Sur les solutions statistiques des équations de Navier-Stokes. (*).

C. Foias et G. Prodi (Pisa)

Résumé. – *Le but de cet article est de donner une preuve nouvelle de notre théorème d'existence des solutions statistiques des équations de Navier-Stokes (voir [6], § 3), qui, en même temps, fournit des propriétés supplémentaires intéressantes et utiles de ces solutions.*

1. – Introduction.

1.1. On considérera le problème aux limites

$$
(1.1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p + g \\ \operatorname{div} u = 0\,, \qquad u/\partial\Omega = 0 \end{cases}
$$

dans $]0, \infty) \times \Omega$, où Ω est un domaine borné de $\boldsymbol{R}_n$ $(n = 2, 3)$ à frontière $\partial\Omega$ de classe C^2, ν une constante > 0 et

$$
g \in L^\infty\big(0, \infty; (L^2(\Omega))^n\big)
$$

sont fixés. A (1.1.1) on attachera les espaces de Hilbert

$$
(1.1.2) \qquad \begin{cases} N^1 = \big\{u \in (H_0^1(\Omega))^n \colon \operatorname{div} u = 0\big\}\,, \\ N = \text{l'adhérence dans } (L^2(\Omega))^n \text{ de } N^1, \end{cases}
$$

aux produits scalaires induits de $(H_0^1(\Omega))^n$ (où $\|h\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\operatorname{grad} h)^2 dx$), resp. $(L^2(\Omega))^n$; en outre on désignera par N^{-1} le dual de N^1 plongé dans $(\mathcal{D}'(\Omega))^n$ et par $\langle u_-, u_+\rangle$ $(u_\pm \in N^{\pm 1})$ la dualité respective.

1.2. Par définition une solution *statistique* de (1.1.1) est une famille $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ de mesures de probabilités définies sur les ensembles boreliens de N, qui vérifie les conditions suivantes:

$$
(1.2.1) \qquad \int \Phi(u)\, d\mu_t(u) \quad \text{est mesurable sur } (0, \infty)
$$

(*) Entrata in Redazione il 2 aprile 1975.

quelle que soit la fonctionnelle $\Phi(u) \geqslant 0$ continue sur N,

$$\text{(1.2.2)} \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \int \|u\|_N^2 \, d\mu_t(u) + \int_0^T \left[\int \|u\|_{N^1}^2 d\mu_t(u) \right] dt < \infty$$

quel que soit $T \in (0, \infty)$ et

$$\text{(1.2.3)} \qquad \int_0^\infty \left\{ \int \left[-\Phi'_t(t, u) \, d\mu_t(u) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\langle -\nu \Delta u + \Sigma u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - g, \; \Phi'_u(t, u) \right\rangle \right] d\mu_t(u) \right\} dt = \int \Phi(0, u) \, d\mu(u)$$

quelle que soit la fonctionnelle réelle $\Phi(t, u)$ définie sur $[0, \infty) \times N^1$ jouissant des propriétés suivantes:

(i) $\Phi'_t(t, u)$ existe, est continue sur $[0, \infty) \times N^1$ et

$$\sup_{\{t,u\}} |\Phi'_t(t, u)| (1 + \|u_N\|^2) < \infty,$$

(ii) $\Phi(t, u)$ est différentiable au sense de Fréchet dans N, c'est-à-dire il existe $\Phi'_u(t, u) \in N$ telle que

$$\frac{1}{\|v\|_N} |\Phi(t, u + v) - \Phi(t, u) - \langle \Phi'_t(t, u), v \rangle| \to 0 \qquad \text{pour } u, \; v \in N^1, \; \|v\|_N \to 0,$$

(iii) $\Phi'_u(t, u)$ est continue est bornée comme fonction de $[0, \infty) \times N^1$ dans N^1,

(iv) $\Phi(t, u) = 0$ pour t assez grand.

Dans (1.2.3), μ est une mesure de probabilité, aussi définie sur les ensembles boreliens de N, notamment la donnée initiale de la solution statistique envisagée.

Dans [6] § 3 (voir aussi les §§ 4-5) nous avons prouvé l'existence d'une solution statistique de (1.1.1) pour toute donnée initiale satisfaisant

$$\text{(1.2.4)} \qquad \int \|u\|_N^2 \, d\mu(u) < \infty .$$

les solutions statistiques construites dans [6] (voir [6] §§ 3-5, [7] §§ 6-7 et [5] § 5) jouissent des diverses propriétés supplémentaires, dont une forme définitive sera donnée dans ce travail, par une methode nouvelle plus directe que celles utilisées dans [4], [6], [5].

1.3. Dans le but d'énoncer le résultat principal de cet article, convenons d'appeler solution *individuelle* de (1.1.1) toute fonction $u(t)$ définie sur $[0, \infty)$ à valeurs dans N jouissant des propriétés suivantes:

(j) $u(t)$ est continue de $[0, \infty)$ dans N muni de la topologie faible,

(jj) comme fonction à valeurs dans N^{-1}, $u(t)$ est absolument continue, c'est-à-dire il existe une fonction

$$u'(t) \in \bigcup_{T \in (0,\infty)} L^1(0, T; N^{-1})$$

telle que (dans N^{-1})

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau)\, d\tau \qquad \text{pour tout } \tau \in [0, \infty)\,,$$

(jjj) on a

$$\tag{1.3.1} \tfrac{1}{2}\|u(t)\|_N^2 + \nu \int_{t_0}^t \|u(\tau)\|_{N^1}^2 d\tau \leqslant \tfrac{1}{2}\|u(t_0)\|_N^2 + \int_{t_0}^t \langle g(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau$$

pour tout ($t \geqslant t_0$ et tout t_0) en dehors d'un ensemble de mesure nulle $e \subset (0, \infty)$ et

(jv) la famille

$$\{\mu_t = \delta_{u(t)} \text{ (la mesure de Dirac concentrée en } u(t))\}_{0<t<\infty}$$

est une solution statistique de (1.1.1) évidemment à donnée initiale $\delta_{u(0)}$.

Dans le but de facilitier la lecture indépendant de cet article, nous allons montrer, dans le § 3, l'existence d'une solution individuelle de (1.1.1) pour tout $u(0) \in N$ donné d'avance, bien que cela résulte des résultats connus déjà (voir [10], Ch. I, § 6 et [6], § 3-4).

1.4. Soit maintenant $B \subset N$ un ensemble borelien quelconque; notons que les structures boreliennes de N muni de sa topologie forte et de N muni de sa topologie faible coincident. Pour tout $t_0 \in [0, \infty)$ on posera

$$\tag{1.4.1} B(t_0) = \{u(t_0)\colon u(t) \text{ est une solution individuelle de (1.1.1) telle que } u(0) \in B\},$$

c'est-à-dire, $B(t_0)$ est l'ensemble balayé par les valeurs au moment t_0 des solutions individuelles de (1.1.1) qui partent, au moment $t = 0$, de B; évidemment $B(0) = B$. L'ensemble $B(t_0)$ est mesurable par rapport à n'importe quelle mesure borelienne sur N (voir le § 4), pour tout $t_0 \in [0, \infty)$.

1.5. Nous sommes à même d'énoncer notre résultat principal:

THÉORÈME. – *Pour toute donnée initiale* μ *vérifiant* (1.2.4) *il existe au moins une solution statistique* $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ *de* (1.1.1) *jouissant des propriétés supplementaires suivantes*:

(j) *La fonction, définie sur* $[0, \infty)$, *par* $\int \psi(u)\, d\mu(u)$ *pour* $t=0$ *et* $\int \psi(u)\, d\mu_t(u)$ *pour* $t \in (0, \infty)$, *est continue, quelle que soit la fonctionelle* $\psi(u)$ *définie et bornée sur* N, *continue dans la topologie faible* (*de* N) *sur tout borné de* N.

(jj) *Pour tout* $t \in [0, \infty)$ *et tout ensemble borelien* $B \subset N$ *on a*

$$\mu_t(B(t)) \geq \mu(B) . \tag{1.5.2}$$

(jjj) *Pour tout* $t \in (0, \infty)$ *on a*

$$\int \Phi(u)\, d\mu_t(u) + \int_0^t \left[\int \left\langle -\nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - g,\ \Phi'(u) \right\rangle d\mu_\tau(u)\right] d\tau = \int \Phi(u)\, d\mu(u) , \tag{1.5.3}$$

quelle que soit la fonctionelle réelle $\Phi(u)$ *définie sur* N^1 *et jouissant des propriétés* (ii) *et* (iii) *de l'alinéa* 1.2.

Il est facile à vérifier que si une famille $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ de mesures de probabilité, définies sur les ensembles boreliens de N, a les propriétés (j), (jjj) ci-dessus et (1.2.2), alors elle est une solution statistique de (1.1.1) à donnée initiale μ (voir par exemple [6], § 3.3.*a*). Ainsi dans le § 5 nous nous réserverons de démontrer l'existence d'une famille de ce type, d'abord dans le cas où le support de μ est borné dans N. Puis en utilisant (jj) nous écarterons cette restriction.

