}$$

De (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) suive

$$\frac{d^2}{dt^2}(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)) + A(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)) = \tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t) \qquad \text{p.p. dans } [0, 1].$$

De (1.6) on a

$$\frac{d\tilde{u}_1}{dt}(t) = \frac{d\tilde{u}_2}{dt}(t) \qquad \text{p.p. dans } [0, 1].$$

Donc

$$\frac{d\tilde{u}_1}{dt}(t) - \frac{d\tilde{u}_2}{dt}(t) = 0 \qquad \text{p.p. dans } [0, 1],$$

dont $(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)) = w_j$ où w_j est un vector, qui ne depende pas de t et

$$\frac{d^2}{dt^2}(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)) = 0 \qquad \text{p.p. dans } [0, 1].$$

On a alors

$$Aw_j = -(\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t)) \qquad \text{p.p. dans } [0, 1].$$

Par le même procedé, utilisé dans [3], on a

$$w_j = 0 .$$

De (1.6) et (1.8) on a alors

$$\lim_{j_n \to -\infty} (u_1(j_n + \eta) - u_2(j_n + \eta)) = 0$$

dans $\mathcal{L}^2(0, 1; E(\Omega))$.

Mais de (1.5) on a

$$\lim_{j_n \to -\infty} \|u_1(j_n + \eta) - u_2(j_n + \eta)\|_{\mathcal{L}^2(0,1;\mathcal{L}^2(\Omega))} \geqslant \varrho > 0 .$$

On tombe donc dans l'absurde et on démontre que

$$\liminf_{j\to-\infty}\left\|\frac{du_1}{dt}(j+\eta)-\frac{du_2}{dt}(j+\eta)\right\|_{\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))}\geqslant\sigma>0\,.$$

Il y a donc une sous-suite $\{j_k\}$, telle que

$$\left(\int_0^1\left\|\frac{du_1}{dt}(j_k+\eta)-\frac{du_2}{dt}(j_k+\eta)\right\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}d\eta\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\sigma}{2}\,.$$

Observons maintenant que le deux suites

$$\left\{\frac{du_1}{dt}(j_k+\eta)\right\}\qquad\left\{\frac{du_2}{dt}(j_k+\eta)\right\}$$

sont rélativement compactes dans $\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))$ et que les suites $\{g_1(j_k+\eta)\}$ et $\{g_2(j_k+\eta)\}$ sont bornées dans $\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))$.

L'opérateur β, induit par le graphe maximal monotone β de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ sur $\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))$, est maximal monotone et strictement monotone [8].

Du Lemme II du Chapitre I (II.*b*.), on a

$$\int_0^1(g_1(j_k+\eta)-g_2(j_k+\eta),\,u_1(j_k+\eta)-u_2(j_k+\eta))_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}d\eta\geqslant\sigma'>0$$

où σ' depende de σ, mais ne depende pas de k.

En intégrant (1.4) on a

$$\|u_1(t_2)-u_2(t_2)\|^2_{E(\Omega)}-\|u_1(t_1)-u_2(t_1)\|^2_{E(\Omega)}\leqslant-2\int_{t_1}^{t_2}\left(g_1(t)-g_2(t),\,\frac{du_1}{dt}(t)-\frac{du_2}{dt}(t)\right)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}dt$$

où $t_1\leqslant t_2$.

Posé

$$\|u_1(t)\|_{E(\Omega)}\,,\ \|u_2(t)\|_{E(\Omega)}\leqslant M$$

on a

$$-2M\leqslant-\int_{-\infty}^{\bar t}\left(g_1(t)-g_2(t),\,\frac{du_1}{dt}(t)-\frac{du_2}{dt}(t)\right)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}dt\leqslant$$

$$\leqslant-\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left(g_1(j_k+\eta)-g_2(j_k+\eta),\,\frac{du_1}{dt}(j_k+\eta)-\frac{du_2}{dt}(j_k+\eta)\right)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}d\eta\leqslant-n\sigma'$$

où n est un arbitraire entier positif. On tombe donc dans l'absurde et l'unicité de la solution $u(t)$ de (1.2) satisfaisante (1.3) est démontrée.

