Annals of Mathematics, **0** (000), 1–53

Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers

Par Christian MAUDUIT et Joël RIVAT

Résumé. L'objet de cet article est de répondre à une question posée par Gelfond en 1968 en montrant que la somme des chiffres $s_q(p)$ des nombres premiers p écrits en base $q \geqslant 2$ est équirépartie dans les progressions arithmétiques (excepté pour certains cas dégénérés bien connus). Nous montrons également que la suite $(\alpha s_q(p))$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Abstract. In this article we answer a question proposed by Gelfond in 1968. We prove that the sum of digits of prime numbers written in a basis $q \geqslant 2$ is equidistributed in arithmetic progressions (except for some well known degenerate cases). We prove also that the sequence $(\alpha s_q(p))$ where p runs through the prime numbers is equidistributed modulo 1 if and only if $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Introduction

Dans tout cet article, q désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Tout nombre entier n peut s'écrire de manière unique en base q sous la forme

$$n = \sum_{k \geqslant 0} n_k q^k \quad (n_k \in \{0, \ldots, q-1\}), \tag{1}$$

où les n_k sont tous nuls à partir d'un certain rang. La somme des chiffres du nombre entier n écrit en base q est définie par :

$$s_q(n) = \sum_{k \geqslant 0} n_k. \tag{2}$$

Dans toute la suite, p désigne un nombre premier, $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et pour tout nombre réel x on note $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x\}$, $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ et $\mathrm{e}(x) = \exp(2i\pi x)$.

1.1. La recherche de nombres premiers dans des suites classiques

La recherche de nombres premiers dans des suites particulières est un problème classique en théorie des nombres, connu pour sa difficulté, et pour lequel on dispose de très peu de résultats. En dehors du résultat initial établi par Dirichlet en 1837 [37, pp. 315–350] étudiant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, précisé ultérieurement par le théorème de Siegel-Walfisz (on trouvera une preuve de ce dernier théorème dans [14, Chapitre 8]), les suites classiques dans lesquelles on est capable d'estimer précisément la proportion de nombres premiers sont les suites formées des entiers de la forme $\lfloor n\alpha \rfloor$ ou de la forme $\lfloor n^\alpha \rfloor$. Dans le premier cas, cela résulte facilement du théorème établi par Vinogradov en 1948 montrant l'équirépartition modulo 1 de la suite $(\alpha p)_{p\in\mathcal{P}}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (on trouvera une preuve de ce théorème dans [14, Chapitre 9]). Dans le second cas, on ne dispose que de résultats partiels concernant soit presque tout α, soit des intervalles $1 < \alpha < \alpha_0$ pour certaines valeurs de α_0. La valeur $\alpha_0 = 12/11$ obtenue en 1953 par Piatetski-Shapiro [47] a été améliorée successivement par Kolesnik, Graham, Leitmann, Heath-Brown, Liu et Rivat, la meilleure valeur actuelle $\alpha_0 = 1.16117\ldots$ ayant été obtenue par Rivat et Sargos dans [51]. Ces résultats de nature analytique sont à mettre en parallèle avec ceux qui ont pu être obtenus grâce à des constructions de nature algébrique. Il est connu depuis les travaux de Fermat que tout nombre premier $p \equiv 1 \bmod 4$ est de la forme m^2+n^2 (voir par exemple Hardy-Wright [22, Theorem 251]) et Fouvry et Iwaniec [16] ont réussi en 1997, en exploitant la nature algébrique du problème et en utilisant des méthodes de crible très sophistiquées, à obtenir une formule asymptotique pour le nombre de nombres premiers $p \leqslant x$ de la forme $p = m^2 + n^2$ avec m premier. À la suite de ce travail, Friedlander et Iwaniec [19, 20] ont apporté une contribution majeure dans cette direction en montrant un résultat de même nature pour les nombres premiers de la forme $p = m^2 + n^4$, suivis par Heath-Brown [26] pour les nombres premiers de la forme $p = m^3 + 2n^3$. L'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $p + 2$ (nombres premiers jumeaux), de la forme $n^2 + 1$ (plus généralement de forme polynomiale), de la forme $2^n + 1$ (nombres de Fermat), $2^n - 1$ (nombres de Mersenne) ou dans des suites récurrentes linéaires, constitue une série de problèmes très largement ouverts [50].

Les résultats que nous présentons dans ce travail s'inscrivent dans ce cadre puisque nous montrons par exemple la bonne répartition des nombres premiers dans la suite des entiers n pour lesquels $s_q(n) \equiv a \bmod m$.

1.2. Représentation des nombres premiers en base q

Les résultats que nous présentons s'inscrivent également dans le cadre de l'étude de la représentation des nombres premiers en base q. On connaît peu de résultats sur ce sujet en dehors des travaux de Copeland et Erdős [7] en 1946 qui montrent, pour tout ensemble $\mathcal{E}$ de nombres entiers vérifiant, pour tout $\theta < 1$, $\operatorname{card}\{n \leqslant x,\ n \in \mathcal{E}\} \gg x^\theta$ pour x assez grand, la normalité du nombre réel dont l'écriture en base q est formée de 0, suivi de la concaténation dans l'ordre croissant des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ écrits en base q. Il découle en particulier de leur théorème que

$$\sum_{p \leqslant x} s_q(p) = \frac{1}{2}(q-1)\frac{x}{\log q} + o(x)$$

et on trouvera dans [33, 54, 27] des estimations plus précises de cette fonction sommatoire de la somme des chiffres des nombres premiers, dans [34] celle des moments d'ordre k, et dans [36, 35, 2] l'étude de la distribution limite de la fonction somme des chiffres dans l'ensemble des nombres premiers. Le théorème de Lejeune Dirichlet [37, pp. 315–342] concernant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques rentre également dans ce cadre et il permet de montrer, comme l'a remarqué Sierpiński, que pour toute suite finie de chiffres $a_1, \dots, a_m$ et $b_1, \dots, b_n$ telle que $(b_n, q) = 1$, il existe une infinité de nombres premiers dont les m premiers chiffres sont successivement $a_1, \dots, a_m$ et les n derniers chiffres successivement $b_1, \dots, b_n$ ([55] contient une preuve de ce théorème dans le cas $q = 10$ et attribue à une remarque de Knapowski le cas général). Harman a étendu dans [23] ce résultat à des nombres premiers qui possèdent certains chiffres librement préassignés, démontrant ainsi une conjecture due à Wolke [60], qui avait pu en donner une preuve sous l'hypothèse de Riemann généralisée.

On remarque que si $p \geqslant 3$ est un nombre premier, alors $2 \leqslant s_2(p) \leqslant \left\lfloor \frac{\log p}{\log 2} \right\rfloor + 1$. L'existence d'une infinité de nombres premiers de Fermat ou de Mersenne, qui correspondent respectivement à la borne inférieure et à la borne supérieure de cette inégalité, constitue un problème d'une difficulté extrême qui s'inscrit également dans le cadre de l'étude de la représentation des nombres premiers en base 2.

Par ailleurs on ne connaît pas d'algorithme simple permettant de savoir si un nombre entier est premier à partir de la donnée de son écriture en base q. Minsky et Papert ont d'ailleurs montré dans [43] que l'ensemble des nombres premiers n'est reconnaissable par aucun q-automate fini (pour cette dernière notion, on pourra consulter [1] ou [13]). Cobham a présenté dans [6] plusieurs preuves alternatives de ce résultat qui a été généralisé par Hartmanis et Shank dans [24] et Schützenberger dans [53] en montrant qu'aucun ensemble infini de nombres premiers n'est reconnaissable par un q-automate fini (ni même par un automate à pile) et par Mauduit dans [39] en montrant que l'ensemble des nombres premiers n'est engendré par aucun morphisme sur un alphabet fini.

Les théorèmes que nous établissons ici peuvent être interprétés comme une démonstration de l'indépendance statistique entre la propriété multiplicative « être un nombre premier » et une propriété de nature automatique relative à la représentation des nombres entiers en base q (le lecteur trouvera dans l'introduction de [18] une présentation de l'aspect automatique de ce problème).

On pourra également parler de l'indépendance statistique entre une propriété multiplicative et une propriété q-multiplicative ou q-additive (notions introduites indépendemment par Bellman et Shapiro [3] et Gelfond [21]), la fonction somme des chiffres vérifiant, pour tous entiers k, a, b tels que $b < q^k$, la relation $s_q(q^k a + b) = s_q(q^k a) + s_q(b)$.

1.3. La fonction somme des chiffres

La fonction somme des chiffres apparaît dans de nombreux problèmes mathématiques (voir [40] pour un survol de ces questions) mais c'est Mahler qui la fait intervenir le premier dans un contexte d'analyse harmonique profondément lié à notre propos. Il introduit dans [38] la suite $\left((-1)^{s_2(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ afin d'illustrer plusieurs théorèmes d'analyse spectrale obtenus par Wiener [59] et montre en particulier :

Théorème A. *Pour tout nombre entier k la suite*

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N}(-1)^{s_2(n)}(-1)^{s_2(n+k)}\right)_{N\geqslant 1}$$

converge et sa limite est non nulle pour une infinité de k.

Ces travaux ont ouvert la voie à l'étude spectrale des systèmes dynamiques symboliques. En effet la convergence de cette suite peut être comprise comme une conséquence de l'unique ergodicité du système dynamique associé à la suite $((-1)^{s_2(n)})_{n\geqslant 0}$ appelé système dynamique de Thue-Morse (voir par exemple [48]).

Keane a montré dans [32] que pour tout entier k, la limite de cette suite est égale au k-ième coefficient de Fourier de la mesure de corrélation associée au système dynamique de Thue-Morse, c'est-à-dire le produit de Riesz $\prod_{n\geqslant 0}(1-\cos 2^n t)$. Des résultats analogues ont été obtenus dans [8, 42], pour la classe plus générale des suites q-additives ou q-multiplicatives.

1.4. Le théorème de Gelfond et ses conséquences

Des résultats importants concernant la répartition dans les progressions arithmétiques de la somme des chiffres de certaines suites classiques ont été donnés par Gelfond dans [21] (on trouvera dans [15] des premiers résultats concernant le cas où m est un nombre premier) :

Théorème B. *Soient q, m, et d des nombres entiers positifs tels que $q \geqslant 2$ et $(m, q-1) = 1$. Alors pour tout $(a, r) \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, d-1\}$ on a*

$$\operatorname{card}\{n < N,\ s_q(n) \equiv a \bmod m,\ n \equiv r \bmod d\} = \frac{N}{md} + O(N^{\lambda})$$

avec $\lambda = \frac{1}{2\log q} \log \frac{q \sin \pi/2m}{\sin \pi/2mq} < 1$.

Gelfond déduit de ce théorème la bonne répartition dans les progressions arithmétiques de la somme des chiffres des entiers sans facteur puissance k-ième ($k \geqslant 2$) et Mauduit et Sárközy en déduisent [41] la bonne répartition dans les progressions arithmétiques de $s_q(p_1+p_2)_{(p_1,p_2)\in\mathcal{P}^2}$ (on trouvera également dans [41] des résultats concernant les valeurs moyennes et les valeurs extrémales du nombre de facteurs premiers (comptés avec ou sans multiplicité) de l'entier n lorsque celui-ci est soumis à la condition $s_q(n) \equiv a \bmod m$, ainsi qu'un théorème du type Erdős-Kac).

Par contre le Théorème B n'est pas suffisant pour décrire la répartition de la somme des chiffres des nombres premiers, ce qui conduit Gelfond à poser plusieurs problèmes à la fin de son article, dont le suivant :

> « Il serait aussi intéressant de trouver le nombre des nombres premiers $p \leqslant x$ tels que $s_q(p) \equiv l \bmod m$ ».

Montgomery mentionne ce problème de Gelfond dans une série de problèmes ouverts [44, Problem 67, p. 208] et indique que celui-ci a été abordé par Olivier dans [45, 46] en observant toutefois que les sommes de type II n'ont pas été estimées.

1.5. Nombres presque premiers

Nous avons mentionné dans le paragraphe 1.1 plusieurs problèmes ouverts concernant la recherche de nombres premiers dans des suites classiques. L'utilisation de méthodes de crible a permis d'obtenir récemment des réponses aux questions analogues obtenues en remplaçant l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers par l'ensemble $\mathcal{P}_r$ ($r \geqslant 2$) des nombres entiers possédant au plus r facteurs premiers (appelés nombres presque premiers).

Ainsi, à la suite de travaux de Brun [4], Rademacher [49] et Rényi [52], Chen a démontré [5] l'existence d'une infinité de nombres premiers p tels que $p+2 \in \mathcal{P}_2$ et Iwaniec [30] l'existence d'une infinité d'entiers n tels que $n^2+1 \in \mathcal{P}_2$.

En ce qui concerne l'étude de la somme des chiffres, Fouvry et Mauduit [18, 17] ont montré, en injectant dans le crible des estimations d'exposants de répartition liées à l'étude spectrale de certains opérateurs quasi-compacts, le théorème suivant (on rappelle que pour tout nombre entier $r \geqslant 1$ fixé, on a : $\mathrm{card}\{n \leqslant x,\ n = p_1 \dots p_r\} \sim \frac{x (\log\log x)^{r-1}}{\log x\ (r-1)!}$ (voir par exemple [56])) :

Théorème C. *Pour q et m entiers $\geqslant 2$ tels que $(m, q-1) = 1$, on a pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $x \to +\infty$, la minoration*

$$\mathrm{card}\{n \leqslant x,\ s_q(n) \equiv a \bmod m,\ n \in \mathcal{P}_2\} \gg_{q,m} \frac{x}{\log x}.$$

La clef de la démonstration du Théorème C consiste à majorer une certaine somme d'exponentielles par une borne meilleure que la racine carrée de la majoration triviale, ce qui permet à Fouvry et Mauduit de montrer un théorème du type Bombieri-Vinogradov pour la fonction somme des chiffres avec un exposant strictement supérieur à $1/2$.

On pourra comparer le Théorème C avec le suivant dû à Dartyge et Tenenbaum [11] qui permet d'obtenir une minoration valable pour les entiers possédant exactement r facteurs premiers :

Théorème D. *Pour q, m, et r entiers $\geqslant 2$ tels que $(m, q-1) = 1$, on a pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $x \to +\infty$, la minoration*

$$\mathrm{card}\{n \leqslant x,\ s_q(n) \equiv a \bmod m, n = p_1 \dots p_r\} \gg_{q,m,r} \frac{x(\log\log x)^{r-2}}{\log x \log\log\log x}.$$

Mentionnons également parmi cette catégorie de résultats l'existence d'une infinité de nombres presque premiers dans toute suite d'entiers engendrée par un automate fini fortement connexe [18] et l'existence d'une infinité de nombres presque premiers parmi les suites de nombres entiers ellipséphiques [9, 10].

2. Résultats

On note Λ la fonction de Von Mangoldt définie par $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^a$ (p premier, a entier $\geqslant 1$), et $\Lambda(n) = 0$ sinon.

Théorème 1. *Pour $q \geqslant 2$ et α tels que $(q-1)\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, il existe $\sigma_q(\alpha) > 0$ tel que*

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(\alpha s_q(n)) = O_{q,\alpha}(x^{1-\sigma_q(\alpha)}). \tag{3}$$

Ce théorème nous permet d'apporter une réponse complète à la question de Gelfond [21] ainsi qu'à des questions de même nature concernant les propriétés arithmétiques de la somme des chiffres des nombres premiers.

Théorème 2. *Pour $q \geqslant 2$, la suite $(\alpha s_q(p))_{p \in \mathcal{P}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Théorème 3. *Pour q et m entiers $\geqslant 2$, il existe $\sigma_{q,m} > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathrm{card}\{p \leqslant x,\ s_q(p) \equiv a \bmod m\} = \frac{(m, q-1)}{m} \pi(x; a, (m, q-1)) + O_{q,m}(x^{1-\sigma_{q,m}}). \tag{4}$$

3. Description de la preuve du Théorème 1

Pour estimer une somme de la forme $\sum_n \Lambda(n)g(n)$, on utilise dans la section 4 une identité combinatoire due à Vaughan qui fait apparaître des sommes multiples de la forme

$$\sum_m \sum_n a_m b_n g(mn).$$

Ces sommes sont qualifiées de sommes de type I lorsque l'un au moins des coefficients a_m ou b_n est lisse, par exemple $b_n = 1$ ou $b_n = \log n$ (la variable correspondante étant d'un ordre de grandeur significatif) et de type II lorsque les coefficients a_m et b_n ont une structure arithmétique trop complexe pour pouvoir être exploitée (chacune des variables m et n étant, dans ce cas, d'un ordre de grandeur significatif).

La principale difficulté réside généralement, et la preuve du Théorème 1 n'échappe pas à cette règle, dans l'estimation des sommes de type II. Une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour « lisser » la variable m, puis l'inégalité de Van der Corput, nous amène dans la section 6.1, puisque $g(n) = \mathrm{e}(f(n))$ avec $f(n) = \alpha s_q(n)$, à considérer dans l'exponentielle des différences de la forme

$$f(m(n+r)) - f(mn),$$

où la variable r est très petite devant n. Or, les chiffres de $m(n+r)$ et ceux de mn coïncident assez rapidement au delà de la taille de mr, une différence n'étant possible que par la propagation d'une retenue. En prenant une petite marge, on s'assure que les couples (m,n) exceptionnels pour lesquels la coïncidence n'a pas lieu sont en nombre négligeable. Nous pouvons ainsi remplacer dans la section 6.2 la fonction f par une fonction tronquée f_λ qui ne prend en compte que les chiffres de n de poids inférieur à λ (λ est un paramètre qui dépend essentiellement de la taille de m). La fonction f_λ est périodique de période q^λ, et cette propriété va nous permettre dans la section 6.3 en quelque sorte de séparer la structure digitale de la structure multiplicative du problème. La clef permettant de poursuivre la majoration des sommes de type II consiste à exprimer la transformée de Fourier discrète de $\mathrm{e}(f_\lambda(n))$ sous forme de produits de polynômes trigonométriques, puis à estimer des moyennes d'ordre 1 et des moyennes quadratiques pondérées de ces produits. Dans le cas des moyennes d'ordre 1, l'objectif est, comme dans [18], d'exploiter la structure automatique de la fonction somme des chiffres et d'obtenir une majoration meilleure que la racine carrée de la borne triviale. Ces estimations ont un caractère assez technique et présentent un intérêt indépendant du reste de l'article. Aussi, afin de ne pas interrompre le fil conducteur de la preuve du théorème 1, nous avons choisi de les présenter dans une partie indépendante située à la fin de cet article (section 12). On achève la majoration des sommes de type II dans la section

7 en appliquant ces estimations et en prenant soin de séparer le cas $q = 2$ du cas $q \geqslant 3$ qui conduisent chacun à des difficultés de nature différente.

Enfin, nous traitons dans la section 8 les sommes de type I par une méthode analogue à celle développée par Fouvry et Mauduit dans [18, 17], ce qui nous permet de terminer la preuve du Théorème 1.

4. Identité combinatoire

Une méthode classique (Hoheisel [28], Vinogradov [58]) pour traiter une somme de la forme $\sum_n \Lambda(n)g(n)$ est de la transformer en sommes multiples

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k} a_1(n_1)\cdots a_k(n_k)g(n_1\cdots n_k)$$

où $n_1,\ldots,n_k$ satisfont des conditions multiplicatives. On appelle traditionnellement sommes de type I des sommes multiples comportant au moins une variable « lisse », les autres étant qualifiées de sommes de type II. Dans notre travail (et comme cela est le plus souvent le cas) l'estimation des sommes de type II constitue la difficulté essentielle. Vaughan a donné une élégante formulation de cette méthode [57], qui a ensuite été approfondie par Heath-Brown [25]. Signalons par ailleurs que le crible introduit par Friedlander et Iwaniec (voir par exemple [31, Theorem 13.12, page 351]) conduit également à des majorations de sommes analogues aux sommes de type I et de type II, mais dans des intervalles de sommation différents.

Nous allons utiliser une variante connue de la méthode de Vaughan (cf. [31, Proposition 13.4, page 345]) permettant d'éviter l'apparition de fonctions diviseurs qui ne peuvent pas être individuellement majorées par un facteur logarithmique.