Enfin mentionnons que dans le § 6 nous donnerons des corollaires du théorème, dont certains présentent un interêt intrinsèque evident (voir, par exemple, les propositions des alinéas 6.4-5).

1.6. Cet article, bien que commencé dans 1969, a été achevé en 1974, pendant que le premier auteur était hôte, dans le cadre du « Senior Fulbright-Hays Program », au « Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University ».

2. – Preliminaires.

2.1. Pour simplifier la notation on posera

$$|u| = \|u\|_N (u \in N) , \qquad \|v\| = \|v\|_{N^1} (v \in N^1)$$

et

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_i u_i v_i dx \qquad \left(\text{pour } u, v \in (L^2(\Omega))^n\right) ,$$

$$((u, v)) = \int_\Omega \sum_i \operatorname{grad} u_i \operatorname{grad} v_i \, dx \qquad \left(\text{pour } u, v \in (H_0^1(\Omega))^n\right) .$$

Soit A l'extension de Friedrichs de l'operateur

$$-\Delta|\{u\in (C_0^\infty(\Omega))^n\colon \operatorname{div} u=0\}\ .$$

C'est le seul opérateur autoadjoint $\geqslant 0$ dans N tel que le domaine $\mathfrak{D}_{A^{\frac12}}$ de $A^{\frac12}$ coincide avec N^1 et $|A^{\frac12}u|=\|u\|$ pour tout $u\in N^1$. Un théorème profond de Cattabriga-Solonnikov-Vorovich-Yudovich (voir [1]) entraîne que le domaine $\mathfrak{D}_A$ de A coincide avec $N^1\cap (H^2(\Omega))^n$ et que

$$k_1^{-1}\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^2(\Omega)}\leqslant |Au|\leqslant k_1\sum_{i=1}^n\|u_i\|_{H^2(\Omega)}\qquad \text{pour tout } u\in\mathfrak{D}_A\ ,$$

où k_1 est une constante convenable dépendant de Ω.

Enfin, en vertu du lemme de Rellich, A^{-1} est compact. Soit donc $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ une base orthonormale dans N telle que $Aw_m=\lambda_m w_m$ pour tout $m=1,2,\ldots$ et $\lambda_1\leqslant \leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$; évidemment $\lambda_1>0$ et $\lambda_m\to\infty$. Dans la suite cette base $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ sera fixée et, en outre, on désignera par P_m la projection orthogonale de N sur l'espace engendré par $w_1, w_2, \ldots, w_m$ $(m=1,2,\ldots)$.

2.2. Pour $u, v\in N^1$ on désigne par $B(u,v)$ l'élément de N^{-1} défini par

$$\langle B(u,v), w\rangle=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\,dx \tag{2.2.1}$$

où $w\in N^{-1}$ est arbitraire. En vertu du théorème de Sobolev, qui assure $H_0^1(\Omega)\subset L^6(\Omega)$ (où l'inclusion est continue), la définition (2.2.1) est consistente. De plus, en utilisant les interpolations (voir [11])

$$u\mapsto u\colon \mathfrak{D}_{A^{\theta/2}}\mapsto (L^{6/(3-2\theta)}(\Omega))^n$$

$$u\mapsto \operatorname{grad} u_j\colon \mathfrak{D}_{A^{(1+\theta)/2}}\mapsto (L^{6/(3-2\theta)}(\Omega))^n$$

(où $\theta\in[0,1]$), on déduit aussitôt de (2.2.1) l'estimation

$$|\langle B(u,v), w\rangle|\leqslant k_2|A^\alpha u|\cdot|A^\beta v|\cdot|A^\gamma w| \tag{2.2.2}$$

où k_2 est une constante dépendant seulement de Ω, tandis que $\alpha,\beta,\gamma\geqslant 0$, $0\leqslant\alpha<\frac12$, $\min\{\beta,\gamma\}\leqslant\frac12\leqslant\max\{\beta,\gamma\}\leqslant 1$, $\alpha+\beta+\gamma=5/4$ et $u, v, w\in N^1$ sont d'ailleurs arbitraires.

Dans la vérification de (2.2.2) on utilise aussi la propriété immediate

$$\langle B(u,v), v\rangle=0\qquad \text{pour tous } u, v\in N^1\ . \tag{2.2.3}$$

Enfin en désignant par P la projection orthogonale de $(L^2(Q))^n$ sur N et en posant $f(t) = Pg(t)$, on aura

$$f(t) \in L^\infty(0, \infty; N) .$$

De plus, l'équation (1.5.3) peut s'écrire

$$\text{(2.2.4)} \quad \int \Phi(u)\, d\mu_t(u) + \int_0^t \Big\{ \int \Big[\nu\big((u, \Phi'(u))\big) + \langle B(u, u), \Phi'(u)\rangle - \\ - \big(f(\tau), \Phi'(u)\big)\Big] d\mu_\tau(u)\Big\} d\tau = \int \Phi(u)\, d\mu(u)$$

où Φ est une fonctionnelle réelle jouissant des propriétés (ii) et (iii) de l'alinéa 1.2. Dans la suite la classe de ces fonctionnelles sera designée par $\mathfrak{J}^{\text{ind}}$.

2.3. Une fonctionnelle réelle $\phi(u)$ définie sur N^1 (où $\mathfrak{D}_A$, N, N^{-1}, etc.) sera nommée cylindrique si il existe $m \in \{1, 2, \ldots\}$ tel que

$$\text{(2.3.1)} \qquad \phi(P_m u) \equiv \phi(u) .$$

La sous-classe de $\mathfrak{J}^{\text{ind}}$ formée par les fonctionnelles cylindriques $\in \mathfrak{J}^{\text{ind}}$ sera désignée par $\mathfrak{J}_0^{\text{ind}}$.

Soit $\phi \in \mathfrak{J}^{\text{ind}}$ et soit

$$k_3 = \sup \{\|\phi'(u)\| : u \in N^1\} .$$

Alors

$$|\phi(u) - \phi(v)| \leqslant \int_0^1 \Big|\Big(u - v, \Phi'_{\square}\Big(\boxed{\theta u + (1-\theta)v}\Big)\Big)\Big| d\theta = \\ = \int_0^1 \Big|\langle u - v, \phi'_{\square}\Big(\boxed{\theta u + (1-\theta)v}\Big)\rangle\Big| d\theta \leqslant k_3 \|u - v\|_{N^{-1}} ,$$

et par suite Φ peut se prolonger en une fonctionnelle continue sur N^{-1} (qui en outre est uniquement determinée), car N^1 est dense dans N^{-1}. On désignera aussi par ϕ cette extension qui vérifiera

$$\text{(2.3.2)} \qquad |\phi(u) - \phi(v)| \leqslant k_3 \|u - v\|_{N^{-1}} \quad \text{pour tous } u, v \in N^{-1} .$$

Soit maintenant (pour $m = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\phi_m(u) \overset{\text{def}}{=} \phi(P_m u) \quad \text{où } u \in N^{-1} .$$

Alors $\phi_m(u)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ jouissent des propriétés suivantes:

(i) $\phi_m(u)$ est cylindrique, ayant une différentielle de Fréchet $\phi'_m(u)$ continue et bornée sur tout N;

(ii) $\phi_m(u) \to \phi(u)$ sur N^{-1}, uniformément sur tout borné de N;

(iii) $\phi'_m(u) \to \phi'(u)$ dans N^1 (pour tout $u \in N^1$) et

$$\sup \{\|\phi'_m(u)\| : m = 1, 2, 3, \ldots, \; u \in N^1\} < \infty .$$

DÉMONSTRATION. – Comme $P_m N \subset N^2$, l'existence de ϕ'_m est évidente et on a

$$\phi'_m(u) = P_m \phi'_\square\left(\boxed{P_m u}\right) \qquad \text{pour } u \in N . \tag{2.3.3}$$

Comme $P_m u \to u$ dans N^{-1} (resp. N, resp. N^1) dès que $u \in N^{-1}$ (resp. N, resp. N^{-1}) et $\phi(u)$ et $\phi'(u)$ sont continues (de N^{-1} dans $\mathbf{R}$, resp. N^1 dans N^1) les convergences ci-dessus résultent aussitôt. En outre

$$\|P_m u\| \leqslant \|u\| \qquad \text{pour tout } u \in N^1 \tag{2.3.4}$$

d'où par (2.3.3) on obtient

$$\|\phi'_m(u)\| \leqslant \|\phi'(u)\| \leqslant k_3$$

pour tous $m = 1, 2, 3, \ldots, u \in N^1$. Finalement si B est une boule fermée de N, B sera compacte dans N^{-1}. Par suite, en vertu du théorème de Dini,

$$\|P_m u - u\|_{N^{-1}} \to 0 \qquad \text{uniformément sur } B , \tag{2.3.5}$$

car

$$\|(1 - P_{m+1})u\|_{N^{-1}} = \sup_{\|v\| \leqslant 1} |\langle (1 - P_{m+1})u, v\rangle| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} |\langle (1 - P_m)u, (1 - P_{m+1})v\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|(1 - P_m)u\|_{N^{-1}} \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|(1 - P_{m+1})v\| = \|(1 - P_m)u\|_{N^{-1}}$$

pour tout $m = 1, 2, \ldots$. (2.3.5) donne la convergence uniforme dans la propriété (ii).