Démontrons maintenant que $u(t)$ est presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Nous utilisons le Critère III du Chapitre I (II.*b*.). Considérons donc une suite de nombres réelles $\{l_j\}$ et considérons la suite $\{u(t+l_j)\}$. Étant $u(t)$ uniformément continue et à trajectoire rélativement compacte, il y a une sous-suite, que nous indiquons par $\{u(t+l'_j)\}$, telle que

$$\lim_{j\to+\infty} f(t+l'_j) = f_l(t) \tag{1.11}$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\lim_{j\to+\infty} u(t+l'_j) = u_l(t) \tag{1.12}$$

dans $\mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$.

Démontrons, maintenant, qu'on peut choisir la suite $\{l'_j\}$ de façon que la limite (1.12) soit uniforme sur $\boldsymbol{R}$ dans $E(\Omega)$. Nous utilisons un procedé par l'absurde; si la thèse est fausse, il y a une suite $\{t_k\}$ et deux sous-suites de $\{l_j\}$, $\{l_{k_1}\}$ et $\{l_{k_2}\}$, telles que

$$\|u(t_k+l_{k_1}) - u(t_k+l_{k_2})\|_{E(\Omega)} \geqslant \delta > 0 \qquad \forall k > 0\,.$$

Indiquons $t_k + l_{k_1} = \gamma_{k_1}$, $t_k + l_{k_2} = \gamma_{k_2}$; on peut écrire

$$\|u(\gamma_{k_1}) - u(\gamma_{k_2})\|_{E(\Omega)} \geqslant \delta > 0 \qquad \forall k. \tag{1.13}$$

Considérons les fonctions $\{u(t+\gamma_{k_i})\}$, $i=1,2$; observons que les fonctions $\{u(t+\gamma_{k_i})\}$, $i=1,2$ sont equicontinues et on les valeurs dans un ensemble rélativement compacte; on peut extraire donc de $\{u(t+\gamma_{k_i})\}$, $i=1,2$, deux sous-suites, que, pour semplicité, indiquons encore par $\{u(t+\gamma_{k_i})\}$, telles que

$$\lim_{k\to+\infty} u(t+\gamma_{k_i}) = u_{\gamma_i}(t) \qquad i=1,2 \tag{1.14}$$

dans $\mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$.

De (1.3) on a

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \left\| \frac{du}{dt}(t+\gamma_{k_i}+\eta) \right\|^2_{E(\Omega)} d\eta \leqslant C \\ &\int_0^1 \|g(t+\gamma_{k_i}+\eta)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} d\eta \leqslant C \end{aligned}\right. \qquad i=1,2$$

où

$$g(t) = -\frac{d^2u}{dt^2}(t) - Au(t) + f(t) \in \beta\left(\frac{du}{dt}(t)\right).$$

On peut alors supposer sans perdre de generalité

$$\text{(1.15)} \qquad \lim_{k\to+\infty}{}^{*} \frac{du}{dt}(t+\gamma_{k_i}) = \frac{du_{\gamma_i}}{dt}(t) \qquad i=1,2$$

$$\text{(1.16)} \qquad \lim_{k\to+\infty} g(t+\gamma_{k_i}) = g_{\gamma_i}(t)$$

dans $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$ et dans $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$ respectivement.

De (1.14) et (1.16) on a

$$\text{(1.17)} \qquad g_{\gamma_i}(t) \in \beta\left(\frac{du_{\gamma_i}}{dt}(t)\right) \qquad \text{p.p. } i=1,2\,.$$

Observons qu'on peut supposer, étant $f(t)$ presque périodique,

$$\text{(1.18)} \qquad \lim_{k\to+\infty} f(t+\gamma_{k_i}) = f_\gamma(t) \qquad i=1,2$$

dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$.

De (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) on deduit que

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u_{\gamma_i}}{dt^2} + Au_{\gamma_i}(t) + \beta\left(\frac{du_{\gamma_i}}{dt}(t)\right) \ni f_\gamma(t) \\ &u_{\gamma_i}(t) \in C(\boldsymbol{R}; E(\Omega)) \end{aligned} \qquad i=1,2$$

et que $u_{\gamma_i}(t)$ satisfont les rélations (1.3).

On a alors de la première partie de la démonstration

$$u_{\gamma_1}(t) = u_{\gamma_2}(t)\,.$$

De (1.13) et (1.14) on a

$$\|u_{\gamma_1}(0) - u_{\gamma_2}(0)\| \geqslant \delta > 0$$

donc on tombe dans l'absurde et la thèse est démontrée.

