

## Sur une généralisation de l'intégrale (*E. R.*) et un théorème général de l'intégration par parties

Par Hatsuo OKANO

(Reçu mai. 5, 1961)

Le théorème de l'intégration par parties joue un rôle important dans un nombre de domaines de l'analyse. Sous sa forme ordinaire, il s'énonce comme il suit :

(I) Si dans un intervalle  $[a, b]$  la fonction  $f(x)$  est sommable et la fonction  $g(x)$  est absolument continue, la fonction  $f(x)g(x)$  y est également sommable et, en posant  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , on a

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

D'autre part, par rapport à l'intégrale (*E. R.*), nous avons déjà démontré le théorème suivant<sup>1)</sup> :

(II) Si dans un intervalle  $[a, b]$  la fonction  $f(x)$  est intégrable (*E. R.*) et la fonction  $g(x)$  satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre 1, la fonction  $f(x)g(x)$  y est aussi intégrable (*E. R.*) et, en posant  $F(x) = (E. R.) \int_a^x f(t) dt$ , on a

$$(E. R.) \int_a^b f(x)g(x) dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx,$$

où la dernière intégrale est lebesgienne.

Dans le présent travail, nous allons donner une forme générale pour l'intégration par parties qui comprend les énoncés (I) et (II) comme deux cas spéciaux.

Pour cela même, nous devons d'abord généraliser la notion de l'intégrale (*E. R.*). Concernant cette généralisation, Prof. K. Kunugi a montré que la méthode de changement de la variable nous permet d'élargir la portée de l'intégration<sup>2)</sup>. Dans la première moitié, nous la reconstruisons d'après la méthode qui est appropriée à la discussion suivante.

---

1) H. Okano, Sur les intégrales (*E. R.*) et ses applications, Osaka Math. J., **11** (1959), 187-212.

2) K. Kunugi, Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Math., **1** (1959), 1-30, § 4.

Nous y établissons la notion de l'intégrale (E. R.) généralisée pour la fonction réelle d'une variable réelle par rapport à la mesure lebesgienne. Mais, elle n'a besoin d'aucune hypothèse topologique et on peut donc à lui donner la forme de Radon-Stieltjes, c'est-à-dire l'intégration sur un ensemble abstrait muni d'une mesure<sup>3)</sup>.

**1. Définition de l'intégrale (E. R.) ordinaire.**

Tout d'abord, commençons par introduire la notion de l'espace rangé<sup>4)</sup>.

Soit  $R$  un espace muni d'un système de voisinages satisfaisant à deux conditions suivantes<sup>5)</sup>:

(A) À chaque point  $p \in R$  correspond au moins un voisinage. Chaque voisinage de  $p$  contient  $p$ .

(B)  $u(p)$  et  $v(p)$  étant deux voisinages du point  $p$ , il existe un voisinage de  $p$  contenu dans  $u(p) \cap v(p)$ .

On dit que  $R$  est un espace rangé si à tout nombre réel  $\epsilon > 0$  correspond une famille de voisinages  $\mathfrak{B}_\epsilon$ .

Une suite monotone décroissante de voisinages

$$v_1(p_1) \supseteq v_2(p_2) \supseteq \dots \supseteq v_n(p_n) \supseteq \dots$$

sera dite fondamentale ou de Cauchy s'il existe une suite de nombres réels  $(\epsilon_n)$  qui tend vers 0 et telle que chaque  $v_n(p_n)$  appartient à la famille  $\mathfrak{B}_{\epsilon_n}$ .

Un espace rangé s'appelle complet si, pour toute suite de Cauchy  $(v_n(p_n))$ , l'intersection  $\bigcap_n v_n(p_n)$  est non vide.

Or, désignons par  $\mathbf{M}$  l'espace vectoriel des fonctions réelles finies  $f(x)$  d'une variable réelle  $(-\infty < x < \infty)$  et mesurables (non pas nécessairement bornées), identifiant deux fonctions qui sont égales presque partout, la topologie étant définie comme il suit:

Le système de voisinages de la fonction  $f \in \mathbf{M}$  est défini par les ensembles  $V(\epsilon, A; f)$  ( $\epsilon$  un nombre réel  $> 0$ ,  $A$  un ensemble mesurable) de toutes les fonctions  $g \in \mathbf{M}$  telles que  $\int_A |f(x) - g(x)| dx \leq \epsilon$ .

Prenons pour la famille  $\mathfrak{B}_\epsilon$  la totalité des voisinages  $V(\epsilon, A; f)$  jouissant de deux conditions suivantes:

$$(F_1) \quad \text{mes}(C(A))^{6)} \leq \epsilon.$$

3) H. Okano, Les intégrales E. R. généralisées sous une forme de Radon-Stieltjes, Proc. Japan Acad., **36** (1960), 324-326.

4) Concernant l'espace rangé, voir les Notes citées dans K. Kunugi, loc. cit..

5) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, p. 213.

