BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 214-264

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__214_0>

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE D'ESPACES DE RIEMANN;

PAR M. E. CARTAN.

INTRODUCTION.

Les espaces de Riemann dont s'occupe ce mémoire sont caractérisés par la propriété que la courbure riemannienne d'une facette quelconque se conserve par le transport parallèle; d'une manière plus abstraite, ce sont ceux pour lesquels le tenseur dérivé du tenseur de Riemann-Christoffel est identiquement nul. Nous les appellerons les *espaces* $\mathcal{E}$. Les espaces à courbure constante sont évidemment des espaces $\mathcal{E}$; il en est de même des espaces dont le ds^2 est la somme de plusieurs ds^2 à courbure constante, les variables qui entrent dans ces différents ds^2 étant indépendantes les unes des autres. Dans une première étude, on peut se borner aux espaces $\mathcal{E}$ *irréductibles*, dont le ds^2 ne peut pas être regardé comme la somme de deux ds^2 à variables indépendantes, eux-mêmes éléments linéaires de deux espaces $\mathcal{E}$. L'objet de ce mémoire est précisément la détermination complète de tous les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles réels à ds^2 défini positif.

J'ai été amené à me poser ce problème à propos d'un autre problème, étudié en collaboration avec M. J. A. Schouten, et dont la solution a paru dans une note présentée à l'Académie des sciences d'Amsterdam (¹). Il s'agissait de rechercher toutes les généralisations possibles du parallélisme bien connu de Clifford dans l'espace elliptique à trois dimensions; d'une manière précise, le problème était de trouver tous les espaces de Riemann dans lesquels existe, pour les géodésiques, un parallélisme *absolu* satisfaisant à la condition que l'angle sous lequel se coupent

---

(¹) E. CARTAN en J. A. SCHOUTEN, *Over Riemannsche meetkunden, die een absoluut parallelisme toelaten* (*Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, t. 35, 1926, p. 505-518). La traduction anglaise paraîtra prochainement dans les *Proceedings* de l'Académie.

deux géodésiques soit conservé quand on leur mène des parallèles par un point quelconque. Tous ces espaces sont des espaces $\mathcal{E}$; mais en fait ils n'en constituent qu'une très faible partie; si l'on se borne aux espaces irréductibles, il n'existe, en dehors des espaces représentatifs des groupes simples (1), que l'espace elliptique à sept dimensions.

Dans la note à laquelle je faisais allusion plus haut, certains procédés de démonstration sont mis en œuvre, qu'on retrouvera ici rattachés à une méthode plus générale.

J'étais déjà en possession de la solution complète du problème quand j'ai eu connaissance d'une note de M. Harry Levy (2) qui s'était posé de son côté le problème de la détermination des espaces $\mathcal{E}$ et signalait, comme espaces irréductibles, les espaces à courbure constante, mais sans obtenir d'autres solutions du problème. J'ai donné, dans une note récente (3), des indications sommaires sur la méthode qui m'avait permis de résoudre le problème, ainsi que sur les résultats obtenus. Dans cette méthode, ou plutôt dans ces deux méthodes, la théorie des groupes, et spécialement des groupes simples, joue un rôle essentiel. D'une part en effet, par la propriété même qui sert de définition aux espaces $\mathcal{E}$, le groupe d'holonomie, c'est-à-dire le groupe des rotations que subit le corps des vecteurs issus d'un point A quand on le transporte par parallélisme le long d'un cycle arbitraire, conserve la courbure riemannienne de l'espace en A, et par suite laisse invariante la forme de Riemann

$$\sum_{i,j,k,h} \mathrm{R}_{ijkh}\, x^i y^j x^k y^h$$

(1) *Voir*, sur les espaces représentatifs des groupes : E. CARTAN en J. A. SCHOUTEN, *Over de meetkunde der groepuitgebreidheid van halfeenvoudige en eenvoudige groepen* (*Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, t. 35, 1926, p. 385-399).

(2) H. LEVY, *Forma canonica dei ds^2 per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici* (*Rendic. Accad. Lincei*, 6e série, t. III¹, 1926, p. 65-69). *Voir* aussi une autre note du même auteur, p. 124-129.

(3) E. CARTAN, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure* (*Rendic. Accad. Lincei*, 6e série, t. III¹, 1926, p. 544-547).

qui définit analytiquement la courbure riemannienne; la première méthode consistera à rechercher tous les groupes orthogonaux susceptibles d'être des groupes d'holonomie pour un espace $\mathcal{E}$, c'est-à-dire laissant invariante une forme de la nature de la forme de Riemann. D'autre part, l'espace admet un groupe transitif G de déplacements tel que le sous-groupe laissant invariant un point donné A soit précisément le groupe d'holonomie; on peut alors partir de toutes les structures possibles de ces groupes de déplacements (en fait ce sont toutes les structures de groupes simples) et essayer de déduire de chacune d'elles le groupe d'holonomie correspondant.

Cette dernière méthode est celle qui conduit aux problèmes les plus inattendus; en particulier la recherche des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles revient à celle de toutes les structures simples *réelles* qui correspondent à un même type de structure simple *complexe;* c'est un problème que j'ai résolu dans un mémoire d'avant la guerre (1), et c'est en partant des résultats que j'ai alors obtenus que la détermination des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles se présente de la manière la plus simple.

La première méthode, fondée sur la détermination des groupes d'holonomie possibles, repose sur les propriétés générales des groupes orthogonaux réels. On a consacré au problème de la détermination des groupes orthogonaux des mémoires très importants (2), mais sans épuiser la question. En réalité cette détermination revient à celle de certains groupes linéaires simples et elle peut se faire en application des résultats que j'ai obtenus dans deux mémoires antérieurs sur les groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane (3). Je donne dans le présent mémoire quelques indications, qui auraient besoin du reste d'être justifiées plus complètement, sur ce problème général. En fait la détermination des groupes d'holonomie des espaces $\mathcal{E}$ irréduc-

(1) E. CARTAN, *Les groupes réels simples, finis et continus* (*Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. XXXI, 1914, p. 263-355).

(2) *Voir* en particulier S. MEDICI, *Sui gruppi di rotazioni* (*Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa,* t. X, 1908, 60 pages).

(3) E. CARTAN, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (*Bull. Soc. math.*, t. XLIV, 1913, p. 53-96); *Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (*J. Math, pures et appliquées,* 6e série, t. X, 1914, p. 149-186).

tibles est un problème beaucoup plus restreint, car il s'ajoute ici la condition que le groupe orthogonal laisse invariante une forme

$$\sum_{i,j,k,h} R_{ijkh} x^i y^j x^k y^h,$$

dont les coefficients satisfont à des relations classiques, du reste très simples. Cette limitation du problème permet de pousser la solution jusqu'au bout en s'aidant des résultats obtenus dans ma Thèse et dans les mémoires précédemment rappelés ([1]). Je ne donne que le principe de la méthode, qui conduirait à des calculs assez fastidieux et que la seconde méthode permet d'éviter.

Dans les espaces irréductibles autres que l'espace euclidien, la notion de *groupe d'holonomie* se confond avec celle de *groupe d'isotropie*, ce dernier donnant les rotations autour d'un point qui conservent les propriétés géométriques de l'espace autour de ce point.

Les résultats obtenus appellent un grand nombre de recherches nouvelles, ne serait-ce que l'étude individuelle des nouveaux espaces, qui semblent devoir jouer un rôle presque aussi important que celui des espaces à courbure constante, et qui sont du reste susceptibles d'une définition géométrique directe : *ce sont au fond des espaces représentatifs d'êtres géométriques comportant une définition simple dans l'espace ordinaire* (à 3 ou un plus grand nombre de dimensions). Il y aurait lieu aussi d'envisager le problème en supprimant la condition pour le ds^2 d'être défini, et aussi en se plaçant tout à fait dans le domaine complexe. Dans ces cas plus généraux, le groupe des déplacements de l'espace pourrait cesser d'être simple ou même semi-simple. Qu'il y ait des solutions nouvelles, l'exemple du ds^2 suivant à trois dimensions :

$$ds^2 = dz^2 + z^2\,dx^2 + 2\,dx\,dy,$$

le prouve; dans le domaine réel il n'existe d'espace $\mathcal{E}$ irréductible à ds^2 défini que l'espace elliptique et l'espace hyperbolique, et

---

([1]) Pour plus de simplicité, je désignerai dans la suite par les simples indications E. Cartan, *Ann.*, ou *Bull.*, ou *J. Math.*, les Mémoires cités dans les notes (1) et (3) de la page précédente ; ma Thèse (Paris, Nony, 1914) sera désignée simplement par le mot *Thèse*.

le ds^2 indiqué n'est pas à courbure constante, bien que le tenseur dérivé du tenseur de courbure soit nul.

En restant dans le domaine réel, je signalerai encore un problème intéressant, à savoir la détermination des espaces $\mathcal{E}$ admettant des *translations* infinitésimales dans toutes les directions ; les espaces à courbure constante positive jouissant de cette propriété, il serait intéressant de savoir s'il y en a d'autres. Il serait non moins intéressant de savoir s'il existe des espaces de Riemann jouissant de cette propriété sans être des espaces $\mathcal{E}$.

Les espaces de Riemann qui font l'objet de ce mémoire rentrent dans la classe plus générale des espaces à connexion affine sans torsion pour lesquels la courbure se conserve par le transport parallèle. Dans un mémoire sur la géométrie des groupes de transformations qui doit paraître prochainement dans le *Journal de Mathématiques*, je donne les principes fondamentaux de la théorie de ces espaces; les espaces représentatifs des groupes en font partie.

Le présent mémoire se divise en trois chapitres; le premier est consacré au théorème fondamental, qui pose le problème dans le champ de la théorie des groupes; le second est consacré à la première méthode de résolution, fondée sur la détermination du groupe d'holonomie; le troisième à la seconde méthode, fondée sur la considération du groupe des déplacements.

CHAPITRE I.

LE THÉORÈME FONDAMENTAL.

I. — Position du problème. Les espaces irréductibles.

1. Nous nous proposons de déterminer tous les espaces de Riemann réels à ds^2 défini positif jouissant de la propriété que le transport par parallélisme d'une facette quelconque conserve sa courbure riemannienne (espaces $\mathcal{E}$). Analytiquement, cette propriété se traduit par le fait que le tenseur dérivé du tenseur de Riemann-Christoffel est nul :

$$R_{ijkh|l} = 0.$$

Nous pouvons tout de suite réduire le problème. Supposons que le ds^2 d'un espace de Riemann $\mathcal{E}$ à n dimensions puisse être regardé comme la somme de deux éléments linéaires respectivement à n_1 et n_2 variables, indépendantes les unes des autres $(n_1 + n_2 = n)$

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2.$$

Les espaces de Riemann dont les éléments linéaires sont respectivement ds_1^2 et ds_2^2 appartiennent chacun à la classe considérée. Si en effet on attribue les n_1 premiers indices aux variables qui entrent dans ds_1^2 et les n_2 derniers aux variables qui entrent dans ds_2^2, les seules quantités $R_{ijkh|l}$ qui puissent être différentes de zéro sont celles pour lesquelles les cinq indices i, j, k, h, l appartiennent tous au même groupe des n_1 premiers ou des n_2 derniers indices. Si, pour l'espace $\mathcal{E}$, le tenseur dérivé du tenseur de courbure est nul, il l'est donc pour chacun des deux autres espaces et réciproquement.

Nous dirons que l'espace $\mathcal{E}$ est *réductible* si son élément linéaire est décomposable de la manière précédente, et *irréductible* dans le cas contraire. Nous voyons donc que *la recherche des espaces $\mathcal{E}$ revient à celle des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles.*

II. — Le groupe d'holonomie et la forme de Riemann.

2. Considérons un espace de Riemann réel à n dimensions. Attachons à un point particulier A_0 de l'espace un repère rectangulaire (T_0) formé de n vecteurs unitaires deux à deux perpendiculaires. La courbure riemannienne de l'espace au point A_0 est définie analytiquement par la forme de Riemann [1]

$$R = \sum_{(ij),(kh)} R_{ij,kh}\, p_{ij}\, p_{kh}, \tag{1}$$

où la somme est étendue à toutes les combinaisons (ij) et à toutes les combinaisons (kh) des indices $1, 2, \ldots, n$ pris deux à deux, et où les quantités p_{ij} sont les composantes d'un bivecteur formé de

[1] *Voir*, en particulier, E. CARTAN, *La Géométrie des espaces de Riemann* (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. IX, 1925, p. 25).

deux vecteurs quelconques (x_i) et (y_i) issus de A_0

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i.$$

Comme on sait, la courbure riemannienne suivant la direction plane définie par les deux vecteurs (x_i) et (y_i) est le quotient de la forme R par le carré $\sum\limits_{(ij)} p_{ij}^2$ de la mesure du bivecteur correspondant.

A tout cycle issu de A_0 et y revenant est associée la rotation subie par le corps des vecteurs issus de A_0 transportés par parallélisme le long du cycle; les rotations associées aux différents cycles issus de A_0 engendrent un groupe, le *groupe d'holonomie* (¹) de l'espace. Si l'on considère les cycles issus d'un autre point A, il leur correspond également un groupe de rotations, mais son expression analytique peut être rendue la même aux différents points de l'espace, en attachant à ces points des systèmes de référence convenablement choisis. Nous appellerons Γ le groupe continu d'holonomie, et nous désignerons son ordre par r; les variables transformées par Γ sont les composantes x_i d'un vecteur arbitraire.