2.4. Pour $r > 0$, soit

$$B_r = \{u \in N : |u| \leqslant r\} ;$$

alors sur tout B_r fixé, la topologie faible de N coincide avec la topologie induite par N^{-1} c'est-à-dire avec celle induite par la distance

$$d(u, v) = \|u - v\|_{N^{-1}} \qquad (u, v \in N^{-1}) ;$$

par suite un ensemble B dans N sera borelien si et seulement si $B \cap B_r$ sera borelien dans l'espace metrique B_r, muni de la distance d, pour tout $r > 0$.

3. – Solutions individuelles.

3.1. On considère dans $P_m N$ $(m = 1, 2, \dots)$ l'équation différentielle

$$\frac{du_m}{dt} + \nu A u_m + P_m B(u_m, u_m) = P_m f \qquad \text{pour } t \in [0, \infty). \tag{3.1.1}$$

On désignera par $S^{(m)}(t) u_m$ la valeur en $t \in [0, \infty)$ de la solution de (3.1.1) qui au moment $t = 0$ est égale à u_m.

De (3.1.1) on déduit aussitôt

$$\frac{1}{2}\frac{d|u_m|^2}{dt} + \nu \|u_m\|^2 = (f, u_m) \leqslant k_4 |u_m| \leqslant \frac{k_4^2}{2\nu\lambda_1} + \frac{\nu}{2}\|u_m\|^2 \qquad \text{pp. dans } (0, \infty) \tag{3.1.2}$$

$\big($où $k_4 = \operatorname*{vrai\,max}_{0<t<\infty} |f(t)|\big)$ et par suite

$$|S^{(m)}(t) u_m|^2 \leqslant \exp[-\nu\lambda_1] |u_m|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2 \lambda_1^2} \tag{3.1.3}$$

pour tout $t \in [0, \infty)$ et

$$\int_{t_0}^{t} \|S^{(m)}(\tau) u_m\|^2 \, d\tau \leqslant \frac{1}{\gamma} |S^{(m)}(t_0) u_m|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2 \lambda_1}(t - t_0) \tag{3.1.4}$$

pour tous $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$; pour tels t_0, t il en résulte donc

$$\int_{t_0}^{t} \|S^{(m)}(\tau) u\|^2 \, d\tau \leqslant \frac{1}{\nu} \exp[-\nu\lambda_1 t_0] |u_m|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2 \lambda_1}\left(t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1}\right). \tag{3.1.5}$$

Nous allons ajouter maintenant aux estimations (3.1.3-5) aussi l'estimation

$$d\big(S^{(m)}(t) u_m, S^m(t_0) u_m\big) \leqslant k_5 (t - t_0)^{\frac{1}{4}} \left(|u_m|^2 + t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{3}{4}} (|u_m|^2 + 1)^{\frac{1}{4}} \tag{3.1.6}$$

pour tous $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$; ici k_5 est une constante convenable (dépendant seulement de Ω, ν et f).

DÉMONSTRATION. – On a pour $u_m(t) = S^{(m)}(t)\,u_m$ et $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, la relation

$$d\big(u_m(t), u_m(t_0)\big) \leqslant \nu \int_{t_0}^{t} \|Au_m(\tau)\|_{N^{-1}} d\tau + \frac{k_5}{\sqrt{\lambda_1}}(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \|P_m B\big(u_m(\tau), u_m(\tau)\big)\|_N \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \nu \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| d\tau + \frac{k_4}{\sqrt{\lambda_1}}(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \|P_m B\big(u_m(\tau), u_m(\tau)\big)\|_{N^{-1}} d\tau .$$

Mais en vertu de (2.2.2) nous avons (pour $u, v \in N^1$)

$$\text{(3.1.7)} \qquad \|P_m B(u, v)\|_{N^{-1}} \leqslant \|B(u, v)\|_{N^{-1}} =$$

$$= \sup_{\|w\| \leqslant 1} |\langle B(u, v), w\rangle| \leqslant k_2 |A^{\frac14} u| \cdot \|v\| \leqslant k_2 |u|^{\frac12} \cdot \|u\|^{\frac12} \cdot \|v\| ,$$

d'où en utilisant (3.1.3-5),

$$d\big(u_m(t), u_m(t_0)\big) \leqslant \nu \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \, d\tau + \frac{k_4}{\sqrt{\lambda_1}}(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} \|u_m(\tau)\|^{\frac32} |u_m(\tau)|^{\frac12} dt \leqslant$$

$$\leqslant (t-t_0)^{\frac12} \left(\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac12} + \frac{k_4}{\sqrt{\lambda_1}}(t-t_0) + k_2 \left(\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac34} \left(\int_{t_0}^{t} |u(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac14} \leqslant$$

$$\leqslant k_6 (t-t_0)^{\frac12} \left(|u_m|^2 + t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1} \right)^{\frac12} + k_7 (t-t_0)^{\frac14} \cdot \big(|u_m|^2 + 1\big)^{\frac14} \cdot \left((u_m)^2 + t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1} \right)^{\frac34} \leqslant$$

$$\leqslant k_5 (t-t_0)^{\frac14} \left(|u_m|^2 + t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1} \right)^{\frac34} \big(|u_m|^2 + 1\big)^{\frac14},$$

où k_5-k_7 sont des constantes convenables dependant seulement de Ω, ν et f.

3.2. Nous sommes maintenant à même de prouver la suivante

PROPOSITION. – *Pour tout* $u_0 \in N$ *il existe au moins une solution individuelle* u *de* (1.1.1) *à donnée initiale* u_0.

REMARQUE. – La proposition est bien connue lorsqu'on considère des solutions usuelles au sens de LERAY [9] ou HOPF [8]; voir aussi LIONS [10], Ch. I, § 6. Le fait que les solutions usuelles, modifiées convenablement sur un ensemble de mesure nulle des t, vérifient aussi la propriété (jv) de l'alinéa 1.3 a été prouvé dans [6] § 3.4. Nous donnerons la preuve de la proposition pour faciliterl'exposition.

DÉMONSTRATION. – Posons $u_m(t) = S^{(m)}(t)\,P_m u_0$ $(m = 1, 2, \ldots;\ t \geqslant 0)$. En vertu de (3.1.3), (3.1.5) nous avons

$$\text{(3.2.1)} \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} |u_m(t)|^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leqslant k_8$$

pour tous $m = 1, 2, \ldots$, où k_8 est une constante dépendant de $T \in (0, \infty)$ et ν, Ω, f. Utilisant cette rélation et (3.1.6) on montre aussitôt (par le procédé diagonal) que de toute sous-suite de la suite $\{u_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ on peut entraire une sous-suite $\{u_{m_j}(t)\}_{m=1}^{\infty}$ qui soit (pour tout $T \in (0, \infty)$):

(c_1) faiblement convergente dans $L^2(0, T; N^1)$ et $L^\infty(0, T; N)$ (c'est-à-dire par rapport à sa topologie $\sigma(L^\infty(0, T; N),\ L^1(0, T; N))$,

(c_2) convergente dans N^{-1}, uniformément sur $[0, T]$,

(c_3) fortement convergente dans $L^2(0, T; N)$,

(c_4) convergente dans N, pp. dans $[0, T]$.