Lemme 1. *Soient $q \geqslant 2$, $x \geqslant q^2$, $0 < \beta_1 < 1/3$, $1/2 < \beta_2 < 1$. Soit g une fonction arithmétique. On suppose que pour tous réels $M \leqslant x$ et tous nombres complexes a_m, b_n avec $|a_m| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$, on a*

$$\left|\sum_{\frac{M}{q}<m\leqslant M}\ \sum_{\frac{x}{qm}<n\leqslant\frac{x}{m}} a_m b_n g(mn)\right| \leqslant U \quad \textit{pour} \quad x^{\beta_1} \leqslant M \leqslant x^{\beta_2} \quad \textit{(type II)}, \tag{5}$$

$$\sum_{\frac{M}{q}<m\leqslant M}\ \max_{\frac{x}{qm}\leqslant t\leqslant\frac{x}{m}} \left|\sum_{t<n\leqslant\frac{x}{m}} g(mn)\right| \leqslant U \quad \textit{pour} \quad M \leqslant x^{\beta_1} \quad \textit{(type I)}. \tag{6}$$

Alors

$$\left|\sum_{x/q<n\leqslant x} \Lambda(n)g(n)\right| \ll U\,(\log x)^2.$$

Remarque : Nous verrons que la majoration que nous obtiendrons dans la partie 7 pour les sommes de type II permet en réalité de choisir β_1 arbitrairement proche de 0 (voir l'inégalité (43) dans le cas $q = 2$ et l'inégalité (62) dans le cas $q \geqslant 3$), ce qui permettrait de traiter plus grossièrement les sommes de type I.

Nous avons néanmoins choisi d'étudier de manière plus fine les sommes de type I afin d'obtenir un meilleur exposant $\sigma_q(\alpha)$ dans le théorème 1, en vue d'éventuelles applications.

Démonstration. Pour $u \geqslant 1$ et $s \in \mathbb{C}$ posons

$$G(s) = \sum_{n \leqslant u} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad F(s) = \sum_{n \leqslant u} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

et considérons, pour $\Re(s) > 1$, l'égalité

$$-\frac{\zeta'}{\zeta} = F - \zeta' G - \zeta F G + \zeta \left(\frac{1}{\zeta} - G \right) \left(-\frac{\zeta'}{\zeta} - F \right),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.

Pour tout $x \geqslant q^2$, on a $\sqrt{x} \leqslant x/q$. En identifiant le coefficient de n^{-s} de chaque côté de l'égalité on obtient donc pour $1 \leqslant u \leqslant \sqrt{x}$:

$$\sum_{x/q < n \leqslant x} \Lambda(n) g(n) = S_1 - S_2 + S_3$$

avec

$$S_1 = \sum_{\substack{m \leqslant u \\ x/q < mn \leqslant x}} \mu(m) \log(n)\, g(mn)$$

$$S_2 = \sum_{\substack{m_1 \leqslant u \\ m_2 \leqslant u \\ x/q < m_1 m_2 n \leqslant x}} \mu(m_1)\, \Lambda(m_2)\, g(m_1 m_2 n)$$

$$S_3 = \sum_{\substack{u < m \leqslant x \\ u < n_1 \leqslant x \\ x/q < m n_1 n_2 \leqslant x}} \mu(m)\, \Lambda(n_1)\, g(m n_1 n_2).$$

Choisissons $u := x^{\beta_1}$, ce qui implique en particulier $1 \leqslant u \leqslant \sqrt{x} \leqslant x/q$. La somme S_1 est une somme de type I. On écrit

$$S_1 = \sum_{m \leqslant u} \mu(m) \sum_{\frac{x}{qm} < n \leqslant \frac{x}{m}} g(mn) \int_1^n \frac{dt}{t},$$

d'où en intervertissant les sommes

$$S_1 = \sum_{m \leqslant u} \mu(m) \int_1^x \sum_{\max(t, \frac{x}{qm}) < n \leqslant \frac{x}{m}} g(mn)\ \frac{dt}{t}.$$

En découpant la sommation en m selon les puissances de q et en utilisant (6), on obtient

$$|S_1| \ll U(\log x)^2.$$

Pour majorer S_2, on écrit

$$S_2 = \sum_{m\leqslant u^2} \Bigg(\sum_{\substack{m_1\leqslant u\\ m_2\leqslant u\\ m=m_1m_2}} \mu(m_1)\Lambda(m_2) \Bigg) \sum_{x/qm<n\leqslant x/m} g(mn).$$

Comme $|\mu(m_1)| \leqslant 1$ et $\Lambda(m_2) \geqslant 0$, on a

$$\Bigg| \sum_{\substack{m_1\leqslant u\\ m_2\leqslant u\\ m=m_1m_2}} \mu(m_1)\Lambda(m_2) \Bigg| \leqslant \sum_{d\,|\,m} \Lambda(d) = \log m.$$

Ainsi

$$|S_2| \leqslant \sum_{m\leqslant u^2} (\log m) \Bigg| \sum_{\frac{x}{qm}<n\leqslant\frac{x}{m}} g(mn) \Bigg|.$$

En découpant la sommation sur m selon les puissances de q, on obtient

$$|S_2| \ll (\log x)^2 \max_{M\leqslant u^2} \sum_{M/q<m\leqslant M} \Bigg| \sum_{\frac{x}{qm}<n\leqslant\frac{x}{m}} g(mn) \Bigg|,$$

Soit M_0 une valeur M pour laquelle le maximum est atteint. Pour montrer que $|S_2| \ll U(\log x)^2$, on utilise (6) lorsque $M_0 \leqslant u$, on utilise (5) lorsque $u < M_0 \leqslant x^{1/2}$, on utilise (5) en échangeant les rôles de m et n lorsque $qx^{1/2} \leqslant M_0 \leqslant u^2$, et lorsque $x^{1/2} < M_0 < qx^{1/2}$, on étend la sommation sur m et on la décompose en deux sommes, respectivement $x^{1/2}/q < m \leqslant x^{1/2}$ et $x^{1/2} < m \leqslant qx^{1/2}$. Pour la première de ces sommes on utilise (5), et pour la seconde on utilise (5) en échangeant les rôles de m et n.

Pour majorer S_3, on écrit

$$S_3 = (\log x) \sum_{u<m\leqslant x/u} a_m \sum_{x/qm<n\leqslant x/m} b_n\, g(mn),$$

avec $a_m := \mu(m)$ qui vérifie $|a_m| \leqslant 1$, et

$$b_n := \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{u<n_1\\ n_2\leqslant n\\ n=n_1n_2}} \Lambda(n_1)$$

qui vérifie $b_n = 0$ pour $n \leqslant u$ et $0 \leqslant b_n \leqslant \frac{1}{\log x} \sum_{d\,|\,n} \Lambda(d) = \frac{\log n}{\log x} \leqslant 1$.

En découpant la sommation sur m suivant les puissances de q on obtient

$$|S_3| \ll (\log x)^2 \max_{u\leqslant M\leqslant x/u} \left| \sum_{\frac{M}{q}<m\leqslant M} \sum_{\frac{x}{qm}<n\leqslant \frac{x}{m}} a_m b_n g(mn) \right|.$$

Soit M_1 une valeur de M pour laquelle le maximum est atteint. Pour montrer que $|S_3| \ll U(\log x)^2$, on utilise (5) lorsque $u \leqslant M_1 \leqslant x^{1/2}$, on utilise (5) en échangeant les rôles de m et n lorsque $qx^{1/2} \leqslant M_1 \leqslant x/u$, et lorsque $x^{1/2} < M_1 < qx^{1/2}$, en prenant en compte l'uniformité en a_m et b_n de la majoration (5), on étend la sommation sur m et on la décompose en deux sommes, respectivement $x^{1/2}/q < m \leqslant x^{1/2}$ et $x^{1/2} < m \leqslant qx^{1/2}$. Pour la première de ces sommes on utilise (5), et pour la seconde on utilise (5) en échangeant les rôles de m et n. □

Le Lemme 1 nous montre que la clef de la démonstration du Théorème 1 réside dans l'obtention de majorations pour les sommes de type II (5) et pour les sommes de type I (6). Pour estimer les sommes de type II, nous allons dans le paragraphe suivant supprimer les contraintes multiplicatives à l'aide d'une variante d'un procédé classique de séparation des variables (voir par exemple le Lemme 5.2.3 de [29]).

5. Séparation des variables

Lemme 2. *Pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexes, on a pour tous $N_0 \leqslant N_1 < N_2 \leqslant N_3$ entiers,*

$$\left| \sum_{N_1<n\leqslant N_2} a_n \right| \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \min(N_2 - N_1, |\sin \pi\xi|^{-1}) \left| \sum_{N_0<n\leqslant N_3} a_n \, \mathrm{e}(n\xi) \right| d\xi.$$

De plus, pour tout réel $x \geqslant 2/\pi$, on a

$$\int_{-1/2}^{1/2} \min(x, |\sin \pi\xi|^{-1}) \, d\xi \leqslant \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{2}{\pi} \log(2x).$$

Démonstration. Comme $\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}(s\xi) d\xi$ vaut 1 si $s = 0$ et 0 pour tout entier $s \neq 0$, on a

$$\sum_{N_1<n\leqslant N_2} a_n = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{N_0<n\leqslant N_3} a_n \, \mathrm{e}(n\xi) \right) \left(\sum_{N_1<n'\leqslant N_2} \mathrm{e}(-n'\xi) \right) d\xi.$$

Pour $-1/2 \leqslant \xi \leqslant 1/2$ avec $\xi \neq 0$ on peut écrire

$$\left| \sum_{N_1<n'\leqslant N_2} \mathrm{e}(-n'\xi) \right| = \left| \frac{\sin(N_2 - N_1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \right| \leqslant \min(N_2 - N_1, |\sin \pi\xi|^{-1}),$$

ce qui établit la première inégalité du Lemme 2. Par parité et en coupant en $1/\pi x$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \min(x, |\sin \pi\xi|^{-1})\, d\xi \leqslant 2\int_0^{1/\pi x} x\, d\xi + 2\int_{1/\pi x}^{1/2} \frac{d\xi}{\sin \pi\xi} \\ = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\log\cot\left(\frac{1}{2x}\right) \leqslant \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\log(2x),\end{aligned}$$

ce qui établit la seconde inégalité du Lemme 2. □

LEMME 3. *Soit g une fonction arithmétique, $q \geqslant 2$, $0 < \tilde\delta < \beta_1 < 1/3$, $1/2 < \beta_2 < 1$. Supposons qu'uniformément pour tous nombres complexes b_n tels que $|b_n| \leqslant 1$, on ait*

$$\sum_{q^{\mu-1} < m \leqslant q^\mu} \left| \sum_{q^{\nu-1} < n \leqslant q^\nu} b_n\, g(mn) \right| \leqslant V, \tag{7}$$

pour tous nombres entiers strictement positifs μ et ν tels que

$$\beta_1 - \tilde\delta \leqslant \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqslant \beta_2 + \tilde\delta. \tag{8}$$

Alors pour

$$x > x_0 := \max(q^{1/(1-\beta_2)}, q^{3/\tilde\delta}), \tag{9}$$

on a uniformément pour M vérifiant

$$x^{\beta_1} \leqslant M \leqslant x^{\beta_2} \tag{10}$$

l'estimation (5) *avec*

$$U = \tfrac{12}{\pi}(1 + \log 2x)\, V.$$

Démonstration. Pour $x > q^{1/\beta_1}$ et $M \geqslant x^{\beta_1}$ on a $M > q$ donc il existe un nombre entier $\mu' \geqslant 1$ tel que

$$q^{\mu'} < M \leqslant q^{\mu'+1}. \tag{11}$$

De la même manière pour $x > q^{1/(1-\beta_2)}$ et $M \leqslant x^{\beta_2}$ on a $x/M \geqslant x^{1-\beta_2} > q$ donc il existe un nombre entier $\nu' \geqslant 1$ tel que

$$q^{\nu'} < x/M \leqslant q^{\nu'+1}. \tag{12}$$

Alors pour $M/q < m \leqslant M$, on a $q^{\nu'-1} \leqslant \frac{x}{qm} < \frac{x}{m} \leqslant q^{\nu'+2}$, donc en posant $N_0 = q^{\nu'-1}$, $N_1 = \left\lfloor \frac{x}{qm} \right\rfloor$, $N_2 = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$, $N_3 = q^{\nu'+2}$, on en déduit les inégalités

$N_0 \leqslant N_1 < N_2 \leqslant N_3$. D'après le Lemme 2, on a donc pour $M/q < m \leqslant M$,

$$\begin{aligned}&\Bigg|\sum_{\frac{x}{qm}<n\leqslant\frac{x}{m}} b_n g(mn)\Bigg|\\&\leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \min(N_2 - N_1, |\sin\pi\xi|^{-1}) \Bigg|\sum_{q^{\nu'-1}<n\leqslant q^{\nu'+2}} b_n \,\mathrm{e}(n\xi) g(mn)\Bigg| d\xi.\end{aligned}$$

Notre objectif est maintenant de sommer cette expression sur m, puis d'intervertir la somme et l'intégrale. Pour s'affranchir de la dépendance en m de N_1 et N_2, nous utilisons la majoration $N_2 - N_1 \leqslant x$, et comme $q^{\mu'-1} < M/q < M \leqslant q^{\mu'+1}$, quitte à rajouter quelques termes supplémentaires, le membre de gauche de l'estimation (5) est donc majoré par

$$\sum_{q^{\mu'-1}<m\leqslant q^{\mu'+1}} \int_{-1/2}^{1/2} \min(x, |\sin\pi\xi|^{-1}) \Bigg|\sum_{q^{\nu'-1}<n\leqslant q^{\nu'+2}} b_n \,\mathrm{e}(n\xi) g(mn)\Bigg| d\xi.$$

Par découpage, en utilisant l'inégalité triangulaire, cette expression est majorée par

$$\sum_{\mu=\mu'}^{\mu'+1}\sum_{\nu=\nu'}^{\nu'+2} \int_{-1/2}^{1/2} \min(x, |\sin\pi\xi|^{-1}) \sum_{q^{\mu-1}<m\leqslant q^{\mu}} \Bigg|\sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^{\nu}} b_n \,\mathrm{e}(n\xi) g(mn)\Bigg| d\xi.$$

Pour $(\mu,\nu) \in \{\mu',\mu'+1\} \times \{\nu',\nu'+1,\nu'+2\}$ on a

$$\frac{\mu'}{\mu'+\nu'+2} \leqslant \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqslant \frac{\mu'+1}{\mu'+\nu'+1},$$

donc nous devons prouver que pour $x \geqslant x_0$, on a

$$\beta_1 - \tilde{\delta} \leqslant \frac{\mu'}{\mu'+\nu'+2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu'+1}{\mu'+\nu'+1} \leqslant \beta_2 + \tilde{\delta}.$$

En utilisant (11) et (12) on a

$$\frac{\log x}{\log q} - 2 \leqslant \mu' + \nu' < \frac{\log x}{\log q},$$

et en utilisant (10) et (11) on a

$$\beta_1 \frac{\log x}{\log q} - 1 \leqslant \mu' \leqslant \beta_2 \frac{\log x}{\log q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\mu'}{\mu'+\nu'+2} &\geqslant \frac{\beta_1 \frac{\log x}{\log q} - 1}{\frac{\log x}{\log q} + 2} = \frac{\beta_1 - \frac{\log q}{\log x}}{1 + 2\frac{\log q}{\log x}}\\&\geqslant \left(\beta_1 - \frac{\log q}{\log x}\right)\left(1 - 2\frac{\log q}{\log x}\right) \geqslant \beta_1 - (1+2\beta_1)\frac{\log q}{\log x},\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\frac{\mu'}{\mu'+\nu'+2} \geqslant \beta_1 - \tilde{\delta}$ pour $x \geqslant q^{(1+2\beta_1)/\tilde{\delta}}$. Similairement, comme $x \geqslant q^{1/(1-\beta_2)}$ entraîne $\frac{\log q}{\log x} \leqslant 1 - \beta_2 \leqslant \frac{1}{2}$, et comme $\frac{1}{1-u} \leqslant 1 + 2u$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1/2$, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\mu'+1}{\mu'+\nu'+1} &\leqslant \frac{\beta_2 \frac{\log x}{\log q} + 1}{\frac{\log x}{\log q} - 1} = \frac{\beta_2 + \frac{\log q}{\log x}}{1 - \frac{\log q}{\log x}} \\ &\leqslant \left(\beta_2 + \frac{\log q}{\log x}\right)\left(1 + 2\frac{\log q}{\log x}\right) \leqslant \beta_2 + 3\frac{\log q}{\log x}\end{aligned}$$

ce qui implique $\frac{\mu'+1}{\mu'+\nu'+1} \leqslant \beta_2 + \tilde{\delta}$ pour $x \geqslant q^{3/\tilde{\delta}}$.

La définition de x_0 par (9) entraîne que

$$x_0 = \max(q^{1/\beta_1}, q^{1/(1-\beta_2)}, q^{(1+2\beta_1)/\tilde{\delta}}, q^{3/\tilde{\delta}}).$$

Il en résulte que pour $\tilde{\delta} > 0$ fixé et $x > x_0$, la condition $x^{\beta_1} \leqslant M \leqslant x^{\beta_2}$ implique la condition (8) pour les valeurs de μ et ν impliquées dans la somme ci-dessus. En appliquant l'inégalité (7) (qui est uniforme en b_n) avec b_n remplacé par $b_n\,\mathrm{e}(n\xi)$, on obtient donc

$$\sum_{\frac{M}{q} < m \leqslant M} \left| \sum_{\frac{x}{qm} < n \leqslant \frac{x}{m}} b_n g(mn) \right| \leqslant 6\,V \int_{-1/2}^{1/2} \min(x, |\sin \pi\xi|^{-1}) d\xi \leqslant \tfrac{12}{\pi}(1+\log 2x)\,V.$$

ce qui établit la majoration (5) avec $U = \frac{12}{\pi}(1 + \log 2x)\,V$. □

6. Sommes de type II

L'objectif des parties 6 et 7 est de nous placer dans les conditions d'application du Lemme 3, c'est-à-dire de montrer la proposition suivante :

Proposition 1. *Pour $q \geqslant 2$ et α tels que $(q-1)\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il existe β_1, β_2 et $\tilde{\delta}$ vérifiant $0 < \tilde{\delta} < \beta_1 < 1/3$ et $1/2 < \beta_2 < 1$ et $\xi_q(\alpha) > 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(13) \qquad \sum_{q^{\mu-1} < m \leqslant q^{\mu}} \left| \sum_{q^{\nu-1} < n \leqslant q^{\nu}} b_n\ \mathrm{e}(\alpha s_q(mn)) \right| \ll_\varepsilon q^{(1-\frac{1}{2}\xi_q(\alpha)+\varepsilon)(\mu+\nu)},$$

pour tous nombres entiers strictement positifs μ et ν tels que

$$\beta_1 - \tilde{\delta} \leqslant \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqslant \beta_2 + \tilde{\delta},$$

uniformément pour tous nombres complexes b_n tels que $|b_n| \leqslant 1$.