3. Attachons au point A_0, non seulement le repère (T_0), mais encore tous ceux qui s'en déduisent par une rotation du groupe d'holonomie Γ. Atttachons de même à un point A les repères (T) qui se déduisent de (T_0) quand on transporte par parallélisme le repère (T_0) de A_0 en A par un chemin arbitraire. Ces repères (T) dépendent, le point A étant donné, de r paramètres.

Le transport par parallélisme conservant par hypothèse la courbure riemannienne, la forme de Riemann en A, rapportée à un quelconque des repères (T) qui ont été attachés à ce point, a les mêmes coefficients numériques qu'en A_0. De plus, le groupe d'holonomie a la même forme analytique pour tous les systèmes de référence considérés. Enfin, si l'on considère deux points infiniment voisins A et A′ et si l'on transporte par parallélisme de A

(¹) E. Cartan, *La Géométrie etc.* (*Mémorial*, fasc. IX), p. 54 à 55. En réalité l'expression *groupe d'holonomie* est prise ici dans un sens restreint; on se borne à considérer l'effet produit sur les vecteurs par les opérations du groupe d'holonomie proprement dit. Mais il n'y aura pas de confusion à craindre dans la suite.

en A′ l'un des repères (T) attachés au point A, on obtient un repère (T_1) d'origine A′ qui se déduit de l'un quelconque des repères (T′) attachés à A′ par une transformation infinitésimale du groupe d'holonomie. Tous les repères (T) attachés à A se déduisent de même les uns des autres par les rotations du groupe d'holonomie.

4. Nous allons chercher comment, le groupe d'holonomie Γ étant supposé connu, la forme de Riemann R peut être déterminée.

Rappelons [1] que, les repères attachés aux différents points de $\mathcal{E}$ étant choisis (ici avec r paramètres arbitraires), la connexion affine de l'espace est définie :

1° Par les n formes $\omega_1, \ldots, \omega_n$, linéaires par rapport aux différentielles des n coordonnées, qui donnent les coordonnées rectangulaires, par rapport au repère (T) attaché à A, du point A′ infiniment voisin de A;

2° Par les $\frac{n(n-1)}{2}$ formes $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, linéaires par rapport aux différentielles des n coordonnées et des r paramètres des repères, composantes de la rotation infinitésimale qu'il faut faire subir au repère (T), transporté par parallélisme de A en A′, pour l'amener en coïncidence avec (T′).

Rappelons les *formules de structure* de l'espace $\mathcal{E}$ [2] :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_i &= \sum_k [\omega_k \omega_{ki}], \\ \omega'_{ij} &= \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}] - \sum_{(kh)} R_{ij,kh}[\omega_k\omega_h]. \end{aligned}\right.$$

5. Supposons le groupe Γ engendré par les r transformations

---

(1) On pourra consulter, pour les notations, mon mémoire *Sur les espaces à connexion affine et la relativité généralisée* (*Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. XL, 1923, p. 325-412, en particulier les Chapitres II et III). Voir aussi *Mémorial*, fasc. IX, nos 10 et 11, p. 12-14.

(2) Les notations s'écartent de celles du Mémorial, les quantités désignées par $R_{ij,kh}$ sont ici changées de signe pour que, dans le cas d'un espace à courbure constante, la seule composante qui subsiste ait le signe de la courbure.

infinitésimales indépendantes

$$\mathrm{U}_\alpha f = \sum_{(ij)} a_{\alpha ij}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \tag{3}$$

où l'on a

$$a_{\alpha ij} = -a_{\alpha ji}.$$

La rotation infinitésimale de composantes ω_{ij} faisant partie du groupe d'holonomie (n° 3), on a des relations de la forme

$$\omega_{ij} = \sum_\rho a_{\rho ij}\theta_\rho, \tag{4}$$

en désignant par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ des formes de Pfaff convenablement choisies. Les $n+r$ formes

$$\omega_1, \quad \ldots, \quad \omega_n; \qquad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_r$$

sont du reste linéairement indépendantes, car si l'on donne aux différentielles des n coordonnées et des r paramètres des valeurs annulant ces $n+r$ formes, ni le point A ni le repère (T) ne changent; les relations établies entre les $n+r$ différentielles considérées sont donc indépendantes.

Les équations (2), quand on y remplace les ω_{ij} par leurs valeurs (4), deviennent

$$\omega'_i = \sum_{\rho, k} a_{\rho ki}[\omega_k \theta_\rho],$$

$$\sum_\rho a_{\rho ij}\theta'_\rho = \sum_{(\lambda\mu), k} (a_{\lambda ik}a_{\mu kj} - a_{\mu ik}a_{\lambda kj})[\theta_\lambda\theta_\mu] - \sum_{(kh)} \mathrm{R}_{ij,kh}[\omega_k\omega_h].$$

Ces dernières peuvent être transformées par l'introduction des constantes de structure $c_{\alpha\beta\gamma}$ du groupe Γ. Des équations

$$(\mathrm{U}_\lambda \mathrm{U}_\mu) \equiv \mathrm{U}_\lambda(\mathrm{U}_\mu f) - \mathrm{U}_\mu(\mathrm{U}_\lambda f) = \sum_\rho c_{\lambda\mu\rho}\mathrm{U}_\rho f,$$

on tire, en développant,

$$\sum_k (a_{\lambda ik}a_{\mu kj} - a_{\mu ik}a_{\lambda kj}) = \sum_\rho c_{\lambda\mu\rho}a_{\rho ij}. \tag{5}$$

Par suite les dernières équations (2) deviennent

$$\sum a_{\rho ij}\left\{\theta'_\rho - \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\rho}[\theta_\lambda\theta_\mu]\right\} = -\sum_{(kh)} \mathrm{R}_{ij,kh}[\omega_k\omega_h]. \tag{6}$$

6. Nous pouvons regarder les équations (6) comme des équations linéaires par rapport aux r inconnues

$$\theta'_\rho - \sum_{(\lambda,\mu)} c_{\lambda\mu\rho}[\theta_\lambda \theta_\mu];$$

il existe évidemment r de ces équations qui sont indépendantes, sinon les r transformations $U_\rho f$ ne seraient pas linéairement indépendantes. On a donc des relations de la forme

$$(7) \qquad \theta'_\alpha - \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\alpha}[\theta_\lambda \theta_\mu] = -\sum_{(kh)} b_{\alpha kh}[\omega_k \omega_h],$$

les $b_{\alpha kh} = -b_{\alpha hk}$ étant des constantes.

En identifiant maintenant les équations (6), on obtient

$$R_{ij,kh} = \sum_\rho a_{\rho ij} b_{\rho kh},$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{kh}} = \sum_{(ij)} R_{ij,kh} p_{ij} = \sum_\rho b_{\rho kh}\left(\sum_{ij} a_{\rho ij} p_{ij}\right).$$

Associons à la transformation infinitésimale $U_\alpha f$ la forme, linéaire par rapport aux p_{ij},

$$\xi_\alpha = \sum_{(ij)} a_{\alpha ij} p_{ij}.$$

Nous voyons que toutes les dérivées partielles de la forme R s'expriment linéairement au moyen des r formes ξ_α. Par suite *la forme de Riemann est une forme quadratique par rapport aux r formes ξ_α associées aux r transformations infinitésimales génératrices du groupe d'holonomie.*

Si donc nous posons

$$R = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \qquad (A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}),$$

nous aurons

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{kh}} = \sum_\rho \frac{\partial \xi_\rho}{\partial p_{kh}}\left(\sum_\sigma A_{\rho\sigma}\xi_\sigma\right) = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma} a_{\rho kh}\xi_\sigma,$$

et, par suite,

$$b_{\alpha kh} = \sum_\rho A_{\alpha\rho} a_{\rho kh}.$$

Les formes ω_i et θ_α satisfont donc finalement aux relations

$$(9)\qquad \begin{cases} \omega'_i = \sum\limits_{\rho, k} a_{\rho k i} [\omega_k \theta_\rho], \\ \theta'_\alpha = \sum\limits_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\alpha} [\theta_\lambda \theta_\mu] - \sum\limits_{\rho, (kh)} A_{\alpha\rho} a_{\rho k h} [\omega_k \omega_h]. \end{cases}$$

III. — Le théorème fondamental.

7. Dans les formules (9) les coefficients $a_{\rho k i}$, $c_{\lambda\mu\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$ sont des constantes, qui doivent satisfaire à certaines conditions, les unes contenues implicitement dans les hypothèses faites, les autres que nous allons déterminer.

Les $a_{\rho k i}$ sont les coefficients des transformations infinitésimales $U_\alpha f$ d'un groupe Γ dont les $c_{\alpha\beta\gamma}$ sont les constantes de structure. Nous allons maintenant exprimer :

1° Que la forme de Riemann $\sum\limits_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$ est invariante par le groupe Γ;

2° Que cette forme satisfait aux identités classiques [1]

$$R_{ij,kh} + R_{jk,ih} + R_{ki,jh} = 0.$$

Pour exprimer la première condition, remarquons que pour calculer $U_\alpha(\xi_\beta)$, il faut supposer dans ξ_β remplacées les quantités p_{ij} par $x_i y_j - x_j y_i$ et supposer aussi que $U_\alpha f$ transforme simultanément les deux vecteurs (x_i) et (y_i). Un calcul simple donne

$$U_\alpha(\xi_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} \xi_\rho,$$

ce qui exprime tout simplement que la forme $U_\alpha(\xi_\beta)$ est la forme associée à la transformation $(U_\alpha U_\beta)$.

Cela posé, on a

$$U_\alpha(R) = \sum_{\lambda, \mu} c_{\alpha\rho\lambda} A_{\mu\rho} \xi_\lambda \xi_\mu;$$

---

[1] E. Cartan, *Mémorial*, p. 23, formule (33).

on doit donc avoir

$$(10)\qquad \sum_\rho (c_{\alpha\lambda\rho} A_{\mu\rho} + c_{\alpha\mu\rho} A_{\lambda\rho}) = 0 \qquad (\alpha, \lambda, \mu = 1, \ldots r).$$

Quant aux dernières conditions, elles s'expriment par les relations

$$(11)\qquad \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}(a_{\sigma ij} a_{\rho kh} + a_{\sigma jk} a_{\rho ih} + a_{\sigma ki} a_{\rho jh}) = 0.$$

8. Nous allons maintenant démontrer la réciproque. Supposons qu'on ait un système de constantes $a_{\alpha ij}$, $c_{\alpha\beta\gamma}$, $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ satisfaisant aux relations (5), (10) et (11). *Je dis qu'il existe un espace de Riemann* $\mathcal{E}$ *admettant* Γ *pour groupe d'holonomie et* R *pour forme de Riemann ; de plus cet espace jouit de la propriété de conserver sa courbure par le transport parallèle.*

Nous allons d'abord démontrer qu'il existe $n+r$ formes de Pfaff linéairement indépendantes à $n+r$ variables indépendantes satisfaisant identiquement aux équations (9). Cela revient à dire que les constantes qui entrent dans ces équations sont les constantes de structure d'un groupe ([1]), les crochets des transformations infinitésimales $X_i f$, $Y_\alpha f$ du groupe étant donnés par les relations

$$(12)\qquad \begin{cases} (X_i X_j) = -\sum_{\rho,\sigma} a_{\rho ij} A_{\rho\sigma} Y_\sigma f, \\ (X_i Y_\alpha) = \sum_k a_{\alpha ik} X_k f, \\ (Y_\alpha Y_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} Y_\rho f. \end{cases}$$

Nous allons vérifier toutes les identités de Jacobi.

Il existe quatre catégories d'identités, à savoir

$$\begin{aligned}
\big((Y_\alpha Y_\beta) Y_\gamma\big) + \big((Y_\beta Y_\gamma) Y_\alpha\big) + \big((Y_\gamma Y_\alpha) Y_\beta\big) &= 0, \\
\big((Y_\alpha Y_\beta) X_i\big) + \big((Y_\beta X_i) Y_\alpha\big) + \big((X_i Y_\alpha) Y_\beta\big) &= 0, \\
\big((X_i X_j) Y_\alpha\big) + \big((X_j Y_\alpha) X_i\big) + \big((Y_\alpha X_i) X_j\big) &= 0, \\
\big((X_i X_j) X_k\big) + \big((X_j X_k) X_i\big) + \big((X_k X_i) X_j\big) &= 0.
\end{aligned}$$

([1]) Il est fait ici usage de la relation dualistique qui existe entre les *formules de structure* de S. Lie et les *équations de structure* que j'ai introduites dans la théorie des groupes continus, finis ou infinis.

Les relations de la première catégorie sont vérifiées d'elles-mêmes, puisque, d'après les relations (5) vérifiées par hypothèse, les $c_{\alpha\beta\gamma}$ sont les constantes de structure d'un groupe.

Celles de la seconde catégorie donnent les relations (5) elles-mêmes.

Celles de la troisième catégorie s'écrivent

$$\sum_{\rho,k} A_{\rho\beta}(a_{\alpha ik}a_{\rho kj} - a_{\rho ik}a_{\alpha kj}) = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}c_{\sigma\alpha\beta}a_{\rho ij};$$

elles sont des conséquences des relations (5) et (10).

Enfin les identités de la quatrième catégorie ne sont autres que les relations (11).

Il existe donc bien un groupe de structure (12).