(La convergence (c_3) s'obtient par le lemme de compacité de [10], Ch. I, § 5.) Soit $u(t)$ la fonction limite (dans N^{-1}) de la suite $\{u_{m_j}(t)_{j=1}^{\infty}\}$. Evidemment elle vérifie

$$d\big(u(t), u(t_0)\big) \leqslant k_5 (t - t_0)^{\frac{1}{4}} \left(|u_0|^2 + t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{3}{4}} \left(|u_0|^2 + 1\right)^{\frac{1}{4}} \tag{3.2.2}$$

pour tous $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant \infty$; ici k_5 est la constante qui intervient dans (3.1.6). Il est facile à vérifier, en utilisant (3.2.1), que $u(t) \in N$ pour tout $t \in [0, \infty)$ et que

$$|u(t)|^2 \leqslant \exp[-\nu\lambda_1 t]|u_0|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1^2} \quad \text{(voir (3.1.3))}, \tag{3.2.3}$$

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leqslant \frac{1}{\nu}|u_0|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1} T \quad \text{pour tout } T \in (0, \infty) \ \text{(voir (3.1.4))}. \tag{3.2.4}$$

Il est aussi facile à vérifier que les propriétés (j-jj) de l'alinéa 1.3 sont vérifiées par $u(t)$. Quant à (1.3.1), on remarque d'abord que

$$\tfrac{1}{2}|u_{m_j}(t)|^2 + \nu \int_{t_0}^{t} \|u_{m_j}(\tau)\|^2 d\tau = \tfrac{1}{2}|u_{m_j}(t_0)|^2 + \int_{t_0}^{t} \big(f(\tau), u_{m_j}(\tau)\big)\, d\tau$$

(quels que soient $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$) et puis, qu'en vertu des convergences (c_1), (c_3) et (c_4) ci-dessus, il résulte

$$\tfrac{1}{2}|u(t)|^2 + \nu \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leqslant \tfrac{1}{2}|u(t_0)|^2 + \int_{t_0}^{t} \big(f(\tau), u(\tau)\big)\, d\tau$$

pour tous t_0, t en dehors d'un ensemble de mesure nulle $e \subset (0, \infty)$, $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$. Cela entraîne (1.3.1) car, en vertu de la propriété (j) de l'alinéa 1.3, la fonction $|u(t)|^2$ est inférieurement semi-continue.

Il nous reste à vérifier la relation (voir (2.2.4))

$$(3.2.5)\qquad \phi(u(t)) + \int_{t_0}^{t} \Big[\nu\big(\big(u(\tau), \phi'(u(\tau))\big)\big) + \langle B(u(\tau), u(\tau)), \phi'(u(\tau))\rangle - \big(f(\tau), \phi'(u(\tau))\big)\Big] dt = \phi(u_0) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \infty)$$

pour $\phi \in \mathfrak{J}^{\text{ind}}$. En vertu des résultats de l'alinéa 2.3 il suffira de vérifier (3.2.5) dans le cas où ϕ est cylindrique. Alors (voir (2.3.1)) nous aurons, pour un certain $m \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$(3.2.6)\qquad \phi'(u) = P_m \phi'_\square\big(\boxed{P_m u}\big) = P_m \phi'(u)\,.$$

D'autre part il est clair que

$$(3.2.7)\qquad \phi(u_{m_j}(t)) + \int_{t_0}^{t} \Big[\nu\big(\big(u_{m_j}(\tau), \phi'(u_{m_j}(\tau))\big)\big) + \langle B(u_{m_j}(\tau), u_{m_j}(\tau)), P_{m_j}\phi'(u_{m_j}(\tau))\rangle - \big(f(\tau), P_{m_j}\phi'(u_{m_j}(\tau))\big)\Big] d\tau = \phi(P_{m_j} u_0)$$

quels que soient $t \in (0, \infty)$, $m, j = 1, 2, \ldots$; de plus, en vertu de (3.2.6), nous pouvons négliger les entités P_{m_j} dans (3.2.7) dès que $m_j \geqslant m$. Comme $u_{m_j}(t) \to u(t)$ dans N^{-1} (uniformément sur tout intervalle compact $\subset [0, \infty)$) entraîne $P_m u_{m_j}(t) \to P_m u(t)$ dans N^1 (uniformément sur tout intervalle compact $\subset [0, \infty)$), on voit aussitôt que pour déduire la relation (3.2.5) de (3.2.7) il reste à vérifier la convergence

$$(3.2.8)\qquad \int_0^t \langle B(u_{m_j}(\tau), u_{m_j}(\tau)), \phi'(u_{m_j}(\tau))\rangle\, d\tau \to \int_0^t \langle B(u(\tau), u(\tau)), \phi'(u(\tau))\rangle\, d\tau\,.$$

Posons $v_j(\tau) = u_{m_j}(\tau)$, $w_j(\tau) = \phi'(u_{m_j}(\tau))$ et $w(\tau) = \phi'(u(\tau))$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$. De (3.2.6) nous obtenons $\|w_j(\tau) - w(\tau)\| \to 0$ uniformement sur $[0, t]$ et par suite

$$\left|\int_0^t \langle B(v_j, v_j), w_j\rangle\, d\tau - \int_0^t \langle B(v_j, v_j), w\rangle\, d\tau\right| \leqslant \int_0^t \|v_j\|^2 \|w_j - w\|\, d\tau \leqslant \Big(\max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|w_j(\tau) - w(\tau)\|\Big) \int_0^t \|v_j(\tau)\|^2\, d\tau$$

qui tend vers 0 (voir (3.2.1)). Ainsi (3.2.8) peut être remplacée par

$$\delta_j = \left|\int_0^t \langle B(v_j, v_j) - B(u, u), w\rangle\, d\tau\right| \to 0\,.$$

Pour prouver ceci, remarquons d'abord qu'en utilisant (2.2.2-3) il vient

$$\delta_j \leqslant \int_0^t \left[|\langle B(v_j, w), u - v_j\rangle| + |\langle B(v_j - u, w), u\rangle|\right] d\tau \leqslant k_2 \int_0^t (\|v_j\| + \|u\|)|A^{\frac{3}{4}}w||u - v_j| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant k_2\Big(\max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |A^{\frac{3}{4}}w(\tau)|\Big)\Big(\int_0^t (\|v_j(\tau)\|^2 + \|u(\tau)\|^2) d\tau\Big)\cdot\Big(\int_0^t |v_j(\tau) - u(\tau)|^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Tenant compte de (3.2.1). (3.2.4) et

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |A^{\frac{3}{4}}w(\tau)| \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{4}} \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|\phi'(u(\tau))\|,$$

nous obtenons

$$\delta_j \leqslant k_9\Big(\int_0^t |v_j(\tau) - u(\tau)|^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

en vertu de la convergence (c_3). Ceci finit la preuve.

3.3. Remarquons qu'en vertu de (1.3.1), toute solution individuelle $u(t)$ vérifie les relations

$$|u(t)|^2 \leqslant \exp[-\nu\lambda_1(t - t_0)]|u(t_0)|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1^2} \tag{3.3.1}$$

$$\int_{t_0}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leqslant \frac{1}{\nu}|u(t_0)|^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1}(t - t_0) \tag{3.3.2}$$

quels que soient $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$, t_0 en dehors d'un ensemble de mesure nulle $e \subset (0, \infty)$. Cet ensemble exceptionnel e est celui qui intervient dans (1.3.1) ou, en tenant compte de la preuve de (1.3.1), dans la convergence (c_4) (voir l'alinéa précédent).

En utilisant les relations (3.3.1-2) et le fait que $u(t)$ est continue de $[0, \infty)$ dans N^{-1} on déduit, par le même argument comme dans l'alinéa 3.1, que

$$d(u(t), u(t_0)) \leqslant k_5(t - t_0)^{\frac{1}{4}}\Big(\Big(|u|^2 + t - t_0 + \frac{1}{\lambda_1}\Big)^{\frac{3}{4}}(|u_0|^2 + 1)^{\frac{1}{4}} \tag{3.3.3}$$

pour *tous* $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$.

4. – Familles de solutions individuelles.

4.1. Soit K un sous-ensemble borné de N, fermé dans N^{-1}. Désignons par $d_K(t, u)$ la distance dans $[0, \infty) \times N^{-1}$ (metrisé par

$$\mathrm{dist}(\{t_1, u_1\}, \{t_2, u_2\}) = (|t_1 - t_2| + d(u_1, u_2))$$

de $\{t, u\} \in [0, \infty) \times N^{-1}$ à l'ensemble

$$\hat{K} = \{\{\tau, v\} \in [0, \infty) \times N^{-1} : v \in K(\tau), \tau \in [0, \infty)\} \tag{4.1.1}$$

(pour la définition de $K(\tau)$, voir l'alinéa 1.4).

LEMME. – *Pour toute suite* $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ *d'entiers* $\to \infty$ *et toute suite* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *relativement compacte dans* N, *telle que*

$$d_K(0, u_j) \to 0 .$$

la suite

$$\{d_K(t, S^{(m_j)}(t) P_{m_j} u_j)\}_{j=1}^{\infty}$$

converge vers 0, *uniformément sur tout intervalle compact* $\subset [0, \infty)$.