On a donc qu'on peut extraire de $\{u(t+l_j)\}$ une sous-suite $\{u(t+l'_j)\}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty} u(t+l'_j) = u_l(t)$$

dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$, dont, pour le Critère III (Chap. I) on a que $u(t)$ est presque périodique dans $E(\Omega)$.

Par une méthode analogue, en utilisant le Critère I, on a que $Au(t)$ est faiblement S^2-presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Donnons maintenant un exemple d'application du Th. XVIII.

Soit $\psi(z)$ une fonction strictement monotone sur $[a, b]$ $(a<0<b)$.

Indiquons $\beta(z) = \psi(z) + \beta'(z)$ où

$$\beta'(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]a, b[\\ ]-\infty, 0] & \text{si } z = a \\ [0, +\infty[& \text{si } z = b\,. \end{cases}$$

Il est facil de vérifier [8], que $\beta(z)$ est un graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ et qu'il est strictement monotone. Supposons, maintenant, $\psi(z)$ continue dans 0; on peut alors appliquer le Th. XVIII.

Dans ce cas le problème (1.1) est equivalente au problème

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \Delta u(t,x) + \psi\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right) \ni f(t,x) \qquad \text{p.p. dans } \{(t,x)|a < u(t,x) < b\}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \Delta u(t,x) - f(t,x) \leqslant \psi(a^+) \qquad \text{p.p. dans } \{(t,x)|u(t,x) = a\}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \Delta u(t,x) - f(t,x) \leqslant \psi(b^-) \qquad \text{p.p. dans } \{(t,x)|u(t,x) = b\}\,.$$

§ 2. – Le cas $D(\beta) = \boldsymbol{R}$.

Considérons, maintenant, le problème (1.2) dans les cas $D(\beta) = \boldsymbol{R}$ et montrons que, dans ce cas, les conditions pour la presque périodicidé et unicité d'une solution bornée, données par AMERIO-PROUSE [3], peuvent être ameliorées.

THÉORÈME XIX. – *Supposons que β soit une graphe maximal monotone de $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$, strictement monotone avec $D(\beta) = \boldsymbol{R}$ et soit $\beta 0 = 0$ avec β continu dans* 0.

Supposons que $f(t)$ soit presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et qu'il y ait une solution $u(t,x)$ uniformement continue à trajectoire rélativement compacte dans $E(\Omega)$ du problème (1.2).

La fonction $u(t,x)$ est l'unique solution de (1.2) *uniformement continue à trajectoire rélativement compacte dans $E(\Omega)$ et $u(t,x)$ est presque périodique dans $E(\Omega)$.*

Démontrons d'abord la partie concernante l'unicité.

Nous démontrerons cette partie pour une formulation affaiblie du problème (1.2). Supposons que $u_1(t,x)$ et $u_2(t,x)$ soient deux solutions du problème.

Il y a $u(t,x) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$ et $\sigma(t,x) \in \beta(\partial u(t,x)/\partial t)$ dans $\mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^1(\Omega))$ tels que

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\left\{u(t,x)\frac{\partial^2 v[t,x)}{\partial t^2} - u(t,x)\Delta v(t,x) + \sigma(t,x)v(t,x) - f(t,x)v(t,x)\right\}dt\,dx = 0$$

$$\forall v(t,x) \in C_c^\infty(]t_1, t_2[\times\Omega),\ \ \forall t_1 \leqslant t_2$$

et

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \sigma(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\, dt dx \leqslant C + M(t_2 - t_1) \tag{2.1}$$

où C et M sont des constantes indepéndantes de t_1, t_2.

Soient $\sigma_1(t, x)$ et $\sigma_2(t, x)$ les sections de $\beta\big((\partial/\partial t)u_1(t, x)\big)$ et $\beta\big((\partial/\partial t)u_2(t, x)\big)$ caractérisées par notre problème.