9. D'après ce qui précède, il est possible de trouver $n+r$ expressions de Pfaff ω_i, θ_α à $n+r$ variables indépendantes satisfaisant aux relations (9).

Considérons les n équations de Pfaff

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0;$$

elles sont complètement intégrables (¹), puisque les ω'_i s'annulent tous, d'après (9), en tenant compte de ces équations. Désignons par

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n$$

un système d'intégrales premières indépendantes de ces équations, et par v_1, v_2, ..., v_r un système de r autres fonctions indépendantes entre elles et indépendantes des u_i. Si nous prenons les u_i et les v_α comme variables indépendantes, les ω_i deviennent linéaires en du_1, ..., du_n. La forme différentielle quadratique

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\,du_i\,du_j \tag{13}$$

peut être regardée, comme nous allons le voir, comme le ds^2 d'un espace de Riemann à n dimensions.

(¹) Pour tout ce qui concerne les propriétés invoquées des systèmes de Pfaff, je me permets de renvoyer à mes *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922) ou encore aux excellentes *Leçons sur le problème de Pfaff* de E. Goursat (Paris, Hermann, 1922).

Il suffit pour cela de démontrer que les coefficients g_{ij} ne dépendent pas des variables v. Introduisons deux symboles de différentiation d et δ, le premier représentant par exemple une différentiation par rapport à l'une des variables u_i, le second une différentiation par rapport à l'une des variables v_α. Les premières équations (9) expriment, sous une forme condensée, les relations

$$\delta\,\omega_i(d) - d\,\omega_i(\delta) = \sum_{\rho,k} a_{\rho ki}[\omega_k(\delta)\,\theta_\rho(d) - \omega_k(d)\,\theta_\rho(\delta)].$$

Or on a ici

$$\omega_i(\delta) = 0,$$

d'où

$$\delta\,\omega_i(d) = -\sum_{\rho,k} a_{\rho ki}\,\theta_\rho(\delta)\,\omega_k(d);$$

par suite

$$\delta(ds^2) = 2\sum_i \omega_i(d)\;\delta\,\omega_i(d) = -2\sum_{\rho,i,k} a_{\rho ki}\,\theta_\rho(\delta)\,\omega_i(d)\,\omega_k(d).$$

Mais la somme du dernier membre est nulle, à cause des relations $a_{\rho ki} = -a_{\rho ik}$. On a donc bien

$$\delta\,ds^2 = \sum_{i,j} \delta g_{ij}\,du_i\,du_j = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta g_{ij} = 0.$$

10. L'espace de Riemann défini par le ds^2 considéré est évidemment rapporté à un repère rectangulaire dépendant, en chaque point, des r paramètres $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Les composantes $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ de la connexion affine de l'espace, définies, comme on sait, d'une manière univoque par les conditions

$$\omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}],$$

sont manifestement

$$\omega_{ij} = \sum_\rho a_{\rho ij}\,\theta_\rho.$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel est fourni par les dernières équations (2), qui donnent ici, par un calcul facile, inverse de celui qu'on a fait auparavant,

$$R_{ij,kh} = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma} a_{\rho ij} a_{\sigma kh},$$

d'où

$$R = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma} \xi_\rho \xi_\sigma.$$

Il faut enfin démontrer que le groupe Γ est le groupe d'holonomie de l'espace et que la courbure riemannienne se conserve par le transport parallèle.

Les transformations infinitésimales du groupe d'holonomie qui sont associées à un cycle élémentaire sont les transformations

$$V_{kh} f = \sum_{(ij)} R_{ij,kh} \left(x^i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma} a_{\sigma kh} U_\rho f;$$

on voit qu'elles appartiennent toutes au groupe Γ. Nous allons montrer qu'elles engendrent un *sous-groupe invariant* de Γ. On a en effet, en combinant avec $U_\alpha f$,

$$(U_\alpha V_{kh}) = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma} a_{\sigma kh} (U_\alpha U_\rho) = \sum_{\rho,\sigma,\tau} A_{\rho\sigma} a_{\sigma kh} c_{\alpha\rho\tau} U_\tau f;$$

or, d'après (10), on a

$$\sum_\rho A_{\rho\sigma} c_{\alpha\rho\tau} + \sum_\rho A_{\rho\tau} c_{\alpha\rho\sigma} = 0;$$

on a donc

$$(U_\alpha V_{kh}) = - \sum_{\rho,\sigma,\tau} A_{\rho\tau} c_{\alpha\rho\sigma} a_{\sigma kh} U_\tau f,$$

ou, d'après (5),

$$\begin{aligned}(U_\alpha V_{kh}) &= \sum_{\rho,\sigma,\tau,i} A_{\rho\tau} (a_{\alpha ih} a_{\rho ki} - a_{\alpha ki} a_{\rho ih}) U_\tau f \\ &= \sum_i (a_{\alpha ik} V_{ih} f - a_{\alpha ih} V_{ik} f).\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

D'après la forme même des ω_{ij}, l'espace de Riemann peut être regardé comme un espace non holonome à groupe fondamental Γ. Les transformations infinitésimales associées aux cycles élémentaires engendrant un sous-groupe invariant Γ_1 de Γ, le groupe d'hoonomie est précisément Γ_1 (¹). Il en résulte une condition supplémentaire à laquelle doivent satisfaire les constantes données; il faut que les formes

$$\sum_{\rho, \sigma} A_{\rho\sigma} a_{\sigma kh} \xi_\rho$$

soient au nombre de r indépendantes. Or, comme ces formes ne sont autres que les demi-dérivées partielles $\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{hk}}$, cela revient à dire que la forme $\Sigma A_{\rho\sigma}\xi_\rho\xi_\sigma$ doit avoir son discriminant non nul (²).

11. Pour achever la démonstration, il nous faut montrer que l'espace a sa courbure conservée par le transport parallèle. Or, soient (T) et (T′) deux des repères attachés, l'un au point A, l'autre au point infiniment voisin A′; la forme de Riemann a, en ces deux points, et rapportée aux deux repères considérés, les mêmes coefficients $R_{ij,kh}$. Soit (T_1) le repère d'origine A′ obtenu en transportant par parallélisme le repère (T) de A en A′; on passe de (T_1) à (T′) par la rotation de composantes ω_{ij}, c'est-à-dire par une rotation du groupe Γ, laquelle laisse invariante la forme R. Les coefficients de la forme R sont donc les mêmes, suivant qu'on la rapporte à (T) ou à (T_1); par suite le transport par parallélisme conserve la courbure, ce qu'il fallait démontrer.

IV. — Le groupe des déplacements G.

12. Le groupe abstrait, dont la structure est définie par les équations (9) ou (12), est susceptible d'une interprétation concrète importante. *L'espace & d'élément linéaire* (13) *admet en effet un groupe de déplacements rigides ayant la structure considérée.*

Pour démontrer ce théorème, considérons de nouveau les $n+r$

(¹) *Voir* E. CARTAN, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta math.*, t. XLVIII, 1925, nᵒˢ 1-2).

(²) Il est évident sans calcul que le groupe Γ, laissant invariante la forme R, laisse également invariantes les équations $\frac{\partial R}{\partial \xi_\rho} = 0$; par suite, les transformations de Γ dont les $\frac{\partial R}{\partial \xi_\rho}$ sont les formes associées forment un sous-groupe invariant de Γ.

formes ω_i et θ_α en $u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_r$ et les équations

$$(14)\qquad \begin{cases} \omega_i(u', v'; du') = \omega_i(u, v; du), \\ \theta_\alpha(u', v'; du', dv') = \theta_\alpha(u, v; du, dv). \end{cases}$$

Elles forment un système complètement intégrable d'équations aux différentielles totales, les u'_i et v'_α étant regardées comme des fonctions inconnues des u_i et des v_α. En effet les covariants bilinéaires des deux membres de l'une quelconque des équations (14) sont manifestement égaux en tenant compte des équations du système, et cela en vertu de la *constance* des coefficients qui entrent dans les relations (9).

Toute solution du système (14), les du'_i étant linéaires par rapport aux du_i seules, est évidemment de la forme

$$u'_i = f_i(u),$$
$$v'_\alpha = \varphi_\alpha(u; v);$$

elle définit une transformation ponctuelle de l'espace en lui-même, et par cette transformation on a

$$\sum_i [\omega_i(u', v'; du')]^2 = \sum_i [\omega_i(u, v; du)]^2;$$

le ds^2 est donc conservé. Il existe par suite ∞^{r+n} transformations isométriques ou déplacements rigides de l'espace, et ces déplacements forment un groupe G, d'après la forme des équations (14). Les équations (9) sont les équations de définition du groupe et sa structure est donnée par (12).

Il existe toujours un déplacement de G tel qu'un point donné A vienne en un autre point donné A et tel qu'un des repères (T) attachés à A vienne coïncider en même temps avec l'un des repères (T') attachés à A'. En particulier il existe une infinité de déplacements laissant fixe un point donné A; les vecteurs issus de A sont alors transformés par les transformations du groupe d'holonomie Γ, qui amène précisément en coïncidence les différents repères (T) les uns avec les autres.

13. Le groupe G dont nous venons de démontrer l'existence est un groupe *continu*. Mais il peut exister d'autres transformations isométriques de l'espace en lui-même. Nous allons montrer que *l'espace admet toujours une symétrie par rapport à un quelconque de ses points.*

Il suffit pour le démontrer de considérer le système de Pfaff

$$(15) \qquad \begin{cases} \omega_i(u', v'; du') = -\omega_i(u, v; du), \\ \theta_\alpha(u', v'; du', dv') = \theta_\alpha(u, v; du, dv). \end{cases}$$

La forme des équations (9) montre que le système (15) est complètement intégrable; nous en déduisons donc une seconde famille de transformations isométriques de l'espace. En particulier considérons la solution du système (15) telle qu'à des valeurs numériques données des u_i et des v_α correspondent les *mêmes* valeurs numériques des u'_i et des v'_α. La transformation isométrique définie par cettte solution laisse fixe un point A et un repère (T) attaché à A, mais les composantes d'un vecteur issu de A sont changées de signe. Tout point M est donc transformé en un point M' situé sur la géodésique AM, de l'autre côté de A et à une distance AM' = AM; on a affaire à une *symétrie* par rapport au point A.

14. La propriété à laquelle nous sommes arrivés pour les espaces $\mathcal{E}$ est caractéristique de ces espaces. *Si un espace de Riemann est tel que la symétrie par rapport à un quelconque de ses points soit une transformation isométrique, la courbure de cet espace se conserve par transport parallèle* (1).

Nous nous appuierons, pour le démontrer, sur une construction remarquable du transport parallèle. Pour transporter par parallélisme une direction de A en un point infiniment voisin A', il suffit de construire la géodésique AA' et de prendre la direction issue de A' symétrique de la direction donnée par rapport au milieu C de AA'. Cela posé, soit en A un élément plan défini par deux directions données; le transport par parallélisme de cet élément plan de A en A' donnera la même direction (à deux dimensions) que la symétrie par rapport à C. Or cette symétrie, étant une isométrie, conserve la courbure riemannienne : c'est ce qu'il fallait démontrer.

---

(1) Cette propriété s'étend aux espaces à connexion affine sans torsion dont la courbure se conserve par le transport parallèle.

15. Tout ce qui précède, en dehors du paragraphe I, s'applique aux espaces de Riemann $\mathcal{E}$, irréductibles ou non, réels ou complexes. Nous allons, à partir de maintenant, nous borner aux espaces irréductibles réels à ds^2 défini positif. Nous indiquerons le principe de deux méthodes permettant leur détermination complète, l'une fondée sur la considération du groupe d'holonomie Γ, l'autre sur la considération du groupe des déplacements G.

Nous exclurons de nos considérations l'espace euclidien, pour lequel le groupe Γ se réduit à la transformation identique et la forme R est identiquement nulle.

V. — Le groupe d'holonomie des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles réels.

16. Si un espace $\mathcal{E}$ réel est réductible, son ds^2 est de la forme

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2;$$

décomposons ds_1^2 et ds_2^2 en des sommes de carrés

$$ds_1^2 = \sum_i^{1,\ldots,n_1} \omega_i^2,$$

$$ds_2^2 = \sum_j^{1,\ldots,n_2} \omega_{n_1+j}^2.$$

Cette décomposition revient à attacher à chaque point de l'espace un repère rectangulaire (T), et l'on a évidemment

$$\omega_{i,n_1+j} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n_1;\ j = 1, \ldots, n_2).$$

Par suite les $R_{ij,kh}$ ne peuvent être différents de zéro que si les quatre indices i, j, k, h appartiennent tous au groupe des n_1 premiers indices ou au groupe des n_2 derniers. Les transformations infinitésimales associées aux cycles élémentaires laissent donc invariante chacune des multiplicités planes réelles

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n_1} = 0,$$
$$x_{n_1+1} = x_{n_1+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Le groupe Γ laisse donc lui-même invariante une multiplicité plane réelle.