6.1. Lissage des sommes

Pour $q \geqslant 2$, soit $f(n) = \alpha s_q(n)$ où

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Soient des entiers $\mu \geqslant 1$, $\nu \geqslant 1$ et $0 \leqslant \rho \leqslant \nu/2$, et des nombres complexes b_n vérifiant $|b_n| \leqslant 1$. On considère la somme

$$S = \sum_{q^{\mu-1}<m\leqslant q^\mu} \Bigg| \sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu} b_n \operatorname{e}(f(mn)) \Bigg|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|S|^2 \leqslant q^\mu \sum_{q^{\mu-1}<m\leqslant q^\mu} \Bigg| \sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu} b_n \operatorname{e}(f(mn)) \Bigg|^2. \tag{15}$$

Nous allons maintenant utiliser la variante suivante de l'inégalité de Van der Corput :

Lemme 4. *Soient $z_1, \ldots, z_N$ des nombres complexes. Pour tout entier $R \geqslant 1$, on a*

$$\Bigg| \sum_{1\leqslant n\leqslant N} z_n \Bigg|^2 \leqslant \frac{N+R-1}{R} \sum_{|r|<R} \left(1 - \frac{|r|}{R}\right) \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ 1\leqslant n+r\leqslant N}} z_{n+r}\overline{z_n}$$

Démonstration. Par commodité on pose $z_n = 0$ pour $n \leqslant 0$ et pour $n \geqslant N+1$. On a les égalités :

$$R\sum_n z_n = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_n z_{n+r} = \sum_n \sum_{r=0}^{R-1} z_{n+r}$$

Les entiers n pour lesquels la dernière somme est potentiellement non nulle vérifient les inégalités $1-(R-1) \leqslant n \leqslant N$, donc leur nombre ne dépasse pas $N+(R-1)$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned}
R^2 \Bigg| \sum_n z_n \Bigg|^2 &\leqslant (N+R-1) \sum_n \Bigg| \sum_{r=0}^{R-1} z_{n+r} \Bigg|^2 \\
&\leqslant (N+R-1) \sum_{r_1=0}^{R-1} \sum_{r_2=0}^{R-1} \sum_n z_{n+r_1}\overline{z_{n+r_2}} \\
&\leqslant (N+R-1) \sum_{r_1=0}^{R-1} \sum_{r_2=0}^{R-1} \sum_m z_{m+r_1-r_2}\overline{z_m} \\
&\leqslant (N+R-1) \sum_{-R<r<R} (R-|r|) \sum_m z_{m+r}\overline{z_m}
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité attendue en divisant par R^2. $\square$

En posant $R = q^\rho$, $N = q^\nu - q^{\nu-1}$ et $z_n = b_{q^{\nu-1}+n}\,\mathrm{e}(f(m(q^{\nu-1}+n)))$ dans le Lemme 4 et en observant que $\rho \leqslant \lfloor \nu/2 \rfloor \leqslant \nu - 1$, on obtient :

$$\Big| \sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu} b_n\ \mathrm{e}(f(mn)) \Big|^2 \leqslant q^{\nu-\rho} \sum_{|r|<q^\rho} \Big(1 - \frac{|r|}{q^\rho}\Big)\Big(\sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu} b_{n+r}\,\overline{b_n}\ \mathrm{e}(f(m(n+r)) - f(mn)) + O(q^\rho)\Big),$$

où le terme $O(q^\rho)$ dans le second membre provient de la suppression de la condition de sommation $q^{\nu-1} < n + r \leqslant q^\nu$ introduite par le Lemme 4. Cette suppression peut potentiellement concerner $O(q^\rho)$ valeurs de n, et comme chaque terme de la somme est de module au plus égal à 1, on obtient une erreur $O(q^\rho)$. En séparant les cas $r = 0$ et $r \neq 0$, on obtient :

$$|S|^2 \ll q^{2(\mu+\nu)-\rho} + q^{\mu+\nu} \max_{1\leqslant|r|<q^\rho} \sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu} \Big| \sum_{q^{\mu-1}<m\leqslant q^\mu} \mathrm{e}(f(m(n+r)) - f(mn)) \Big|,$$

où l'on a tenu compte du fait que la contribution totale de $O(q^\rho)$ à la majoration de $|S|^2$ étant $O(q^{2\mu+\nu+\rho})$, elle est négligeable devant $O(q^{2(\mu+\nu)-\rho})$ car $\rho \leqslant \nu/2$.

Pour poursuivre la démonstration, nous allons montrer que seuls les chiffres de poids faible dans la différence $f(m(n + r)) - f(mn)$ contribuent de manière significative. Nous allons donc introduire une notion de somme des chiffres tronquée et montrer que l'on peut remplacer dans les sommes de type II la fonction f par cette fonction tronquée.

6.2. Somme des chiffres tronquée

Pour tout entier $\lambda \geqslant 0$, on définit f_λ par la formule

$$f_\lambda(n) = \sum_{k<\lambda} f(n_k\, q^k), \tag{16}$$

où les entiers n_k désignent les chiffres de n dans son écriture en base q définie par (1). La fonction f_λ ainsi définie est clairement périodique de période q^λ. Cette fonction tronquée apparaît dans un contexte différent dans [12] où Drmota et Rivat étudient certaines propriétés de $f_\lambda(n^2)$ lorsque λ est de l'ordre de $\log n$.

Lemme 5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ telle que pour tous μ, ν, ρ entiers avec $\mu > 0$, $\nu > 0$ et $0 \leqslant \rho \leqslant \nu/2$, pour tout $r \in \mathbb{Z}$ avec $|r| < q^\rho$, le nombre $E(r, \mu, \nu, \rho)$ de couples d'entiers (m, n) tels que $q^{\mu-1} < m \leqslant q^\mu$, $q^{\nu-1} < n \leqslant q^\nu$ et*

$$f(m(n + r)) - f(mn) \neq f_{\mu+2\rho}(m(n + r)) - f_{\mu+2\rho}(mn),$$

vérifie

$$E(r,\mu,\nu,\rho) \leqslant c(\varepsilon)\, q^{(\mu+\nu)(1+\varepsilon)-\rho}. \tag{17}$$

Démonstration. Supposons $0 \leqslant r < q^{\rho}$. Dans ce cas $0 \leqslant mr < q^{\mu+\rho}$. Lorsqu'on effectue l'addition $mn + mr$, les chiffres du produit mn d'indice $\geqslant \mu+\rho$ ne pourront être modifiés que par propagation d'une retenue. Nous devons donc compter les couples (m,n) tels que les chiffres a_j de l'écriture en base q du produit $a = mn$ vérifient $a_j = q-1$ pour $\mu+\rho \leqslant j < \mu+2\rho$. Ainsi en regroupant les produits mn selon leur valeur a, nous obtenons

$$E(r,\mu,\nu,\rho) \leqslant \sum_{q^{\mu+\nu-2} < a \leqslant q^{\mu+\nu}} \tau(a)\,\chi(a)$$

où d'une part $\tau(a)$ désigne le nombre de diviseurs de a et d'autre part $\chi(a) = 1$ si les chiffres a_j de l'écriture en base q de a vérifient $a_j = q-1$ pour $\mu+\rho \leqslant j < \mu+2\rho$, et $\chi(a) = 0$ dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe un indice j, avec $\mu+\rho \leqslant j < \mu+2\rho$, pour lequel $a_j \neq q-1$. Le nombre d'entiers $a \leqslant q^{\mu+\nu}$ vérifiant les conditions précédentes est majoré par $q^{\mu+\nu-\rho}$. Par conséquent la majoration (17) découle de l'estimation classique (voir par exemple Hardy-Wright [22, Theorem 315, p. 260])

$$\tau(a) \ll_{\varepsilon} a^{\varepsilon}, \tag{18}$$

qui entraîne $\tau(a) \ll_{\varepsilon} q^{(\mu+\nu)\varepsilon}$.

Le même raisonnement s'applique lorsque $-q^{\rho} < r < 0$ en comptant les couples (m,n) tels que les chiffres a_j du produit $a = mn$ vérifient $a_j = 0$ pour $\mu+\rho \leqslant j < \mu+2\rho$, et l'on obtient la même majoration (17). □

6.3. Transformation des sommes de type II

D'après le Lemme 5, on peut maintenant remplacer f par la fonction tronquée $f_{\mu+2\rho}$ définie par (16) dans la majoration (15), au prix d'une erreur totale $O_{\varepsilon}(q^{(2+\varepsilon)(\mu+\nu)-\rho})$. Ainsi,

$$|S|^2 \ll_{\varepsilon} q^{(2+\varepsilon)(\mu+\nu)-\rho} + q^{\mu+\nu} \max_{1 \leqslant |r| < q^{\rho}} S_2(r,\mu,\nu,\rho), \tag{19}$$

où l'on a posé

$$S_2(r,\mu,\nu,\rho) := \sum_{q^{\nu-1} < n \leqslant q^{\nu}} \left| \sum_{q^{\mu-1} < m \leqslant q^{\mu}} \mathrm{e}\big(f_{\mu+2\rho}(m(n+r)) - f_{\mu+2\rho}(mn)\big) \right|. \tag{20}$$

Pour établir (13), nous allons montrer que

$$S_2(r,\mu,\nu,\rho) \ll_q (\mu+\nu)^2\, q^{\mu+\nu-\rho}. \tag{21}$$

Nous fixerons ensuite les paramètres de la Proposition 1 dans le paragraphe 7.3, ce qui nous permettra d'achever la démonstration de la Proposition 1.

Pour fixer les idées, on peut dès à présent faire l'hypothèse que

$$\rho \leqslant \frac{\log 2}{10 \log q} (\mu + \nu). \tag{22}$$

Posons

$$\lambda = \mu + 2\rho. \tag{23}$$

Comme f_λ est périodique de période q^λ, on peut écrire

$$\begin{aligned} S_2'(n) &:= \sum_{q^{\mu-1} < m \leqslant q^\mu} \mathrm{e}(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn)) \\ &= \frac{1}{q^{2\lambda}} \sum_{0 \leqslant u < q^\lambda} \sum_{0 \leqslant v < q^\lambda} \mathrm{e}(f_\lambda(u) - f_\lambda(v)) \\ &\qquad \sum_{0 \leqslant h < q^\lambda} \sum_{0 \leqslant k < q^\lambda} \sum_{q^{\mu-1} < m \leqslant q^\mu} \mathrm{e}\left(\frac{h(m(n+r)-u) + k(mn-v)}{q^\lambda}\right) \end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, on a $f_\lambda(u) = f(u)$ et $f_\lambda(v) = f(v)$ car $0 \leqslant u < q^\lambda$ et $0 \leqslant v < q^\lambda$.

Pour $q \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, on note $F_\lambda(\,.\,,\alpha)$ la transformée de Fourier discrète de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}(f_\lambda(u))$ définie pour tout $h \in \mathbb{Z}$ par :

$$F_\lambda(h, \alpha) = q^{-\lambda} \sum_{0 \leqslant u < q^\lambda} \mathrm{e}\left(\alpha s_q(u) - huq^{-\lambda}\right). \tag{24}$$

En utilisant (24), on obtient

$$S_2'(n) = \sum_{0 \leqslant h < q^\lambda} \sum_{0 \leqslant k < q^\lambda} F_\lambda(h,\alpha)\, \overline{F_\lambda(-k,\alpha)} \sum_{q^{\mu-1} < m \leqslant q^\mu} \mathrm{e}\left(\frac{(h+k)mn + hmr}{q^\lambda}\right)$$

Ainsi la somme géométrique sur m permet d'obtenir

(25)

$$\left|S_2'(n)\right| \leqslant \sum_{0 \leqslant h < q^\lambda} \sum_{0 \leqslant k < q^\lambda} |F_\lambda(h,\alpha)|\, |F_\lambda(-k,\alpha)| \, \min\left(q^\mu, \frac{1}{\left|\sin\left(\pi \frac{(h+k)n + hr}{q^\lambda}\right)\right|}\right).$$

Afin d'estimer maintenant

$$S_2(r,\mu,\nu,\rho) = \sum_{q^{\nu-1} < n \leqslant q^\nu} \left|S_2'(n)\right|,$$

nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 6. *Soient $a, m \in \mathbb{Z}$ avec $m \geqslant 1$ et $d = (a,m)$. Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $M > 0$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant n \leqslant m-1} \min\left(M, \frac{1}{\left|\sin \pi \frac{an+b}{m}\right|}\right) \tag{26} \\ \leqslant d \, \min\left(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{m} \left\|\frac{b}{d}\right\|}\right) + \frac{d}{\sin \frac{\pi d}{2m}} + \frac{2m}{\pi} \log \frac{2\,m}{\pi\, d}. \end{aligned}$$

Démonstration. L'inégalité est triviale pour $d = m$ car dans ce cas $\left|\sin \pi \frac{an+b}{m}\right| = \sin \pi \left\|\frac{b}{d}\right\|$ pour tout n. Lorsque $d \neq m$, on a $1 \leqslant d \leqslant m/2$. Posons $a' = a/d$, $m' = m/d$, et $b = b'd + r$ où $b' \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}$, $-d/2 < r \leqslant d/2$, et

$$\begin{aligned} S &= \sum_{0 \leqslant n \leqslant m-1} \min\left(M, \frac{1}{\left|\sin \pi \frac{an+b}{m}\right|}\right) \\ &= \sum_{0 \leqslant n \leqslant m-1} \min\left(M, \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi}{m'}(a'n + b' + \frac{r}{d})\right|}\right). \end{aligned}$$

Lorsque n parcourt m' entiers consécutifs, $a'n + b'$ parcourt toutes les classes résiduelles modulo m'. Dans la somme S, la variable n parcourt d intervalles de m' entiers consécutifs, donc

$$S = d \sum_{0 \leqslant n \leqslant m'-1} \min\left(M, \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi}{m'}(n + \frac{r}{d})\right|}\right).$$

Quitte à poser $n' = -n$ (n' parcourt aussi toutes les classes résiduelles modulo m') et $r' = -r$, on peut supposer que $0 \leqslant r \leqslant d/2$ et ensuite supprimer les valeurs absolues. Alors en isolant le premier et le dernier terme de cette somme,

$$\begin{aligned} S \leqslant\, & d\, \min\left(M, \frac{1}{\sin \frac{\pi r}{m'd}}\right) + d\, \min\left(M, \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m'}(1 - \frac{r}{d})}\right) \\ & + d \sum_{1 \leqslant n \leqslant m'-2} \min\left(M, \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m'}(n + \frac{r}{d})}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la convexité de la fonction $t \mapsto 1/(\sin t)$ sur $]0, \pi[$ on peut écrire (méthode des trapèzes)

$$S \leqslant d\, \min\left(M, \frac{1}{\sin \frac{\pi r}{m'd}}\right) + \frac{d}{\sin \frac{\pi}{m'}(1 - \frac{r}{d})} + d \int_{1/2}^{m'-3/2} \frac{dt}{\sin \frac{\pi}{m'}(t + \frac{r}{d})}$$

Posons

$$h(x) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m'}(1 - x)} + \int_{1/2}^{m'-3/2} \frac{dt}{\sin \frac{\pi}{m'}(t + x)}.$$

Comme la fonction $t \mapsto 1/(\sin t)$ est convexe sur $]0, \pi[$, la fonction h est convexe sur $[0, 1/2]$. Le maximum de la fonction h sur $[0, 1/2]$ est atteint aux extrémités de cet intervalle. Or

$$\begin{aligned} h\left(\tfrac{1}{2}\right) - h(0) &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2m'}} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m'}} + \int_{m'-3/2}^{m'-1} \frac{dt}{\sin \frac{\pi}{m'} t} - \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sin \frac{\pi}{m'} t} \\ &\geqslant \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2m'}} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m'}} + \frac{1}{2 \sin \frac{3\pi}{2m'}} - \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2m'}} \\ &\geqslant \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2m'}} + \frac{1}{2 \sin \frac{3\pi}{2m'}} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{m'}} \geqslant 0, \end{aligned}$$

car $\varphi : t \mapsto 1/(\sin t)$ est convexe sur $]0,\pi[$ et vérifie donc $\varphi(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi(a) + \frac{1}{2}\,\varphi(b)$. Le maximum de la fonction h sur $[0,1/2]$ est donc égal à $h(\frac{1}{2})$. On obtient ainsi

$$S \leqslant d\ \min\left(M, \frac{1}{\sin\frac{\pi\, r}{m'd}}\right) + \frac{d}{\sin\frac{\pi}{2m'}} +\ d\ \int_1^{m'-1} \frac{du}{\sin\frac{\pi\, u}{m'}}.$$

Comme $(\log\tan\frac{t}{2})' = 1/(\sin t)$, on a

$$S \leqslant d\ \min\left(M, \frac{1}{\sin\frac{\pi\, r}{m'd}}\right) + \frac{d}{\sin\frac{\pi}{2m'}} +\ \frac{2m'd}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{2m'}$$

Or, en écrivant $0 \leqslant \frac{b}{d} - b' = \frac{r}{d} \leqslant \frac{1}{2}$, on voit que $\frac{r}{d} = \left\|\frac{b}{d}\right\|$. Enfin, $\cot\frac{\pi}{2m'} \leqslant \frac{2m'}{\pi}$. En rassemblant ces éléments et en remplaçant m' par m/d, on obtient l'inégalité (26). □

En sommant sur n le membre de droite de (25) par tranches de longueur q^λ (quitte à rajouter quelques termes si $\nu < \lambda$), en utilisant l'inégalité (26) et en organisant la sommation suivant la valeur de $d = (h+k, q^\lambda)$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_2(r,\mu,\nu,\rho) &= \sum_{q^{\nu-1}<n\leqslant q^\nu} \left|S_2'(n)\right| \\ &\ll (1+q^{\nu-\lambda}) \sum_{d\,|\,q^\lambda}\ \sum_{0\leqslant h<q^\lambda}\ \sum_{\substack{0\leqslant k<q^\lambda\\ (h+k,q^\lambda)=d}} \\ &\qquad\qquad |F_\lambda(h,\alpha)|\ \ |F_\lambda(-k,\alpha)|\ \ d\ \min\left(q^\mu, \frac{1}{\sin\left(\pi\frac{d}{q^\lambda}\left\|\frac{hr}{d}\right\|\right)}\right) \\ &\quad + (1+q^{\nu-\lambda})\lambda(\log q)q^\lambda \sum_{0\leqslant h<q^\lambda}\ \sum_{0\leqslant k<q^\lambda} |F_\lambda(h,\alpha)|\ \ |F_\lambda(-k,\alpha)|\,. \end{aligned}$$

Dans la première somme, au prix de quelques termes supplémentaires, on peut remplacer la condition $(h+k, q^\lambda) = d$ par la condition moins restrictive $k \equiv -h \bmod d$. En parcourant toutes les classes résiduelles a modulo d, on peut séparer cette dernière condition en deux conditions : $h \equiv a \bmod d$ et $k \equiv -a \bmod d$ (*i.e.* $-k \equiv a \bmod d$), ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} (27)\quad S_2 &:= S_2(r,\mu,\nu,\rho) \\ &\ll (1+q^{\nu-\lambda}) \sum_{d\,|\,q^\lambda} d \sum_{0\leqslant a<d} \min\left(q^\mu, \frac{1}{\sin\left(\pi\frac{d}{q^\lambda}\left\|\frac{ar}{d}\right\|\right)}\right) G_\lambda(a,d,\alpha)^2 \\ &\quad + (1+q^{\nu-\lambda})\lambda\,(\log q)\,q^\lambda\, G_\lambda(\alpha)^2, \end{aligned}$$

où $G_\lambda(a,d,\alpha)$ et $G_\lambda(\alpha)$ sont définies pour $a \in \mathbb{Z}$ et $d \geqslant 1$ par

$$(28)\qquad G_\lambda(a,d,\alpha) := \sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod d}} |F_\lambda(h,\alpha)| \quad \text{et} \quad G_\lambda(\alpha) := \sum_{0\leqslant h<q^\lambda} |F_\lambda(h,\alpha)|\,.$$

La suite de notre travail va consister en l'obtention d'une estimation convenable pour chacun des deux termes de la majoration (27). Pour cela, on commence par représenter $F_\lambda(h,\alpha)$ sous la forme d'un produit de polynômes trigonométriques. En effet, il résulte de la formule (24) définissant F_λ que :

$$F_0(h,\alpha) = 1, \tag{29}$$

et que pour $\lambda \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} F_{\lambda+1}(h,\alpha) &= q^{-\lambda-1} \sum_{0\leqslant i<q}\ \sum_{0\leqslant u<q^\lambda} \mathrm{e}\left(\alpha(s_q(u)+i) - h(qu+i)q^{-\lambda-1}\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{0\leqslant i<q} \mathrm{e}\left(\alpha i - hiq^{-\lambda-1}\right) F_\lambda(h,\alpha) \\ &= \frac{1}{q}\frac{1-\mathrm{e}(\alpha q - hq^{-\lambda})}{1-\mathrm{e}(\alpha - hq^{-\lambda-1})} F_\lambda(h,\alpha), \end{aligned}$$

et donc

$$|F_\lambda(h,\alpha)| = q^{-\lambda} \prod_{1\leqslant j\leqslant \lambda} \varphi_q(\alpha - hq^{-j}), \tag{30}$$

où la fonction φ_q, périodique de période 1 et continue sur $\mathbb{R}$, est définie par

$$\varphi_q(t) = \left| \sum_{0\leqslant v<q} \mathrm{e}(vt) \right| = \begin{cases} |\sin \pi q t| \,/\, |\sin \pi t| & \text{si } t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \\ q & \text{si } t\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{31}$$

Pour estimer les deux termes de la majoration (27), nous allons majorer pour certaines valeurs de $d \mid q^\lambda$ et de $a \in \mathbb{Z}$, les moyennes d'ordre 1 :

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda \\ h\equiv a \bmod d}} |F_\lambda(h,\alpha)|\,,$$

d'ordre 2 :

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda \\ h\equiv a \bmod d}} |F_\lambda(h,\alpha)|^2\,,$$

et d'ordre 2 pondérées :

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda \\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_\lambda(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^\lambda}\right|}.$$

Les estimations de ces moyennes de produits trigonométriques constituent une partie cruciale de la preuve et présentent un intérêt indépendant. Afin de ne pas interrompre le fil conducteur de la preuve du Théorème 1, nous les présentons à la fin de cet article dans la partie 12 (lemme 16 pour les moyennes d'ordre 1 et $q \geqslant 3$, lemme 18 pour les moyennes d'ordre 1 et $q = 2$, lemme 19 pour les moyennes d'ordre 2 et lemme 21 pour les moyennes d'ordre 2 pondérées).