6)  $\text{mes}(A)$  désigne la mesure lebesgienne de l'ensemble  $A$ .  $C(A)$  désigne le complément de l'ensemble  $A$ .

(F<sub>2</sub>) Pour tout ensemble mesurable  $B$  tel que  $\text{mes}(B) \leq \text{mes}(C(A))$ , on a  $\int_B |f(x)| dx \leq \varepsilon$ .

THÉORÈME 1. Soit  $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  une suite de Cauchy; alors, l'intersection  $\bigcap_n V(\varepsilon_n, A_n; f_n)$  contient une et une seule fonction  $f \in \mathbf{M}$ . Cette fonction  $f$  est désignée par  $J(v)$ .

DÉMONSTRATION. En effet, de la relation d'inclusion  $V(\varepsilon_n, A_n; f_n) \supseteq V(\varepsilon_{n+1}, A_{n+1}; f_{n+1})$ , on vérifie deux propriétés

$$(1) \quad \text{mes}(A_n \cap C(A_{n+1})) = 0,$$

$$(2) \quad \int_{A_n} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| dx \leq \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1};$$

donc,

$$(3) \quad \sum_{n=m}^{\infty} \int_{A_m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| dx \leq \varepsilon_m$$

pour tout  $m$ . Puisque  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes}(C(A_m)) = 0$ , les fonctions  $f_n(x)$  convergent vers une fonction  $f(x)$  presque partout. (3) entraîne en outre l'inégalité

$$(4) \quad \int_{A_m} |f_m(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon_m.$$

Il en résulte que la fonction  $f = f(x)$  appartient à l'intersection  $\bigcap_n V(\varepsilon_n, A_n; f_n)$ .

Ensuite, supposons, par impossible, qu'il existe une fonction  $g$  appartenant à  $\bigcap_n V(\varepsilon_n, A_n; f_n)$  et qui est différente de  $f$  sur un ensemble de mesure positive.

Il existe alors un indice  $N$  tel que  $2\varepsilon_N < \int_{A_N} |f(x) - g(x)| dx$ . Cette inégalité entraîne

$$2\varepsilon_N < \int_{A_N} |f(x) - f_N(x)| dx + \int_{A_N} |g(x) - f_N(x)| dx \leq 2\varepsilon_N.$$

C'est une contradiction. Par conséquent,  $\bigcap_n V(\varepsilon_n, A_n; f_n)$  contient une et une seule fonction  $f(x)$ , c. q. f. d..

Comme conséquence de ce théorème,  $\mathbf{M}$  est un espace rangé complet. Nous allons maintenant munir  $\mathbf{M}$  d'une notion de limite.

On dira qu'une suite de Cauchy  $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  converge vers une fonction  $f \in \mathbf{M}$  si d'une part il existe un nombre réel  $k$  jouissant de l'inégalité

$$(P^*) \quad k \text{mes}(C(A_{n+1})) \geq \text{mes}(C(A_n))$$

pour tout  $n$ , si d'autre part on a  $J(v) = f$ .

$\mathbf{K}$  désigne l'adhérence de  $\mathbf{L}_1$  pour cette convergence:  $\mathbf{K}$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f \in \mathbf{M}$  telles qu'il existe au moins une suite de Cauchy  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  qui converge vers  $f$  et telle que chacune des  $f_n$  soit sommable. Étant donnée  $f \in \mathbf{K}$ ,  $\mathfrak{G}(f)$  désigne la totalité de telles suites de Cauchy.

THÉORÈME 2. Soit  $f \in \mathbf{K}$ . Si  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f)$  et  $(V(\eta_n, B_n; g_n)) \in \mathfrak{G}(f)$ , on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx.$$

D'où on peut désigner ces valeurs limites par  $\bar{I}(f)$  et  $\underline{I}(f)$  respectivement.

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord le cas particulier où il existe un indice  $N$  tel que  $\text{mes}(C(A_N)) = 0$  ou  $\text{mes}(C(B_N)) = 0$ . Dans ce cas, d'après (4), la fonction  $f$  doit être sommable. (F<sub>2</sub>) et (4) entraînent de plus les inégalités

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx - \int_{A_n} f(x) dx \right| \leq \int_{C(A_n)} |f_n(x)| dx + \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)| dx \leq 2\varepsilon_n,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx - \int_{B_n} f(x) dx \right| \leq 2\eta_n,$$

Donc, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx.$$

Passons ensuite au cas où  $\text{mes}(C(A_n)) > 0$  et  $\text{mes}(C(B_n)) > 0$  pour tout  $n$ . Pour démontrer l'inégalité  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx$ , choisissons une suite partielle  $(g_{n(m)})$  telle que

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{n(m)}(x) dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx.$$