17. Réciproquement, supposons que le groupe de rotations Γ

laisse invariante une multiplicité plane réelle ; elle laissera évidemment invariante la multiplicité orthogonale. On peut choisir les repères de manière que les équations de ces multiplicités invariantes soient respectivement

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0,$$
$$x_{\nu+1} = x_{\nu+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Il en résulte que les seuls coefficients $a_{\alpha ij}$ qui ne soient pas nuls sont ceux pour lesquels les deux indices i et j appartiennent au même groupe des ν premiers indices ou au même groupe des $n-\nu$ derniers. Par suite encore, les seules composantes ω_{ij} de la connexion affine qui ne soient pas nulles sont celles pour lesquelles les deux indices satisfont à ces mêmes conditions. Les ν relations

$$\omega'_i = \sum_k^{1,\ldots,\nu} [\omega_k \omega_{ki}] \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

montrent alors que les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_\nu = 0$$

forment un système complètement intégrable, et le raisonnement fait au n° 9 montre que la forme différentielle quadratique

$$ds_1^2 = \omega_1^2 + \ldots + \omega_\nu^2$$

peut être construite avec ν variables et leurs différentielles. On a un résultat analogue pour la forme

$$ds_2^2 = \omega_{\nu+1}^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

Par suite l'espace est réductible.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace $\mathcal{E}$ soit irréductible est donc que son groupe d'holonomie ne laisse invariante aucune multiplicité plane réelle.

CHAPITRE II.

LA PREMIÈRE MÉTHODE : LE GROUPE D'HOLONOMIE.

I. — Généralités sur les groupes orthogonaux réels.

18. Nous avons vu (n° 17) que les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles sont ceux pour lesquels le groupe d'holonomie ne laisse invariante

aucune multiplicité plane réelle. Nous allons d'abord indiquer rapidement comment on peut obtenir tous les groupes orthogonaux réels Γ ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle.

Cherchons d'abord si le groupe Γ peut laisser invariante une multiplicité plane imaginaire P; il laissera alors invariante la multiplicité plane imaginaire conjuguée P_0. Ces deux multiplicités n'auront aucune direction commune, car l'ensemble des directions communes définirait une multiplicité plane réelle invariante par le groupe. De plus, la somme des dimensions de P et de P_0 doit être égale à n, sans quoi il existerait une plus petite multiplicité plane réelle, invariante par Γ, contenant P et P_0. Finalement donc n est pair et P de dimension $\frac{n}{2}$.

Soient

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu = 0 \qquad \left(\nu = \frac{n}{2}\right)$$

les équations de P, les y_i étant des combinaisons linéaires à coefficients imaginaires des variables $x_1, \ldots, x_n$. Désignons leurs conjuguées par

$$\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \quad \ldots, \quad \bar{y}_\nu.$$

Le carré de la longueur d'un vecteur sera une forme quadratique en y_i, $\overline{y_i}$, qu'on pourra décomposer de la manière suivante :

$$\Phi(y_i) + \overline{\Phi}(\bar{y}_i) + \Psi(y_i, \bar{y}_i).$$

La forme $\overline{\Phi}(\overline{y_i})$ est la forme complexe conjuguée de Φ; quant à Ψ, c'est une *forme d'Hermite*, ayant nécessairement des valeurs réelles pour toutes les valeurs complexes données aux y_i.

Le groupe Γ transformant entre elles les variables y_i d'une part, les variables $\overline{y_i}$ d'autre part, laisse invariante chacune des deux formes quadratiques réelles en $x_1, \ldots, x_n$

$$\Phi(y_i) + \overline{\Phi}(\bar{y}_i) \quad \text{et} \quad \Psi(y_i, \bar{y}_i).$$

Cela n'est possible que si ces deux formes sont proportionnelles [1], c'est-à-dire ici si l'une des formes est identiquement

[1] Tout groupe linéaire qui laisse invariantes deux formes quadratiques réelles distinctes F et F_1, dont l'une F est définie, laisse invariante au moins une multiplicité plane réelle, à savoir celle qu'on obtient en annulant les dérivées partielles d'une des formes réelles dégénérées du faisceau $F + \lambda F_1$.

nulle. Or la première n'est pas une forme quadratique définie positive, car si l'on réduit, ce qui est toujours possible, Φ à une somme de carrés, on obtient

$$\Phi(y_i) + \overline{\Phi}(\overline{y}_i) = \sum_i (y_i^2 + \overline{y}_i^2),$$

qui est une somme de ν carrés positifs et de ν carrés négatifs réels.

Il faut donc que la forme fondamentale, qui donne le carré de la longueur d'un vecteur, soit une forme d'Hermite, nécessairement définie positive.

On peut exprimer ce résultat d'une autre manière, en disant que *les seules multiplicités planes imaginaires qui puissent être invariantes par le groupe* Γ *sont des multiplicités totalement isotropes à* $\frac{n}{2}$ *dimensions. Le groupe* Γ *peut alors être considéré comme un groupe à paramètres réels à* $\frac{n}{2}$ *variables complexes laissant invariante une forme d'Hermite définie positive.*

Remarquons qu'il peut très bien arriver que le groupe Γ laisse invariantes plusieurs multiplicités planes imaginaires de cette nature et même une infinité (¹).

19. Nous allons maintenant obtenir des renseignements très importants sur la structure des groupes orthogonaux réels en mettant leurs transformations infinitésimales de base sous une forme normale. Revenons à des coordonnées rectangulaires réelles x_i. Toute transformation infinitésimale orthogonale

$$\mathrm{U}f = \sum_{(ij)} a_{ij}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

est définie par un système de bivecteurs $a_{ij} = -a_{ji}$. Nous con-

(¹) Je signale à cette occasion une erreur qui s'est glissée dans mon mémoire : *Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (*J. de Math.*, 6ᵉ série, t. X, 1914, p. 149-186). L'erreur se trouve page 155 ; elle consiste précisément à affirmer qu'un groupe linéaire réel qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane réelle laisse au plus invariantes deux multiplicités planes imaginaires conjuguées l'une de l'autre. Cette erreur n'influe du reste pas sur les raisonnements et les résultats du mémoire.

viendrons de dire que le carré de la mesure de ce système de bivecteurs est le carré scalaire de la transformation infinitésimale, et nous écrirons

$$\mathrm{U} \mid \mathrm{U} = \sum_{(ij)} a_{ij}^2.$$

On définit de même le produit scalaire de deux transformations $\mathrm{U}f$, $\mathrm{V}f$, correspondant respectivement aux systèmes de bivecteurs a_{ij} et b_{ij}, par la relation

$$\mathrm{U} \mid \mathrm{V} = \sum_{(ij)} a_{ij} b_{ij}.$$

Cela posé, le groupe orthogonal réel Γ d'ordre r aura une base normale si les r transformations infinitésimales $\mathrm{U}_1 f, \ldots \mathrm{U}_r f$ ont toutes leur carré scalaire égal à 1 et si le produit scalaire de deux quelconques d'entre elles est nul. Il est toujours possible de donner à Γ une base normale, et cela à une substitution orthogonale près sur les transformations $\mathrm{U}_\alpha f$. Nous pouvons donc supposer qu'on a

$$(16) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(ij)} a_{\alpha ij}^2 = 1, \\ \displaystyle\sum_{(ij)} a_{\alpha ij} a_{\beta ij} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

Les constantes de structure du groupe Γ jouissent alors de propriétés remarquables. L'équation (5) (n° 5)

$$\sum_k (a_{\alpha ik} a_{\beta kj} - a_{\beta ik} a_{\alpha kj}) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} a_{\rho ij}$$

donne en effet, multipliée par $a_{\gamma ij}$ et sommée par rapport aux indices i et j,

$$\begin{aligned} 2 c_{\alpha\beta\gamma} &= \sum_{i,j,k} a_{\alpha ik} a_{\beta kj} a_{\gamma ij} - \sum_{i,j,k} a_{\alpha kj} a_{\beta ik} a_{\gamma ij} \\ &= -2 \sum_{i,j,k} a_{\alpha ij} a_{\beta jk} a_{\gamma ki}, \end{aligned}$$

d'où

$$(17) \qquad c_{\alpha\beta\gamma} = -\sum_{i,j,k} a_{\alpha ij} a_{\beta jk} a_{\gamma ki}.$$

Cette formule montre immédiatement que les quantités $c_{\alpha\beta\gamma}$ se conservent par une permutation circulaire des indices et changent de signe par la transposition de deux indices :

$$(18) \qquad c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\gamma\alpha} = c_{\gamma\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha\gamma} = -c_{\gamma\beta\alpha} = -c_{\alpha\gamma\beta}.$$

20. Considérons maintenant le groupe Γ' qui indique comment Γ transforme entre elles les formes ξ_α associées aux transformations $U_\alpha f$. On a

$$U_\alpha(\xi_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}\xi_\rho,$$

d'où

$$U'_\alpha f = \sum_{(ij)} c_{\alpha ij}\left(\xi_j \frac{\partial f}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right);$$

on voit que le groupe Γ' est aussi un groupe orthogonal réel [1]. A toute multiplicité plane invariante par Γ' correspond un sous-groupe invariant de Γ; en effet si le groupe Γ' transforme entre elles un certain nombre de formes linéaires en $\xi_1, \ldots, \xi_r$, soit

$$\begin{gathered} a_1\xi_1 + \ldots + a_r\xi_r, \\ b_1\xi_1 + \ldots + b_r\xi_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

c'est que les crochets d'une transformation quelconque de Γ avec les différentes transformations

$$\begin{gathered} a_1 U_1 f + \ldots + a_r U_r f, \\ b_1 U_1 f + \ldots + b_r U_r f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

sont des combinaisons linéaires de ces dernières transformations.

La recherche des sous-groupes invariants de Γ revient donc à celle des multiplicités planes invariantes par Γ'. Si nous nous occupons d'abord de celles qui sont réelles, nous voyons qu'on peut, par une substitution orthogonale réelle, supposer choisies les

(1) C'est ce que, dans la théorie des groupes, on appelle le *groupe adjoint* du groupe donné : *voir*, plus bas, n° 22.

variables ξ de manière à les partager en un certain nombre de suites

$$\begin{array}{lll} \xi_1, & \ldots, & \xi_s; \\ \xi_{s+1}, & \ldots, & \xi_t; \\ \ldots\ldots & \ldots, & \ldots \end{array}$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° Les variables de chaque suite sont transformées entre elles par le groupe Γ' ;

2° Il est impossible de décomposer une suite quelconque en suites partielles dans chacune desquelles les variables soient transformées entre elles.

Il résulte de là que les $c_{\alpha ij}$ ne sont différents de zéro que si les indices i et j appartiennent à la même suite; par suite, d'après les relations (18), *les seules constantes de structure qui puissent être différentes de zéro sont celles pour lesquelles les trois indices appartiennent à la même suite.*

Autrement dit, *le groupe Γ est décomposable en un certain nombre de sous-groupes invariants réels échangeables entre eux, dont aucun n'admet de sous-groupe invariant réel.*

21. Nous allons montrer maintenant que *si un groupe orthogonal réel n'admet aucun sous-groupe invariant réel, il n'en admet non plus aucun imaginaire.*

En effet, considérons le groupe Γ', qui est orthogonal et ne laisse invariante aucune multiplicité plane réelle. Les seules multiplicités planes imaginaires qu'il pourrait laisser invariantes seraient totalement isotropes et à $\frac{r}{2}$ dimensions (n° 18). On peut supposer une telle multiplicité définie par les relations

$$\xi_1 + i\xi_2 = \ldots = \xi_{r-1} + i\xi_r = 0 \qquad (r \text{ pair}).$$

Exprimons que $U'_\alpha f$ laisse cette multiplicité invariante. Convenons d'abord de poser

$$\begin{array}{ll} \alpha' = 2i - 1, & \text{si } \alpha = 2i, \\ \alpha' = 2i, & \text{si } \alpha = 2i - 1. \end{array}$$

Nous aurons alors les relations

$$c_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^{\beta+\gamma} c_{\alpha\beta'\gamma'}.$$

Des relations (18) et des précédentes nous déduisons

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta\gamma} &= (-1)^{\beta+\gamma} c_{\alpha\beta'\gamma'} = (-1)^{\beta+\gamma+\alpha+\gamma'} c_{\alpha'\beta'\gamma} \\ &= (-1)^{\beta+\gamma+\alpha+\gamma'+\alpha'+\beta'} c_{\alpha\beta\gamma} = -c_{\alpha\beta\gamma}; \end{aligned}$$

tous les coefficients $c_{\alpha\beta\gamma}$ seraient donc nuls. Le groupe Γ', s'il est d'ordre $r > 1$, laisserait invariantes une infinité de multiplicités planes réelles, ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition à démontrer suppose du reste $r > 1$.

22. Nous arrivons donc au théorème final :

Tout groupe orthogonal réel est décomposable en un certain nombre de sous-groupes invariants réels simples échangeables entre eux.

On peut ajouter un renseignement important sur la structure de chacun de ces sous-groupes. On sait que, dans la théorie des groupes simples, il existe une forme quadratique qui joue un rôle important [1], c'est la forme $\varphi(e)$ qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique relative à la transformation infinitésimale arbitraire $\sum_i e_i U_i f$ du groupe

$$\varphi(e) = \sum_{i,j,\rho,\sigma} e_i e_j c_{i\rho\sigma} c_{j\sigma\rho}.$$

On peut du reste ici remplacer les variables e_i par les variables ξ_i, et la forme $\varphi(\xi)$ ainsi obtenue est invariante par le groupe Γ', qui n'est autre que le *groupe adjoint* de Γ. Or si Γ est simple, la seule forme quadratique invariante par le groupe orthogonal Γ' est, à un facteur constant près, $\sum_i \xi_i^2$. On a donc *a priori* ici

$$(19) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(\rho\sigma)} c_{\alpha\rho\sigma} c_{\beta\rho\sigma} = 0 & (\alpha \neq \beta), \\ \displaystyle\sum_{(\rho\sigma)} c_{\alpha\rho\sigma}^2 = H, \end{cases}$$

et par suite

$$\varphi(e) = -2H(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2).$$

---

(1) *Voir* E. CARTAN, *Thèse*, p. 25; la forme $\varphi(e)$ est la combinaison $\psi_1^2(e) - 2\psi_2(e)$.