7. Majoration des sommes de type II

Nous pouvons maintenant estimer la seconde somme de la majoration (27) en appliquant (98) lorsque $q = 2$, et (90) lorsque $q \geqslant 3$, ce qui nous permet d'écrire

$$S_2 \ll (1+q^{\nu-\lambda}) \sum_{d \mid q^\lambda} d \sum_{0 \leqslant a < d} \min\left(q^\mu, \frac{1}{\sin\left(\pi \frac{d}{q^\lambda} \left\| \frac{ar}{d} \right\|\right)}\right) G_\lambda(a,d,\alpha)^2 \\ + \lambda\,(\log q)\,(1+q^{\nu-\lambda})\, q^{(1+2\eta_q)\lambda},$$

où les constantes $\eta_q > 0$, définies par (96) pour $q = 2$ et par (83) pour $q \geqslant 3$ vérifient la majoration cruciale

$$\eta_q < \frac{1}{2}.$$

Il nous reste maintenant à estimer la première somme de cette majoration afin de montrer (21). À cet effet, nous allons séparer le cas $q = 2$ du cas $q \geqslant 3$. Nous commencerons par étudier le cas $q = 2$, plus simple à traiter, qui permet de bien comprendre la structure de la preuve, et conduit par ailleurs à un résultat plus précis. Lorsque $q \geqslant 3$ n'est pas premier, des difficultés supplémentaires dues à ses diviseurs surgissent.

7.1. Cas où $q = 2$

Si $d \mid 2^\lambda$, alors il existe un entier δ tel que $d = 2^\delta$. Ainsi,

$$S_2 \ll (1+2^{\nu-\lambda}) \sum_{0 \leqslant \delta \leqslant \lambda} 2^\delta \sum_{0 \leqslant a < 2^\delta} \min\left(2^\mu, \frac{1}{\sin\left(\pi 2^{\delta-\lambda} \left\| \frac{ar}{2^\delta} \right\|\right)}\right) G_\lambda(a,2^\delta,\alpha)^2 \\ + \lambda\,(1+2^{\nu-\lambda}) 2^{(1+2\eta_2)\lambda}.$$

En appliquant (97) au premier terme on obtient

$$S_2 \ll (1+2^{\nu-\lambda}) \sum_{0 \leqslant \delta \leqslant \lambda} 2^{\delta + 2\eta_2(\lambda-\delta)} S_3(\delta) + \lambda\,(1+2^{\nu-\lambda}) 2^{(1+2\eta_2)\lambda}, \tag{32}$$

avec, en posant $r = r' 2^\Delta$ où r' est impair et $0 \leqslant \Delta \leqslant \rho$,

$$S_3(\delta) = \sum_{0 \leqslant a < 2^\delta} \left| F_\delta(a,\alpha) \right|^2 \min\left(2^\mu, \frac{1}{\sin\left(\pi 2^{\delta-\lambda} \left\| \frac{ar'}{2^{\delta-\Delta}} \right\|\right)}\right). \tag{33}$$

Nous séparons la sommation sur δ dans (32) en deux parties selon que $\delta \leqslant \Delta$ ou $\delta > \Delta$.

Si $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$, alors le minimum dans l'expression (33) vaut 2^μ. Dans ce cas,

$$S_3(\delta) = 2^\mu \sum_{0 \leqslant a < 2^\delta} \left| F_\delta(a,\alpha) \right|^2,$$

et en utilisant (103) avec $\lambda = \delta$, $\delta = 0$, on obtient

$$S_3(\delta) \leqslant 2^{\mu},$$

d'où, comme $0 < 2\eta_2 < 1$,

$$\sum_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} 2^{\delta+2\eta_2(\lambda-\delta)} S_3(\delta) \ll \sum_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} 2^{\delta+\mu+2\eta_2(\lambda-\delta)} \ll 2^{\mu+2\eta_2\lambda+(1-2\eta_2)\Delta}. \tag{34}$$

Supposons maintenant $0 \leqslant \Delta < \delta \leqslant \lambda$. Dans l'expression (33), la valeur du sinus dépend de la classe résiduelle de a modulo $2^{\delta-\Delta}$. On peut écrire

$$S_3(\delta) = \sum_{1\leqslant a\leqslant 2^{\delta-\Delta}} \min\left(2^{\mu}, \frac{1}{\sin\left(\pi 2^{\delta-\lambda}\left\|\frac{ar'}{2^{\delta-\Delta}}\right\|\right)}\right) \sum_{\substack{0\leqslant h<2^{\delta}\\ h\equiv a \bmod 2^{\delta-\Delta}}} |F_\delta(h,\alpha)|^2 .$$

En utilisant (103), on obtient

$$S_3(\delta) \leqslant S_4(\delta), \tag{35}$$

avec

$$S_4(\delta) = \sum_{1\leqslant a\leqslant 2^{\delta-\Delta}} |F_{\delta-\Delta}(a,\alpha)|^2 \min\left(2^{\mu}, \frac{1}{\sin\left(\pi 2^{\delta-\lambda}\left\|\frac{ar'}{2^{\delta-\Delta}}\right\|\right)}\right).$$

En organisant cette somme selon la valeur de $(a, 2^{\delta-\Delta}) = 2^{\theta}$, $S_4(\delta)$ est estimée par :

$$\sum_{0\leqslant\theta\leqslant\delta-\Delta} \sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant 2^{\delta-\Delta-\theta}\\ b\equiv 1 \bmod 2}} \left|F_{\delta-\Delta}(2^{\theta}b,\alpha)\right|^2 \min\left(2^{\mu}, \frac{1}{\sin\left(\pi 2^{\delta-\lambda}\left\|\frac{br'}{2^{\delta-\Delta-\theta}}\right\|\right)}\right).$$

Comme la fonction sinus est concave sur $[0,\pi]$, on a

$$\sin\left(\pi 2^{\delta-\lambda}\left\|\frac{br'}{2^{\delta-\Delta-\theta}}\right\|\right) \geqslant 2^{\delta-\lambda}\sin\left(\pi\left\|\frac{br'}{2^{\delta-\Delta-\theta}}\right\|\right) = 2^{\delta-\lambda}\left|\sin\frac{\pi br'}{2^{\delta-\Delta-\theta}}\right|$$

donc en isolant le terme $\theta = \delta - \Delta$ pour lequel le sinus est nul, on obtient

$$S_4(\delta) \ll 2^{\mu}\left|F_{\delta-\Delta}(0,\alpha)\right|^2 + 2^{\lambda-\delta} \sum_{0\leqslant\theta<\delta-\Delta} \sum_{\substack{1\leqslant b<2^{\delta-\Delta-\theta}\\ b\equiv 1 \bmod 2}} \frac{\left|F_{\delta-\Delta}(2^{\theta}b,\alpha)\right|^2}{\left|\sin\frac{\pi br'}{2^{\delta-\Delta-\theta}}\right|}.$$

La condition (14) nous permet de définir $\tau_2(\alpha) \in]0,1[$ (nous verrons en fait que d'après (96) on a $\tau_2(\alpha) < 0,1144$) par la formule

$$\tau_2(\alpha) = \min\left(1-2\eta_2, -2(\log|\cos\pi\alpha|)/\log 2\right), \tag{36}$$

ce qui permet d'écrire

$$|\cos\pi\alpha| \leqslant 2^{-\tau_2(\alpha)/2}.$$

D'après la formule (99) on a $|F_{\delta-\Delta}(0,\alpha)| = |\cos\pi\alpha|^{\delta-\Delta} \leqslant 2^{-\tau_2(\alpha)(\delta-\Delta)/2}$. De plus

$$\begin{aligned}\left|F_{\delta-\Delta}(2^\theta b,\alpha)\right| &= \prod_{j=1}^{\delta-\Delta}\left|\cos\pi(\alpha - b\,2^{\theta-j})\right| = |\cos\pi\alpha|^\theta \prod_{j=\theta+1}^{\delta-\Delta}\left|\cos\pi(\alpha - b\,2^{\theta-j})\right| \\ &= |\cos\pi\alpha|^\theta\,|F_{\delta-\Delta-\theta}(b,\alpha)| \leqslant |F_{\delta-\Delta-\theta}(b,\alpha)|\,,\end{aligned}$$

donc

$$S_4(\delta) \ll 2^{\mu-\tau_2(\alpha)(\delta-\Delta)} + 2^{\lambda-\delta}\sum_{0\leqslant\theta<\delta-\Delta}\ \sum_{\substack{1\leqslant b<2^{\delta-\Delta-\theta}\\ b\equiv 1 \bmod 2}} \frac{|F_{\delta-\Delta-\theta}(b,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi b r'}{2^{\delta-\Delta-\theta}}\right|}.$$

En utilisant la majoration (106), et en reportant dans la majoration (35), on obtient

$$\begin{aligned}S_3(\delta) \leqslant S_4(\delta) &\ll 2^{\mu-\tau_2(\alpha)(\delta-\Delta)} + \sum_{0\leqslant\theta<\delta-\Delta} 2^{\lambda-\delta+\gamma_2(\alpha)(\delta-\Delta-\theta)} \\ &\ll 2^{\mu-\tau_2(\alpha)(\delta-\Delta)} + \lambda 2^{\lambda-\delta+\gamma_2(\alpha)(\delta-\Delta)},\end{aligned}$$

où $\gamma_2(\alpha)$, défini par (104), vérifie $\frac{1}{2} \leqslant \gamma_2(\alpha) < 1$ d'après (105).

Comme $0 < \eta_2 < 1/2$, on en déduit

$$\begin{aligned}&\sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} 2^{\delta+2\eta_2(\lambda-\delta)} S_3(\delta) \\ &\ll \sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} 2^{\delta+2\eta_2(\lambda-\delta)+\mu-\tau_2(\alpha)(\delta-\Delta)} + \lambda\sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} 2^{\delta+(1+2\eta_2)(\lambda-\delta)+\gamma_2(\alpha)(\delta-\Delta)} \\ &\ll \lambda\,2^{\Delta+2\eta_2(\lambda-\Delta)+\mu} + \lambda\,2^{\lambda+\mu-\tau_2(\alpha)(\lambda-\Delta)} \\ &\qquad + \lambda^2\,2^{\Delta+(1+2\eta_2)(\lambda-\Delta)} + \lambda^2\,2^{\lambda+\gamma_2(\alpha)(\lambda-\Delta)},\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}&\sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} 2^{\delta+2\eta_2(\lambda-\delta)} S_3(\delta) \\ &\ll \lambda\,2^{\mu+2\eta_2\lambda+(1-2\eta_2)\Delta} + \lambda\,2^{\mu+(1-\tau_2(\alpha))\lambda+\tau_2(\alpha)\Delta} \\ &\qquad + \lambda^2\,2^{(1+2\eta_2)\lambda-2\eta_2\Delta} + \lambda^2\,2^{(1+\gamma_2(\alpha))\lambda-\gamma_2(\alpha)\Delta}.\end{aligned} \tag{37}$$

En reportant (34) et (37) dans (32), et comme $0 \leqslant \Delta \leqslant \rho$ et $\lambda = \mu + 2\rho$ (conformément à (23)), on obtient

$$\begin{aligned}S_2 &\ll (1+2^{\nu-\lambda})\big(\lambda^2\,2^{(1+2\eta_2)\lambda} + \lambda\,2^{\mu+2\eta_2\lambda+(1-2\eta_2)\rho} \\ &\qquad + \lambda\,2^{\mu+(1-\tau_2(\alpha))\lambda+\tau_2(\alpha)\rho} + 2^{(1+\gamma_2(\alpha))\lambda}\big) \\ &\ll \lambda^2\,(1+2^{\nu-\lambda})(2^{(1+2\eta_2)\lambda} + 2^{\lambda-2\rho+(1-\tau_2(\alpha))\lambda+\tau_2(\alpha)\rho} + 2^{(1+\gamma_2(\alpha))\lambda}).\end{aligned}$$

Posons

$$\epsilon_2(\alpha) = \min\left(1-2\eta_2, \tau_2(\alpha), 1-\gamma_2(\alpha)\right). \tag{38}$$

En observant que $0 < \tau_2(\alpha) < 1$ et donc que $2^{-2\rho+\tau_2(\alpha)\rho} \leqslant 1$, on obtient

$$S_2 \ll \lambda^2 \left(1 + 2^{\nu-\lambda}\right) 2^{(2-\epsilon_2(\alpha))\lambda},$$

c'est-à-dire

$$S_2 \ll (\mu+\nu)^2 \left(2^{(2-\epsilon_2(\alpha))(\mu+2\rho)} + 2^{(1-\epsilon_2(\alpha))(\mu+2\rho)+\nu}\right).$$

Pour obtenir la majoration attendue (voir (21)) :

$$S_2 \ll (\mu+\nu)^2\, 2^{\mu+\nu-\rho}, \tag{39}$$

il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned}(2-\epsilon_2(\alpha))(\mu+2\rho) &< \mu+\nu-\rho,\\ (1-\epsilon_2(\alpha))(\mu+2\rho)+\nu &< \mu+\nu-\rho,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(2-\epsilon_2(\alpha))\mu < \mu+\nu-(5-2\epsilon_2(\alpha))\rho$$

et

$$(3-2\epsilon_2(\alpha))\rho < \epsilon_2(\alpha)\mu.$$

En posant

$$\xi := \frac{\rho}{\mu+\nu}, \tag{40}$$

la majoration (39) est vérifiée dès que :

$$\frac{3-2\epsilon_2(\alpha)}{\epsilon_2(\alpha)}\xi < \frac{\mu}{\mu+\nu} < \frac{1-(5-2\epsilon_2(\alpha))\xi}{2-\epsilon_2(\alpha)}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme 3 avec

$$\tilde{\delta} := \frac{\epsilon_2(\alpha)}{28},$$

$$\beta_1 := \frac{3-2\epsilon_2(\alpha)}{\epsilon_2(\alpha)}\xi + \tilde{\delta} \tag{41}$$

et

$$\beta_2 := \frac{1-(5-2\epsilon_2(\alpha))\xi}{2-\epsilon_2(\alpha)} - \tilde{\delta}, \tag{42}$$

Nous devons vérifier que les conditions du lemme 3 ($0 < \tilde{\delta} < \beta_1 < \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2} < \beta_2 < 1$) sont satisfaites, c'est-à-dire :

$$0 < \frac{3-2\epsilon_2(\alpha)}{\epsilon_2(\alpha)}\xi + \frac{\epsilon_2(\alpha)}{28} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1-(5-2\epsilon_2(\alpha))\xi}{2-\epsilon_2(\alpha)} - \frac{\epsilon_2(\alpha)}{28} < 1.$$

À cet effet, il suffit d'imposer la condition

$$\xi \leqslant \frac{\epsilon_2(\alpha)}{14}, \tag{43}$$

ce qui entraîne en particulier que l'hypothèse (22) que nous avions imposée au début du traitement de S_2 est bien vérifiée. Pour $q=2$ et $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la condition (43) permet d'obtenir (21).

Remarque : Les valeurs de β_1 et β_2 (définies par (41) et (42)) sont indépendantes de celles de μ et de ν.

7.2. Cas où $q \geqslant 3$

Si $d \mid q^\lambda$, alors on peut écrire $d = kq^\delta$ où δ est l'unique entier dans $[0,\lambda]$ tel que $q^\delta \mid d$ et $q^{\delta+1} \nmid d$. Comme $k \mid q^{\lambda-\delta}$ et $(k,q) < q$, d'après le Lemme 17 on obtient[1]

$$G_\lambda(a,d,\alpha) \ll k^{-\eta_3} q^{\eta_3(\lambda-\delta)} \left|F_\delta(a,\alpha)\right|$$

d'où

$$\begin{aligned} S_2 \ll (1+q^{\nu-\lambda}) \sum_{0\leqslant\delta\leqslant\lambda} \sum_{\substack{k \mid q^{\lambda-\delta} \\ (k,q)<q}} k^{1-2\eta_3} q^{\delta+2\eta_3(\lambda-\delta)} S_3(k,\delta) \\ + \lambda(\log q)(1+q^{\nu-\lambda}) q^{(1+2\eta_q)\lambda}, \end{aligned}$$

avec

$$S_3(k,\delta) = \sum_{0\leqslant a<kq^\delta} \left|F_\delta(a,\alpha)\right|^2 \min\left(q^\mu, \frac{1}{\sin\left(\pi k q^{\delta-\lambda} \left\| \frac{ar}{kq^\delta} \right\|\right)} \right). \tag{44}$$

Posons

$$0 < \omega_q := \left(\frac{1}{2} - \eta_3\right) \frac{\log 2}{\log q} \leqslant \frac{1}{2} - \eta_3 = \frac{3}{2} - \frac{\log 5}{\log 3} < 0,0351. \tag{45}$$

Comme (k,q) est un diviseur strict de q, il en résulte que $(k,q) \leqslant q/2$ et on en déduit $k = (k, q^{\lambda-\delta}) \leqslant (k,q)^{\lambda-\delta} \leqslant (q/2)^{\lambda-\delta}$. Ainsi le nombre d'entiers k admissibles est majoré par le nombre de diviseurs de $q^{\lambda-\delta}$ ce qui à l'aide de l'estimation $\tau(n) \ll_q n^{\omega_q}$ (qui résulte par exemple de (18)), montre que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \mid q^{\lambda-\delta} \\ (k,q)<q}} k^{1-2\eta_3} &\leqslant \tau(q^{\lambda-\delta}) \left(\frac{q}{2}\right)^{(1-2\eta_3)(\lambda-\delta)} \\ &\ll_q q^{\omega_q(\lambda-\delta)+(1-2\eta_3)(\lambda-\delta)-(1-2\eta_3)\frac{\log 2}{\log q}(\lambda-\delta)} = q^{-\omega_q(\lambda-\delta)+(1-2\eta_3)(\lambda-\delta)}, \end{aligned}$$

d'où

$$q^{\delta+2\eta_3(\lambda-\delta)} \sum_{\substack{k \mid q^{\lambda-\delta} \\ (k,q)<q}} k^{1-2\eta_3} \ll_q q^{\lambda-\omega_q(\lambda-\delta)},$$

[1] Lorsque q est un nombre premier, on a $d = q^\delta$, et dans ce cas particulier, on peut appliquer ci-dessus le Lemme 16 au lieu du Lemme 17, ce qui revient à remplacer η_3 par η_q dans toute la suite, qui est d'ailleurs beaucoup plus simple du fait que $k=1$.

ce qui permet d'obtenir

(46)
$$S_2 \ll_q (1+q^{\nu-\lambda})q^\lambda \sum_{0\leqslant\delta\leqslant\lambda} q^{-\omega_q(\lambda-\delta)} \max_{\substack{k\mid q^{\lambda-\delta}\\ (k,q)<q}} S_3(k,\delta)+\lambda(\log q)(1+q^{\nu-\lambda})q^{(1+2\eta_q)\lambda}.$$

On va maintenant se concentrer sur la majoration de $S_3(k,\delta)$.

Comme la fonction sinus est concave sur $[0,\pi]$, et $1\leqslant k\leqslant q^{\lambda-\delta}$, on a

$$\sin\left(\pi k q^{\delta-\lambda}\left\|\frac{ar}{kq^\delta}\right\|\right)\geqslant kq^{\delta-\lambda}\sin\left(\pi\left\|\frac{ar}{kq^\delta}\right\|\right)=kq^{\delta-\lambda}\left|\sin\frac{\pi ar}{kq^\delta}\right|.$$

Ainsi, en utilisant (23),

$$S_3(k,\delta)\leqslant k^{-1}q^{\lambda-\delta}\sum_{0\leqslant a<kq^\delta}|F_\delta(a,\alpha)|^2\min\left(kq^{\delta-2\rho},\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi ar}{kq^\delta}\right|}\right). \tag{47}$$

Lorsque δ est petit, on est gêné par les facteurs communs de r et q, alors que si δ est plus grand, on peut sacrifier une petite puissance de q pour les éliminer dans l'expression $ar/(kq^\delta)$. À cet effet, on introduit un entier Δ tel que $1\leqslant\Delta\leqslant\lambda$ et on distingue deux cas selon que $\delta\leqslant\Delta$ ou $\delta>\Delta$.

Supposons que $\delta\leqslant\Delta$.