Supposons que $u_1(t, x)$ et $u_2(t, x)$ soient uniformement continues et avec une trajectoire rélativement compacte dans $E(\Omega)$ et que

$$\begin{aligned} &\|u_1(t_2) - u_2(t_2)\|^2_{E(\Omega)} - \|u_1(t_1) - u_2(t_1)\|^2_{E(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant -2\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} (\sigma_1(t, x) - \sigma_2(t, x)) \left(\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t}\right) dt dx \qquad t_1 \leqslant t_2 . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démontrons que $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ dans $E(\Omega)$. Nous utilisons un procedé par l'absurde. Supposons que la thèse soit fausse; il y a donc un point $\bar{t}$ tel que

$$\|u_1(\bar{t}) - u_2(\bar{t})\|_{E(\Omega)} \geqslant \varrho > 0 .$$

De (2.2) on deduit que $\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{E(\Omega)}$ est decroissante, donc $\|u_1(t) - u_2(t)\|_{E(\Omega)}$ est decroissante, dont

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{E(\Omega)} \geqslant \varrho \qquad t \leqslant \bar{t} .$$

Considérons, maintenant, les suites $\{u_1(j + \eta)\}$ et $\{u_2(j + \eta)\}$, $\eta \in [0, 1]$, où j est un entier mineur de $\bar{t} - 1$.

Démontrons que

$$\liminf_{j \to -\infty} \left\| \frac{du_1}{dt}(j + \eta) - \frac{du_2}{dt}(j + \eta) \right\|_{\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))} \geqslant \sigma > 0 .$$

Nous utilisons un procedé par l'absurde et supposons que la thèse soit fausse.

Dans cet cas il y a une suite $\{j_n\}$, telle que

$$\lim_{j_n \to -\infty} \left\| \frac{du_1}{dt}(j_n + \eta) - \frac{du_2}{dt}(j_n + \eta) \right\|_{\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))} = 0 . \tag{2.3}$$

Observons que, étant $u_i(t)$ $(i = 1, 2)$ uniformément continue et à trajectoire rélativement compacte dans $E(\Omega)$, on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{j_n \to -\infty} u_i(j_n + \eta) = \tilde{u}_i(\eta) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty(0, 1; E(\Omega)),\ i = 1, 2, \tag{2.4}$$

dont

$$\lim_{j_n \to -\infty} u_i(j_n + \eta, x) = \tilde{u}_i(\eta, x) \qquad \text{p.p. dans } [0,1] \times \Omega, \; i = 1, 2 .$$

De (2.1) on a

$$\int_0^1 \int_\Omega \sigma(j_n + \eta, x) u_i(j_n + \eta, x) dx \leqslant \text{Cst.} \qquad i = 1, 2 .$$

Du Lemme IV on a

$$\lim_{j_n \to -\infty}{}^{*} \sigma_i(j_n + \eta, x) = \tilde{\sigma}_i(\eta, x) \qquad i = 1, 2 \tag{2.5}$$

dans $\mathfrak{L}^1([0, 1] \times \Omega)$ et

$$\tilde{\sigma}_i(\eta, x) \in \beta(\tilde{u}_i(\eta, x)) \qquad i = 1, 2 \tag{2.6}$$

p.p. dans $[0, 1] \times \Omega$.

De (2.4), (2.5), (2.6) on deduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_\Omega \Big\{ (\tilde{u}_1(t, x) - \tilde{u}_2(t, x)) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - (\tilde{u}_1(t, x) - \tilde{u}_2(t, x)) \Delta v(t, x) + \\ + (\tilde{\sigma}_1(t, x) - \tilde{\sigma}_2(t, x)) \cdot v(t, x) \Big\} dt dx = 0 \qquad \forall v(t, x) \in C_c^\infty(]0, 1[\times \Omega) . \end{aligned} \tag{2.7}$$

De (2.3) on deduit

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u}_1(\eta, x) - \tilde{u}_2(\eta, x)) = 0 \qquad \text{p.p. dans } [0, 1] \times \Omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tilde{u}_1(\eta, x) - \tilde{u}_2(\eta, x)) = 0 \qquad \text{p.p. dans } [0, 1] \times \Omega .$$

On a alors

$$\tilde{u}_1(\eta, x) - \tilde{u}_2(\eta, x) = w(x) \qquad \text{p.p. dans } [0, 1] \times \Omega$$

dont

$$\Delta w(x) = \tilde{\sigma}_1(t, x) - \tilde{\sigma}_2(t, x) \in \mathfrak{L}^1(\Omega) \qquad \text{p.p. dans } [0, 1] \times \Omega .$$

Par le même procedé de [3] on a alors

$$w(x) = 0 .$$

De (2.3) et (2.4) on a

$$\lim_{j_n \to -\infty} \| u_1(j_n + \eta) - u_2(j_n + \eta) \|_{\mathfrak{L}^2(0,1; E(\Omega))} = 0 .$$

Mais, étant $\|u_1(t) - u_2(t)\|_{E(\Omega)} \geqslant \varrho$, $t < \bar{t}$, on tombe dans l'absurde; la thèse est ainsi démontrée.