D'autre part, en vertu de la condition (P\*), il existe un entier  $k > 1$  satisfaisant à

$$(6) \quad k \text{ mes}(C(A_{n+1})) \geq \text{mes}(C(A_n)) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Posons  $a(n) = k^{-n+1} \text{mes}(C(A_1))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Puisque  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes}(C(B_{n(m)})) = 0$ , on peut alors choisir une suite d'entiers  $n'(1) < n'(2) < \dots$  telle que, pour tout  $i$ , il existe un entier  $m(i)$  satisfaisant à

$$(7) \quad a(n'(i)+1) < \text{mes}(C(B_{n(m(i))})) \leq a(n'(i)).$$

De la propriété (1) de la suite de Cauchy, on a  $m(1) < m(2) < \dots$ . D'autre part, en vertu de (6), on peut choisir une suite d'entiers  $n^*(1) < n^*(2) < \dots$  satisfaisant à

$$(8) \quad a(n'(i)+1) < \text{mes}(C(A_{n^*(i)})) \leq a(n'(i)).$$

Pour plus de brièveté, posons

$$g_i^* = g_{n(m(i))}, \quad B_i^* = B_{n(m(i))}, \quad \eta_i^* = \eta_{n(m(i))},$$

$$f_i^* = f_{n^*(i)}, \quad A_i^* = A_{n^*(i)}, \quad \varepsilon_i^* = \varepsilon_{n^*(i)}, \quad E_i = A_i^* \cap B_i^*.$$

Or, d'une part, puisque (7) et (8) entraînent  $\text{mes}(C(E_i)) \leq (k+1) \min(\text{mes}(C(A_i^*)), \text{mes}(C(B_i^*)))$ , on a

$$\int_{C(E_i)} |f_i^*(x)| dx \leq (k+1)\varepsilon_i^*, \quad \int_{C(E_i)} |g_i^*(x)| dx \leq (k+1)\eta_i^*$$

et d'autre part, de la propriété (4) de la suite de Cauchy, on a

$$\int_{A_i^*} |f(x) - f_i^*(x)| dx \leq \varepsilon_i^*, \quad \int_{B_i^*} |f(x) - g_i^*(x)| dx \leq \eta_i^*;$$

donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_i^*(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} g_i^*(x) dx \right| &\leq \int_{C(E_i)} |f_i^*(x)| dx \\ &+ \int_{E_i} |f(x) - f_i^*(x)| dx + \int_{E_i} |f(x) - g_i^*(x)| dx \\ &+ \int_{C(E_i)} |g_i^*(x)| dx \leq (k+2)(\varepsilon_i^* + \eta_i^*). \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i^* = 0$ , on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_i^*(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i^*(x) dx$ ; donc, d'après

$$(5), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

De la même manière, on vérifie  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$ .

Par conséquent, on voit

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Enfin, on a  $-f \in \mathbf{K}$ ,  $(V(\varepsilon_n, A_n; -f_n)) \in \mathfrak{G}(-f)$ ,  $(V(\eta_n, B_n; -g_n)) \in \mathfrak{G}(-f)$ ; donc,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Soit  $A$  un ensemble mesurable. Si  $f \in \mathbf{K}$ , sa restriction  $f_A$  sur  $A$  (on fait  $f_A(x) = 0$  en dehors de  $A$ ) appartient également à  $\mathbf{K}$ . On peut donc poser

$$\bar{I}(f_A) = \bar{I}(A, f), \quad \underline{I}(f_A) = \underline{I}(A, f).$$

Au cas où  $\bar{I}(A, f) = \underline{I}(A, f)$ , nous écrirons

$$\bar{I}(A, f) = \underline{I}(A, f) = I(A, f) = (E. R.) \int_A f(x) dx^{7)}.$$

Ainsi, nous avons la définition de l'intégrale (E. R.). Si l'on a  $-\infty < I(A, f) < \infty$ , la fonction  $f(x)$  sera dite intégrable (E. R.) sur  $A$ .

EXEMPLE.  $(E. R.) \int_{-1/e}^{1/e} \frac{dx}{x \log |x|} = 0.$

---

7) Dans la présente Note,  $\int_A f(x) dx$  désigne l'intégrale lebesgienne de la fonction  $f(x)$ .

**2. Généralisation de l'intégrale (E. R.).**

Nous allons maintenant donner la définition de l'intégrale (E. R.) généralisée d'une manière analogue à celle de l'intégrale (E. R.) définie ci-dessus.

Soit  $\nu$  une mesure fixe, définie et finie sur  $(-\infty, \infty)$ , satisfaisant à deux conditions suivantes :

(1\*) Tout ensemble mesurable pour la mesure lebesgienne est mesurable pour  $\nu$ .

(2\*)  $\text{mes}(A) = 0$  si et seulement si  $\nu(A) = 0$ .