La fonction $a\mapsto|F_\delta(a,\alpha)|$ est périodique de période q^δ, donc on peut écrire

$$S_3(k,\delta)\leqslant k^{-1}q^{\lambda-\delta}\sum_{0\leqslant a<q^\delta}|F_\delta(a,\alpha)|^2\sum_{0\leqslant i\leqslant k-1}\min\left(kq^{\delta-2\rho},\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi(a+iq^\delta)r}{kq^\delta}\right|}\right).$$

En appliquant grossièrement le Lemme 6 avec $m=k$, $n=i$, $a=r$, $b=ar/q^\delta$, on a

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant k-1}\min\left(kq^{\delta-2\rho},\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi(a+iq^\delta)r}{kq^\delta}\right|}\right)\ll(r,k)kq^{\delta-2\rho}+k\log k,$$

ce qui conduit, comme $r\leqslant q^\rho$ et $k\leqslant q^\lambda$, à l'estimation

$$S_3(k,\delta)\ll q^{\lambda-\delta}(q^{\delta-\rho}+\lambda\log q)\sum_{0\leqslant a<q^\delta}|F_\delta(a,\alpha)|^2$$

En utilisant (103) avec $\lambda=\delta$ et $\delta=0$, la somme du second terme ci-dessus est majorée par 1. On obtient

$$S_3(k,\delta)\ll q^{\lambda-\rho}+\lambda(\log q)q^{\lambda-\delta}.$$

En sommant sur δ, la contribution des sommes $S_3(k,\delta)$ à (46) pour $\delta\leqslant\Delta$ est majorée par

$$(1+q^{\nu-\lambda})q^\lambda\sum_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta}q^{-\omega_q(\lambda-\delta)}(q^{\lambda-\rho}+\lambda(\log q)q^{\lambda-\delta})$$

ce qui, compte tenu du fait que $0 < \omega_q < 1$, est majoré par

$$\begin{aligned}&(1+q^{\nu-\lambda})q^{\lambda}(q^{\lambda-\rho-\omega_q(\lambda-\Delta)}+\lambda(\log q)q^{(1-\omega_q)\lambda})\\ &=(1+q^{\nu-\lambda})q^{(2-\omega_q)\lambda}(q^{-\rho+\omega_q\Delta}+\lambda(\log q)).\end{aligned}$$

En imposant la condition (le choix final de Δ en (53) respectera cette condition)

$$\omega_q\Delta \leqslant \rho, \tag{48}$$

et en observant que $1+2\eta_q \leqslant 2-\omega_q$, on obtient

$$S_2 \ll_q (1+q^{\nu-\lambda})q^{\lambda}\sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} q^{-\omega_q(\lambda-\delta)}\max_{\substack{k\mid q^{\lambda-\delta}\\ (k,q)<q}} S_3(k,\delta)+\lambda(\log q)(1+q^{\nu-\lambda})q^{(2-\omega_q)\lambda}. \tag{49}$$

Supposons maintenant que $\delta > \Delta$ et posons $\delta' = \delta-\Delta$. D'après (47), en découpant la somme en tranches de longueur $q^{\delta'}$, la somme $S_3(k,\delta)$ est majorée par

$$k^{-1}q^{\lambda-\delta}\sum_{0\leqslant a<q^{\delta'}}\sum_{0\leqslant i<kq^{\Delta}}\left|F_\delta(a+iq^{\delta'},\alpha)\right|^2\min\left(kq^{\delta-2\rho},\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi(a+iq^{\delta'})r}{kq^{\delta}}\right|}\right).$$

Comme $\delta' \leqslant \delta$, d'après (30) et (31) on a $|F_\delta(\,.\,,\alpha)| \leqslant |F_{\delta'}(\,.\,,\alpha)|$, et $|F_{\delta'}(\,.\,,\alpha)|$ est périodique de période $q^{\delta'}$, donc la somme $S_3(k,\delta)$ est majorée par

$$k^{-1}q^{\lambda-\delta}\sum_{0\leqslant a<q^{\delta'}}|F_{\delta'}(a,\alpha)|^2\sum_{0\leqslant i<kq^{\Delta}}\min\left(kq^{\delta-2\rho},\frac{1}{\left|\sin\pi\frac{ir+(ar/q^{\delta'})}{kq^{\Delta}}\right|}\right).$$

En appliquant le Lemme 6 avec $m = kq^{\Delta}$, $n = i$, $a = r$, $b = ar/q^{\delta'}$, $d = (r,kq^{\Delta})$ la somme sur i est majorée par

$$(r,kq^{\Delta})\min\left(kq^{\delta-2\rho},\frac{1}{\sin\pi\frac{(r,kq^{\Delta})}{kq^{\Delta}}\left\|\frac{ar}{(r,kq^{\Delta})q^{\delta'}}\right\|}\right)+kq^{\Delta}\log(kq^{\Delta}),$$

ce qui, en utilisant à nouveau la concavité du sinus, et en posant $r' = r/(r,kq^{\Delta})$, est majoré par

$$kq^{\Delta}\min\left((r,kq^{\Delta})q^{\delta-2\rho-\Delta},\frac{1}{\left|\sin\pi\frac{ar'}{q^{\delta'}}\right|}\right)+kq^{\Delta}\log(kq^{\Delta}).$$

Ainsi, comme $(r,kq^{\Delta}) \leqslant r < q^{\rho}$, en posant

$$S_4(k,\delta') = q^{\lambda-\delta'}\sum_{0\leqslant a<q^{\delta'}}|F_{\delta'}(a,\alpha)|^2\min\left(q^{\delta'-\rho},\frac{1}{\left|\sin\pi\frac{ar'}{q^{\delta'}}\right|}\right), \tag{50}$$

on obtient

$$S_3(k,\delta) \ll S_4(k,\delta') + q^{\lambda-\delta'} \log(kq^{\Delta}) \sum_{0\leqslant a<q^{\delta'}} |F_{\delta'}(a,\alpha)|^2 .$$

En utilisant (103) avec $\lambda = \delta'$ et $\delta = 0$, la somme du second terme est majorée par 1. De plus $kq^{\Delta} \leqslant q^{\lambda-\delta+\Delta} \leqslant q^{\lambda}$, donc on obtient

$$S_3(k,\delta) \ll S_4(k,\delta') + \lambda(\log q)q^{\lambda-\delta'}. \tag{51}$$

La contribution du second terme ci-dessus à la majoration de S_2 dans (49) est

$$\lambda(\log q)(1+q^{\nu-\lambda})q^{\lambda} \sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} q^{-\omega_q(\lambda-\delta)} q^{\lambda-\delta+\Delta} \ll \lambda(\log q)(1+q^{\nu-\lambda})q^{(2-\omega_q)\lambda+\omega_q\Delta}.$$

Sous la condition (48), on a donc en reportant dans (49) la majoration

$$\begin{aligned} S_2 \ll_q (1+q^{\nu-\lambda})q^{\lambda} \sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} q^{-\omega_q(\lambda-\delta)} \max_{\substack{k \mid q^{\lambda-\delta} \\ (k,q)<q}} S_4(k,\delta-\Delta) \\ +\lambda(\log q)(1+q^{\nu-\lambda})q^{(2-\omega_q)\lambda+\rho}. \end{aligned} \tag{52}$$

Nous devons maintenant majorer $S_4(k,\delta-\Delta)$. En choisissant

$$\Delta = \left\lfloor \rho \frac{\log q}{\log 2} \right\rfloor, \tag{53}$$

on a $1 \leqslant \Delta \leqslant \lambda$ dès que λ est grand (en raison de (22)), la condition (48) est vérifiée, et le plus important est que si p est un nombre premier et que $p^v \mid r$ avec v entier, alors $p^v \leqslant q^{\rho}$ donc $v \leqslant \Delta$. Ainsi l'entier $r' = r/(r,kq^{\Delta})$ vérifie

$$(r',q) = 1. \tag{54}$$

Nous devons organiser dans $S_4(k,\delta')$ la sommation sur a (qui peut être prise sur $[1,q^{\delta'}]$) en fonction des puissances de q en posant $a = q^{\theta}b$:

$$S_4(k,\delta') = q^{\lambda-\delta'} \sum_{0\leqslant\theta\leqslant\delta'} \sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant q^{\delta'-\theta} \\ b\not\equiv 0 \bmod q}} \left|F_{\delta'}(q^{\theta}b,\alpha)\right|^2 \min\left(q^{\delta'-\rho}, \frac{1}{\left|\sin\pi\frac{br'}{q^{\delta'-\theta}}\right|}\right).$$

La contribution de $\theta = \delta'$ comporte un seul terme et est égale à

$$q^{\lambda-\delta'} q^{\delta'-\rho} |F_{\delta'}(0,\alpha)|^2$$

c'est-à-dire, d'après (30),

$$q^{\lambda-\rho}(\varphi_q(\alpha)/q)^{2\delta'},$$

où $\varphi_q(\alpha) = \left|\frac{\sin\pi q\alpha}{\sin\pi\alpha}\right|$, ce qui permet de majorer la contribution de $\theta = \delta'$ par

$$q^{\lambda-\rho-\tau_q(\alpha)\delta'},$$

où l'on a posé

$$\tau_q(\alpha) = \min\left(\omega_q, \frac{-2\log(\varphi_q(\alpha)/q)}{\log q}\right). \tag{55}$$

La condition (14) entraîne que

$$\tau_q(\alpha) > 0.$$

Ainsi la contribution de ce terme à la majoration de S_2 dans (52) est majorée par

$$\begin{aligned}(1+q^{\nu-\lambda})q^{\lambda} &\sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} q^{-\omega_q(\lambda-\delta)} q^{\lambda-\rho-\tau_q(\alpha)\delta+\tau_q(\alpha)\Delta}\\ &\ll_q \lambda\,(1+q^{\nu-\lambda}) q^{(2-\tau_q(\alpha))\lambda-\rho+\tau_q(\alpha)\Delta},\end{aligned}$$

et comme d'après (55) et (48) on a $\tau_q(\alpha)\Delta \leqslant \omega_q\Delta \leqslant \rho$, cette contribution est finalement majorée par

$$\ll_q \lambda\,(1+q^{\nu-\lambda}) q^{(2-\tau_q(\alpha))\lambda}.$$

Lorsque $0 \leqslant \theta < \delta'$, on écrit d'après (30),

$$\begin{aligned}\left|F_{\delta'}(q^\theta b, \alpha)\right| &= q^{-\delta'} \prod_{1\leqslant j\leqslant\theta} \varphi_q(\alpha - bq^{\theta-j}) \prod_{\theta<j\leqslant\delta'} \varphi_q(\alpha - bq^{\theta-j})\\ &= q^{-\delta'} \varphi_q(\alpha)^\theta \prod_{\theta<j\leqslant\delta'} \varphi_q(\alpha - bq^{\theta-j})\\ &= q^{-\theta}\varphi_q(\alpha)^\theta \left|F_{\delta'-\theta}(b,\alpha)\right|\end{aligned}$$

donc d'après (31) on a

$$\left|F_{\delta'}(q^\theta b, \alpha)\right| \leqslant \left|F_{\delta'-\theta}(b,\alpha)\right|.$$

Il résulte donc de (52) (en utilisant à nouveau $\tau_q(\alpha) \leqslant \omega_q$ pour rassembler les termes d'erreur) que

$$\begin{aligned}S_2 \ll_q (1+q^{\nu-\lambda})q^{\lambda} &\sum_{\Delta<\delta\leqslant\lambda} q^{-\omega_q(\lambda-\delta)} \max_{\substack{k \mid q^{\lambda-\delta}\\ (k,q)<q}} S_5(k, \delta-\Delta)\\ &+ \lambda\,(\log q)(1+q^{\nu-\lambda}) q^{(2-\tau_q(\alpha))\lambda+\rho}\end{aligned} \tag{56}$$

avec

$$S_5(k,\delta') = q^{\lambda-\delta'} \sum_{0\leqslant\theta<\delta'} \sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant q^{\delta'-\theta}\\ b\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{\left|F_{\delta'-\theta}(b,\alpha)\right|^2}{\left|\sin\pi \frac{br'}{q^{\delta'-\theta}}\right|}. \tag{57}$$

Pour

$$(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}, \tag{58}$$

nous utilisons la majoration (106) avec $\lambda = \delta' - \theta$, en rappelant que $(r', q) = 1$ d'après (54), ce qui donne

$$S_5(k, \delta') \ll q^{\lambda-\delta'} \sum_{0 \leqslant \theta < \delta'} q^{\gamma_q(\alpha)(\delta'-\theta)} \ll_q \lambda\, q^{\lambda-\delta'+\gamma_q(\alpha)\delta'} = \lambda\, q^{\lambda-(1-\gamma_q(\alpha))(\delta-\Delta)},$$

où $\gamma_q(\alpha)$, défini par (104), vérifie $\frac{1}{2} \leqslant \gamma_q(\alpha) < 1$ d'après (105).

En reportant dans (56) on obtient

$$S_2 \ll_q (1 + q^{\nu-\lambda})\big(\lambda^2\, q^{(2-\omega_q)\lambda+\omega_q\Delta} + \lambda^2\, q^{(1+\gamma_q(\alpha))\lambda+(1-\gamma_q(\alpha))\Delta} \\ + \lambda(\log q) q^{(2-\tau_q(\alpha))\lambda+\rho}\big).$$

Posons, pour $q \geqslant 3$,

$$\epsilon_q(\alpha) = \min(\omega_q, \tau_q(\alpha), 1 - \gamma_q(\alpha)). \tag{59}$$

Alors comme $\Delta \leqslant \lambda$,

$$q^{(1+\gamma_q(\alpha))\lambda+(1-\gamma_q(\alpha))\Delta} \leqslant q^{(2-\epsilon_q(\alpha))\lambda+\epsilon_q(\alpha)\Delta}$$

donc, comme $\epsilon_q(\alpha)\Delta \leqslant \omega_q\Delta \leqslant \rho$ d'après (48), pour tout réel α vérifiant (58), on a

$$S_2 \ll_q \lambda^2(\log q)(1 + q^{\nu-\lambda})q^{(2-\epsilon_q(\alpha))\lambda+\rho},$$

et en remplaçant λ par sa valeur $\mu + 2\rho$ (cf. (23)) on obtient

$$S_2 \ll_q (\mu+\nu)^2(\log q)\left(q^{(2-\epsilon_q(\alpha))\mu+(5-2\epsilon_q(\alpha))\rho} + q^{(1-\epsilon_q(\alpha))\mu+\nu+(3-2\epsilon_q(\alpha))\rho}\right).$$

Pour obtenir la majoration attendue (21), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$(2 - \epsilon_q(\alpha))\mu + (5 - 2\epsilon_q(\alpha))\rho < \mu + \nu - \rho$$

et

$$(1 - \epsilon_q(\alpha))\mu + \nu + (3 - 2\epsilon_q(\alpha))\rho < \mu + \nu - \rho,$$

c'est-à-dire, en posant à nouveau

$$\xi = \frac{\rho}{\mu+\nu},$$

dès que l'on a

$$\frac{(4 - 2\epsilon_q(\alpha))\xi}{\epsilon_q(\alpha)} < \frac{\mu}{\mu+\nu} < \frac{1 - (6 - 2\epsilon_q(\alpha))\xi}{(2 - \epsilon_q(\alpha))}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme 3 avec

$$\tilde{\delta} := \frac{\epsilon_q(\alpha)}{28},$$

$$\beta_1 := \frac{(4 - 2\epsilon_q(\alpha))\xi}{\epsilon_q(\alpha)} + \tilde{\delta} \tag{60}$$

et

$$\beta_2 := \frac{1-(6-2\epsilon_q(\alpha))\xi}{(2-\epsilon_q(\alpha))} - \tilde{\delta}, \tag{61}$$

Nous devons vérifier que les conditions du lemme 3 ($0 < \tilde{\delta} < \beta_1 < \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2} < \beta_2 < 1$) sont satisfaites, c'est-à-dire :

$$0 < \frac{(4-2\epsilon_q(\alpha))\xi}{\epsilon_q(\alpha)} + \frac{\epsilon_q(\alpha)}{28} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1-(6-2\epsilon_q(\alpha))\xi}{(2-\epsilon_q(\alpha))} - \frac{\epsilon_q(\alpha)}{28} < 1.$$

À cet effet, il suffit d'imposer la condition

$$\xi \leqslant \frac{\epsilon_q(\alpha)}{14} \tag{62}$$

et de s'assurer que l'hypothèse (22) que nous avions imposée au début du traitement de S_2 est bien vérifiée, ce qui découle, d'après (45) et (59), du fait que l'on a

$$\epsilon_q(\alpha) \leqslant \omega_q = \left(\frac{1}{2} - \eta_3\right) \frac{\log 2}{\log q}.$$

Pour $q \geqslant 3$ et $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$, la condition (62) permet d'obtenir (21).

Remarque : Les valeurs de β_1 et β_2 (définies par (60) et (61)) sont indépendantes de celles de μ et de ν.

7.3. Conclusion

Nous allons maintenant fixer les paramètres de la Proposition 1, et ainsi achever la démonstration de la Proposition 1. Ceci nous permettra, grâce au Lemme 3, d'en déduire que la majoration (5) du Lemme 1 relative aux sommes de type II est bien vérifiée.

Pour $q \geqslant 2$ et α tels que $(q-1)\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ posons

$$\xi_q(\alpha) := \frac{\epsilon_q(\alpha)}{14}, \tag{63}$$

où $\epsilon_q(\alpha)$ est défini par (38) lorsque $q = 2$ et (59) lorsque $q \geqslant 3$.

Pour μ et ν vérifiant (8) et en choisissant $\rho = \lfloor \xi_q(\alpha)(\mu+\nu) \rfloor$, on vérifie facilement la condition (43) lorsque $q = 2$ et la condition (62) lorsque $q \geqslant 3$. Il résulte de l'étude effectuée aux paragraphes 7.1 et 7.2 que dans ces conditions

$$S_2(r,\mu,\nu,\rho) \ll_q (\mu+\nu)^2 q^{\mu+\nu-\rho}. \tag{64}$$

La relation (19) nous montre que

$$|S|^2 \ll_{q,\varepsilon} q^{(2+\varepsilon)(\mu+\nu)-\rho} + (\mu+\nu)^2 q^{2(\mu+\nu)-\rho} \ll_{q,\varepsilon} q^{(2-\xi_q(\alpha)+2\varepsilon)(\mu+\nu)}, \tag{65}$$

ce qui établit (13) et nous permet d'achever la démonstration de la Proposition 1 pour $\tilde{\delta} = \frac{\epsilon_q(\alpha)}{28}$, β_1 défini par (41) si $q = 2$ et par (60) si $q \geqslant 3$, β_2 défini par (42) si $q = 2$ et par (61) si $q \geqslant 3$.

Dans ces conditions, nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme 3. En particulier les paramètres choisis ci-dessus vérifient

$$\beta_2 < \frac{1}{2-\epsilon_q(\alpha)} - \tilde{\delta} \leqslant 1 - \tilde{\delta},$$

et donc

$$\frac{1}{1-\beta_2} \leqslant \frac{1}{\tilde{\delta}} \leqslant \frac{3}{\tilde{\delta}},$$

ce qui implique

$$x_0 = \max(q^{1/(1-\beta_2)}, q^{3/\tilde{\delta}}) = q^{3/\tilde{\delta}} = q^{84/\epsilon_q(\alpha)},$$

où $\epsilon_q(\alpha)$ est défini par (38) pour $q=2$ et par (59) pour $q \geqslant 3$.

On en déduit donc (5) pour un certain $U > 0$ vérifiant

$$U \ll_{q,\varepsilon} q^{(1-\frac{1}{2}\xi_q(\alpha)+\varepsilon)(\mu+\nu)} \log x \ll_{q,\varepsilon} x^{(1-\frac{1}{2}\xi_q(\alpha)+\varepsilon)} \log x,$$

dès que

$$x > x_0 = q^{84/\epsilon_q(\alpha)}. \tag{66}$$

8. Sommes de type I

L'objectif de cette partie est de majorer les sommes de type I, c'est-à-dire de montrer la proposition suivante :

Proposition 2. *Pour $q \geqslant 2$, $x \geqslant 2$, et pour tout α tel que $(q-1)\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a*

$$\sum_{M/q<m\leqslant M} \max_{\frac{x}{qm}\leqslant t\leqslant \frac{x}{m}} \Bigg| \sum_{t<n\leqslant \frac{x}{m}} \mathrm{e}(\alpha\, s_q(mn)) \Bigg| \ll_q x^{1-\kappa_q(\alpha)} \log x \tag{67}$$

pour $1 \leqslant M \leqslant x^{1/3}$ et

$$0 < \kappa_q(\alpha) := \min\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}(1-\gamma_q(\alpha))\right) \tag{68}$$

où $\frac{1}{2} \leqslant \gamma_q(\alpha) < 1$ est défini par (104).