Les groupes simples dans lesquels se décompose le groupe Γ *jouissent donc de la propriété que leur forme* $\varphi(e)$ *est définie négative* ([1]); nous dirons que ce sont des groupes à structure (réelle) simple *unitaire* ([2]).

23. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer tous les groupes orthogonaux réels ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle.

Ils se partagent, comme nous l'avons vu (n° **18**), en deux classes, ceux qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane imaginaire, et ceux qui laissent invariante une multiplicité plane imaginaire totalement isotrope.

La détermination des groupes de la seconde classe est facile. On détermine tous les groupes linéaires, à paramètres réels et à variables complexes, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, qui se décomposent en sous-groupes simples réels unitaires et qui n'admettent aucune antiinvolution de première espèce ([3]). Partons pour cela d'un certain nombre de groupes simples unitaires ne laissant invariante aucune multiplicité plane; supposons par exemple qu'il y en ait trois et soient respectivement

$$\begin{array}{llll} y_1, & y_2, & \ldots, & y_p; \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_q; \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_s \end{array}$$

les variables (complexes) transformées par ces groupes. Le groupe Γ aura pour variables des quantités x_{ijk} transformées entre elles de la même manière que sont transformés les produits $y_i z_j u_k$ par les différentes transformations des trois sous-groupes simples considérés ([4]). D'autre part, on peut vérifier que tout groupe

---

([1]) Les groupes simples à paramètres réels qui jouissent de cette propriété existent pour tout les types de groupes simples à structure complexe (*voir* E. Cartan, *Annales.*). Ils sont encore caractérisés par la propriété que les racines de l'équation caractéristique sont toutes purement imaginaires : c'est une propriété bien connue des groupes orthogonaux.

([2]) J'utilise cette expression parce que les transformations linéaires d'une forme d'Hermite, qui engendrent précisément un groupe de cette catégorie, sont dites quelquefois unitaires.

([3]) E. Cartan, *J. Math.*, p. 156-162.

([4]) Ce procédé de formation est appelé *multiplication*; voir E. Cartan, *Bull.*, p. 54.

simple unitaire ne laissant invariante aucune multiplicité plane laisse invariante une forme d'Hermite définie ([1]). Si alors, ce qu'on peut toujours supposer, les trois formes d'Hermite invariantes par les trois groupes simples sont

$$\sum_i y_i \bar{y}_i, \qquad \sum_i z_i \bar{z}_i, \qquad \sum_i u_i \bar{u}_i,$$

la forme d'Hermite invariante par Γ sera

$$\sum_{i,j,k} x_{ijk} \bar{x}_{ijk},$$

et il n'y en aura pas d'autre. La condition que le groupe Γ n'admette pas une antiinvolution de première espèce est nécessaire, sans quoi le groupe Γ, construit comme il vient d'être dit, laisserait invariante une multiplicité plane réelle. D'ailleurs une antiinvolution ne peut se présenter que si chacun des groupes simples est son propre corrélatif ([2]).

Ajoutons la remarque que l'un (et un seul) des groupes simples peut être à un paramètre et réductible à

$$iu \frac{\partial f}{\partial u};$$

la forme d'Hermite invariante est ici $u\bar{u}$.

24. Passons maintenant aux groupes de la première classe, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, réelle ou imaginaire.

Pour les déterminer tous, on part de groupes simples (à paramètres réels) unitaires à variables complexes, ne laissant invariante aucune multiplicité plane, et qui soient leurs propres corrélatifs (les poids des variables, qui sont purement imaginaires, devant être deux à deux égaux et opposés), et on les *multiplie* entre eux.

([1]) Ce résultat se trouve indiqué, chemin faisant, pour certains groupes *fondamentaux*, dans E. Cartan, *Annales*, p. 263-355. Certains groupes laissent invariante une forme quadratique définie, mais comme ils sont alors à coefficients réels, ils laissent invariante la forme d'Hermite correspondante.

([2]) E. Cartan, *Journal*, p. 165-166.

Chaque groupe simple a un *indice* (± 1) qui indique l'espèce d'antiinvolution que le groupe admet; il faut que le produit de tous les indices soit égal à 1 ([1]). On peut vérifier que les conditions précédentes sont suffisantes pour que le groupe laisse invariante une forme quadratique définie.

Ajoutons la remarque qu'aucun des groupes simples n'est à un paramètre.

II. — Les groupes d'holonomie semi-simples de la seconde classe.

25. Dans ce qui précède, nous n'avons pas tenu compte des conditions auxquelles doit satisfaire un groupe orthogonal pour qu'il puisse être groupe d'holonomie.

Supposons par exemple qu'un groupe orthogonal ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle se décompose en trois groupes simples respectivement engendrés par les transformations

$$\begin{matrix} U_1 f, & \ldots, & U_p f, \\ V'_1 f, & \ldots, & V'_q f, \\ W''_1 f, & \ldots, & W''_s f, \end{matrix}$$

et soient respectivement

$$\begin{matrix} \xi_1, & \ldots, & \xi_p, \\ \eta'_1, & \ldots, & \eta'_q, \\ \zeta''_1, & \ldots, & \zeta''_s \end{matrix}$$

les formes associées à ces transformations. Si le groupe est un groupe d'holonomie, la forme de Riemann correspondante sera nécessairement

$$R = A(\xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2) + B(\eta_1'^2 + \ldots + \eta_q'^2) + C(\zeta_1''^2 + \ldots + \zeta_s''^2)$$

avec trois coefficients A, B, C convenablement choisis.

Pour que Γ puisse être groupe d'holonomie, il faut donc et il suffit qu'il existe trois quantités non nulles A, B, C telles que

---

([1]) E. Cartan, *Journal*, p. 167.

les relations (11) (n° 7) aient lieu :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{A}\sum_{\rho}(a_{\rho ij}a_{\rho kh}+a_{\rho jk}a_{\rho ih}+a_{\rho ki}a_{\rho jh}) \\
&+\mathrm{B}\sum_{\sigma}(a'_{\sigma ij}a'_{\sigma kh}+a'_{\sigma jk}a'_{\sigma ih}+a'_{\sigma ki}a'_{\sigma jh}) \\
&+\mathrm{C}\sum_{\tau}(a''_{\tau ij}a''_{\tau kh}+a''_{\tau jk}a''_{\tau ih}+a''_{\tau ki}a''_{\tau jh})=0.
\end{aligned}
$$

Nous allons voir que ces conditions restreignent beaucoup la généralité des groupes orthogonaux susceptibles d'être groupes d'holonomie d'espaces $\mathcal{E}$.

26. Nous allons, avant de démontrer les principaux théorèmes que nous avons en vue, indiquer comment les résultats précédemment indiqués doivent être modifiés lorsqu'on prend des variables quelconques, la forme fondamentale qui donne le carré d'un vecteur étant

$$\sum_{i,j} g_{ij}\,x^i x^j.$$

Nous utiliserons les notations du calcul tensoriel. Nous supposerons encore que la base du groupe Γ est normale.

Si l'on a

$$\mathrm{U}_\alpha f=\sum_{i,j} a_{\alpha i}{}^{j}\, x^i\,\frac{\partial f}{\partial x^j},$$

les relations (16) (n° 19) prennent la forme

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{\alpha ij}\,a_{\alpha}{}^{ij}=1,$$

$$\sum_{i,j} a_{\alpha ij}\,a_{\beta}{}^{ij}=0.$$

Quant aux relations (11) (n° 7), elles subsistent sans modification.

27. Prenons d'abord le cas d'un groupe Γ laissant invariante une multiplicité plane imaginaire (totalement isotrope).

Supposons que Γ se décompose au moins en deux groupes simples, abstraction faite du groupe à un paramètre qui peut se présenter. On peut alors décomposer Γ en deux groupes simples ou semi-simples, en faisant toujours abstraction du sous-groupe invariant possible à un paramètre.

Pour obtenir Γ, nous partons d'un groupe simple ou semi-simple d'ordre s, à p variables indépendantes complexes, défini par les transformations

$$\overline{\mathrm{U}}_\rho f = \sum_{i,j} a_{\dot{\rho} i}{}^{j} y^i \frac{\partial f}{\partial y^j},$$

laissant invariante la forme d'Hermite

$$y^1\overline{y}^1 + \ldots + y^p\overline{y}^p;$$

les coefficients satisfont aux relations

$$a_{\dot{\rho} i}{}^{j} + \overline{a}_{\dot{\rho} j}{}^{i} = 0.$$

Nous prenons un second groupe simple ou semi-simple d'ordre t, à q variables indépendantes, défini par les transformations

$$\overline{\mathrm{V}}_\sigma f = \sum_{\alpha,\beta} b_{\dot{\sigma}\dot{\alpha}}{}^{\beta} z^\alpha \frac{\partial f}{\partial z^\beta},$$

laissant invariante la forme d'Hermite

$$z^1\overline{z}^1 + \ldots + z^q\overline{z}^q.$$

Remarquons que nous devons avoir, pour chaque valeur de ρ et de σ,

$$\sum_i a_{\dot{\rho}\dot{i}}{}^{i} = 0, \qquad \sum_\alpha b_{\dot{\sigma}\dot{\alpha}}{}^{\alpha} = 0;$$

sinon en effet l'ensemble des combinaisons linéaires des $\overline{\mathrm{U}}_\rho f$ pour lesquels la somme $\sum_i a_i^i$ serait nulle formerait un sous-groupe invariant à $s - 1$ paramètres du premier groupe, ce qui est impossible.

Cela posé, le groupe Γ transformera les variables $x^{i\alpha}$ et leurs conjuguées $x^{\overline{i\alpha}}$; il sera défini par les transformations

$$\mathrm{U}_\rho f = \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} a_{\dot\rho i}^{\ \cdot j} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,q} \left(x^{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{\overline{j\lambda}}} - x^{\overline{j\lambda}} \frac{\partial f}{\partial x^{\overline{\overline{i\lambda}}}} \right),$$

$$\mathrm{V}_\sigma f = \sum_{\alpha,\beta}^{1,\ldots,q} b_{\dot\sigma\dot\alpha}^{\ \ \beta} \sum_{k}^{1,\ldots,p} \left(x^{k\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\overline{k\beta}}} - x^{\overline{k\beta}} \frac{\partial f}{\partial x^{\overline{\overline{k\alpha}}}} \right).$$

auxquelles pourra s'ajouter

$$\mathrm{W} f = i \sum_{k,\lambda} \left(x^{k\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{k\lambda}} - x^{\overline{k\lambda}} \frac{\partial f}{\partial x^{\overline{k\lambda}}} \right).$$

Nous supposerons que les transformations $\mathrm{U}_\rho f$ forment une base normale pour le premier sous-groupe et les transformations $\mathrm{V}_\sigma f$ une base normale pour le second sous-groupe.

Les seules composantes covariantes non nulles du système de bivecteurs qui représente $\mathrm{U}_\rho f$ sont

$$a_{\rho,(i\lambda),(\overline{j\lambda})} = a_{\dot\rho i}^{\ \cdot j};$$

de même les seules composantes covariantes non nulles du système de bivecteurs qui représente $\mathrm{V}_\sigma f$ sont

$$b_{\sigma,(k\alpha),(\overline{k\beta})} = b_{\dot\sigma\dot\alpha}^{\ \ \beta};$$

quant au système de bivecteurs qui représente $\mathrm{W} f$, on a

$$c_{(k\lambda),(\overline{k\lambda})} = i.$$

28. La forme de Riemann R peut s'écrire

$$\mathrm{R} = \sum_\rho \mathrm{A}_\rho \xi_\rho^2 + \sum_\sigma \mathrm{B}_\sigma \eta_\sigma^2 + \mathrm{C}\zeta^2,$$

le coefficient C étant nul si le groupe Γ ne comprend pas la transformation $\mathrm{W} f$, les autres coefficients A_ρ, B_σ étant tous différents de zéro. On a du reste

$$\xi_\rho = \sum_{i,j} \alpha_{\dot\rho i}^{\ \cdot j} \sum_{\lambda} p^{(i\lambda)(\overline{j\lambda})},$$

$$\eta_\sigma = \sum_{\alpha,\beta} b_{\dot\sigma\dot\alpha}^{\ \ \beta} \sum_{k} p^{(k\alpha)(\overline{k\beta})}.$$

Formons les relations (11) et prenons en particulier, pour les indices i, j, k, h qui figurent dans ces relations, le groupe de quatre indices composés

$$(i\alpha),\quad (\overline{j\alpha}),\quad (k\beta),\quad (\overline{h\beta})\qquad (\alpha \neq \beta;\ i \neq j).$$

On aura

$$\sum_\rho \mathrm{A}_\rho a_{\dot\rho i}{}^j a_{\dot\rho k}{}^h = 0,$$

à moins que l'on n'ait en même temps

$$i = h,\qquad j = k,$$

auquel cas on obtiendra

$$\sum_\rho \mathrm{A}_\rho a_{\dot\rho i}{}^j a_{\dot\rho j}{}^i = \sum_\sigma \mathrm{B}_\sigma b_{\dot\sigma\alpha}{}^\beta b_{\dot\sigma\beta}{}^\alpha = -\mathrm{K},$$

K ne dépendant manifestement ni des indices i, j, ni des indices α, β.