DÉMONSTRATION. – Pour abréger la notation on posera $u_j(t) = S^{(m_j)}(t) P_{m_j} u_j$; en outre, en supposant le contraire, nous pouvons aussi supposer que

$$d_K(t_j, u_j(t_j)) \geq \varepsilon \qquad \text{où } t_j \in [0, T] \tag{4.1.2}$$

et où T, $\varepsilon > 0$ sont fixés convenablement. En vertu des relations (3.1.3) et (3.1.6) et du fait que les ensembles bornés dans N sont relativement compacts dans N^{-1}, nous pouvons extraire de la suite $\{u_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ une sous-suite, qu'on désignera de la même manière, qui soit convergente dans N^{-1}, uniformément sur tout intervalle compact de $[0, \infty)$. On démontre exactement comme dans l'alinéa 3.2 que la fonction limite $u(t)$ est une solution individuelle de (1.1.1) à donnée initiale u_0 égale à la limite, dans N^{-1}, des $u_j(0) = P_{m_j} u_j$, donc des u_j aussi. Puisque $d_K(0, u_j) \to 0$ il résulte qu'il existe $\tau_j \in [0, \infty)$, $\tau_j \to 0$ et $v_j \in K(\tau_j)$ tels que $d(u_j, v_j) \to 0$. Mais $v_j = v_j(\tau_j)$ où $v_j(t)$ est une solution individuelle telle que $v_j(0) \in K$. Par (3.3.3), nous avons

$$d(u_0, v_j(0)) \leq d(u_0, u_j) + d(u_j, v_j) + d(v_j(\tau_j), v_j(0)) \to 0 .$$

Par conséquent $u_0 \in K$ et par suite $u(t) \in K(t)$ pour tout $t \in [0, \infty]$. Il résulte

$$\varepsilon \leq d_K(t_j, u_j(t_j)) \leq d(u_j(t_j), u(t_j)) \leq \max_{0 \leq t \leq T} d(u_j(t), u(t)) \to 0 ,$$

ce qui contredit (4.1.2). Ceci finit la preuve du lemme.

4.2. Soit, de nouveau, K un sous-ensemble relativément compact de N, fermé dans N^{-1}. En reprenant la démonstration du lemme de l'alinéa précédent, à quelques changements mineurs près (par exemple, en utilisant, au lieu de (3.1.3-6), les relations (3.3.1-2)), on prouve sans peine aussi le suivante

Lemme. – *L'ensemble* $\hat{K}$ (*voir* (4.1.1)) *est fermé dans* $[0, \infty) \times N^{-1}$ *et pour toute suite* $\{u_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ *de solutions individuelles, telle que* $\{u_j(0)\}_{j=1}^{\infty}$ *soit bornée dans* N *et* $d_K(0, u_j(0)) \to 0$, *on a*

$$\operatorname{dist}(\{t, u_j(t)\}, \hat{K}) = d_K(t, u_j(t)) \to 0 \,, \tag{4.2.1}$$

uniformément sur tout intervalle compact $\subset [0, \infty)$.

4.3. Soit $C(0, \infty; N^{-1})$ l'espace des toutes les fonctions $v(t)$ définies sur $[0, \infty)$ à valeurs dans N^{-1} et continues de $[0, \infty)$ dans N^{-1}. Dans $C(0, \infty; N^{-1})$ on introduira la distance

$$\delta(v_1(t), v_2(t)) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \max_{0<\tau<p} d(v_1(\tau), v_2(\tau)) \left[1 + \max_{0<\tau<p} d(v_1(\tau), v_2(\tau))\right]^{-1}$$

par rapport à laquelle $C(0, \infty; N^{-1})$ devient un espace metrique complet. Pour $R \in (0, \infty)$, soit $\mathfrak{X}_R$ le sous-espace de $C(0, \infty; N^{-1})$ formé par les solutions individuelles $u(t)$ de (1.1.1), vérifiant $|u(0)| \leqslant R$. Le lemme de l'alinéa 4.1 montre que $\mathfrak{X}_R$ est fermé. En outre l'application

$$p_0 \colon \mathfrak{X}_R \ni u(t) \mapsto u(0) \in N^{-1}$$

est continue. Ainsi si $B \subset \{u \in N \colon |u| \leqslant R\}$ est borelien (dans N ou N^{-1}, puisque la structure borelienne induite sur N par celle de N^{-1} coincide avec la structure borelienne de N), $p_0^{-1}(B)$ est un ensemble borelien de $\mathfrak{X}_R$ et par suite, puisque $\mathfrak{X}_R$ est un espace metrique polonais (c'est-à-dire, metrique complet et séparable) et l'application

$$p_{t_0} \colon \mathfrak{X}_R \ni u(t) \mapsto u(t_0) \in N^{-1} \qquad (\text{où } t_0 \in (0, \infty))$$

est continue, $B(t_0) = p_{t_0}(p_0^{-1}(B))$ est un ensemble souslinien, donc universellement mesurable, c'est-à-dire mesurable par n'importe quelle mesure borelienne sur N (voir [2], Appendice). Si B est maintenant un sous-ensemble borelien quelconque dans N et si nous posons

$$B_R = B \cap \{u \in N \colon |u| \leqslant R\}$$

alors on aura, pour tout $t \in (0, \infty)$

$$B(t) = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p(t) \,,$$

donc, vu que par ce que nous avons déjà prouvé $B_p(t)$ est universellement mesurable, $B(t)$ est universellement mesurable. Ainsi nous avons démontré la propriété suivante:

Lemme. – *Soit* B *un ensemble borelien dans* N. *Alors pour tout* $t \in (0, \infty)$, *l'ensemble* $B(t)$ (*voir* (1.4.1)) *est universellement mesurable.*

5. – Solutions statistiques.

5.1. Supposons que la mesure μ considerée dans les alinéas 1.2 et 1.5 a le support borné dans N, c'est-à-dire, $\operatorname{supp} \mu \subset \{u \in N\colon |u| \leqslant R\}$ (où $R \in (0, \infty)$ est convenablement choisi).

Définissons les mesures boreliennes $\mu^{(m)}$ et $\mu_t^{(m)}$ (pour $m = 1, 2, \ldots$; $t \in [0, \infty)$) par

$$\mu^{(m)}(\omega) = \mu(P_m^{-1}(\omega \cap P_m N)) , \quad \mu_t^{(m)}(\omega) = \mu^{(m)}(S^{(m)}(t)^{-1}\omega) \tag{5.1.1}$$

pour tout ensemble borelien $\omega \subset N$; evidemment $\mu_0^{(m)} = \mu^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et

$$\int \phi \, d\mu_t^{(m)} = \int \phi(S^{(m)}(t) P_m u) \, d\mu(u) \tag{5.1.2}$$

pour tous $m = 1, 2, \ldots$ et $t \in [0, \infty)$, quelle que soit la fonctionnelle réelle borelienne définie sur N. De (3.1.3) il vient facilement que

$$\operatorname{supp} \mu_t^{(m)} \subset K_0 = \left\{u \in N\colon |u|^2 \leqslant R^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2 \lambda_1^2}\right\} \tag{5.1.3}$$

pour tous $m = 1, 2, \ldots$ et $t \in [0, \infty)$. De plus toute fonctionnelle réelle $\phi(u)$ définie sur N et continue par la topologie induite par N^{-1} la fonction

$$t \to \int \phi(u) \, d\mu_t^{(m)}(u)$$

est continue, uniformément in $m = 1, 2, \ldots$, sur tout intervalle compact dans $[0, \infty)$. C'est une conséquence immédiate de (5.1.2-3), du fait que K_0 est compact dans N^{-1} et de (3.1.6).

5.2. Soit $C(K_0)$ l'espace des fonctionnelles réelles continues sur K_0 dans la topologie induite par N^{-1} (ou d'une manière équivalente, continues par rapport à la topologie faible de N; voir l'alinéa 2.4). Par rapport à la norme usuelle, $C(K_0)$ est un espace de Banach séparable. Soit donc $\mathcal{C}$ une partie dénombrable dense dans $C(K_0)$. Pour $\phi \in \mathcal{C}$ fixée, par le théorème de Ascoli-Arzelà on peut extraire une sous-suite $\{\mu_t^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ telle que $\{\int \phi(u) \, d\mu_t^{(m_j)}(u)\}_{j=1}^{\infty}$ soit convergente, uniformément sur tout intervalle compact dans $[0, \infty)$. Par le procédé diagonal on peut même s'arranger que la suite ci-dessus ait les propriétés de convergence indiquées, quelle que soit $\phi \in \mathcal{C}$. En vertu du fait que $\mathcal{C}$ et dense dans $C(K_0)$ et $\mu_t^{(m)}$ sont des mesures de probabilité il résulte que

$$\lim_{j \to \infty} \int \phi(u) \, d\mu(u_t^{(m_j)}) \tag{5.1.4}$$

existe, uniformément sur tout intervalle compact de $[0, \infty)$, et cela quelle que soit $\phi \in C(K_0)$ (ou même quelle que soit la fonctionnelle réelle ϕ définie dans N et continue par rapport à la topologie induite par N^{-1}).