Remarque : Il suffirait de montrer la proposition 2 pour $1 \leqslant M \leqslant x^{\beta_1}$, avec $0 < \beta_1 < 1/3$ déterminé par le traitement des sommes de II, ce qui permettrait de remplacer $\kappa_q(\alpha)$ par un meilleur exposant. Ce raffinement n'aurait aucune incidence sur le résultat final car la majoration des sommes de type II est prépondérante.

Dans ce paragraphe nous reprenons quelques résultats importants de [18], en conservant des notations aussi proches que possible de l'original, exception faite de α, qui est noté ξ dans [18].

Lemme 7. *Pour $q \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, φ_q définie par* (31), *on a*

$$\int_0^1 \prod_{0 \leqslant i < \lambda} \varphi_q(\alpha + q^i t)\ dt \leqslant q^{\lambda/2}. \tag{69}$$

Remarque : La borne triviale est q^λ et la majoration (69), que nous allons utiliser, est élémentaire. Celle-ci pourrait être améliorée : voir [18, Proposition 1] pour $q = 2$ et [17, inégalité (4.2)] pour $q \geqslant 3$.

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'identité de Parseval, on a

$$\left(\int_0^1 \prod_{0 \leqslant i < \lambda} \varphi_q(\alpha + q^i t)\ dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 \prod_{0 \leqslant i < \lambda} \varphi_q^2(\alpha + q^i t)\ dt$$
$$= \int_0^1 \left| \sum_{0 \leqslant \ell < q^\lambda} \mathrm{e}(\alpha s_q(\ell) + \ell t) \right|^2 dt = q^\lambda.$$

□

Lemme 8. *Soient $q \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$, φ_q définie par* (31), *et $\frac{1}{2} \leqslant \gamma_q(\alpha) < 1$ défini par* (104). *Alors pour tout $\lambda \geqslant 1$,*

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \prod_{0 \leqslant i < \lambda} \varphi_q(\alpha + q^i t) \leqslant q^{\gamma_q(\alpha)\lambda + 1 - \gamma_q(\alpha)}. \tag{70}$$

Démonstration. Pour $\lambda = 1$, l'inégalité (70) est évidente. Pour $\lambda \geqslant 2$ on peut écrire, en regroupant deux par deux les termes consécutifs,

$$\prod_{0 \leqslant i < \lambda} \varphi_q(\alpha + q^i t) \leqslant q \prod_{0 \leqslant i < \lambda - 1} \sqrt{\varphi_q(\alpha + q^i t)\varphi_q(\alpha + q^{i+1} t)} \leqslant q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-1)+1},$$

ce qui montre (70) pour $\lambda \geqslant 2$. □

Lemme 9. *Soient $q \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2} \leqslant \gamma_q(\alpha) < 1$ défini par* (104). *Alors pour tout $M \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{M/q < m \leqslant M} \sum_{0 \leqslant k < m} \left| \sum_{0 \leqslant \ell < q^\lambda} \mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell) + \frac{k\ell}{m} \right) \right| \ll_q q^{\gamma_q(\alpha)\lambda + 3/2} M^{3 - 2\gamma_q(\alpha)} (1 + \log M) + q^{\lambda/2+1} M^2. \tag{71}$$

Remarque : L'estimation (71) est une variante affaiblie de l'estimation (3.2) de [18], et du paragraphe V de [17] qui présentent des estimations plus fortes mais pour des valeurs plus spécifiques de α. Nous n'avons pas besoin ici de tous les raffinements techniques nécessaires dans [18] et [17], et nous nous contenterons de l'estimation (71).

Démonstration. Pour α et q fixés, posons pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_\lambda(t) = \prod_{0 \leqslant i < \lambda} \frac{\sin \pi q(\alpha + q^i t)}{\sin \pi(\alpha + q^i t)}. \tag{72}$$

En remarquant que

$$|\Phi_\lambda(t)| = \left| \sum_{0 \leqslant \ell < q^\lambda} \mathrm{e}(\alpha s_q(\ell) + \ell t) \right|$$

et en organisant la somme du membre de gauche de (71) selon la valeur de $d = (k, m)$, on voit que cette somme vaut

$$\sum_{1 \leqslant d \leqslant M} \sum_{M/q < m \leqslant M} \sum_{\substack{0 \leqslant k < m \\ (k,m)=d}} \left| \Phi_\lambda\left(\frac{k}{m}\right) \right|.$$

Pour chaque d fixé, nous introduisons un paramètre entier $\lambda_1 \leqslant \lambda$ à optimiser ultérieurement en fonction de λ, M et d. On a

$$|\Phi_\lambda(t)| = \prod_{0 \leqslant i < \lambda_1} \varphi_q(\alpha + q^i t) \prod_{\lambda_1 \leqslant i < \lambda} \varphi_q(\alpha + q^i t) = |\Phi_{\lambda_1}(t)| \left| \Phi_{\lambda - \lambda_1}(q^{\lambda_1} t) \right| \tag{73}$$

ce qui d'après (70) conduit à

$$|\Phi_\lambda(t)| \leqslant |\Phi_{\lambda_1}(t)|\, q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda - \lambda_1) + 1}.$$

Comme les fractions k/m sont d^2/M^2 bien espacés donc d'après l'inégalité de Sobolev-Gallagher (voir [18, Lemme 1, p. 585]), on a

$$\sum_{M/q < m \leqslant M} \sum_{\substack{0 \leqslant k < m \\ (k,m)=d}} \left| \Phi_{\lambda_1}\left(\frac{k}{m}\right) \right| \leqslant \frac{M^2}{d^2} \int_0^1 |\Phi_{\lambda_1}(t)|\ dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \left|\Phi'_{\lambda_1}(t)\right|\ dt.$$

Or, en dérivant (72), on obtient

$$\begin{aligned} \left|\Phi'_{\lambda_1}(t)\right| &\ll_q \sum_{0 \leqslant i < \lambda_1} q^i \prod_{\substack{0 \leqslant j < \lambda_1 \\ j \neq i}} \varphi_q(\alpha + q^j t) \\ &\ll_q \sum_{0 \leqslant i < \lambda_1} q^i q^{\lambda_1 - i} \prod_{0 \leqslant j < i} \varphi_q(\alpha + q^j t) = q^{\lambda_1} \sum_{0 \leqslant i < \lambda_1} \Phi_i(t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\sum_{M/q < m \leqslant M} \sum_{\substack{0 \leqslant k < m \\ (k,m)=d}} \left| \Phi_{\lambda_1}\left(\frac{k}{m}\right) \right| \\ &\qquad \ll_q \frac{M^2}{d^2} \int_0^1 |\Phi_{\lambda_1}(t)|\ dt + \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant i < \lambda_1} q^{\lambda_1} \int_0^1 |\Phi_i(t)|\ dt, \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité (69),

$$\sum_{M/q<m\leqslant M}\sum_{\substack{0\leqslant k<m\\(k,m)=d}}\left|\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{k}{m}\right)\right| \ll_q \frac{M^2}{d^2}q^{\lambda_1/2}+\frac{q^{\lambda_1}}{2}\sum_{0\leqslant i<\lambda_1}q^{i/2}$$
$$\ll \frac{M^2}{d^2}q^{\lambda_1/2}+q^{3\lambda_1/2}.$$

En choisissant

$$\lambda_1=\min\left(\lambda,\left\lfloor\frac{2\log(M/d)}{\log q}\right\rfloor\right),$$

on a $q^{\lambda_1}\leqslant \min(q^\lambda, M^2/d^2)$ et $q^{-\lambda_1}\leqslant\max(q^{-\lambda}, qd^2/M^2)$ et il résulte donc de (73) que

$$\begin{aligned}\sum_{M/q<m\leqslant M}\sum_{\substack{0\leqslant k<m\\(k,m)=d}}\left|\Phi_{\lambda}\left(\frac{k}{m}\right)\right| &\ll_q q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-\lambda_1)+1}\sum_{M/q<m\leqslant M}\sum_{\substack{0\leqslant k<m\\(k,m)=d}}\left|\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{k}{m}\right)\right|\\
&\ll_q \frac{M^2}{d^2}q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-\lambda_1)+1+\lambda_1/2}\\
&\ll_q \frac{M^2}{d^2}q^{1+\lambda/2}+\frac{M^{3-2\gamma_q(\alpha)}}{d^{3-2\gamma_q(\alpha)}}q^{\gamma_q(\alpha)\lambda+1+\gamma_q(\alpha)-1/2}\\
&\ll_q \frac{M^2}{d^2}q^{1+\lambda/2}+\frac{M^{3-2\gamma_q(\alpha)}}{d}q^{\gamma_q(\alpha)\lambda+3/2},\end{aligned}$$

et en sommant sur d pour $1\leqslant d\leqslant M$, on obtient (71). □

Lemme 10. *Pour tous $q\geqslant 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\geqslant 1$, on a*

$$\left|\sum_{0\leqslant\ell<x}\mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell)+\frac{k\ell}{m}\right)\right|\leqslant (q-1)\sum_{\lambda\leqslant\frac{\log x}{\log q}}\left|\sum_{0\leqslant\ell<q^\lambda}\mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell)+\frac{k\ell}{m}\right)\right|. \tag{74}$$

Démonstration. En écrivant $i=\lfloor(\log x)/(\log q)\rfloor$, on a $x=yq^i+x'$ avec y entier vérifiant $0\leqslant y\leqslant q-1$ et $0\leqslant x'<q^i$, d'où, comme $s_q(jq^i+\ell)=s_q(j)+s_q(\ell)$ pour $0\leqslant\ell<q^i$, le membre de gauche de (74) est majoré par

$$\left|\sum_{0\leqslant\ell<yq^i}\mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell)+\frac{k\ell}{m}\right)\right|+\left|\sum_{0\leqslant\ell<x'}\mathrm{e}\left(\alpha s_q(yq^i+\ell)+\frac{k(yq^i+\ell)}{m}\right)\right|$$
$$=y\left|\sum_{0\leqslant\ell<q^i}\mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell)+\frac{k\ell}{m}\right)\right|+\left|\sum_{0\leqslant\ell<x'}\mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell)+\frac{k\ell}{m}\right)\right|.$$

On applique à nouveau ce procédé à x' et ainsi de suite, et on obtient (74). □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 2. Par différence, il suffit de montrer que

$$\sum_{M/q<m\leqslant M} \max_{t\leqslant \frac{x}{m}} \left| \sum_{0\leqslant n\leqslant t} \mathrm{e}(\alpha\, s_q(mn)) \right| \ll_q x^{1-\kappa_q(\alpha)} \log x.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0\leqslant n\leqslant t} \mathrm{e}(\alpha\, s_q(mn)) \right| &= \left| \frac{1}{m} \sum_{0\leqslant k<m} \sum_{0\leqslant \ell\leqslant mt} \mathrm{e}\left(\alpha\, s_q(\ell) + \frac{k\ell}{m}\right) \right| \\ &\leqslant 1 + \frac{q}{M} \sum_{0\leqslant k<m} \left| \sum_{0\leqslant \ell<mt} \mathrm{e}\left(\alpha\, s_q(\ell) + \frac{k\ell}{m}\right) \right|, \end{aligned}$$

où le premier terme 1 n'existe que si mt est entier. La majoration (74) donne

$$\left| \sum_{0\leqslant \ell<mt} \mathrm{e}\left(\alpha\, s_q(\ell) + \frac{k\ell}{m}\right) \right| \leqslant (q-1) \sum_{\lambda\leqslant \frac{\log(mt)}{\log q}} \left| \sum_{0\leqslant \ell<q^\lambda} \mathrm{e}\left(\alpha s_q(\ell) + \frac{k\ell}{m}\right) \right|.$$

En notant que $mt \leqslant x$, l'estimation (71) conduit à

$$\begin{aligned} &\sum_{M/q<m\leqslant M} \max_{t\leqslant \frac{x}{m}} \left| \sum_{0\leqslant n\leqslant t} \mathrm{e}(\alpha\, s_q(mn)) \right| \\ &\qquad \ll_q M + \sum_{\lambda\leqslant \frac{\log x}{\log q}} \left(q^{\gamma_q(\alpha)\lambda+3/2} M^{2-2\gamma_q(\alpha)}(1+\log M) + q^{\lambda/2+1} M \right). \end{aligned}$$

En calculant la somme géométrique sur λ et en observant que d'après (105) on a $q^{\gamma_q(\alpha)} - 1 \geqslant q^{1/2} - 1$, on peut conserver une constante implicite indépendante de α, et on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{M/q<m\leqslant M} \max_{t\leqslant \frac{x}{m}} \left| \sum_{0\leqslant n\leqslant t} \mathrm{e}(\alpha\, s_q(mn)) \right| \\ &\qquad \ll_q x^{\gamma_q(\alpha)} M^{2-2\gamma_q(\alpha)}(1+\log M) + x^{1/2} M. \end{aligned}$$

On a donc démontré, puisque $M \leqslant x^{1/3}$, que

$$\begin{aligned} \sum_{M/q<m\leqslant M} \max_{t\leqslant \frac{x}{m}} \left| \sum_{0\leqslant n\leqslant t} \mathrm{e}(\alpha\, s_q(mn)) \right| &\ll_q x^{\frac{1}{3}(2+\gamma_q(\alpha))} \log x + x^{\frac{5}{6}} \\ &\ll_q x^{1-\kappa_q(\alpha)} \log x. \end{aligned}$$

Ceci termine le traitement des sommes de type I en établissant (67).

9. Fin de la preuve du Théorème 1

Pour établir le Théorème 1, il suffit grâce au Lemme 1 de montrer les majorations (5) et (6) pour $g(n) = \mathrm{e}(\alpha s_q(n))$ où $(q-1)\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Nous avons établi (5) au paragraphe 7.3 et la preuve de (6) a fait l'objet de la partie 8, ce qui termine la preuve du Théorème 1 pour tout choix de $\sigma_q(\alpha)$ vérifiant

$$0 < \sigma_q(\alpha) < \min(\tfrac{1}{2}\xi_q(\alpha), \kappa_q(\alpha)) = \tfrac{1}{2}\xi_q(\alpha), \tag{75}$$

où $\xi_q(\alpha)$ est défini par (63) et $\kappa_q(\alpha)$ est défini par (68).

10. Preuve du Théorème 2

Pour démontrer les Théorèmes 2 et 3 nous aurons recours à un procédé classique de sommation par parties formalisé dans le lemme qui suit :

Lemme 11. *Soit g une fonction arithmétique telle que $|g(n)| \leqslant 1$ pour tout entier n. Alors*

$$\Big|\sum_{p\leqslant x} g(p)\Big| \leqslant \frac{2}{\log x} \max_{t\leqslant x} \Big|\sum_{n\leqslant t} \Lambda(n) g(n)\Big| + O(\sqrt{x}). \tag{76}$$

Démonstration. Par sommation par parties,

$$\sum_{p\leqslant x} g(p) = \frac{1}{\log x} \sum_{p\leqslant x} \log(p) g(p) + \int_2^x \Big(\sum_{p\leqslant t} \log(p) g(p)\Big) \frac{dt}{t(\log t)^2},$$

d'où, en coupant l'intégrale en $\sqrt{x}$, et en utilisant l'inégalité $\sum_{p\leqslant t} \log p = O(t)$ (voir par exemple [22, Theorem 414]),

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{p\leqslant x} g(p)\Big| &\leqslant \Big(\frac{1}{\log x} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{t(\log t)^2}\Big) \max_{\sqrt{x}<t\leqslant x} \Big|\sum_{p\leqslant t} \log(p) g(p)\Big| + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{2}{\log x} \max_{\sqrt{x}<t\leqslant x} \Big|\sum_{p\leqslant t} \log(p) g(p)\Big| + O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité de Tchébychev $\pi(t) = O(t/\log t)$ (voir par exemple [22, Theorem 7]),

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n\leqslant t} \Lambda(n) g(n) - \sum_{p\leqslant t} \log(p) g(p)\Big| &\leqslant \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \log p \sum_{2\leqslant a\leqslant \left\lfloor \frac{\log x}{\log p}\right\rfloor} 1 \\ &\leqslant \pi(\sqrt{x}) \log x = O(\sqrt{x}),\end{aligned}$$

ce qui conduit à (76). □

Pour démontrer le Théorème 2, commençons par remarquer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors la suite $(\alpha s_q(p))_{p\in\mathcal{P}}$ prend un nombre fini de valeurs et n'est donc pas équirépartie modulo 1. Si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors pour tout $h \in \mathbb{Z}$ tel que $h \neq 0$, on a $(q-1)h\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, donc d'après le Théorème 1, il existe $\sigma_q(h\alpha) > 0$ tel que

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\,\mathrm{e}(h\alpha s_q(n)) = O_{q,h\alpha}(x^{1-\sigma_q(h\alpha)}).$$

L'inégalité (76) nous permet d'écrire

$$\sum_{p\leqslant x} \mathrm{e}(h\alpha s_q(p)) = O_{q,h\alpha}(x^{1-\sigma_q(h\alpha)}) + O(\sqrt{x}),$$

ce qui prouve que la suite $(\alpha s_q(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est équirépartie modulo 1 d'après le critère de Weyl [44, Chapitre 1, p. 1].

11. Preuve du Théorème 3

LEMME 12. *Si $d \mid q-1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_q(n) \equiv n \bmod d$.*

Démonstration. Comme $d \mid q-1$ signifie que $q \equiv 1 \bmod d$, en écrivant n en base q on a $n = \sum_i n_i q^i \equiv \sum_i n_i \equiv s_q(n) \bmod d$. □

Pour démontrer le Théorème 3, écrivons

$$\operatorname{card}\{p \leqslant x,\ s_q(p) \equiv a \bmod m\} = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{m} \sum_{0\leqslant j<m} \mathrm{e}\left(\frac{j}{m}(s_q(p)-a)\right).$$

Posons $d = (m, q-1)$, $m' = m/d$, $J = \{km',\ 0 \leqslant k < d\}$, $J' = \{0,\dots,m-1\}\setminus J = \{km'+r,\ 0\leqslant k<d,\ 1\leqslant r<m'\}$. Pour $j = km' \in J$, à l'aide du Lemme 12, on a

$$\mathrm{e}\left(\frac{j}{m}s_q(p)\right) = \mathrm{e}\left(\frac{km'}{dm'}s_q(p)\right) = \mathrm{e}\left(\frac{k}{d}s_q(p)\right) = \mathrm{e}\left(\frac{k}{d}p\right),$$

donc

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{m}\sum_{j\in J}\mathrm{e}\left(\frac{j}{m}(s_q(p)-a)\right) = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{d}\mathrm{e}\left(\frac{k}{d}(p-a)\right) = \frac{d}{m}\pi(x;a,d).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(77)\qquad &\operatorname{card}\{p \leqslant x,\ s_q(p) \equiv a \bmod m\}\\ &\qquad = \frac{d}{m}\pi(x;a,d) + \frac{1}{m}\sum_{j\in J'}\mathrm{e}\left(\frac{-aj}{m}\right)\sum_{p\leqslant x}\mathrm{e}\left(\frac{j}{m}s_q(p)\right).\end{aligned}$$

Si $J' = \emptyset$, ce qui correspond au cas dégénéré où $m \mid q-1$, alors l'égalité ci-dessus établit l'égalité (4) avec un terme d'erreur nul. Nous pouvons maintenant supposer que $J' \neq \emptyset$. Posons $q' = (q-1)/d$. On a $(q', m') = 1$, donc pour $j = km' + r \in J'$, on a

$$\frac{(q-1)j}{m} = \frac{dq'(km'+r)}{dm'} = q'k + \frac{q'r}{m'} \notin \mathbb{Z},$$

d'où, d'après le Théorème 1, on déduit que pour tout $j \in J'$, il existe $\sigma_q(j/m) > 0$ tel que

$$\sum_{p \leqslant x} \mathrm{e}\left(\frac{j}{m} s_q(p)\right) = O(x^{1-\sigma_q(j/m)}).$$

Rappelons que $J' \neq \emptyset$ et posons $\sigma_{q,m} = \min_{j\in J'} \sigma_q(j/m) > 0$. En insérant la majoration ci-dessus dans (77), on obtient

$$\operatorname{card}\{p \leqslant x,\ s_q(p) \equiv a \bmod m\} = \frac{d}{m}\pi(x;a,d) + O(x^{1-\sigma_{q,m}}),$$

ce qui démontre le Théorème 3.