Il résulte de ce qui précède l'égalité

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p^{(i\alpha)(\overline{j\alpha})}} = \sum_\rho \mathrm{A}_\rho \alpha_{\rho i}{}^j \xi_\rho = -\mathrm{K}\sum_\lambda p^{(j\lambda)(\overline{i\lambda})}.$$

La constante K ne peut être nulle, car alors R ne dépendrait d'aucune des quantités $p^{(i\alpha)(\overline{j\alpha})}$ où $i \neq j$; elle ne dépendrait non plus d'aucune des quantités $p^{(i\alpha)(\overline{i\beta})}$ où $\alpha \neq \beta$. Elle ne dépendrait donc que des quantités $p^{(i\alpha)(\overline{i\alpha})}$. Mais alors les transformations infinitésimales associées aux cycles élémentaires se déduiraient toutes, par des combinaisons linéaires à coefficients complexes, des transformations

$$x^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{i\alpha}} - x^{\overline{i\alpha}}\frac{\partial f}{\partial x^{\overline{i\alpha}}};$$

elles seraient donc toutes échangeables entre elles, ce qui est impossible.

L'expression trouvée pour $\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p^{(i\alpha)(\overline{j\alpha})}}$ montre que la forme

$$\xi = \sum_\lambda p^{(j\lambda)(\overline{i\lambda})}$$

doit être une combinaison linéaire des ξ_ρ; par suite toutes les transformations

$$y^j \frac{\partial f}{\partial y^i} \qquad (i \neq j)$$

doivent être des combinaisons linéaires des $\overline{\mathrm{U}}_\rho f$; il en doit être de même de leurs crochets, qui donnent en particulier

$$y^i \frac{\partial f}{\partial y^i} - y^j \frac{\partial f}{\partial y^j}.$$

Autrement dit, le premier sous-groupe dans lequel Γ se décompose est à $p^2 - 1$ paramètres (il est simple et du type A). De même, le second sous-groupe est simple à $q^2 - 1$ paramètres.

Les deux sous-groupes étant simples, on a

$$\mathrm{A}_1 = \ldots = \mathrm{A}_{p^2-1} = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}_1 = \ldots = \mathrm{B}_{q^2-1} = \mathrm{B},$$

avec

$$\mathrm{A} \sum_\rho a_{\dot\rho i}{}^j a_{\dot\rho j}{}^i = \mathrm{B} \sum_\sigma b_{\dot\sigma \dot\alpha}{}^\beta b_{\dot\sigma \dot\beta}{}^\alpha = -\mathrm{K}.$$

29. Il est maintenant possible de déterminer complètement la forme R. Considérons en effet, dans les relations (11), le groupe des quatre indices composés

$$(i\alpha), \quad (\overline{i\alpha}), \quad (i\beta), \quad (\overline{i\beta}) \qquad (\alpha \neq \beta);$$

il donne

$$\mathrm{A} \sum_\rho (a_{\dot\rho i}{}^i)^2 + \mathrm{B} \sum_\sigma (b_{\dot\sigma \dot\alpha}{}^\alpha b_{\dot\sigma \dot\beta}{}^\beta - b_{\dot\sigma \dot\alpha}{}^\beta b_{\dot\sigma \dot\beta}{}^\alpha) - \mathrm{C} = 0.$$

Le groupe des quatre indices

$$(i\alpha), \quad (\overline{i\alpha}), \quad (j\beta), \quad (\overline{j\beta}) \qquad (i \neq j;\ \alpha \neq \beta)$$

donne de même

$$\mathrm{A} \sum_\rho a_{\dot\rho i}{}^i a_{\dot\rho j}{}^j + \mathrm{B} \sum_\sigma b_{\dot\sigma \dot\alpha}{}^\alpha b_{\dot\sigma \dot\beta}{}^\beta - \mathrm{C} = 0.$$

Les sommes

$$\mathrm{A} \sum_\rho (a_{\dot\rho i}{}^i)^2, \quad \mathrm{A} \sum_\rho a_{\dot\rho i}{}^i a_{\dot\rho j}{}^j, \quad \mathrm{B} \sum_\sigma (b_{\dot\sigma \dot\alpha}{}^\alpha)^2, \quad \mathrm{B} \sum_\sigma b_{\dot\sigma \dot\alpha}{}^\alpha b_{\dot\sigma \dot\beta}{}^\beta$$

ont donc des valeurs numériques

$$\mathrm{P},\quad \mathrm{Q},\quad \mathrm{P}_1,\quad \mathrm{Q}_1,$$

indépendantes des indices i, j, α, β.

Mais la relation

$$\sum_i a_{\dot{\rho} i}{}^{i} = 0$$

donne

$$\sum_i (a_{\dot{\rho} i}{}^{i})^2 + 2\sum_{(ij)} a_{\dot{\rho} i}{}^{i} a_{\ddot{\rho} j}{}^{j} = 0,$$

d'où, en sommant par rapport à ρ,

$$p\mathrm{P} + p(p-1)\mathrm{Q} = 0;$$

on a de même

$$\mathrm{P}_1 + (q-1)\mathrm{Q}_1 = 0.$$

Par suite, on a

$$(1-p)\mathrm{Q} + \mathrm{Q}_1 = \mathrm{C} - \mathrm{K},$$
$$\mathrm{Q} + \mathrm{Q}_1 = \mathrm{C};$$

on en déduit

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{p}\mathrm{K},\qquad \mathrm{Q}_1 = \frac{1}{q}\mathrm{K},\qquad \mathrm{C} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\mathrm{K}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour le calcul effectif de R. On obtient, toutes réductions faites,

$$(20)\qquad \begin{aligned} \mathrm{R} = &-\mathrm{K}\sum_{i,j}^{1,\ldots,p}\left(\sum_{\lambda}^{1,\ldots,q} p^{(i\lambda)(\overline{j\lambda})}\ \sum_{\mu}^{1,\ldots,q} p^{(j\mu)(\overline{i\mu})}\right)\\ &-\mathrm{K}\sum_{\alpha,\beta}^{1,\ldots,q}\left(\sum_{k}^{1,\ldots,p} p^{(k\alpha)(\overline{k\beta})}.\ \sum_{h}^{1,\ldots,p} p^{(h\beta)(\overline{h\alpha})}\right). \end{aligned}$$

Le second membre est une forme définie, positive si $\mathrm{K} > 0$, négative si $\mathrm{K} < 0$.

Il resterait à vérifier que le résultat obtenu, que nous avons démontré être le seul possible, correspond effectivement au groupe Γ considéré; nous laissons cette vérification de côté.

Finalement le groupe Γ est à

$$(p^2-1) + (q^2-1) + 1 = p^2 + q^2 - 1$$

paramètres et $2pq$ variables (réelles). Quant aux espaces irréductibles correspondants, ils ont partout leur courbure riemannienne positive ($K > 0$) ou négative ($K < 0$).

30. Dans tous les autres cas où le groupe Γ laisse invariante une multiplicité plane imaginaire, il est simple, ou se décompose en un groupe simple et un groupe à un paramètre. Il est alors défini par les transformations

$$U_\rho f = \sum_{i,j} a_{\rho i}^{\ j}\left(x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - \bar{x}^j \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}\right) \qquad (\rho = 1, \ldots, s)$$

avec

$$\sum_i a_{\rho i}^{\ i} = 0, \qquad \bar{a}_{\rho i}^{\ j} + a_{\rho j}^{\ i} = 0, \tag{21}$$

et, éventuellement,

$$V f = i \sum_k \left(x^k \frac{\partial f}{\partial x^k} - \bar{x}^k \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^k}\right).$$

Supposons encore la base $U_1 f, \ldots, U_s f$ normale. On a

$$R = A(\xi_1^2 + \ldots + \xi_s^2) + B\eta^2,$$

B étant nul si la transformation Vf ne fait pas partie de Γ. On a

$$\xi_\rho = \sum_{i,j} a_{\rho i}^{\ j} p^{i\bar{j}},$$

$$\eta = i \sum_k p^{k\bar{k}}.$$

La considération des quatre indices

$$i, \quad j, \quad \bar{i}, \quad \bar{j} \qquad (i \neq j)$$

conduit à la relation

$$A \sum_\rho (a_{\rho i}^{\ j} a_{\rho j}^{\ i} - a_{\rho i}^{\ i} a_{\rho j}^{\ j}) + B = 0.$$

Sommons par rapport aux indices i, j et tenons compte des premières relations (21). Nous obtenons

$$A \sum_{\rho, i, j} a_{\rho i}^{\ j} a_{\rho j}^{\ i} + p(p-1)B = 0,$$

ou encore, en tenant compte des dernières relations (21),

$$p(p-1)B = A\sum_{\rho,i,j} a_{\dot{\rho}i}^{\ j}\bar{a}_{\dot{\rho}i}^{\ j}.$$

Il en résulte que le coefficient B n'est pas nul et qu'il est du même signe que A. On a par suite le théorème suivant :

Si le groupe d'holonomie Γ *laisse invariante une multiplicité plane imaginaire, il contient un sous-groupe invariant à un paramètre; de plus, les espaces ℰ irréductibles correspondants ont une courbure riemannienne de signe constant.*

Il ne reste plus en principe qu'à passer en revue tous les types de groupes simples réels unitaires et à choisir ceux d'entre eux qui sont susceptibles, avec une transformation infinitésimale invariante, de composer un groupe d'holonomie. Nous y reviendrons plus loin (nos **37**, **38** et **40**).

III. — Les groupes d'holonomie semi-simples de la première classe.

31. Nous savons que si le groupe d'holonomie Γ ne laisse invariante aucune multiplicité plane réelle ou imaginaire, il se décompose en sous-groupes simples d'ordre >1. Nous allons d'abord examiner le cas où le groupe Γ n'est pas simple.

On peut alors l'obtenir par multiplication de deux groupes simples ou semi-simples γ_1 et γ_2 à variables complexes, ne laissant invariante aucune multiplicité plane. Soient

$$\bar{U}_{\rho}f = \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} a_{\dot{\rho}i}^{\ j} y^i \frac{\partial f}{\partial y^j} \qquad (\rho = 1, \ldots, s)$$

et

$$\bar{V}_{\sigma}f = \sum_{\alpha,\beta}^{1,\ldots,q} b_{\dot{\sigma}\dot{\alpha}}^{\ \beta} z^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial z^{\beta}} \qquad (\sigma = 1, \ldots, t),$$

ces deux groupes, respectivement à p et q variables. Le groupe Γ sera défini par les transformations

$$U_\rho f = \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} a_{\rho i}{}^{j} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,q} x^{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{j\lambda}},$$

$$V_\sigma f = \sum_{\alpha,\beta}^{1,\ldots,q} b_{\sigma\alpha}{}^{\beta} \sum_{k}^{1,\ldots,p} x^{k\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{k\beta}}.$$

Nous pouvons supposer que ces transformations donnent une base normale pour le groupe.

Les variables $x^{i\alpha}$ sont des variables complexes, ou plutôt ce sont des combinaisons linéaires à coefficients réels ou imaginaires de $n = pq$ variables réelles. Le groupe Γ laisse par hypothèse invariante une forme quadratique définie

$$F(x^{i\alpha}):$$

considérons la forme, quadratique par rapport aux y^i et quadratique par rapport aux z^α, obtenue en posant $x^{i\alpha} = y^i z^\alpha$.

Deux cas peuvent se présenter (¹) :

1° Cette forme $F(y^i z^\alpha)$ n'est pas identiquement nulle;

2° Cette forme est identiquement nulle.

32. Commençons par le premier cas. Si nous donnons aux z^α des valeurs numériques convenables, la forme $F(y^i z^\alpha)$ devient une forme quadratique non identiquement nulle en $y^1, \ldots, y^p$. Il est évident que le groupe γ_1 laisse cette forme invariante. Du reste il ne peut exister, à un facteur constant près, qu'une forme quadratique invariante par γ_1, sinon le groupe γ_1 laisserait invariante au moins une multiplicité plane, ce qui est contraire à l'hypothèse; de plus cette forme a son discriminant différent de zéro. Il en résulte une identité de la forme

$$F(y^i z^\alpha) = \Phi(y^i)\,\Psi(z^\alpha),$$

les deux formes Φ et Ψ n'étant pas dégénérées. On peut toujours, par une substitution linéaire convenable, supposer chacune de ces deux formes réduite à une somme de carrés. L'identité

$$F(y^i z^\alpha) = [(y^1)^2 + \ldots + (y^p)^2][(z^1)^2 + \ldots + (z^q)^2]$$

(¹) *Cf.* E. Cartan and J. A. Schouten, *On Riemannian Geometrie admitting an absolute parallelism* (*Proceed. Akad. Amsterdam*. t. XXIX, 1926, p. 938).

montre alors que le groupe Γ laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_{i,\alpha} (x^{i\alpha})^2,$$

et, comme il n'en peut laisser qu'une invariante, c'est la forme F $(x^{i\alpha})$.