On a donc

$$\liminf_{j \to -\infty} \left\| \frac{du_1}{dt}(j+\eta) - \frac{du_2}{dt}(j+\eta) \right\|_{\mathfrak{L}^2(0,1;\mathfrak{L}^2(\Omega))} \geqslant \sigma > 0 .$$

Il y a donc une suite $\{j_k\}$ telle que

$$\lim_{k \to \infty} j_k = -\infty$$

$$\left(\int_0^1 \left\| \frac{du_1}{dt}(j_k+\eta) - \frac{du_2}{dt}(j_k+\eta) \right\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega)} d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{\sigma}{2} \tag{2.8}$$

$$\lim_{j_k \to -\infty} u_i(j_k+\eta) = \tilde{u}_i(\eta) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty(0,1;E(\Omega)),\ i=1,2. \tag{2.9}$$

Du Lemme II on a alors

$$\int_0^1 \int_\Omega (\sigma_1(j_k+\eta,x) - \sigma_2(j_k+\eta,x)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(j_k+\eta,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(j_k+\eta,x) \right) dt\,dx \geqslant \sigma' > 0 .$$

Posé $\|u_1(t)\|_{E(\Omega)}$, $\|u_2(t)\|_{E(\Omega)} \leqslant M'$, on a

$$-4M' \leqslant -2 \int_{-\infty}^{\bar{t}} \int_\Omega (\sigma_1(t,x) - \sigma_2(t,x)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) \right) dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant -2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \int_\Omega (\sigma_1(j_k+\eta,x) - \sigma_2(j_k+\eta,x)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) \right) dt\,dx \leqslant -2n\sigma'$$

où n est un arbitraire entier positif.

On tombe donc dans l'absurde et l'unicité de la solution uniformément continue et à trajectoire rélativement compacte dans $E(\Omega)$ de notre problème est démontrée.

Démontrons maintenant que $u(t,x)$ est presque périodique dans $E(\Omega)$.

Nous utiliserons le Critère III.

Indiquons part $\{l_j\}$ une suite réelles et considérons la suite $\{u(t+l_j)\}$.

Étant $u(t)$ uniformément continue et à trajectoire rélativement compacte il y a une sous-suite de $\{u(t+l_j)\}$, que nous indiquons par $\{u(t+l'_j)\}$, telle que

$$\lim_{j \to +\infty} f(t+l'_j) = f_l(t) \tag{2.11}$$

uniformément sur $\boldsymbol{R}$ dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et

$$\lim_{j \to +\infty} u(t+l'_j) = u_l(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega)). \tag{2.12}$$

Démontrons maintenant qu'il est possible de choisir $\{l'_j\}$ de façon que (2.12) soit valable dans $\mathfrak{L}^\infty(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$.

Nous utilisons un procedé par l'absurde. Si la thèse est fausse, il y a deux suites $\{l_{k_1}\}$ et $\{l_{k_2}\}$ de $\{l_j\}$ et une suite $\{t_k\}$, telles que

$$\|u(t_k + l_{k_1}) - u(t_k + l_{k_2})\|_{E(\Omega)} \geqslant \delta > 0 .$$

Indiquons $t_k + l_{k_i} = \gamma_{k_i}$, $i = 1, 2$; on a

$$\|u(\gamma_{k_1}) - u(\gamma_{k_2})\|_{E(\Omega)} \geqslant \delta > 0 . \tag{2.13}$$

Considérons les fonctions $\{u(t + \gamma_{k_i})\}$, $i = 1, 2$; cettes fonctions sont equicontinues et ont les valeurs dans un ensemble rélativement compacte; il y a donc une sous-suite de $\{u(t + \gamma_{k_i})\}$ $(i = 1, 2)$, que, pour simplicité, nous indiquons encore par $\{u(t + \gamma_{k_i})\}$ $(i = 1, 2)$, telle que

$$\lim_{k \to \infty} u(t + \gamma_{k_i}) = u_{\gamma_i}(t) \qquad i = 1, 2$$

dans $\mathfrak{L}^\infty_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; E(\Omega))$.