Prenons pour  $\mathfrak{B}_\varepsilon$ , dans l'espace  $\mathbf{M}$ , la famille de tous les voisinages  $V(\varepsilon, A; f)$  jouissant de deux conditions suivantes aux lieux des  $(F_1), (F_2)$  :

$$(F_1(\nu)) \quad \nu(C(A)) \leq \varepsilon.$$

$$(F_2(\nu)) \quad \text{Pour tout ensemble } B \text{ tel que } \nu(B) \leq \nu(C(A)), \text{ on a } \int_B |f(x)| dx \leq \varepsilon.$$

De la même considération que le Théorème 1, nous pouvons voir le

**THÉORÈME 3.** Soit  $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  une suite de Cauchy; alors, l'intersection  $\bigcap_n V(\varepsilon_n, A_n; f_n)$  contient une et une seule fonction  $\in \mathbf{M}$ . Cette fonction est désignée par  $J(v)$ .

On dit qu'une suite de Cauchy  $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  converge vers une fonction  $f \in \mathbf{M}$  si d'une part il existe un nombre réel  $k$  jouissant de l'inégalité, au lieu de (P\*),

$$(P^*(\nu)) \quad k\nu(C(A_{n+1})) \geq \nu(C(A_n))$$

pour tout  $n$ , si d'autre part on a  $J(v) = f$ .

Désignons par  $\mathbf{K}(\nu)$  l'adhérence de  $\mathbf{L}_1$  (l'espace des fonctions sommables pour la mesure lebesgienne) pour cette convergence. Étant donnée  $f \in \mathbf{K}(\nu)$ ,  $\mathfrak{G}(f; \nu)$  désigne la totalité des suite de Cauchy  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  qui converge vers  $f$  et telle que  $f_n \in \mathbf{L}_1$  pour tout  $n$ .

De la même manière que le Théorème 2, nous pouvons démontrer le

**THÉORÈME 4.** Soit  $f \in \mathbf{K}(\nu)$ . Si  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$  et  $(V(\eta_n, B_n; g_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$ , on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx.$$

On désigne ces valeurs limites par  $\bar{I}(f; \nu)$  et  $\underline{I}(f; \nu)$  respectivement.

Puisque  $f \in \mathbf{K}(\nu)$  entraîne  $f_A \in \mathbf{K}(\nu)$ , on peut poser

$$\bar{I}(f_A; \nu) = \bar{I}(A, f; \nu), \quad \underline{I}(f_A; \nu) = \underline{I}(A, f; \nu).$$

Dans le cas où  $\bar{I}(A, f; \nu) = \underline{I}(A, f; \nu)$ , nous écrivons

$$\bar{I}(A, f; \nu) = \underline{I}(A, f; \nu) = I(A, f; \nu) = (E. R.; \nu) \int_A f(x) dx.$$

C'est la définition de l'intégrale (*E. R.*) généralisée. Si l'on a  $-\infty < I(A, f; \nu) < \infty$ , la fonction  $f(x)$  sera dite intégrable (*E. R.*;  $\nu$ ) sur  $A$ .

EXEMPLE. Prenons pour  $\nu$  une mesure définie par

$$\nu(A) = \int_A e^{-e^{|x|}} dx.$$

Alors, on a

$$(E. R.; \nu) \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0, \quad (E. R.; \nu) \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty,$$

$$\bar{I}(\cos x; \nu) = 1, \quad \underline{I}(\cos x; \nu) = -1.$$

### 3. Propriétés fondamentales de l'intégrale.

THÉORÈME 5. 1) *Quelle que soit  $f \in \mathbf{L}_1$ ,  $f$  appartient à  $\mathbf{K}(\nu)$  et on a  $\bar{I}(f; \nu) = \underline{I}(f; \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .*

*Inversement, 2) soit  $f \in \mathbf{K}(\nu)$ . Si  $f$  a une signe constant presque partout, on a  $\bar{I}(f; \nu) = \underline{I}(f; \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .*

DÉMONSTRATION. 1) Supposons  $f$  sommable et posons  $\varepsilon_n = 2^{-n}$ ,  $A_n \equiv (-\infty, \infty)$ ,  $f_n \equiv f$ . Alors,  $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  converge vers  $f$ . Donc,  $f$  appartient à  $\mathbf{K}(\nu)$  et on a  $I(f; \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

2) Supposons que  $f \in \mathbf{K}(\nu)$ , que  $f(x) \geq 0$  presque partout et que  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$ . Posons  $g_n = f_{A_n}$ . Alors, en vertu de (1), la suite  $(g_n(x))$  est monotone croissante presque partout. De plus,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(C(A_n)) = 0$  entraîne  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$  presque partout. Ainsi, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

D'ailleurs, (4), (F<sub>1</sub>) et (F<sub>2</sub>) impliquent  $\int_{A_n} |f(x) - f_n(x)| dx \leq \varepsilon_n$  et  $\int_{C(A_n)} |f_n(x)| dx \leq \varepsilon_n$ ; donc,  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - g_n(x)) dx \right| \leq 2\varepsilon_n$ .

Par conséquent, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , c. q. f. d..