Pour $t \in [0, \infty)$ fixé, la limite (5.1.4) definit une mesure de Radon sur K_0 et par suite par le théorème de Riesz-Kakutani on obtient une mesure borelienne μ_t (sur K_0 muni par la topologie induite N^{-1}, donc aussi) dans N, telle que

$$\int \phi \, d\mu_t = \lim_{j \to \infty} \int \phi \, d\mu_t^{(m_j)} \tag{5.1.5}$$

quelle que soit la fonctionnelle réelle ϕ définie sur N et continue par rapport à la topologie induite par N^{-1}. Remarquons que en vertu de l'uniformité de la convergence (5.1.4) on déduit que (5.1.5), comme fonction en t, est continue sur $[0, \infty)$. Remarquons aussi que par la definition de μ_t on a

$$\operatorname{supp} \mu_t \subset K_0 \qquad \text{pour tout } t \in [0, \infty) \, . \tag{5.1.6}$$

Il est aussi évident que $\mu_0 = \mu$ car

$$\int \phi(u) \, d\mu_0^{(m_j)}(u) = \int \phi(u) \, d\mu^{(m_j)}(u) = \int \phi(P_{m_j} u) \, d\mu(u) \to \int \phi(u) \, d\mu(u) \, ,$$

en vertu du fait que $P_{m_j} u \to u$ aussi dans N^{-1}.

5.3. Nous allons prouver que la famille $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ obtenue dans l'alinéa précédent est la solution statistique (pas nécéssairement unique) dont l'existence est affermée par le théorème de l'alinéa 1.5. Notons que la condition (j) de ce théorème est évidemment remplie. Pour vérifier la condition (jj) du théorème, prenons une partie K relativement compacte de N, fermée dans N^{-1}, et définissons, pour $p = 1, 2, \ldots$ et $\{t, u\} \in [0, \infty) \times N^{-1}$

$$\varphi_p(t, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_K(t, u) \geqslant 1/p \\ p d_K(t, u) & \text{si } d_K(t, u) < 1/p \end{cases}$$

(voir l'alinéa 4.1). En vertu du lemme de l'alinéa 4.1 il existe un $\eta > 0$ tel que $u \in K_0$ et $d_K(0, u) < \eta$ entraînent

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} d_k(t, S^{(m_j)}(t) P_{m_j} u) \leqslant \frac{1}{p^2}$$

où $t_0 \in (0, \infty)$ est fixé. Évidemment

$$K' = \{u : u \in K_0, d_K(0, u) < \eta\} \subset K \cap K_0$$

et pour $u \in K' \cap K_0$ on a

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \varphi_p(t, s^{(m_j)}(t) P_{m_j} u) < \frac{1}{p} \, . \tag{5.3.1}$$

Par conséquent

$$\int \varphi_p(t_0, u)\, d\mu_{t_0}^{(m_j)}(u) = \int_{K_0} \varphi_p(t_0, S^{(m_j)}(t_0) P_{m_j} u)\, d\mu(u) =$$
$$= \int_{K_0 \cap K'} \varphi_p(t_0, S^{(m_j)}(t_0) P_{m_j} u)\, d\mu(u) + \int_{K_0 \setminus K'} \varphi_p(t_0, S^{(m_j)} P_{m_j} u)\, d\mu(u) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\mu(K_0 \cap K') + \mu(K_0 \setminus K') \leqslant \frac{1}{p} + \mu(K_0 \setminus K') \leqslant \frac{1}{p} + \mu(N \setminus K),$$

d'où en faisant d'abord $j \to \infty$ et puis $p \to \infty$, nous obtenons

$$\mu_{t_0}(\{u \in N : d_K(t_0, u) > 0\}) \leqslant \mu(N \setminus K),$$

c'est-à-dire

$$\mu_{t_0}(\{u \in N : d_K(t_0, u) = 0\}) \geqslant \mu(K).$$

Mais en vertu du lemme de l'alinéa 4.2, l'ensemble

$$\{u \in N : d_K(t_0, u) = 0\}$$

coincide avec $K(t_0)$, et par conséquent nous avons prouvé (1.5.2) dans le cas où $B = K$ est borné dans N et fermé dans N^{-1}.

Soit maintenant B une partie borelienne quelconque de N. Comme la mesure μ est borelienne sur l'espace metrique complet N elle est régulière (voir [3], Ch. III, § 9, Ex. 22) donc il existe une suite $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ de parties compactes de N telle que $\mu(K_j) \nearrow \mu(B \cap K_0)$. Il en résulte $\mu_{t_0}(B(t_0)) \geqslant \mu_{t_0}(K_j(t_0)) \geqslant \mu(K_j) \to \mu(B \cap K_0) = \mu(B)$, ce qui finit la vérification de la condition (jj) du théorème.

5.4. Nous vérifions maintenant les propriétés (1.2.2). Dans ce but remarquons que $|P_m u|^2$ et $\|P_m u\|^2$ sont des fonctionnelles (en u) continues par rapport à la topologie induite par N^{-1}, et cela quel que soit $m = 1, 2, 3, \ldots$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \int |P_m u|^2\, d\mu_t(u) &= \lim_{j\to\infty} \int |P_m u|^2\, d\mu_t^{(m_j)}(u) \\ \int \|P_m u\|^2\, d\mu_t(u) &= \lim_{j\to\infty} \int \|P_m u\|^2\, d\mu_t^{(m_j)}(u) \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

où les limites sont uniformes pour t dans des intervalles compacts de $[0, \infty]$. Il résulte donc aussi

$$\int_0^T \left[\int \|P_m u\|^2 d\mu_t(u)\right] dt = \lim_{j\to\infty} \int_0^T \left[\int \|P_m u\|^2 d\mu_t^{(m_j)}(u)\right] dt. \tag{5.4.2}$$

Or intégrant par rapport à $\mu^{(m_j)}$ les inégalités (3.1.3) et (3.1.5) où on prendra $t=T$, $t_0=0$) on obtient aussitôt

$$\max_{0\leq t\leq T}\int |P_m u|^2 d\mu_t^{(m_j)}(u)+\int\left[\int_0^T \|P_m u\|^2 d\mu_t^{(m_j)}(u)\right]dt\leq$$
$$\leq \max_{0\leq t\leq T}\int |u|^2 d\mu_t^{(m_j)}(u)+\int\left[\int_0^T \|u\|^2 d\mu_t^{(m_j)}(u)\right]dt\leq k_{10}$$

où $k_{10}=k_{10}(T)$ est une constante, qui dépend de μ, Ω, et T mais est indépendante de m et m_j. Ainsi (5.4.1-2) donnent

$$\max_{0\leq t\leq T}\int |P_m u|^2 d\mu_t(u)+\int_0^T\left[\int \|P_m u\|^2 d\mu_t(u)\right]dt\leq k_{10}$$

pour tout $m=1,2,\ldots$. Or $|P_m u|^2 \nearrow |u|^2$ et $\|P_m u\|^2 \nearrow \|u\|^2$; ainsi en appliquant plusieurs fois le théorème de convergence de Beppo Levi, on déduit facilement la propriété (1.2.2).

5.5. Nous allons maintenant établir la relation (1.5.3) (sous la forme plus compacte (2.2.4), dans le cas où ϕ est une fonctionnelle cylindrique de $\mathfrak{J}^{\text{ind}}$. Ainsi on supposera que ϕ vérifie les conditions (2.3.1) et (3.2.6) avec un $m(\in\{1,2,\ldots\})$ adéquate. Cela etant, commençons par remarquer qu'en dérivant (par rapport à t) la relation (5.1.2)) (où on prendra $m=m_j$) il vient facilement (compte tenu de (3.1.1))

$$\frac{d}{dt}\int \phi d\mu^{(m_j)}=\int\langle P_{m_j}f-\nu A S^{(m_j)}(t)P_{m_j}u-$$
$$-P_{m_j}B(S^{(m_j)}(t)u,\, S^{(m_j)}(t)u),\, \phi'_{\Box}\left(\boxed{S^{(m_j)}(t)P_{m_j}u}\right)\rangle\, d\mu(u)=$$
$$=\int\langle P_{m_j}f-\nu Au-P_{m_j}B(u,u),\, \phi'(u)\rangle\, d\mu_t^{(m_j)}(u)\,,$$

d'où

$$\text{(5.5.1)}\qquad \int\phi d\mu+\int_0^t\left\{\int\left[\nu\big((u,\phi'(u))\big)+\langle B(u,u),P_{m_j}\phi'(u)\rangle-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(f,P_{m_j}\phi'(u))\right]d\mu_\tau^{(m_j)}\right\}d\tau=\int\phi(P_{m_j}u)\,d\mu(u)\,.$$