Posé

$$g(t) = -\frac{d^2u}{dt^2}(t) - Au(t) + f(t) \in \beta\left(\frac{du}{dt}(t)\right)$$

on a

$$\left(g(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)} \leqslant -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{E(\Omega)} + \left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}$$

dont

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(g(t), \frac{du}{dt}(t)\right) dt \leqslant C + M(t_2 - t_1)$$

dont

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(g(t + \gamma_{ki}), \frac{du}{dt}(t + \gamma_{ki})\right)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)} dt \leqslant C + M(t_2 - t_1) \qquad i = 1, 2 .$$

Du Lemme IV on a alors

$$\lim_{k \to +\infty}{}^{*} g(t + \gamma_{k_i}, x) = g_{\gamma_i}(t, x) \qquad i = 1, 2 \tag{2.15}$$

dans $\mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^1(\Omega))$ et

$$g_{\gamma_i}(t, x) \in \beta\left(\frac{\partial u_{\gamma_i}}{\partial t}(t, x)\right) \qquad \text{p.p.} \tag{2.16}$$

Étant $f(t)$ presque périodique, on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{k\to\infty} f(t+\gamma_{k_i}) = f_\gamma(t) \qquad i=1,2 \tag{2.17}$$

dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};\, \mathcal{L}^2(\Omega))$.

De (2.14), (2.16) et (2.17) on deduit que les fonctions $u_{\gamma_i}(t,x)$ $(i=1,2)$ verifient la rélations

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left\{ u_{\gamma_i}(t,x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} - u_{\gamma_i}(t,x)\cdot \Delta v(t,x) + v(t,x)g_{\gamma_i}(t,x) - v(t,x)f_\gamma(t,x)\right\} dt\,dx = 0 \tag{2.18}$$

$$\forall v(t,x) \in C_c^\infty(]t_1, t_2[\times\Omega)\,.$$

De (2.14) on a que $u_{\gamma_i}(t,x)$ $(i=1,2)$ est uniformément continue dans $E(\Omega)$ sur $\boldsymbol{R}$ et a valeurs dans un ensemble rélativement compacte de $E(\Omega)$.

Observons que, fixés t_1, t_2 et $\varepsilon>0$ arbitraire, on peut trouver un ensemble $Q\subset[t_1,t_2]\times\Omega$, tel que

$$m([t_1,t_2]\times\Omega - Q)\leqslant\varepsilon$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(t+\gamma_{k_i}, x) = \frac{\partial u_{\gamma_i}}{\partial t}(t,x) \qquad i=1,2$$

uniformément dans Q

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right| \leqslant N \qquad \text{dans } Q \text{ p.p., } i=1,2\,.$$

On a alors

$$\int_Q g_{\gamma_i}(t,x)\frac{\partial}{\partial t}u_{\gamma_i}(t,x)\,dt\,dx \leqslant \lim_{k\to\infty}\int_Q g(t+\gamma_{k_i},x)\frac{\partial}{\partial t}u(t+\gamma_{k_i},x)\,dt\,dx \leqslant C + M(t_2-t_1)\,. \tag{2.19}$$

Soit maintenant $\{Q_n\}$ une suite d'ensemble Q, tels que

$$\operatorname{mis}([t_1,t_2]\times\Omega - Q_n)\to 0\,, \qquad Q_n\subset Q_{n+1}\,.$$

On a du lemme de FATOUT

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega g_{\gamma_i}(t,x)\frac{\partial}{\partial t}u_{\gamma_i}(t,x)\,dt\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{Q_n} g_{\gamma_i}(t,x)\frac{\partial}{\partial t}u_{\gamma_i}(t,x)\,dt\,dx \leqslant C + M(t_2-t_1)\,. \tag{2.20}$$