Nous pouvons maintenant faire passer en bas tous les indices supérieurs et nous avons

$$U_\rho f = \sum_{(ij)} a_{\rho ij} \sum_\lambda \left(x_{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_{j\lambda}} - x_{j\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_{i\lambda}} \right),$$

$$V_\sigma f = \sum_{(\alpha\beta)} b_{\sigma\alpha\beta} \sum_k \left(x_{k\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{k\beta}} - x_{k\beta} \frac{\partial f}{\partial x_{k\alpha}} \right).$$

La forme de Riemann sera

$$R = \sum_\rho A_\rho \xi_\rho^2 + \sum_\sigma B_\sigma \eta_\sigma^2,$$

ou

$$\xi_\rho = \sum_{(ij)} a_{\rho ij} \sum_\lambda p_{(i\lambda)(j\lambda)},$$

$$\eta_\sigma = \sum_{(\alpha\beta)} b_{\sigma\alpha\beta} \sum_k p_{(k\alpha)(k\beta)}.$$

33. Considérons, dans l'identité (11) (n° 7), le groupe des quatre indices composés

$$(i\alpha),\quad (j\alpha),\quad (k\beta),\quad (h\beta) \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Si les quatre indices i, j, k, h sont distincts, on a

$$\sum_\rho A_\rho a_{\rho ij} a_{\rho kh} = 0;$$

si l'on a $i = k$, les trois indices i, j, h étant distincts, on a

$$\sum_\rho A_\rho a_{\rho ij} a_{\rho ih} = 0;$$

si enfin on a $k = i$, $h = j$, $i \neq j$, on obtient

$$\sum_\rho A_\rho a_{\rho ij}^2 = \sum_\sigma B_\sigma b_{\sigma\alpha\beta}^2 = K,$$

la quantité K ne dépendant manifestement pas des indices i, j, α, β.

Le calcul donne immédiatement

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{(i\alpha)(j\alpha)}} = K\sum_{\lambda} p_{(i\lambda)(j\lambda)} \qquad (i \neq j).$$

La constante K ne peut pas être nulle, pour une raison analogue à celle qui a été indiquée au n° 28. Il en résulte que la forme

$$\sum_{\lambda} p_{(i\lambda)(j\lambda)}$$

est une combinaison linéaire des ξ_ρ; par suite chaque rotation

$$y^i\frac{\partial f}{\partial y^j} - y^j\frac{\partial f}{\partial y^i}$$

est une combinaison linéaire des transformations $\overline{U}_\rho f$. Le groupe γ_1 est donc d'ordre $\frac{p(p-1)}{2}$. De même le groupe γ_2 est d'ordre $\frac{q(q-1)}{2}$. On a de plus

$$R = K\left[\sum_{(ij)}\left(\sum_{\lambda} p_{(i\lambda)(j\lambda)}\right)^2 + \sum_{(\alpha\beta)}\left(\sum_{k} p_{(k\alpha)(k\beta)}\right)^2\right].$$

Les espaces irréductibles obtenus sont, eux encore, à courbure partout positive ($K > 0$) *ou partout négative* ($K < 0$). *On a*

$$n = pq;$$

le groupe Γ *est le produit du groupe de toutes les transformations orthogonales à* p *variables par le groupe de toutes les transformations orthogonales à* q *variables; son ordre est*

$$r = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2}.$$

34. Venons maintenant au cas où la forme fondamentale $F(x^{i\alpha})$ s'annule identiquement quand on remplace $x^{i\alpha}$ par $y^i z^\alpha$. Soit

$$F(x^{i\alpha}) = \sum_{i,j,\alpha,\beta} g_{(i\alpha)(j\beta)}\, x^{i\alpha} y^{j\beta};$$

on a

$$g_{(i\alpha)(j\beta)} = -g_{(i\beta)(j\alpha)}.$$

Considérons les quantités $g_{(i\alpha)(j\beta)}$, où l'on donne à α et β deux valeurs distinctes *fixes*. La relation

$$g_{(i\alpha)(j\beta)} = - g_{(j\alpha)(i\beta)}$$

montre que ces quantités forment un tenseur à deux indices symétrique gauche. Il est facile de vérifier que le groupe γ_1 laisse invariante la forme quadratique extérieure (bilinéaire alternée)

$$\sum_{(ij)} g_{(i\alpha)(j\beta)} [y^i y^j].$$

On peut toujours choisir les indices α et β de manière que cette forme ne soit pas identiquement nulle. Or il ne peut exister, à un facteur constant près, qu'une forme quadratique extérieure invariante par un groupe linéaire qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane. On a donc

$$g_{(i\alpha)(j\beta)} = A_{ij} B_{\alpha\beta},$$

avec

$$A_{ij} = - A_{ji}, \qquad B_{\alpha\beta} = - B_{\beta\alpha},$$

les deux tenseurs A_{ij} et $B_{\alpha\beta}$ n'étant pas dégénérés.

On peut réduire les deux formes quadratiques extérieures invariantes par γ_1 et γ_2 à une forme normale, à savoir

$$[y^1 y^2] + \ldots + [y^{p-1} y^p] \qquad (p \text{ pair}),$$
$$[z^1 z^2] + \ldots + [z^{q-1} z^q] \qquad (q \text{ pair}).$$

On aura alors

$$F = \sum_{i, \alpha} (x^{2-1, 2\alpha-1} x^{2i, 2\alpha} - x^{2i-1, 2\alpha} x^{2i, 2\alpha-1}).$$

35. Posons maintenant

$$i' = i + 1, \qquad \text{si } i \text{ est impair},$$
$$i' = i - 1, \qquad \text{si } i \text{ est pair},$$

et de même pour les indices α. On aura

$$a_{\dot{\rho} i'}{}^{j'} + (-1)^{i+j} a_{\dot{\rho} j}{}^{i} = 0,$$
$$b_{\dot{\sigma} \alpha'}{}^{\beta'} + (-1)^{\alpha+\beta} b_{\dot{\sigma} \beta}{}^{\alpha} = 0,$$
$$x_{i\alpha} = (-1)^{i+\alpha} x^{i'\alpha'}.$$

De plus,

$$\xi_\rho = \sum_{(ij)} (-1)^j a_{\dot\rho i}{}^j \sum_\lambda (-1)^\lambda p^{(i\lambda)(j'\lambda')},$$

$$\eta_\sigma = \sum_{(\alpha\beta)} (-1)^\beta b_{\dot\sigma\dot\alpha}{}^\beta \sum_k (-1)^k p^{(k\alpha)(k'\beta')}.$$

Soit alors

$$R = \sum_\rho A_\rho \xi_\rho^2 + \sum_\rho B_\sigma \eta_\sigma^2.$$

On montre, comme précédemment, par la considération du groupe des quatre indices composés

$$(i\alpha), \quad (j'\alpha'), \quad (k\beta), \quad (h'\beta') \qquad (\alpha^2 \neq \beta^2),$$

qu'on a les relations

$$\sum_\rho A_\rho a_{\dot\rho i}{}^j a_{\dot\rho k}{}^h = 0,$$

exception faite pour le cas $k=j$, $h=i$, où l'on a

$$\sum_\rho A_\rho a_{\dot\rho i}{}^j a_{\dot\rho j}{}^i = \sum_\sigma B_\sigma b_{\dot\sigma\dot\alpha}{}^\beta b_{\dot\sigma\dot\beta}{}^\alpha = K,$$

la quantité K ne dépendant pas des indices i, j, α, β. Par suite

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p^{(i\alpha)(j'\alpha')}} = K \sum_\lambda (-1)^{\alpha+\lambda} p^{(j\lambda)(i'\lambda')} \qquad (i \neq j).$$

La forme

$$\sum_\lambda (-1)^\lambda p^{(j\lambda)(i'\lambda')}$$

doit donc être une combinaison linéaire des formes ξ_ρ; autrement dit la transformation infinitésimale

$$y^j \frac{\partial f}{\partial y^i} - (-1)^{i+j} y^{i'} \frac{\partial f}{\partial y^{j'}}$$

doit être une combinaison linéaire des transformations $\overline{U}_\rho f$. On en déduit, en prenant les crochets deux à deux, l'existence dans le groupe γ_1, *rendu à paramètres complexes*, de toutes les transformations qui laissent invariante la forme quadratique extérieure

$$[y^1 y^2] + \ldots + [y^{p-1} y^p].$$

Le groupe γ_1 est donc simple, du type (C) (¹), d'ordre $\frac{p(p+1)}{2}$. De même le groupe γ_2 est simple, du type (C), d'ordre $\frac{q(q+1)}{2}$. En posant $p = 2p'$, $q = 2q'$, on a donc

$$n = 4p'q', \qquad r = 2(p'^2 + q'^2) + p' + q'.$$

En réalité le groupe γ_1 sera le groupe unitaire des transformations linéaires qui laissent invariantes la forme quadratique extérieure

$$[y^1 y^2] + \ldots + [y^{p-1} y^p]$$

et la forme d'Hermite

$$y^1 \bar{y}^1 + y^2 \bar{y}^2 + \ldots + y^p \bar{y}^p;$$

on aura donc

$$a_{\rho i'}^{\;\;j'} = (-1)^{i+j+1} a_{\rho j}^{\;\;i} = (-1)^{i+j} \bar{a}_{\rho i}^{\;\;j}.$$

Enfin on aura pour la forme R une expression simple en introduisant les quantités

$$\xi_{ij} = \xi_{ji} = \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} p^{(i\lambda)(j\lambda')},$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha} = \sum_{k} (-1)^{k} p^{(k\alpha)(k'\beta)};$$

on a

$$\bar{\xi}_{ij} = (-1)^{i+j} \xi_{i'j'}, \qquad \bar{\eta}_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \eta_{\alpha'\beta'}.$$

Cela posé, on obtient

$$(22) \qquad R = K \left[2 \sum_{i}^{1,\ldots,p} \xi_{ii}\, \xi_{i'i'} + \sum_{(ij)}^{i \neq j} (-1)^{i+j} \xi_{ij}\, \xi_{i'j'} + 2 \sum_{\alpha}^{1,\ldots,q} \eta_{\alpha\alpha} \eta_{\alpha'\alpha'} + \sum_{(\alpha\beta)}^{\alpha \neq \beta} (-1)^{\alpha+\beta} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\alpha'\beta'} \right].$$

On voit que la courbure riemannienne est partout positive ($K > 0$) ou partout négative ($K < 0$).

36. Les conclusions précédentes ont été établies en supposant

(¹) E. Cartan, *Thèse*, p. 141.

essentiellement l'existence dans γ_2 de deux indices α, β, tels que $\alpha^2 \neq \beta^2$, c'est-à-dire en supposant que γ_2 est à plus de deux variables. Il reste donc à examiner le cas où l'un des groupes γ_1 et γ_2 est à deux variables. La question ne se pose évidemment que si l'autre groupe est simple; les considérations précédentes ne permettent pas alors de connaître la structure de ce groupe.

Néanmoins la considération du groupe des quatre indices

$$(i1), \quad (i2), \quad (i'1), \quad (i'2)$$

montre que les deux coefficients A et B sont de même signe. Par suite la courbure riemannienne est, là encore, partout positive ou partout négative.

IV. — Généralités sur les groupes d'holonomie qui restent à déterminer.

37. Les groupes d'holonomie qui restent à déterminer appartiennent à trois types différents.

I. Le groupe Γ ne laisse invariante aucune multiplicité plane imaginaire; il est simple.

II. Le groupe Γ ne laisse invariante aucune multiplicité plane imaginaire; il est semi-simple et résulte de la multiplication d'un groupe simple à trois paramètres et deux variables par un groupe simple à $2p$ variables laissant invariantes une forme quadratique extérieure et une forme d'Hermite définie positive.

III. Le groupe Γ laisse invariante une multiplicité plane imaginaire totalement isotrope. Il résulte de la multiplication d'un groupe simple unitaire et du groupe à un paramètre $iu \frac{\partial f}{\partial u}$.

Nous allons, pour chacun de ces trois types, nous contenter de donner quelques indications sur la méthode permettant de pousser la détermination jusqu'au bout, mais nous ne ferons pas les calculs et n'indiquerons pas les résultats, qui seront obtenus plus loin d'une autre manière.

38. Rappelons d'abord sous quelle forme on peut toujours mettre

un groupe linéaire simple [1]. En partant d'une transformation générale du groupe, on détermine un sous-groupe abélien à l paramètres (l étant le rang du groupe) contenant la transformation donnée. Nous désignerons par $e_1 Y_1 f + \ldots + e_l Y_l f$ la transformation générale de ce groupe. On peut alors choisir les variables de manière que chacune d'elles, lorsqu'on lui applique la transformation infinitésimale $\Sigma e_i Y_i f$, soit multipliée par un facteur constant, linéaire en $e_1, \ldots, e_l$, qu'on appelle le *poids* de la variable. Les différents poids sont des combinaisons linéaires à coefficients numériques rationnels (entiers ou fractionnaires) des *racines* de l'équation caractéristique relative à $\Sigma e_i Y_i f$.

A chaque *racine* ω_α correspond une transformation infinitésimale (réelle ou imaginaire) du groupe. Si la transformation appartenant à la racine ω_α est appliquée à la variable de poids ϖ, on obtient une combinaison linéaire des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$ (s'il en existe).