Prenons m_j plus grand que l'entier m qui apparaisse dans (2.3.1) et (3.2.6). Alors dans (5.5.1) l'entité P_{m_j} est superflue. En outre les fonctionnelles (en u)

$$\phi(u)\,,\qquad \{(u,\phi'(u))\}\qquad \text{et}\qquad (f,\phi'(u))$$

dépendant de u par l'intermédiaire de $P_m u$ sont continues par rapport à la topologie de N^{-1}. Ainsi pour déduire de (5.5.1) la relation (2.2.4) il nous faut seulement prouver qu'en plus

$$(5.5.2)\qquad \int_0^t \left[\int \langle B(u, u), \phi'(u)\rangle \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u)\right] d\tau \to \int_0^t \left[\int \langle B(u, u), \phi'(u)\rangle \, d\mu_\tau(u)\right] d\tau .$$

Soit $l = 1, 2, \ldots.$ Alors

$$b_l(u, v, w) = \langle B(P_l u, P_l v, \phi'(w)\rangle$$

est evidemment continue sur $N^{-1}\times N^{-1}\times N^{-1}$, cela en vertu de (2.2.2) et du fait que

$$|A^\alpha P_l u| \leqslant \lambda_l^{\alpha+\frac{1}{2}} \|u\|_{N^{-1}}$$

pour tous $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $l = 1, 2, \ldots$ et $u \in N^{-1}$. Par conséquent

$$(5.5.3)\qquad \int_0^t \left[\int b_l(u, u, u) \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u)\right] d\tau \to \int_0^t \left[\int b_l(u, u, u) \, d\mu_\tau(u)\right] d\tau$$

ce qui montre que pour déduire (5.5.2) nous avons besoin à évaluer les différences entre les termes correspondants de (5.5.2) et (5.5.3). En tenant compte de (2.2.2-3), cela revient à évaluer les entités

$$\gamma_{j,l} = \int_0^t \left[\int |A\phi'(u)| \cdot |P_l u - u| \cdot |A^{\frac{1}{2}} u \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u)\right] d\tau ,$$

$$\gamma_l = \int_0^t \left[\int |A\phi'(u)| \cdot |P_l u - u| \cdot |A^{\frac{1}{2}} u| d\mu_\tau(u)\right] d\tau .$$

Or on a $|A\phi'(u)| \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{2}} \|\phi'(u)\| \leqslant k_{11}$, donc

$$\gamma_l \leqslant k_{11} \int_0^t \left[\int |u - P_l u| |u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \, d\mu_\tau(u)\right] d\tau \to 0 \qquad \text{pour } l \to \infty$$

en vertu de (1.2.2) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ainsi il nous reste seulement à démontrer le fait suivant

$$(5.5.4)\qquad \gamma_{j,l} \to 0 \text{ uniformément en } j, \quad \text{lorsque } l \to \infty .$$

A cet effet, soit $b_p = \{u \in N^1 \colon \|u\| \leqslant p\}$, $p = 1, 2, 3, \ldots.$ Comme b_p est compact dans N et $|u - P_l u| \searrow 0$ pour tout $u \in N$, le théorème de Dini nous donne

$$(3.5.5)\qquad \varepsilon_{p,l} = \max_{u \in b_p} |u - P_l u| \to 0 \qquad \text{lorsque } l \to \infty .$$

Ainsi

$$\gamma_{j,l} \leqslant k_{11} \int_0^t \left[\varepsilon_{p,l} \int_{b_p} |A^{\frac{1}{2}} u| \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u) + \int_{N \setminus b_p} |(1-P_l)u| \cdot |A^{\frac{1}{2}} u| \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u) \right] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant k_{11} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \left[\varepsilon_{p,l} \int_{b_p} \|u\| \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u) + (R^2 + k_4^2 \nu^{-2} \lambda_1^{-2}) \int_{N \setminus b_p} \|u\| \, d\mu(u) \right] d\tau$$

$$\leqslant k_{12} \int_0^t \left[\varepsilon_{p,l} \int_N \|u\| \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u) + \frac{1}{p} \int_{N \setminus b_p} \|u\|^2 \, d\mu_\tau^{(m_j)}(u) \right] d\tau \leqslant k_{12} \left(\varepsilon_{p,l} t^{\frac{1}{2}} k_{10}(t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{p} k_{10}(t) \right)$$

(où on a utilisé d'abord (5.1.3) et puis les évaluations de l'alinéa 5.4).

De cette manière nous avons obtenu

$$\gamma_{j,l} \leqslant k_{13} \left(\varepsilon_{p,l} + \frac{1}{p} \right), \tag{5.5.6}$$

où k_{13} est une constante (indépendante de $p, l, j = 1, 2, 3, \ldots$). Il est manifeste que (5.5.5-6) entraînent (5.5.4).

5.6. Il faut se convaîncre maintenant que le relation (2.2.4) est vérifiée pour toute $\phi \in \mathfrak{J}^{\text{ind}}$. Pour cela prenons la suite $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}^{\text{ind}}$ de fonctionnelles cylindriques attachées à ϕ conformément à l'alinéa 2.3. La relation (2.2.4) est verifiée pour chaque $\phi = \phi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Le passage à la limite se fait comme dans la preuve donnée pour les solutions individuelles, en j'appuyant sur les propriétés (1.2.2) et (5.1.6) des la famille $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ et sur les propriétés (ii) et (iii) de l'alinéa 2.3.

Il nous reste à écarter la restriction que le support de la donnée initiale μ est bornée dans N. Soit donc μ une mesure de probabilité dans N satisfaisant la condition (1.2.4). Soit la mesure ν_q définie par

$$\nu_q(\omega) = \mu(\omega \cap \{u \in N : q - 1 \leqslant |u| < q\})$$

on ω est un ensemble borelien dans N et $q = 1, 2, \ldots$. Pour $\nu_q(N) = 0$ posons $\mu_q = 0$ et pour $\nu_q(N) > 0$ posons $\mu_q = \nu_q(N)^{-1} \nu_q$. Pour ce dernier cas, soit $\{\mu_{q,t}\}_{0<t<\infty}$ la solution statistique à donnée initiale μ_q, que nous avons construit dans les alinéas précédents. Si $\mu_q = 0$ on posera $\mu_{q,t} = 0$. Soit maintenat

$$\mu_t = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_q(N) \mu_{q,t} . \tag{5.6.1}$$

Évidemment μ_t est une mesure de probabilité, borelienne dans N. Il est aussi évident que la famille $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ satisfait la propriété (jj) du théorème de l'alinéa 1.5. Il nous reste donc à vérifier les propriétés (j) et (jjj) du même théorème et les relations (1.2.2).

Comme il est facile à vérifier que la définition (5.6.1) et les propriétés (1.2.2) pour μ^t entraînent les conditions (j) et (jjj) du théorème, nous nous bornerons à vérifier (1.2.2).

5.7. Soit pour moment $\mu = \mu_q$ et soit $\{\{\mu_t^{(m_j)}\}\}_{j=1}^{\infty}$ la suite des famille $\{\mu_\tau^{(m_j)}\}_{0<t<\infty}$ qu'on a utilisé pour la construction de la solution $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ (dans le cas présent, de la solution $\{\mu_{q,t}\}_{0<t<\infty}$). En posant, dans (3.1.3-4), $m = m_j$, $u_m = P_{m_j}u$, $t_0 = 0$ et en intégrant par rapport à μ nous obtenons

$$(5.7.1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int |u|^2\, d\mu_t^{(m_j)}(u) \leqslant \exp\left[-\nu\lambda_1 t\right] \int |P_{m_j}u|^2 d\mu(u) + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1^2} \\ \displaystyle\int_0^t \left[\int \|u\|^2\, d\mu_\tau^{(m_j)}(u)\, d\tau\right] \leqslant \frac{1}{\nu}\int |P_{m_j}u|^2\, d\mu(u) + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1}\, t \end{cases}$$

quels que soient $j = 1, 2, 3, \ldots,\ t \in (0, \infty)$. En remplaçant dans (5.7.1) les fonctionnelles $|u|^2$ et $\|u\|^2$ par $|P_l u|^2$, resp. $\|P_l u\|^2$ $(l = 1, 2, \ldots)$, il nous est permis de passer à la limite dans (5.7.1) et par consequent d'obtenir

$$\int |P_l u|^2\, d\mu_t(u) \leqslant \exp\left[-\nu\lambda_1 t\right] \int |u|^2 d\mu(u) + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1^2}$$

$$\int_0^t \left[\int \|P_l\, u\|^2\, d\mu_\tau(u)\right] d\tau \leqslant \frac{1}{\nu}\int |u|^2 d\mu(u) + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1}\, t\,.$$

Ici, en faisant $l \to \infty$, nous pouvons, en appliquant plusieures fois le théorème de Beppo Levi, déduire enfin

$$(5.7.2)\qquad \begin{cases} \displaystyle |u|^2\, d\mu_t(u) \leqslant \exp\left[-\nu\lambda_1 t\right] \int |u|^2 d\mu(u) + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1^2} \\ \displaystyle\int_0^t \left[\int \|u\|^2 d\mu_\tau(u)\right] d\tau \leqslant \frac{1}{\nu}\int |u|^2 d\mu(u) + \frac{k_4^2}{\nu^2\lambda_1}\, t \end{cases}$$

quel que soit $t \in (0, \infty)$. En remplaçant dans (5.7.2) les mesures $u_t (0 < t < \infty)$ par $\mu_{q,t} (0 < t < \infty)$, en multipliant par $\nu_q(N)$ et en sommant en $q = 1, 2, \ldots$, nous obtenons pour les mesures u_t définies par (5.6.1) exactement les relations (5.7.2).