THÉORÈME 6.  $\mathbf{K}(\nu)$  est vectoriel :

1) *Quelles que soient  $f \in \mathbf{K}(\nu)$  et  $g \in \mathbf{K}(\nu)$ ,  $f+g$  appartient également à  $\mathbf{K}(\nu)$ . On a en outre*

$$\bar{I}(f+g; \nu) \leq \bar{I}(f; \nu) + \bar{I}(g; \nu),$$

$$\underline{I}(f+g; \nu) \geq \underline{I}(f; \nu) + \underline{I}(g; \nu),$$

*à l'exception de la forme indéterminée.*

2) *Quelle que soit  $f \in \mathbf{K}(\nu)$ , pour tout nombre réel  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda f$  appartient également à  $\mathbf{K}(\nu)$  et on a*

$$\tilde{I}(\lambda f; \nu) = \lambda \tilde{I}(f; \nu), \quad \underline{I}(\lambda f; \nu) = \lambda \underline{I}(f; \nu).$$

3) Quelle que soit  $f \in \mathbf{K}(\nu)$ ,  $-f$  appartient à  $\mathbf{K}(\nu)$  et on a

$$\tilde{I}(-f; \nu) = -\underline{I}(f; \nu).$$

DÉMONSTRATION. 1) Soient  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$  et  $(V(\eta_m, B_m; g_m)) \in \mathfrak{G}(g; \nu)$ .

Considérons d'abord le cas particulier où il existe un indice  $N$  tel que  $\nu(C(A_N)) = 0$ . Dans ce cas, en vertu des (4), la fonction  $f$  doit être sommable. Donc, en posant

$$\zeta_m = \sup_{\nu(A) \leq \nu(C(B_m))} \int_A |f(x)| dx,$$

$\zeta_m$  tendent vers 0. Ainsi,  $v = (V(\eta_m + \zeta_m, B_m; f + g_m))$  est une suite de Cauchy qui converge vers  $f + g$ ; donc,  $f + g$  appartient à  $\mathbf{K}(\nu)$  et, du Théorème 5, on a

$$\tilde{I}(f + g; \nu) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) + g_m(x)) dx = \tilde{I}(f; \nu) + \tilde{I}(g; \nu),$$

$$\underline{I}(f + g; \nu) = \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) + g_m(x)) dx = \underline{I}(f; \nu) + \underline{I}(g; \nu).$$

Passons ensuite au cas où  $\nu(C(A_n)) > 0$  et  $\nu(C(B_m)) > 0$  pour tout  $n$  et pour tout  $m$ . D'abord, d'après ( $P^*(\nu)$ ), il existe un entier  $k > 1$  satisfaisant à

$$(9) \quad \begin{aligned} k\nu(C(A_{n+1})) &\geq \nu(C(A_n)), \\ k\nu(C(B_{m+1})) &\geq \nu(C(B_m)) \end{aligned}$$

pour tout  $n$  et pour tout  $m$ . Posons

$$a(i) = k^{-i+1} \min(\nu(C(A_1)), \nu(C(B_1))),$$

et (9) montre qu'il existe deux suite d'entiers  $(n(i))$  et  $(m(i))$  satisfaisant à

$$(10) \quad \begin{aligned} a(i+1) &< \nu(C(A_{n(i)})) \leq a(i), \\ a(i+1) &< \nu(C(B_{m(i)})) \leq a(i). \end{aligned}$$

D'après (1), on a  $n(1) < n(2) < \dots$  et  $m(1) < m(2) < \dots$ . Posons encore

$$\begin{aligned} h_i &= f_{n(i)} + g_{m(i)}, \quad E_i = A_{n(i)} \cap B_{m(i)}, \\ \zeta_i &= (k+1)(\varepsilon_{n(i)} + \eta_{m(i)}). \end{aligned}$$

Alors,  $(V(\zeta_i, E_i; h_i))$  est une suite de Cauchy et elle converge vers  $f + g$ . Par suite,  $f + g$  appartient à  $\mathbf{K}(\nu)$  et on a

$$\begin{aligned} \tilde{I}(f + g; \nu) &= \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) dx \\ &= \tilde{I}(f; \nu) + \tilde{I}(g; \nu). \end{aligned}$$

De même,  $\underline{I}(f + g; \nu) \geq \underline{I}(f; \nu) + \underline{I}(g; \nu)$ .



2) et 3) Soit  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$ . Alors,  $(V((\lambda+1)\varepsilon_n, A_n; \lambda f_n))$  converge vers  $\lambda f$  et  $(V(\varepsilon_n, A_n; -f_n))$  converge vers  $-f$ . Donc,  $\lambda f$  et  $-f$  appartiennent à  $\mathbf{K}(\nu)$  et on a

$$\begin{aligned} \bar{I}(\lambda f; \nu) &= \lambda \bar{I}(f; \nu), & \underline{I}(\lambda f; \nu) &= \lambda \underline{I}(f; \nu), \\ \bar{I}(-f; \nu) &= -\bar{I}(f; \nu), & \underline{I}(-f; \nu) &= -\underline{I}(f; \nu), \end{aligned} \quad \text{c. q. f. d.}$$