Rappelons encore que le groupe adjoint laisse invariante une forme quadratique (définie si le groupe est unitaire) $\varphi(e)$. Si l'on réduit cette forme à une somme de carrés, on obtient une base particulière pour les transformations infinitésimales du groupe. Cette base est nécessairement *normale*, au sens donné à ce mot au n° 19, si le groupe considéré est un sous-groupe invariant d'un groupe orthogonal; si en effet le carré scalaire (défini au n° 19) d'une transformation infinitésimale arbitraire de ce sous-groupe invariant n'était pas proportionnel à $\varphi(e)$, le groupe adjoint laisserait invariantes deux formes quadratiques distinctes et par suite une multiplicité plane, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En particulier, les transformations $Y_i f$ du sous-groupe abélien d'ordre l sont orthogonales aux différentes transformations qui appartiennent aux racines ω_α. Nous pouvons donc supposer que, dans la base normale du groupe, figurent l transformations indépendantes du sous-groupe abélien, les autres étant des combinaisons linéaires des transformations qui appartiennent aux différentes racines ω_α.

Faisons une dernière remarque. La forme quadratique laissée invariante par le groupe d'holonomie peut être décomposée en un

---

[1] *Voir* E. CARTAN, *Thèse* et *Bull.*

certain nombre de formes partielles, qui peuvent être de deux sortes différentes : les formes partielles de la première sorte ne contiennent que les variables de poids zéro (s'il en existe); les formes partielles de la seconde sorte ne contiennent que des termes dont chacun est le produit d'une variable de poids ϖ par une variable de poids $-\varpi$, ces deux poids $\pm\varpi$ étant caractéristiques de la forme partielle.

39. Cela posé, plaçons-nous d'abord dans le cas des groupes d'holonomie simples du type I. Soient

$$\varpi_\alpha \quad \text{et} \quad \varpi_\beta$$

deux des poids possibles, supposés différents de zéro, tels que $\varpi_\alpha^2 \neq \varpi_\beta^2$, et enfin tels que ni $\varpi_\alpha + \varpi_\beta$ ni $\varpi_\alpha - \varpi_\beta$ ne soit une racine. Considérons alors quatre variables appartenant respectivement aux poids

$$\varpi_\alpha, \quad -\varpi_\alpha, \quad \varpi_\beta, \quad -\varpi_\beta;$$

nous désignerons pour simplifier leurs indices par

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \beta, \quad \beta'.$$

Considérons les égalités (11) pour ce choix particulier des indices i, j, k, h. Pour que la quantité $p^{\alpha\beta}$ entre dans une des formes ξ associées aux transformations du groupe, il faut que dans la transformation correspondante entre un terme en $x^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^{\beta'}}$ ou $x^\beta \dfrac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}}$; cela exige que $\varpi_\alpha - \varpi_\beta$ soit une *racine*, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite aucune des quantités $p^{\alpha\beta}$, $p^{\alpha\beta'}$, $p^{\alpha'\beta}$, $p^{\alpha'\beta'}$ ne se présente dans la forme de Riemann R. Nous n'avons donc qu'à considérer les termes en $p^{\alpha\alpha'}$ et $p^{\beta\beta'}$, lesquels du reste ne se présentent que dans les formes associées aux transformations $Y_i f$. Soit alors

$$\varpi_\alpha = \sum_i a_i e_i,$$

$$\varpi_\beta = \sum_i b_i e_i.$$

Dans la forme η_i associée à $Y_i f$, le coefficient de $p^{\alpha\alpha'}$, à un facteur constant près indépendant de i, est a_i; celui de $p^{\beta\beta'}$ est b_i.

La relation (11) donne donc ici

$$\sum_i a_i b_i = 0.$$

On peut exprimer ce résultat en disant que les deux poids sont orthogonaux [les deux vecteurs (a_i) et (b_i) sont orthogonaux].

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Pour un groupe linéaire Γ *du type* I, *deux poids* ϖ_α *et* ϖ_β *différents de zéro, tels que* $\varpi_\alpha^2 \neq \varpi_\beta^2$, *et tels que ni leur somme ni leur différence ne soit une racine, sont nécessairement orthogonaux* (¹).

40. On arrive à des résultats analogues pour les groupes Γ des types II et III. Pour le type II, les poids des variables $x^{i\alpha}$ de Γ s'obtiennent en ajoutant le poids ϖ^i de la variable y^i du groupe γ_1 et le poids χ^α de la variable z^α du groupe γ_2. Indiquons les résultats :

Si un groupe simple unitaire γ_1 *entre dans la composition d'un groupe* Γ *du type* II, *deux poids* ϖ_α *et* ϖ_β *différents de zéro, tels que* $\varpi_\alpha^2 \neq \varpi_\beta^2$, *et tels que leur différence ne soit pas une racine, sont nécessairement orthogonaux.*

Si un groupe simple unitaire γ_1 *entre dans la composition d'un groupe* Γ *du type* III, *deux poids* ϖ_α *et* ϖ_β *distincts, différents de zéro et tels que leur différence ne soit pas une racine, sont nécessairement orthogonaux.*

(¹) La condition d'orthogonalité est relative à la forme $\varphi(e)$, qu'on peut obtenir simplement en formant la somme des carrés des racines. C'est ainsi que pour le type (A), si les racines sont mises sous la forme $e_i - e_j$ (avec $e_1 + \ldots + e_{l+1} = 0$), on peut prendre

$$\varphi(e) = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_{l+1}^2;$$

si l'on met ϖ_α sous la forme $\sum_{i=1}^{i=l+1} a_i e_i$ avec $\sum_i a_i = 0$, la condition d'orthogonalité sera

$$\sum_{i=1}^{i=l+1} a_i b_i = 0.$$

V. — Quelques propriétés générales des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles.

41. Rappelons d'abord quelques résultats importants rencontrés en cours de route.

A tout groupe d'holonomie donné correspond une classe d'espaces de Riemann, pour laquelle la forme de Riemann R *est déterminée à un facteur constant près et garde, en tout point de l'espace et pour toute direction plane, un signe constant.*

On peut donc parler dans chaque classe des espaces irréductibles à courbure positive et des espaces irréductibles à courbure négative; la courbure est définie par un seul paramètre. Cette propriété généralise celle des espaces à courbure riemannienne constante.

42. Une autre propriété importante repose sur la considération du tenseur contracté de courbure. Le groupe d'holonomie, laissant invariante la forme de Riemann, laisse également invariante la forme contractée

$$\sum_{i,j} R_{ij}\, x_i x_j = \sum_{i,j,k} R_{ik,jk}\, x_i x_j.$$

Or le groupe Γ, ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle, ne peut laisser invariante qu'une forme quadratique réelle (à un facteur constant près); par suite la forme contractée est proportionnelle à la forme fondamentale

$$\sum_i x_i^2.$$

Il en résulte que *les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles sont des espaces à courbure constante de seconde espèce* (¹).

En se reportant aux expressions de $R_{ik,jk}$, on trouve

$$(23)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\rho,k} A_\rho a_{\rho ik} a_{\rho jk} = 0 & (i \neq j), \\ \displaystyle\sum_{\rho,k} A_\rho (a_{\rho ik})^2 = C; \end{cases}$$

(¹) E. Cartan, *Mémorial*, n° 36.

la constante C est positive pour les espaces à courbure positive, négative pour les espaces à courbure négative.

43. Le groupe Γ laisse invariante la forme de Riemann. Nous allons démontrer que Γ *est le plus grand groupe continu de rotations jouissant de cette propriété.*

Supposons en effet qu'il existe une rotation infinitésimale Vf ne faisant pas partie de Γ et laissant invariante la forme R. Comme R est une forme quadratique non dégénérée des formes ξ_α associées aux transformations infinitésimales de Γ, il faut que la transformation Vf fasse subir aux ξ_α une substitution linéaire, ce qui revient à dire que le groupe Γ est invariant par la transformation Vf. Les transformations $U_\alpha f$ et Vf forment donc un groupe orthogonal réel et par suite, en retranchant au besoin de Vf une combinaison linéaire des $U_\alpha f$, on voit que les crochets (VU_α) sont tous nuls.

Le nouveau groupe orthogonal réel admet donc un sous-groupe invariant à un paramètre. Cela n'est possible (n° **24**) que s'il laisse invariante une multiplicité plane imaginaire, mais alors le groupe Γ admettrait déjà un sous-groupe invariant à un paramètre (n° 30), et un groupe orthogonal réel qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane réelle ne peut pas admettre plus d'un sous-groupe invariant à un paramètre (n° 23). Nous arrivons donc à une contradiction.

44. Appelons *groupe d'isotropie* d'un espace l'ensemble des transformations orthogonales qui conservent la forme de Riemann; cette dénomination est justifiée par ce fait qu'il indique le degré d'isotropie de l'espace en chacun de ses points. Nous voyons que *pour un espace & irréductible, le groupe d'isotropie peut être formé de plusieurs familles continues; celle d'entre elles qui forme un groupe continu n'est autre que le groupe d'holonomie.*

On déduit de là également que *le groupe d'isométrie d'un espace irréductible peut être formé de plusieurs familles continues; celle d'entre elles qui forme un groupe continu n'est autre que le groupe* G *des déplacements.*

Nous avons déjà vu l'existence de symétries isométriques ne faisant pas nécessairement partie de G. En fait, à toute famille continue de transformations orthogonales du groupe mixte d'isotropie correspond une famille continue de transformations isométriques faisant partie du groupe mixte d'isométrie ([1]).

VI. — Les espaces de groupes simples.

45. Avant de passer à l'exposition de la seconde méthode de détermination des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles, nous allons signaler une classe remarquable de ces espaces, celle pour laquelle le groupe d'holonomie est le groupe adjoint d'un groupe simple unitaire.

Si nous considérons un groupe simple unitaire pour lequel la forme $\varphi(e)$ a été réduite à une somme de carrés, on a (n° 19) entre les constantes de structure les relations

$$c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\gamma\alpha} = c_{\gamma\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha\gamma} = -c_{\gamma\beta\alpha} = -c_{\alpha\gamma\beta}. \tag{18}$$

Le groupe adjoint est engendré par les transformations

$$U_\alpha f = \sum_{(ij)} c_{\alpha j i}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\right);$$

la forme de Riemann, si elle existe, est

$$R = A \sum_\rho \left[\left(\sum_{(ij)} c_{\rho ij} p_{ij}\right)\right]^2.$$

Les relations (11) (n° 7) deviennent ici

$$\sum_\rho (c_{\rho ij} c_{\rho kh} + c_{\rho jk} c_{\rho ih} + c_{\rho ki} c_{\rho jh}) = 0.$$

Or elles sont vérifiées; en tenant compte des relations (18), elles traduisent analytiquement l'identité de Jacobi

$$((X_i X_j) X_k) + ((X_j X_k) X_i) + ((X_k X_i) X_j) = 0.$$

---

[1] Dans tout ce qui précède, nous nous bornons à des considérations locales. Si nous considérons l'espace de Riemann dans son entier, il peut arriver, s'il n'est pas simplement connexe, que le groupe d'holonomie soit *mixte*, c'est-à-dire formé de plusieurs familles continues de transformations orthogonales; quant au groupe des déplacements, il se peut qu'il n'ait qu'une signification locale, comme cela arrive par exemple pour le groupe des déplacements euclidiens plans sur un cylindre fermé, considéré comme un espace de Riemann à deux dimensions à courbure nulle. Le groupe d'isotropie n'a évidemment qu'une signification locale, quel que soit le point de vue d'où l'on se place.

Il correspond donc à chaque type de groupes simples unitaires une classe d'espaces de Riemann & irréductibles.

46. Nous allons montrer que *ceux de ces espaces qui sont à courbure positive sont les espaces représentatifs des transformations du groupe simple unitaire qui leur correspond.*

Les formules de structure (9) (n° 6) de l'espace deviennent ici

$$(9)\qquad \begin{cases} \omega'_i = \sum_{k,\rho} c_{ik\rho}[\omega_k \theta_\rho], \\ \theta'_\alpha = \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\alpha}[\theta_\lambda \theta_\mu] + A\sum_{(kh)} c_{\alpha kh}[\omega_k \omega_h]. \end{cases}$$

Considérons les équations de Pfaff

$$\theta_i = m\,\omega_i \qquad (i = 1, \ldots, r);$$

elles donnent, par dérivation extérieure,

$$(m^2 - A)\sum_{(kh)} c_{ikh}[\omega_k \omega_h] = 0.$$

Par suite si $m = \pm\sqrt{A}$, elles sont complètement intégrables.

Si nous en prenons une solution, cela revient à fixer en chaque point de l'espace un repère rectangulaire (T) particulier. Mais on a alors

$$\omega'_i = 2m\sum_{(kh)} c_{ikh}[\omega_k \omega_h];$$

les formes de Pfaff ω_i deviennent celles qui définissent le groupe unitaire considéré : ce sont les composantes de la transformation infinitésimale $T_{\xi+d\xi}T_\xi^{-1}$ du groupe, où les ξ désignent les paramètres. L'espace de Riemann est alors l'espace représentatif des transformations du groupe [1].

Une pareille interprétation n'est pas possible si l'espace est à courbure négative. C'est ainsi que l'espace elliptique à trois dimensions peut être regardé comme l'espace représentatif du groupe des rotations autour d'un point fixe dans l'espace ordinaire; au contraire l'espace hyperbolique n'est pas susceptible d'une interprétation analogue. (*A suivre.*)

---

[1] *Voir* E. Cartan en J.-A. Schouten, *loc. cit.*, p. 215, note [1].