Ceci achève la preuve du théorème de l'alinéa 1.5.

6. – Propriétés supplémentaires des solutions statistiques.

6.1. Dépuis ce moment, par solution statistique de (1.1.1) à donnée initiale μ, nous sous-entendrons une solution du type que fournit le théorème de l'alinéa 1.5, à la preuve duquel nous avons dédié tout le § 5.

6.2. PROPOSITION. – *Soit* $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ *une solution statistique de* (1.1.1) *à donnée initiale* μ, *dont le support est borné dans* N. *Alors le support* $\operatorname{supp}\mu_t$ *de* μ_t *est borné dans* N, *uniformément en* $t \in (0, \infty)$.

DÉMONSTRATION. – Soit $R \in (0, \infty)$ tel que

$$\operatorname{supp}\mu \subset \{u \in N: |u| \leqslant R\} .$$

Alors en vertu de (3.3.1) on aura, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\{u \in N: |u| \leqslant R\}(t) \subset \left\{u \in N: |u|^2 \leqslant R^2 + \frac{k_4^2}{\nu^2 \lambda_1^2}\right\} (\stackrel{\text{def}}{=} K_0)$$

donc

$$1 = \mu(\{u \in N: |u| \leqslant R\}) \leqslant \mu_t(\{u \in N: |u| \leqslant R\}(t)) \leqslant \mu_t(K_0) \leqslant 1$$

ce qui montre que $\operatorname{supp}\mu_t \subset K_0$, quel que soit $t \in (0, \infty)$.

6.3. PROPOSITION. – *Soit* $\{\mu_t\}_{0<t<\infty}$ *une solution statistique de* (1.1.1) *à donné initiale* μ, *dont le support est borné dans* N^1. *Alors il existe un* $t_1 > 0$ *tel que pour tout* $t \in [0, t_1]$, *le support supp* μ_t *de* μ_t *est borné dans* N^1 *et* μ_t *est uniquement determinée.*

DÉMONSTRATION. – Soit $R \in (0, \infty)$ tel que

$$\operatorname{supp}\mu \subset \{u \in N^1: \|u\| \leqslant R\} (\stackrel{\text{def}}{=} K)$$

alors il est bien connu (voir [13], [14] ou [6]) qu'il existe un $t > 0$ et un R tels que

$$\{u \in N^1: \|u\| \leqslant R\}(t) \subset \{u \in N^1: \|u\| \leqslant R_1\} (\stackrel{\text{def}}{=} K_1)$$

pour tout $t \in [0, t_1]$, et qu'en outre, toute solution individuelle, partant de K sera uniquement déterminée sur l'intervalle « du temps » $[0, t_1]$. Le fait que $\operatorname{supp}\mu_t \subset K_1$, résulte comme dans l'alinéa 6.2. Quant à l'unicité de μ_t, pour $t \in [0, t_1]$ on procède ainsi: soit $B \subset N^1$ ouvert dans N^1. Il est aussi connu (voir de nouveau [13] ou [6]) que si on a choisi t_1 assez petit, alors, pour tout $t \in [0, t_1)$ fixé,

$$B_K^t = \{u \in K: \text{la solution individuelle qui parte de } u \text{ est dans } B \text{ au moment } t\}$$

est ouvert dans K, par rapport à la topologie induite par N^1. Ainsi B_K^t et $K \setminus B_K^t$ sont boreliens dans N^1, donc aussi dans N. Il résulte

$$1 = \mu(B_K^t) + \mu(K \setminus B_K^t) \leqslant \mu_t(B_K^t(t)) + \mu_t((K \setminus B_K^t)(t)) \leqslant \mu_t(B) + \mu_t(N \setminus B) = 1 ,$$

ce qui entraîne $\mu_t(B) = \mu(B_K^t)$ qui est uniquement determiné par μ et B. Il découle aisément que μ_t est uniquement determinée sur tout ensemble fermé (d'abord de N^1 et puis) de N, d'où par la régularité de μ_t, il résulte que μ_t est uniquement déterminée.

6.4. PROPOSITION. – *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Toute solution individuelle de* (1.1.1) *est uniquement détérminée par sa donnée initiale.*

(ii) *Toute solution statistique de* (1.1.1) *est uniquement déterminée par sa donnée initiale.*

(iii) *Toute solution statistique de* (1.1.1) *a donnée initiale une mesure de Dirac* δ_{u_0} *est de la forme*

$$\{\delta_{u(t)}\}_{0<t<\infty} \tag{6.4.1}$$

où $u(t)$ *est une solution individuelle de* (1.1.1) *à donnée initiale* u_0.

DÉMONSTRATION. – Il est manifeste que (ii) entraîne (i) et (iii). D'autre part si (i) n'est pas vraie on aurait deux solutions individuelles distinctes $v(t)$ et $w(t)$ qui partent d'une même donnée $u_0 \in N$. Alors la famille $\{\frac{1}{2}\delta_{v(t)} + \frac{1}{2}\delta_{w(t)}\}_{0<t<\infty}$ serait une solution statistique de (1.1.1) à donnée initiale δ_{u_0} qui n'est pas de la forme (6.4.1). Par conséquent, (iii) entraîne (i). Il nous reste à démontrer que (i) entraîne (ii). Cette preuve est apparentie à celle donnée dans l'alinéa 6.3. Esquissons-la. L'unicité des solutions individuelles entraîne le fait (en vertu du lemme de l'alinéa 4.2) que si $B \subset N$ est fermé dans N et si

$$B^t = \{u \in N: \text{la solution individuelle qui parte de } u \text{ est dans } B \text{ au moment } t\}$$

alors B^t est aussi fermé dans N. Comme dans l'alinéa 6.3 on conclut que $\mu_t(B) = \mu(B^t)$ est uniquement determiné par μ et B et par suite que μ_t est uniquement determinée sur tout ensemble fermé de N, donc uniquement determinée comme mesure borelienne.

6.5. COROLLAIRE. – *Supposons que la dimension n dans* (1.1.1) *est egale à* 2. *Alors la solution statistique de* (1.1.1) *est uniquement determinée par sa donnée initiale* μ.

En effet, dans ce cas les solutions individuelles sont uniquement déterminée par leurs données initiales (voir [12] ou [10], Ch. I, § 6).

6.6. Les propriétés des alinéas 6.2-3 ont été obtenues déjà dans [6], § 5 d'une manière plus difficile, en n'utilisant point la propriété (jj) (dans l'alinéa 1.5) des solutions statistiques. Les preuves des propositions des alineas 6.4-5 ont été esquissées (dans le cadre monins adéquate fournit par la démonstration d'existence donnée dans [6] § 3) dans l'exposition [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. CATTABRIGA, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), pp. 1-33.

[2] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris (1969), 2-ème ed.

[3] N. DUNFORD - J. L. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Part I: *General theory*, Interscience Publ., New York (1958).

[4] C. FOIAS, *Solutions statistiques des équations d'évolution non-linéaires*, Centro Intern. Mat. Est., Varenna (1970).

[5] C. FOIAS, *Un cadre fonctionnel pour la théorie de la turbulence* (en Russe), Uspehi Mat. Nauk (à paraître).

[6] C. FOIAS, *Statistical study of Navier-Stokes equations I*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **48** (1973).

[7] C. FOIAS, *Statistical study of Navier-Stokes equations II*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **49** (1974).

[8] E. HOPF, *Über die Anfangswertaufgabe für hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr., **4** (1951), pp. 213-2231.

[9] J. LERAY, *Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limite des parois*, J. Math. pures et appl., 9-ème sér., **13** (1934), pp. 331-418.

[10] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1969).

[11] J. L. LIONS - J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Mat. Hautes Et. Sc. Publ., **19** (1964), pp. 5-68.

[12] J. L. LIONS - G. PRODI, *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension* 2, C. R. Acad. Sci. Paris, **248** (1959), pp. 3519-3521.

[13] G. PRODI, *On probability measures related to the Navier-Stokes equations in the* 3-*dimensional case*, Air Force Research Div., Contract AF 61(052)-414, Techn. Note, **2** (1961), Trieste, 1961.

[14] G. PRODI, *Teoremi di tipo locale per il sistema di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionarie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32** (1952), pp. 374-397.