#### 4. Propriétés de l'intégrale indéfinie.

Nous avons déjà défini l'intégrale (*E. R.*) généralisée sur un ensemble mesurable quelconque. Mais, au cas que  $f(x)$  soit intégrable (*E. R.*;  $\nu$ ) sur un intervalle fini  $I = [a, b]$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ), l'existence de son intégrale indéfinie  $F(x) = (E. R.; \nu) \int_a^x f(t) dt$  ( $x \in I$ ) n'est pas nécessairement assurée. Ce fait nous conduit à la notion suivante :

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fini. Désignons par  $\mathbf{J}(I; \nu)$  la classe de toutes les fonctions  $f \in \mathbf{K}(\nu)$  telles qu'il existe au moins une suite de Cauchy  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  appartenant à  $\mathfrak{G}(f; \nu)$  et jouissant de la condition :

$$(Q) \quad \left| \int_a^x (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt \right| \leq \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \text{ presque partout dans } I \cap A_n.$$

On vérifie aisément que, si  $f$  appartient à  $\mathbf{J}(I; \nu)$ ,  $F(x) = (E. R.; \nu) \int_a^x f(t) dt$  existe et elle est finie presque partout dans  $I$  et, en posant  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ , on a

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \text{ presque partout dans } I.$$

En outre, du Théorème 5, on voit aussitôt le

**THÉORÈME 7.** Soit  $f \in \mathbf{J}(I; \nu)$ . Si  $f$  admet une suite  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$  jouissant de la condition (Q) et telle que chacun des  $A_n$  soit ouvert, l'intégrale indéfinie  $F(x) = (E. R.; \nu) \int_a^x f(t) dt$  doit être dérivable et sa dérivée est égale à  $f(x)$  presque partout dans  $I$ <sup>8)</sup>.

Désignons par  $\mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ) la classe de toutes les fonctions  $f \in \mathbf{J}(I; \nu)$  telles qu'il existe au moins une suite  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$  jouissant de la condition (Q) et telle que  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{l}_p$  et que  $(\text{mes}(I - A_n)) \in \mathbf{l}_q$ <sup>9)</sup>.

**PROPOSITION 1.** 1) Si  $p' \leq p$  et  $q' \leq q$ , on a  $\mathbf{J}_{p',q'}(I; \nu) \subseteq \mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$ .

$$2) \quad \mathbf{J}_{\infty, \infty}(I; \nu) = \mathbf{J}(I; \nu).$$

8) Récemment, M<sup>me</sup> S. Nakanishi a montré qu'il existe une fonction  $f(x) \in \mathbf{J}(I; \nu)$  telle que son intégrale indéfinie n'est pas dérivable pour tout  $x \in I$ .

9)  $\mathbf{l}_p$  désigne l'espace des suites de nombres réels  $(\lambda_n)$  telles que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty$ .

3) Si  $\nu$  est la mesure lebesguienne, on a  $\mathbf{J}_{\infty,q}(I; \nu) = \mathbf{J}(I; \nu)$  pour tout  $q$ .

4)  $\mathbf{J}_{1,q}(I; \nu) = \mathbf{L}_1(I)^{10}$  pour tout  $q$ .

5)  $\mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$  est un ensemble vectoriel.

DÉMONSTRATION. 1)  $p' \leq p$  et  $q' \leq q$  entraînent  $\mathbf{l}_{p'} \subseteq \mathbf{l}_p$  et  $\mathbf{l}_{q'} \subseteq \mathbf{l}_q$ .

2) Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(I - A_n) = 0$ , on a toujours  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{l}_\infty$  et  $(\text{mes}(I - A_n)) \in \mathbf{l}_\infty$ .

3)  $\mathbf{J}_{\infty,q}(I; \nu) \subseteq \mathbf{J}(I; \nu)$  résulte de 1) et 2). Pour démontrer l'inclusion inverse, supposons que  $f \in \mathbf{J}(I; \nu)$ , que  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  soit une suite  $\in \mathfrak{G}(f)$  jouissant de (Q) et que, sans restreindre la généralité,  $k > 1$  dans (P\*). En vertu de (P\*), il existe une suite d'entiers  $n(1) < n(2) < \dots$  telle que  $ck^{-i} < \text{mes}(C(A_{n(i)})) \leq ck^{-i+1}$ , où  $c = \text{mes}(C(A_1))$ . La suite  $(V(\varepsilon_{n(i)}, A_{n(i)}; f_{n(i)}))$  appartient à  $\mathfrak{G}(f)$  et elle jouit de la condition (Q). En outre  $(\text{mes}(I - A_{n(i)})) \in \mathbf{l}_q$ .

4)  $\mathbf{J}_{1,q}(I; \nu) \supseteq \mathbf{L}_1(I)$ . Car, si  $f \in \mathbf{L}_1(I)$  (on fait  $f(x) = 0$  en dehors de  $I$ ),  $(V(2^{-n}, A_n \equiv (-\infty, \infty); f_n \equiv f))$  appartient à  $\mathfrak{G}(f; \nu)$ .