12. Estimations en moyenne de produits trigonométriques

Dans toute cette partie, on rappelle que d'après (30) on a

$$|F_\lambda(h,\alpha)| = q^{-\lambda} \prod_{1\leqslant j\leqslant \lambda} \varphi_q(\alpha - hq^{-j}),$$

où la fonction φ_q, périodique de période 1 et continue sur $\mathbb{R}$, est définie par

$$\varphi_q(t) = \left|\sum_{0\leqslant v<q} \mathrm{e}(vt)\right| = \begin{cases} |\sin \pi qt| \,/\, |\sin \pi t| & \text{si } t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \\ q & \text{si } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

12.1. Moyennes d'ordre 1

Lemme 13. *Pour $q \geqslant 2$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\varphi_q^2(t) = \sum_{|k|<q} (q-|k|)\ \mathrm{e}(kt), \tag{78}$$

$$\sum_{0\leqslant r<q} \varphi_q^2(t+\tfrac{r}{q}) = q^2. \tag{79}$$

Démonstration. L'égalité (78) est classique et caractérise le noyau de Fejér. Pour montrer (79), on écrit

$$\sum_{0\leqslant r<q} \varphi_q^2(t+\tfrac{r}{q}) = \sum_{|k|<q} (q-|k|)\ \mathrm{e}(kt) \sum_{0\leqslant r<q} \mathrm{e}(\tfrac{kr}{q}).$$

La somme sur r vaut q si $k \equiv 0 \bmod q$, et 0 sinon. La sommation sur k comporte donc uniquement le terme $k = 0$, dont la contribution est égale à q^2, d'où l'égalité (79). $\square$

Pour obtenir des majorations précises lorsque d divise q^λ des sommes $G_\lambda(a,d,\alpha)$ et $G_\lambda(\alpha)$ définies par (28), nous utiliserons notamment le lemme suivant qui précise des résultats obtenus dans [17].

Lemme 14. *Pour $q \geqslant 2$, la fonction ψ_q définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\psi_q(t) = q^{-1} \sum_{0 \leqslant r < q} \varphi_q\left(t + \tfrac{r}{q}\right) \tag{80}$$

est périodique de période $1/q$ et continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \psi_q(t) = \psi_q\left(\frac{1}{2q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{q}\left(\frac{1}{2}+r\right)}, \tag{81}$$

et

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \psi_q(t) \leqslant \frac{2}{q\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{2}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{2q} \leqslant \frac{2}{q\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{2}{\pi}\log\frac{2q}{\pi}. \tag{82}$$

En particulier, on a les valeurs exactes

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \psi_2(t) = \sqrt{2},\ \max_{t\in\mathbb{R}} \psi_3(t) = 5/3,\ \max_{t\in\mathbb{R}} \psi_4(t) = (2+\sqrt{2})^{1/2}.$$

Pour $q \geqslant 3$, on définit η_q par

$$\eta_q = \log\psi_q((2q)^{-1})/\log q, \quad \textit{i.e. :} \quad q^{\eta_q} = \max_{t\in\mathbb{R}} \psi_q(t). \tag{83}$$

Alors pour $q \geqslant 4$ on a les inégalités

$$0 < \eta_q < \eta_3, \qquad 0,4649 < \eta_3 = (\log 5)/(\log 3) - 1 < 0,465. \tag{84}$$

Remarque : Le point important dans la majoration (84) est l'inégalité $\eta_q < 1/2$ qui sera essentielle dans la suite de notre étude. Lorsque $q = 2$, la définition (83) amènerait la valeur $1/2$, qui est insuffisante. Nous devrons donc effectuer un traitement spécifique pour $q = 2$, et l'exposant η_2 sera défini d'une manière complètement différente dans le Lemme 18 par la formule (96).

Démonstration. Par construction, ψ_q est périodique de période $1/q$ et continue sur $\mathbb{R}$. La démonstration du Lemme 2 de [17] montre que le maximum de ψ_q sur $\mathbb{R}$ est atteint au point $t = (2q)^{-1}$, ce qui établit la première égalité de (81). La seconde égalité de (81) s'obtient en remplaçant t par $(2q)^{-1}$ dans (80).

Pour établir la première inégalité de (82), on utilise la convexité de la fonction $u \mapsto 1/(\sin u)$ sur $]0,\pi[$ qui permet d'écrire (méthode des trapèzes) :

$$\begin{aligned}\psi_q\left(\frac{1}{2q}\right) &\leqslant \frac{1}{q\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{q\sin\frac{\pi}{q}(q-\frac{1}{2})} + \frac{1}{q}\int_{1/2}^{q-3/2} \frac{dt}{\sin\frac{\pi}{q}(\frac{1}{2}+t)} \\ &= \frac{2}{q\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{2}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{2q}.\end{aligned}$$

La seconde inégalité de (82) résulte de la majoration $\cot u \leqslant u^{-1}$ valable pour $0 < u < \pi/2$.

Pour montrer la majoration (84), on utilise la deuxième majoration de (82), ce qui donne pour $q \geqslant 4$, en écrivant $\sin\frac{\pi}{2q} \geqslant \frac{\pi}{2q}\frac{\sin(\pi/8)}{\pi/8} = \frac{4}{q}\sin(\pi/8)$,

$$q^{\eta_q} - q^{\eta_3} \leqslant \frac{2}{q\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{2}{\pi}\log\frac{2q}{\pi} - q^{\eta_3} \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \frac{2}{\pi}\log\frac{2q}{\pi} - q^{\eta_3}.$$

La fonction de q du membre de droite est décroissante pour $q \geqslant 4$ et vaut approximativement $-0,0035871719 < 0$ pour $q = 4$, ce qui assure que $q^{\eta_q} < q^{\eta_3}$, et donc $\eta_q < \eta_3$ pour tout $q \geqslant 4$. □

Nous aurons aussi besoin d'une généralisation de la fonction ψ_q définie par (80). Pour $R \mid q$, nous posons pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_{q,R}(t) = \frac{1}{q}\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\varphi_q\left(t + \frac{r}{R}\right). \tag{85}$$

Lemme 15. *Pour $3 \leqslant R \leqslant q$ avec $R \mid q$, on a*

$$\max_{t\in\mathbb{R}}\psi_{q,R}(t) \leqslant R^{\eta_R}, \tag{86}$$

où η_R est définie par (83) *et vérifie* (84) *: $\eta_R \leqslant \eta_3 \leqslant 0,465$.*

Pour $R = 2$ et $q \geqslant 4$ avec $2 \mid q$, on a

$$\max_{t\in\mathbb{R}}\psi_{q,2}(t) \leqslant \sqrt{3/2}. \tag{87}$$

Démonstration. Pour $3 \leqslant R \leqslant q$ avec $R \mid q$, on peut se ramener à la fonction ψ_R définie par la formule (80) en écrivant

$$\psi_{q,R}(t) = \frac{R}{q}\left|\frac{\sin\pi qt}{\sin\pi Rt}\right| \frac{1}{R}\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\varphi_R\left(t+\frac{r}{R}\right) = \frac{R}{q}\ \varphi_{q/R}(Rt)\ \psi_R(t).$$

Comme $\varphi_{q/R} \leqslant q/R$, en vertu de (83) appliqué à R au lieu de q, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_{q,R}(t) \leqslant \psi_R(t) \leqslant R^{\eta_R},$$

d'où la majoration (86).

Supposons maintenant que $R = 2$, $q \geqslant 4$ et $2 \mid q$. Comme $\psi_{q,2}$ est périodique de période $1/2$ et vérifie $\psi_{q,2}(1/2 - t) = \psi_{q,2}(t)$, il suffit de chercher le maximum de $\psi_{q,2}$ sur $[0, 1/4]$. En procédant comme précédemment, on obtient pour tout $t \in [0, 1/4]$,

$$\psi_{q,2}(t) \leqslant \psi_2(t) = |\cos\pi t| + |\sin\pi t|\,,$$

qui est une majoration fine lorsque t est proche d'un entier. Ainsi,

$$\max_{t\in[0,1/(3q)]}\psi_{q,2}(t) \leqslant \max_{t\in[0,1/(3q)]}\psi_2(t) = \sqrt{2}\,\cos\pi\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3q}\right) \leqslant \sqrt{2}\,\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{3/2}.$$

Lorsque $1/(3q) < t \leqslant 1/4$, avec la majoration $\psi_2 \leqslant \sqrt{2}$ on peut écrire

$$\psi_{q,2}(t) = \frac{2}{q}\ \varphi_{q/2}(2t)\ \psi_2(t) \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{q}\varphi_{q/2}(2t).$$

Or, la fonction $\varphi_{q/2}$ étant décroissante sur $[0, 2/q]$, on a

$$\max_{t\in[1/(3q),1/q]} \varphi_{q/2}(2t) = \varphi_{q/2}(2/(3q)) \leqslant \left(\sin\tfrac{\pi}{3}\right)\left(\tfrac{4}{q}\sin\tfrac{\pi}{6}\right)^{-1} = \tfrac{q}{2}\cos\tfrac{\pi}{6}.$$

De plus,

$$\max_{t\in[1/q,1/4]} \varphi_{q/2}(2t) \leqslant \max_{t\in[1/q,1/4]} \frac{1}{\sin 2\pi t} = \frac{1}{\sin 2\pi/q} \leqslant \frac{q}{4} \leqslant \frac{q}{2}\cos\tfrac{\pi}{6}.$$

Finalement,

$$\max_{t\in[1/(3q),1/4]} \varphi_{q/2}(2t)\psi_{q,2}(t) \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{q}\frac{q}{2}\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{3/2},$$

ce qui termine la preuve de (87). □

Corollaire 1. *Pour $q \geqslant 3$ et $R \mid q$, $2 \leqslant R \leqslant q$ on a*

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \psi_{q,R}(t) \leqslant R^{\eta_3}, \tag{88}$$

où η_3 est définie par (84) et vérifie $0,4649 < \eta_3 < 0,465$.

Démonstration. Pour $R \geqslant 3$, comme $\eta_R \leqslant \eta_3$ d'après (84), en appliquant (86) on obtient (88). Pour $R = 2$, en appliquant (87) il suffit d'observer que

$$\sqrt{3/2} < 1,23 < 1,38 < R^{\eta_3} = 2^{(\log 5)/(\log 3)-1}$$

pour établir (88). □

Lemme 16. *Pour $q \geqslant 3$, η_q défini par (83), $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$, on a*

$$G_\lambda(a, q^\delta, \alpha) = \sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_\lambda(h,\alpha)| \leqslant q^{\eta_q(\lambda-\delta)}\,|F_\delta(a,\alpha)|\,. \tag{89}$$

En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$, on a

$$G_\lambda(\alpha) = \sum_{0\leqslant h<q^\lambda} |F_\lambda(h,\alpha)| \leqslant q^{\eta_q\lambda}. \tag{90}$$

Démonstration. Pour $\lambda > \delta$, la division euclidienne et la formule (30) permettent d'écrire

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_\lambda(h,\alpha)| = \sum_{0\leqslant r<q}\ \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda-1}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} \left|F_\lambda(h + rq^{\lambda-1},\alpha)\right| \tag{91}$$

or

$$\begin{aligned}\left|F_\lambda(h+rq^{\lambda-1},\alpha)\right| &= \left|F_{\lambda-1}(h+rq^{\lambda-1},\alpha)\right| \; q^{-1}\varphi_q\left(\alpha-\frac{h+rq^{\lambda-1}}{q^\lambda}\right)\\ &= |F_{\lambda-1}(h,\alpha)| \; q^{-1}\varphi_q\left(\alpha-\frac{h}{q^\lambda}-\frac{r}{q}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, comme φ_q est périodique de période 1, en remplaçant r par $q-1-r$, on obtient

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_\lambda(h,\alpha)| = \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda-1}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-1}(h,\alpha)| \; \psi_q(\alpha-hq^{-\lambda}), \tag{92}$$

où ψ_q est définie par (80). Par (83), on a $\psi_q(\alpha-hq^{-\lambda})\leqslant q^{\eta_q}$, donc pour $\lambda\geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_\lambda(h,\alpha)| \leqslant q^{\eta_q} \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda-1}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-1}(h,\alpha)|. \tag{93}$$

En appliquant $(\lambda-\delta)$ fois la majoration (93), on obtient (89). La majoration (90) en découle en prenant $\delta=0$, $a=0$, et en observant que $|F_0(0,\alpha)|=1$ d'après (29). $\square$

Lemme 17. *Pour $q\geqslant 3$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant\delta\leqslant\lambda$, $k\in\mathbb{N}$, $k \mid q^{\lambda-\delta}$, $q\nmid k$, on a*

$$G_\lambda(a,kq^\delta,\alpha)\leqslant k^{-\eta_3}q^{\eta_3(\lambda-\delta)}\,|F_\delta(a,\alpha)|. \tag{94}$$

Démonstration. Si $\lambda=\delta$, alors la condition $k \mid q^{\lambda-\delta}$ entraîne $k=1$ et chacun des deux membres de (94) comporte un seul terme : $|F_\delta(a,\alpha)|$, donc (94) est une égalité. Si $\lambda>\delta$, posons pour $\delta\leqslant\theta\leqslant\lambda$, $d_\theta=(q^\theta,kq^\delta)$, $u_\theta=q^\theta/d_\theta$. Pour $\theta>\delta$, on a $d_{\theta-1}=(q^{\theta-1},d_\theta)\mid d_\theta$ donc $\rho_\theta:=d_\theta/d_{\theta-1}$ est un entier. De plus

$$d_{\theta-1}(\rho_\theta,q)=(d_\theta,qd_{\theta-1})=(q^\theta,kq^\delta,q^\theta,kq^{\delta+1})=d_\theta=\rho_\theta d_{\theta-1}$$

donc $\rho_\theta\mid q$. De surcroît on a $\rho_\theta<q$ car sinon, comme $d_{\theta-1}=q^\delta(q^{\theta-1-\delta},k)$, on aurait $q^{\delta+1}\mid qd_{\theta-1}=d_\theta=q^\delta(q^{\theta-\delta},k)$ donc $q\mid k$ ce qui contredirait l'hypothèse $q\nmid k$.

Avec ces notations, on a $kq^\delta=d_\lambda$ et

$$G_\lambda(a,kq^\delta,\alpha)=\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod kq^\delta}}|F_\lambda(h,\alpha)|=G_\lambda(a,d_\lambda,\alpha).$$

Pour $\delta<\theta\leqslant\lambda$, on peut écrire

$$\begin{aligned}G_\theta(a,d_\theta,\alpha) &= \sum_{\substack{0\leqslant h<q^\theta\\ h\equiv a \bmod d_\theta}}|F_\theta(h,\alpha)|\\ &= \sum_{0\leqslant u<u_\theta}|F_\theta(a+ud_\theta,\alpha)| = \sum_{0\leqslant u<u_\theta}|F_\theta(a+u\rho_\theta d_{\theta-1},\alpha)|,\end{aligned}$$

et en remplaçant $u\rho_\theta$ par v, et en notant que $\rho_\theta u_\theta = q\, u_{\theta-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} G_\theta(a, d_\theta, \alpha) &= \sum_{\substack{0\leqslant v<q\, u_{\theta-1}\\ v\equiv 0 \bmod \rho_\theta}} |F_\theta(a + vd_{\theta-1}, \alpha)| \\ &= \sum_{0\leqslant u<u_{\theta-1}} \sum_{\substack{0\leqslant w<q\\ u+w\, u_{\theta-1}\equiv 0 \bmod \rho_\theta}} |F_\theta(a + (u + w\, u_{\theta-1})d_{\theta-1}, \alpha)| \,. \end{aligned}$$

En utilisant l'écriture (30) de $|F_\theta|$ sous forme de produit, et en observant que $u_{\theta-1}d_{\theta-1} = q^{\theta-1}$ et que $F_{\theta-1}(\,.\,, \alpha)$ est périodique de période $q^{\theta-1}$, il vient

$$G_\theta(a, d_\theta, \alpha) = \sum_{0\leqslant u<u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + ud_{\theta-1}, \alpha)| \sum_{\substack{0\leqslant w<q\\ w\, u_{\theta-1}\equiv -u \bmod \rho_\theta}} \frac{1}{q}\, \varphi_q\left(\alpha - \frac{a + ud_{\theta-1}}{q^\theta} - \frac{w}{q}\right).$$

En écrivant

$$d_{\theta-1}(\rho_\theta, u_{\theta-1}) = (d_\theta, q^{\theta-1}) = (kq^\delta, q^\theta, q^{\theta-1}) = d_{\theta-1},$$

on voit que $(\rho_\theta, u_{\theta-1}) = 1$, donc $u_{\theta-1}$ est inversible modulo ρ_θ. Notons $\tilde{u}_{\theta-1}$ son inverse. Alors en posant $R = q/\rho_\theta$ on peut écrire en posant $w = -u\tilde{u}_{\theta-1} - r\rho_\theta$ pour $0 \leqslant r < R$:

$$G_\theta(a, d_\theta, \alpha) = \sum_{0\leqslant u<u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + ud_{\theta-1}, \alpha)|\ \psi_{q,R}\left(\alpha - \frac{a + ud_{\theta-1} + u\tilde{u}_{\theta-1}}{q^\theta}\right),$$

où $\psi_{q,R}$ est définie par (85) et majorée par (88) : $\psi_{q,R} = \psi_{q,q/\rho_\theta} \leqslant \rho_\theta^{-\eta_3} q^{\eta_3}$. Ainsi,

$$G_\theta(a, d_\theta, \alpha) \leqslant \rho_\theta^{-\eta_3} q^{\eta_3} \sum_{0\leqslant u<u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + ud_{\theta-1}, \alpha)|$$

et on obtient l'inégalité

$$G_\theta(a, d_\theta, \alpha) \leqslant \rho_\theta^{-\eta_3} q^{\eta_3} G_{\theta-1}(a, d_{\theta-1}, \alpha). \tag{95}$$

En itérant $(\lambda - \delta)$ fois l'inégalité (95), on obtient

$$G_\lambda(a, kq^\delta, \alpha) = G_\lambda(a, d_\lambda, \alpha) \leqslant \rho_{\delta+1}^{-\eta_3} \cdots \rho_\lambda^{-\eta_3} q^{\eta_3(\lambda-\delta)} G_\delta(a, d_\delta, \alpha),$$

or,

$$\rho_{\delta+1} \cdots \rho_\lambda = \frac{d_{\delta+1}}{d_\delta} \frac{d_{\delta+2}}{d_{\delta+1}} \cdots \frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = \frac{d_\lambda}{d_\delta} = \frac{kq^\delta}{q^\delta} = k,$$

et $G_\delta(a, d_\delta, \alpha) = G_\delta(a, q^\delta, \alpha) = |F_\delta(a, \alpha)|$, ce qui établit (94). □

Le cas $q = 2$ nécessite un traitement plus fin qui n'est pas couvert par les lemmes précédents et qui fait l'objet du Lemme 18.