On a aussi

$$\|u(t_2+\gamma_{k_1})-u(t_2+\gamma_{k_2})\|^2_{E(\Omega)}-\|u(t_1+\gamma_{k_1})-u(t_1+\gamma_{k_2})\|^2_{E(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant -2\int_{t_1}^{t_2}\Big(g(t+\gamma_{k_1})-g(t+\gamma_{k_2})\Big),\ \frac{d}{dt}\big(u(t+\gamma_{k_1})-u(t+\gamma_{k_2})\big)_{\mathfrak{L}^2(\Omega)}\,dt$$

dont

$$\|u_{\gamma_1}(t_2)-u_{\gamma_2}(t_2)\|^2_{E(\Omega)}-\|u_{\gamma_1}(t_1)-u_{\gamma_2}(t_1)\|^2_{E(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant -2\int_{Q_n}\big(g_{\gamma_1}(t,x)-g_{\gamma_2}(t,x)\big)\frac{\partial}{\partial t}\big(u_{\gamma_1}(t,x)-u_{\gamma_2}(t,x)\big)\,dt\,dx$$

dont

$$\|u_{\gamma_1}(t_2)-u_{\gamma_2}(t_2)\|^2_{E(\Omega)}-\|u_{\gamma_1}(t_1)-u_{\gamma_2}(t_1)\|^2_{E(\Omega)}\leqslant \tag{2.21}$$
$$\leqslant -2\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\big(g_{\gamma_1}(t,x)-g_{\gamma_2}(t,x)\big)\left(\frac{\partial}{\partial t}u_{\gamma_1}(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}u_{\gamma_2}(t,x)\right)dt\,dx\,.$$

De (2.18), (2.19), (2.20) et (2.21) pour la première partie du théorème on a

$$u_{\gamma_1}(t,x)=u_{\gamma_2}(t,x)\qquad \text{p.p. dans } \boldsymbol{R}\times\Omega.$$

Mais de (2.13) et (2.14) on a

$$\|u_{\gamma_1}(0)-u_{\gamma_2}(0)\|_{E(\Omega)}\geqslant\delta>0\,.$$

On tombe donc dans l'absurde et la thèse est démontrée.

On a ainsi que pour le Critère III, $u(t,x)$ est presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTOLÀ, *Perturbations des équations d'évolution*, Ann. Ec. Norm. Sup., t. **2**, série 4 (1969), pp. 137-253.

[2] L. AMERIO, *Solutions presque périodiques d'équations fonctionelles dans les espaces de Hilbert*, Deuxième Colloque sur l'Analyse, Liegi, Mai 1964.

[3] L. AMERIO - G. PROUSE, *Uniqueness and almost periodicity for a nonlinear wave equation*, Rend. Acc. Naz. Lincei, serie VIII, **56**, fasc. 1 (1969).

[4] L. AMERIO - G. PROUSE, *Almost periodic functions and functional equations*, Van Nostrand, 1971.

[5] C. BARDOS, Polycopié du cours du troisième cycle 1969-1970, Université de Paris.
[6] M. BIROLI, *Sulla esistenza ed unicità della soluzione limitata e della soluzione quasi periodica per una equazione parabolica con termine dissipativo non lineare discontinuo*, Ricerche di Matematica, **19** (1970), pp. 93-110.
[7] M. BIROLI, *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*, Annali di Matematica, serie IV, **88** (1971), pp. 51-70.
[8] H. BRÉZIS, Polycopié du cours du troisième cycle 1969-1970, Université de Paris.
[9] H. BRÉZIS, Thèse, à paraître.
[10] M. CRANDALL - G. PARY, *Semigroups of nonlinear contraction and dissipative sets*, Journal of functional Analysis, fasc. 3 (1969), pp. 376-418.
[11] C. DUNFORD - J. SCHWARTZ, *Linear operators*, Interscience Publ. (1958).
[12] T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).
[13] G. PALMIERI - F. PORCARI, *Sulla equazione non lineare del calore discontinua rispetto all'incognita: soluzione periodica*, Atti Ac. Sc. Torino, **103** (1968-1969).
[14] G. PALMIERI, *Soluzioni limitate o quasi periodiche di una equazione non lineare del calore con discontinuità rispetto all'incognita*, Rend. Ist. Lombardo, **104** (1970), pp. 746-757.

Remarque. – Dans les exemples des Théorèmes X, XIII, XVI, ont été déduits des résultats semblables a ceux obtenus, par des méthodes différentes, par V. COMINCIOLI, qui a aussi donné des méthodes d'approximation numeriques pour ces problèmes.