Pour démontrer l'inclusion inverse, supposons que  $f \in \mathbf{J}_{1,q}(I; \nu)$ , que  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$  et que  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{l}_1$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \|f_{n+1} - f_n\|_{1,I} &\leq \int_{A_n} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| dx + \int_{C(A_n)} |f_{n+1}(x)| dx \\ &\quad + \int_{C(A_n)} |f_n(x)| dx \leq (k+3)\varepsilon_n; \end{aligned}$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{1,I} \leq (k+3) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  presque partout,  $f$  appartient à  $\mathbf{L}_1(I)$ .

5) Soient  $f \in \mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$  et  $g \in \mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux constantes réelles. Si  $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{G}(f; \nu)$  et  $u = (V(\eta_m, B_m; g_m)) \in \mathfrak{G}(g; \nu)$ , comme nous avons déjà vu dans la démonstration du Théorème 6, il existe deux suites d'entiers  $n(1) < n(2) < \dots$ ,  $m(1) < m(2) < \dots$  telles que, en posant  $h_i = \lambda f_{n(i)} + \mu g_{m(i)}$ ,  $E_i = A_{n(i)} \cap B_{m(i)}$ ,  $\zeta_i = k(\varepsilon_{n(i)} + \eta_{m(i)})$  ( $k$  une constante),  $w = (V(\zeta_i, E_i; h_i))$ ,  $w$  appartienne à  $\mathfrak{G}(\lambda f + \mu g; \nu)$ . On prouve facilement que, si  $v$  et  $u$  jouissent de la condition (Q),  $w$  jouit également de (Q). En outre,  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{l}_p$  et  $(\eta_m) \in \mathbf{l}_p$  entraînent  $(\zeta_i) \in \mathbf{l}_p$ . Et,  $(\text{mes}(I - A_n)) \in \mathbf{l}_q$  et  $(\text{mes}(I - B_m)) \in \mathbf{l}_q$  impliquent  $(\text{mes}(I - E_i)) \in \mathbf{l}_q$ , c. q. f. d..

PROPOSITION 2. Soit  $f \in \mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$  avec  $1 < p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $1 \leq 1/p + 1/q$ ; alors, l'intégrale indéfinie  $F(x)$  de  $f(x)$  appartient à  $\mathbf{L}_r(I)^{10}$ ,  $1/r = q(1 - 1/p)$ . Si  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  est une suite  $\in \mathfrak{G}(f; \nu)$  jouissant de (Q) et telle que  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{l}_p$  et

10)  $\mathbf{L}_r(I)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , désigne l'espace des fonctions de puissance  $r$ -ième sommable dans  $I$  pour la mesure lebesguienne, avec la norme  $\|f\|_{r,I} = \left(\int_I |f(x)|^r dx\right)^{1/r}$ .

$(\text{mes}(I-A_n)) \in \mathbf{L}_q$ , en posant  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ ,  $F_n(x)$  convergent vers  $F(x)$  dans  $\mathbf{L}_r(I)$ .

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que (Q) implique

$$(12) \quad \int_{I \cap A_n} |F_{n+1}(x) - F_n(x)|^r dx \leq (b-a)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})^r.$$

Ensuite, nous allons vérifier l'inégalité suivante :

$$(13) \quad \int_{I-A_n} |F_{n+1}(x) - F_n(x)|^r dx \leq (k+3)^r (\varepsilon_n)^r \text{mes}(I-A_n).$$

En effet,  $(F_2(\nu))$  et  $(P^*(\nu))$  entraînent

$$\int_{C(A_n)} |f_n(x)| dx \leq \varepsilon_n, \quad \int_{C(A_n)} |f_{n+1}(x)| dx \leq (k+1)\varepsilon_n.$$

Donc, d'après (2), on a

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \int_a^b |f_{n+1}(x) - f_n(x)| dx \leq (k+3)\varepsilon_n.$$

(13) est une conséquence immédiate de cette inégalité.

Or, (12) et (13) impliquent

$$\|F_{n+1} - F_n\|_{r,I} \leq (b-a)^{1/r} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) + (k+3)\varepsilon_n (\text{mes}(I-A_n))^{1/r}.$$

Puisque  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{L}_p$  et  $((\text{mes}(I-A_n))^{1/r}) \in \mathbf{L}_{qr}$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|F_{n+1} - F_n\|_{r,I} < \infty.$$

Ainsi, il existe une fonction  $G = G(x) \in \mathbf{L}_r(I)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - G\|_{r,I} = 0$  et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$  presque partout dans  $I$ . D'autre part, (11) implique  $F = G$  dans  $\mathbf{L}_r(I)$ , c. q. f. d..