Lemme 18. *Pour $q=2$, on définit η_2 par l'égalité*

$$2^{\eta_2} = (2+\sqrt{2})^{1/4} \qquad \text{(en particulier } 0{,}4428 < \eta_2 < 0{,}4429\text{)}. \tag{96}$$

Alors uniformément pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$, on a

$$G_\lambda(a, 2^\delta, \alpha) = \sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^\lambda \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_\lambda(h,\alpha)| \leqslant 2^{\eta_2(\lambda-\delta)+\frac{1}{2}} \, |F_\delta(a,\alpha)| \, . \tag{97}$$

En particulier, uniformément pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$ on a,

$$\sum_{0 \leqslant h < 2^\lambda} |F_\lambda(h,\alpha)| \leqslant 2^{\eta_2 \lambda + \frac{1}{2}}. \tag{98}$$

Démonstration. L'inégalité (98) se déduit de (97) en prenant $\delta = 0$, $a = 0$ et en observant que $|F_0(a,\alpha)| = 1$ d'après (29). Pour montrer (97), observons que lorsque $q = 2$, la définition (30) se simplifie, et on a

$$|F_0(h,\alpha)| = 1; \quad |F_\lambda(h,\alpha)| = \prod_{j=1}^{\lambda} \left|\cos \pi(\alpha - h\, 2^{-j})\right| \quad (\lambda \geqslant 1). \tag{99}$$

On procède par itération. Pour $x \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geqslant 1$, posons

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= 1, \\ \Phi_i(x) &= \left|\cos \pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right| \Phi_{i-1}(\tfrac{x}{2}) + \left|\sin \pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right| \Phi_{i-1}(\tfrac{x+1}{2}). \end{aligned}$$

En écrivant pour $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda+1} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda+1}(h,\alpha)| = \sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda+1}(h,\alpha)| + \sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} \left|F_{\lambda+1}(h+2^\lambda,\alpha)\right| \tag{100}$$

on obtient, à l'aide de (99), par récurrence sur $i \geqslant 0$,

$$\forall \lambda \geqslant \delta, \quad \sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda+i} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda+i}(h,\alpha)| = \sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)| \, \Phi_i\left(\frac{h}{2^\lambda}\right).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \Phi_1^2(x) &= \left|\cos \pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right|^2 + 2\left|\cos \pi(\alpha - \tfrac{x}{2}) \sin \pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right| + \left|\sin \pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right|^2 \\ &= 1 + \left|\sin 2\pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right| \leqslant 2, \end{aligned}$$

donc $\Phi_1(x) \leqslant \sqrt{2}$, et on obtient pour $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda+1} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda+1}(h,\alpha)| \leqslant \sqrt{2} \sum_{\substack{0 \leqslant h < 2^{\lambda} \\ h \equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)| \, . \tag{101}$$

Cette majoration par $\sqrt{2}$ n'étant pas suffisante, nous allons procéder à une seconde itération qui nous permettra en substance d'obtenir une majoration par $(2+\sqrt{2})^{1/4}$. La majoration classique $|a\cos\theta + b\sin\theta|^2 \leqslant |a|^2+|b|^2$, permet d'écrire

$$\Phi_2^2(x) \leqslant \Phi_1^2(\tfrac{x}{2}) + \Phi_1^2(\tfrac{x+1}{2}) = 2 + \left|\sin 2\pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right| + \left|\cos 2\pi(\alpha - \tfrac{x}{2})\right| \leqslant 2+\sqrt{2}.$$

Par conséquent, pour $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$,

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<2^{\lambda+2}\\ h\equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda+2}(h,\alpha)| \leqslant (2+\sqrt{2})^{1/2} \sum_{\substack{0\leqslant h<2^{\lambda}\\ h\equiv a \bmod 2^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)|. \tag{102}$$

En appliquant $\lfloor(\lambda-\delta)/2\rfloor$ fois (102) et éventuellement (lorsque $\lambda-\delta$ est impair) une fois (101), on obtient (97). □

12.2. Moyennes d'ordre 2

Lemme 19. *Pour $q \geqslant 2$, $a \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$,*

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)|^2 = |F_\delta(a,\alpha)|^2. \tag{103}$$

Démonstration. Pour $\lambda > \delta$, on a

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)|^2 = \sum_{0\leqslant r<q} \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda-1}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} \left|F_\lambda(h+rq^{\lambda-1},\alpha)\right|^2.$$

Or, comme la formule (30) permet d'écrire

$$\left|F_\lambda(h+rq^{\lambda-1},\alpha)\right| = |F_{\lambda-1}(h,\alpha)|\ q^{-1}\varphi_q\left(\alpha - \frac{h}{q^\lambda} - \frac{r}{q}\right),$$

on obtient

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)|^2 = \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda-1}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-1}(h,\alpha)|^2 \frac{1}{q^2} \sum_{0\leqslant r<q} \varphi_q^2\left(\alpha - \frac{h}{q^\lambda} - \frac{r}{q}\right).$$

Mais, d'après (79), la somme sur r vaut q^2, d'où, pour $\lambda > \delta$,

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda}(h,\alpha)|^2 = \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda-1}\\ h\equiv a \bmod q^\delta}} |F_{\lambda-1}(h,\alpha)|^2.$$

En appliquant $(\lambda-\delta)$ fois cette égalité, on obtient (103). □

Lemme 20. *Soient $q \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$, φ_q définie par (31), et $\gamma_q(\alpha)$ défini par*

$$q^{\gamma_q(\alpha)} = \max_{t\in\mathbb{R}} \sqrt{\varphi_q(\alpha+t)\,\varphi_q(\alpha+qt)}. \tag{104}$$

Alors

$$\tfrac{1}{2} \leqslant \gamma_q(\alpha) < 1. \tag{105}$$

Démonstration. Supposons $\gamma_q(\alpha) \geqslant 1$. Comme $\varphi_q \leqslant q$, dans ce cas on a $\varphi_q(\alpha+t) = \varphi_q(\alpha+qt) = q$ donc $\alpha + t \in \mathbb{Z}$ et $\alpha + qt \in \mathbb{Z}$, d'où $(q-1)\alpha = q(\alpha+t) - (\alpha+qt) \in \mathbb{Z}$, ce qui est exclus. Ainsi, $\gamma_q(\alpha) < 1$. Pour montrer que $\gamma_q(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}$, posons $(q-1)\alpha = n + \beta$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{1}{2} < \beta \leqslant \frac{1}{2}$, et choisissons $t = \frac{\beta}{q} - \alpha$. Alors $\varphi_q(\alpha+t)\,\varphi_q(\alpha+qt) = \varphi_q\left(\frac{\beta}{q}\right)\,\varphi_q(-n) = q\,\varphi_q\left(\frac{\beta}{q}\right)$, et comme φ_q est paire et décroissante sur $[0,\frac{1}{q}]$, on a $\varphi_q\left(\frac{\beta}{q}\right) \geqslant \varphi_q\left(\frac{1}{2q}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2q}\right)^{-1} \geqslant 1$, d'où $\varphi_q(\alpha+t)\,\varphi_q(\alpha+qt) \geqslant q$ et $\gamma_q(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}$. □

Lemme 21. *Soient $q \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\gamma_q(\alpha)$ défini par* (104) *et $a \in \mathbb{Z}$, avec $(a,q) = 1$. Pour tout $\lambda \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda \\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_\lambda(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^\lambda}\right|} \leqslant \frac{q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-2)+1}}{\sin\frac{\pi}{q}}. \tag{106}$$

Démonstration. On procède par itération. Pour $i \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$, posons

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(x) = 1;\\
&\Phi_i(x) = \frac{1}{q^2}\sum_{0\leqslant r<q} \varphi_q^2\left(\alpha - \frac{x+r}{q}\right)\varphi_q\left(\frac{a(x+r)}{q}\right)\Phi_{i-1}\left(\frac{x+r}{q}\right).
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $i \geqslant 0$ que

$$\forall\lambda \geqslant 1,\quad \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda+i} \\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+i}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda+i}}\right|} = \sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda \\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_\lambda(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^\lambda}\right|}\Phi_i\left(\frac{h}{q^\lambda}\right). \tag{107}$$

– Pour $i = 0$, la proposition (107) est trivialement vraie.
– Soit $i \geqslant 1$. On suppose la proposition (107) est vraie au rang $i-1$, c'est-à-dire :

$$\forall\lambda \geqslant 1,\quad \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda+i-1} \\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+i-1}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda+i-1}}\right|} = \sum_{\substack{0\leqslant h<q^\lambda \\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_\lambda(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^\lambda}\right|}\Phi_{i-1}\left(\frac{h}{q^\lambda}\right).$$

Soit $\lambda \geqslant 1$. En écrivant $\lambda + i = (\lambda + 1) + (i - 1)$ et en appliquant la formule précédente avec λ remplacé par $\lambda + 1$ on obtient

$$\sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda+i} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+i}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda+i}}\right|} = \sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda+1} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+1}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda+1}}\right|} \Phi_{i-1}\left(\frac{h}{q^{\lambda+1}}\right)$$
$$= \sum_{0 \leqslant r < q} \sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{\left|F_{\lambda+1}(h + rq^{\lambda},\alpha)\right|^2}{\left|\sin \frac{\pi (h+rq^{\lambda}) a}{q^{\lambda+1}}\right|} \Phi_{i-1}\left(\frac{h + rq^{\lambda}}{q^{\lambda+1}}\right).$$

La formule (30) permet d'écrire

$$\left|F_{\lambda+1}(h + rq^{\lambda},\alpha)\right| = |F_{\lambda}(h,\alpha)| \; q^{-1} \varphi_q \left(\alpha - \frac{h}{q^{\lambda+1}} - \frac{r}{q}\right),$$

et on a de plus

$$\left|\sin \frac{\pi(h + rq^{\lambda})a}{q^{\lambda+1}}\right|^{-1} = \left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|^{-1} \varphi_q \left(\frac{(h + rq^{\lambda})a}{q^{\lambda+1}}\right),$$

donc on obtient

$$\sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda+i} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+i}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda+i}}\right|} = \sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|} \Phi_i \left(\frac{h}{q^{\lambda}}\right).$$

– Par conséquent la proposition (107) est vraie pour tout $i \geqslant 0$.

Notre objectif est maintenant de majorer Φ_i uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi_q \leqslant q$, en utilisant (79) on a :

$$\Phi_1(x) \leqslant \frac{1}{q} \sum_{0 \leqslant r < q} \varphi_q^2 \left(\alpha - \frac{x + r}{q}\right) = q.$$

En reportant cette majoration dans (107) on obtient

$$\forall \lambda \geqslant 1, \sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda+1} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+1}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda+1}}\right|} \leqslant q \sum_{\substack{0 \leqslant h < q^{\lambda} \\ h \not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin \frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|}. \tag{108}$$

La majoration (108), qui correspond à une simple itération ($i = 1$), n'est pas suffisante, et en procédant à une double itération, on peut obtenir un résultat plus fin. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_i^2(x) \leqslant \frac{1}{q^4} \left(\sum_{0 \leqslant r < q} \varphi_q^2 \left(\frac{a(x + r)}{q}\right)\right) \left(\sum_{0 \leqslant r < q} \varphi_q^4 \left(\alpha - \frac{x + r}{q}\right) \Phi_{i-1}^2 \left(\frac{x + r}{q}\right)\right).$$

Comme $(a,q)=1$, en observant que ar parcourt toutes les classes résiduelles modulo q lorsque r décrit $0,\dots,q-1$, et en appliquant (79), on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\Phi_i^2(x) \leqslant \frac{1}{q^2} \sum_{0\leqslant r<q} \varphi_q^4\left(\alpha - \frac{x+r}{q}\right) \Phi_{i-1}^2\left(\frac{x+r}{q}\right).$$

En appliquant cette inégalité successivement pour $i=2$ puis $i=1$ on obtient

$$\Phi_2^2(x) \leqslant \frac{1}{q^4} \sum_{0\leqslant r<q} \varphi_q^4\left(\alpha - \frac{x+r}{q}\right) \sum_{0\leqslant s<q} \varphi_q^4\left(\alpha - \frac{\frac{x+r}{q}+s}{q}\right).$$

Comme φ_q est périodique de période 1, on a

$$\varphi_q\left(\alpha - \frac{x+r}{q}\right) = \varphi_q\left(\alpha - q\frac{\frac{x+r}{q}+s}{q}\right),$$

donc d'après (104), puis (79) appliqué à la somme sur s puis sur r,

$$\Phi_2^2(x) \leqslant q^{4\gamma_q(\alpha)-4} \sum_{0\leqslant r<q}\sum_{0\leqslant s<q} \varphi_q^2\left(\alpha - \frac{x+r}{q}\right)\varphi_q^2\left(\alpha - \frac{\frac{x+r}{q}+s}{q}\right) = q^{4\gamma_q(\alpha)}.$$

En reportant cette majoration dans (107) on obtient

$$\forall\lambda\geqslant 1,\quad \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda+2}\\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda+2}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda+2}}\right|} \leqslant q^{2\gamma_q(\alpha)} \sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|}. \tag{109}$$

Si λ est impair, en appliquant $(\lambda-1)/2$ fois la formule d'itération (109) on obtient :

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|} \leqslant q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-1)} \sum_{0<h<q} \frac{|F_1(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q}\right|}.$$

Comme $(a,q)=1$, on a $\left|\sin\frac{\pi h a}{q}\right| \geqslant \sin\frac{\pi}{q}$ donc à l'aide de (79) on obtient

$$\sum_{0<h<q} \frac{|F_1(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{q}} \sum_{0<h<q} q^{-2}\varphi_q^2\left(\alpha-\frac{h}{q}\right) \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{q}},$$

ce qui donne

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|} \leqslant \frac{q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-1)}}{\sin\frac{\pi}{q}}.$$

Si λ est pair, on applique une fois l'inégalité (108) et on est ramené au cas précédent avec $\lambda-1$ qui est impair, d'où

$$\sum_{\substack{0\leqslant h<q^{\lambda}\\ h\not\equiv 0 \bmod q}} \frac{|F_{\lambda}(h,\alpha)|^2}{\left|\sin\frac{\pi h a}{q^{\lambda}}\right|} \leqslant \frac{q^{\gamma_q(\alpha)(\lambda-2)+1}}{\sin\frac{\pi}{q}}.$$

Comme $\gamma_q(\alpha) < 1$ d'après (105), on a $\gamma_q(\alpha)(\lambda - 1) \leqslant \gamma_q(\alpha)(\lambda - 2) + 1$, ce qui établit (106). $\square$

Institut de Mathématiques de Luminy CNRS-UMR 6206, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France.
E-mail address: mauduit@iml.univ-mrs.fr, rivat@iml.univ-mrs.fr

References

1. J.-P. Allouche et J. Shallit, *Automatic sequences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Theory, applications, generalizations.
2. N. L. Bassily et I. Kátai, Distribution of the values of q-additive functions on polynomial sequences, *Acta Math. Hungar. (4)* **68** (1995), 353–361.
3. R. Bellman et H. N. Shapiro, On a problem in additive number theory, *Ann. of Math. (2)* **49** (1948), 333–340.
4. V. Brun, *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach*, Christiania Vidensk. Selsk. Skr. , Nr. 3, 36 S., 1920.
5. J.-R. Chen, On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes, *Scientia Sinica* **16** (1973), 157–176.
6. A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972), 164–192.
7. A. H. Copeland et P. Erdős, Note on normal numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 857–860.
8. J. Coquet, T. Kamae et M. Mendès France, Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* **105**,4 (1977), 369–384.
9. C. Dartyge et C. Mauduit, Nombres presque premiers dont l'écriture en base r ne comporte pas certains chiffres, *J. Number Theory* **81**,2 (2000), 270–291.
10. C. Dartyge et C. Mauduit, Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers, *Journal of Number Theory* **91** (2001), 230–255.
11. C. Dartyge et G. Tenenbaum, Sommes des chiffres de multiples d'entiers, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55**,7 (2005), 2423–2474.
12. M. Drmota et J. Rivat, The sum-of-digits function of squares, *J. London Math. Soc. (2)* **72**,2 (2005), 273–292.
13. S. Eilenberg, *Automata, languages, and machines. Vol. A*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.
14. W. J. Ellison et M. Mendès France, *Les nombres premiers*, Hermann, France, 1975.
15. N. J. Fine, The distribution of the sum of digits (mod p), *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965), 651–652.
16. E. Fouvry et H. Iwaniec, Gaussian primes, *Acta Arith.* **79**,3 (1997), 249–287.
17. E. Fouvry et C. Mauduit, Méthodes de crible et fonctions sommes des chiffres, *Acta Arithmetica* **77**,4 (1996), 339–351.
18. E. Fouvry et C. Mauduit, Sommes des chiffres et nombres presques premiers, *Mathematische Annalen* **305** (1996), 571–599.
19. J. Friedlander et H. Iwaniec, The polynomial $X^2 + Y^4$ captures its primes, *Ann. of Math. (2)* **148**,3 (1998), 945–1040.

20. J. Friedlander et H. Iwaniec, Asymptotic sieve for primes, *Ann. of Math. (2)* **148**,3 (1998), 1041–1065.

21. A. O. Gelfond, Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithmetica* **13** (1968), 259–265.

22. G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, éd. fifth, 1979.

23. G. Harman, Primes with preassigned digits, *Acta Arith.* **125**,2 (2006), 179–185.

24. J. Hartmanis et H. Shank, On the recognition of primes by automata, *J. Assoc. Comput. Mach.* **15** (1968), 382–389.

25. D. R. Heath-Brown, Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity, *Can.J.Math.* **34**,6 (déc. 1982), 1365–1377.

26. D. R. Heath-Brown, Primes represented by $x^3 + 2y^3$, *Acta Math.* **186**,1 (2001), 1–84.

27. E. Heppner, Über die Summe der Ziffern natürlicher Zahlen, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **19** (1976), 41–43 (1977).

28. G. Hoheisel, Primzahlprobleme in der Analysis, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **33** (1930), 3–11.

29. M. Huxley, *Area, Lattice Points and Exponential Sums*, *London Mathematical Society Monographs New Series* vol. 13, Oxford science publications, 1996.

30. H. Iwaniec, Almost-primes represented by quadratic polynomials, *Inventiones Mathematicae* **47** (1978), 171–188.

31. H. Iwaniec et E. Kowalski, *Analytic number theory*, *American Mathematical Society Colloquium Publications* vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

32. M. Keane, Generalized Morse sequences, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **10** (1968), 259–265.

33. I. Kátai, On the sum of digits of prime numbers, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **10** (1967), 89–93.

34. I. Kátai, On the sum of digits of primes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **30**,1–2 (1977), 169–173.

35. I. Kátai, Distribution of digits of primes in q-ary canonical form, *Acta Math. Hungar.* **47**,3-4 (1986), 341–359.

36. I. Kátai et J. Mogyoródi, On the distribution of digits, *Publ. Math. Debrecen* **15** (1968), 57–68.

37. G. Lejeune Dirichlet, *Mathematische Werke. Bände I, II*, *Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker*, Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1969.

38. K. Mahler, The Spectrum of an Array and Its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions. II : On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions, *J. of Math. Phys. Mass. Inst. Techn.* **6** (1927), 158–163.

39. C. Mauduit, Propriétés arithmétiques des substitutions, in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1989–90*, pp. 177–190, *Progr. Math.* vol. 102, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992.

40. C. Mauduit, Multiplicative properties of the Thue-Morse sequence, *Period. Math. Hungar.* **43**,1-2 (2001), 137–153.

41. C. Mauduit et A. Sárközy, On the arithmetic structure of sets characterized by sum of digits properties, *J. Number Theory* **61**,1 (1996), 25–38.

42. M. Mendès France, Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, *J. Number Theory* **5** (1973), 1–15.

43. M. Minsky et S. Papert, Unrecognizable sets of numbers, *J. Assoc. Comput. Mach.* **13** (1966), 281–286.

44. H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* vol. 84, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1994.

45. M. Olivier, Répartition des valeurs de la fonction “somme des chiffres”, in *Séminaire de Théorie des Nombres, 1970–1971 (Univ. Bordeaux I, Talence), Exp. No. 16*, p. 7, Lab. Théorie des Nombres, Centre Nat. Recherche Sci., Talence, 1971.

46. M. Olivier, Sur le développement en base g des nombres premiers, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **272** (1971), A937–A939.

47. I. I. Piatetski-Shapiro, On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$, *Mat. Sbornik N.S.* **33(75)** (1953), 559–566.

48. M. Queffelec, *Substitution Dynamical Systems – Spectral Analysis*, *Lecture Notes in Math.* vol. 1294, Springer Verlag, New-York – Berlin, 1987.

49. H. Rademacher, Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, *Hamb. Abh.* **3** (1923), 12–30.

50. P. Ribenboim, *The Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, éd. second, 1989.

51. J. Rivat et P. Sargos, Nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$, *Canadian Journal of Mathematics* **53**,2 (2001), 414–433.

52. A. Rényi, Sur la représentation des entiers pairs comme somme d'un nombre premier et d'un nombre presque premier (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **56** (1947), 455–458.

53. M.-P. Schützenberger, A remark on acceptable sets of numbers, *J. Assoc. Comput. Mach.* **15** (1968), 300–303.

54. I. Shiokawa, On the sum of digits of prime numbers, *Proc. Japan Acad.* **50** (1974), 551–554.

55. W. Sierpiński, Sur les nombres premiers ayant des chiffres initiaux et finals donnés, *Acta Arith.* **5** (1959), 265–266.

56. G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Société mathématique de France, 1995.

57. R. C. Vaughan, An elementary method in prime number theory, *Acta Arithmetica* **37**,1 (1980), 111–115.

58. I. M. Vinogradov, *The method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers, translated from the Russian, revised and annotated by K.F. Roth and A. Davenport*, Interscience, London, 1954.

59. N. Wiener, The Spectrum of an Array and Its Applications to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions. I : The Spectrum of an Array, *J. of Math. Phys. Mass. Inst. Techn.* **6** (1927), 145–157.

60. D. Wolke, Primes with preassigned digits, *Acta Arith.* **119**,2 (2005), 201–209.

(Received)
(Revised)