EXEMPLES. Prenons pour  $\nu$  une mesure définie par  $\nu(A) = \int_A x^{-2} e^{-1/|x|} dx$ . 1° Dans l'intervalle  $I = [-1, 1]$ ,  $f(x) = (\text{sign } x) |x|^{-\sigma}$  ( $0 \leq \sigma < 1$ ,  $\text{sign } x = 1$  pour  $x > 0$ ,  $= 0$  pour  $x = 0$ ,  $= -1$  pour  $x < 0$ ) appartient à  $\mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$ , où  $1/(1-\sigma) < p \leq \infty$  et  $1 < q \leq \infty$ . Car, on peut poser  $\varepsilon_n = 2n^{\sigma-1}$ ,  $A_n = C\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)$ ,  $f_n(x) = 0$  pour  $|x| \leq 1/n$ ,  $= f(x)$  pour  $1/n < |x| \leq 1$ . On a  $(E. R.; \nu) \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ . 2°  $1/x$  appartient à  $\mathbf{J}_{p,q}([-1, 0]; \nu)$ , où  $1 < p \leq \infty$  et  $1 < q \leq \infty$ , et on a  $(E. R.; \nu) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = -\infty$ .

## 5. Théorème de l'intégration par parties.

Au cas que  $f$  appartienne à  $\mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$ , comme nous avons vu dans l'Exemple 2°, elle n'est pas nécessairement intégrable  $(E. R.; \nu)$  sur  $I$ . Donc, considérons

l'ensemble de toutes les fonctions appartenant à  $\mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$  et qui sont intégrables (E. R.;  $\nu$ ) sur  $I$ . Cet ensemble est désigné par  $\mathbf{J}_{p,q}^*(I; \nu)$ .

THÉORÈME 8. Soit  $f(x) \in \mathbf{J}_{p,q}^*(I; \nu)$  avec  $1 \leq 1/p + 1/q$ . Si  $g(x)$  est absolument continue dans  $I$  et si en outre  $g'(x) \in \mathbf{L}_r(I)$  avec  $1 - 1/p = (1 - 1/r)/q$ , la fonction  $f(x)g(x)$  appartient également à  $\mathbf{J}_{p,q}^*(I; \nu)$  et, en posant  $F(x) = (E. R.; \nu) \int_a^x f(t) dt$ , on a

$$(E. R.; \nu) \int_a^b f(x)g(x) dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Si  $p = 1$ ,  $f(x)$  doit être sommable d'après la Proposition 1. Ainsi, l'énoncé de ce théorème est un cas usuel. Supposons donc que  $p > 1$  et que  $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$  soit une suite de Cauchy appartenant à  $\mathfrak{G}(f; \nu)$ , jouissant de la condition (Q) et telle que  $(\varepsilon_n) \in \mathbf{l}_p$  et  $(\text{mes}(I - A_n)) \in \mathbf{l}_q$ .

D'abord, en vertu de la Proposition 2,  $F(x)g'(x)$  est sommable sur  $I$  et, en posant  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ , on a

$$(14) \quad \int_a^b F(x)g'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x)g'(x) dx.$$

D'ailleurs, de la définition de l'intégrale, on a

$$(15) \quad F(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(b).$$

Posons  $M = \max_{x \in I} |g'(x)|$ . Alors,  $v = (V((M+1)\varepsilon_n, A_n; f_n g))$  est une suite de Cauchy qui converge vers  $fg$ . Donc,  $f(x)g(x)$  appartient à  $\mathbf{J}_{p,q}(I; \nu)$  et, d'après (14) et (15), on a

$$\begin{aligned} (E. R.; \nu) \int_a^b f(x)g(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)g(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(b)g(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x)g'(x) dx \\ &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx, \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on a le

COROLLAIRE. Soit  $f \in \mathbf{J}_{p,q}^*(I; \nu)$  avec  $1 \leq 1/p + 1/q$ . Si  $k(x, y) \in C^{n+1}(I \times I)^{11)}$  ( $n$  un entier  $\geq 0$ ),  $g(x) = (E. R.; \nu) \int_a^b k(x, y)f(y) dy$  appartient à  $C^n(I)^{11)}$  et on a

$$\frac{d^n}{dx^n} g(x) = (E. R.; \nu) \int_a^b \frac{\partial^n}{\partial x^n} k(x, y)f(y) dy.$$

11)  $C^n(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement dans  $\Omega$ .

12) Le cas où  $f(\theta)$  serait sommable est dû à M. P. Fatou : Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mat., 30 (1906).

*Application.* Pour une fonction donnée  $f(\theta) \in \mathbf{J}_{p,q}^*([-\pi, \pi]; \nu)$ ,  $1 \leq 1/p + 1/q$ , posons

$$u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} (E. R. ; \nu) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi)}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\theta)} d\varphi.$$

Alors, d'après le Corollaire du Théorème 8,  $u(r, \theta)$  est une fonction harmonique pour  $|r| < 1$ . De plus, utilisant encore le Théorème 8, on peut démontrer que, si en point  $\theta_0$   $F(\theta)$  est dérivable, la fonction  $u(r, \theta)$  tend vers  $F'(\theta_0)$  quand le point  $(r, \theta)$  se rapproche non tangentiellement du point  $(1, \theta_0)$ <sup>12)</sup>.

Université d'Osaka