ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JINDŘICH NEČAS

Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 4 (1962), p. 305-326

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_4_305_0>

SUR UNE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE, VOISINE DE LA VARIATIONNELLE

JINDŘICH NEČAS, (Praha)

INTRODUCTION

Dans ce travail, on présente une nouvelle méthode pour résoudre le problème de Dirichlet-Poisson pour les équations aux dérivées partielles du type elliptique d'ordre $2k$. Cette méthode appartient à la classe des méthodes produisant des solutions, en général, avec l'intégrale de Dirichlet non bornée.

Les suppositions faites sont celles utilisées dans la méthode variationnelle quand on veut partir de la notion de trace : le domaine considéré a la frontière lipschitzienne, les coefficients dans l'équation sont bornés, mesurables.

On démontre ici l'existence d'une seule solution du problème de Dirichlet-Poisson dans l'espace $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ lorsqu'on se donne la trace d'une fonction de cet espace à la frontière et une fonctionnelle définie sur $W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$ jouant le rôle du terme absolu.

Soit $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable avec toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k avec le poids $\varrho^{\alpha}(P)$; ici $\varrho(P)$ signifie la distance du point P à la frontière de Ω. Pour pouvoir utiliser ce procédé, on doit supposer $|\alpha|$ assez petit. En tout cas, on suppose $\alpha < 1$, ayant en vue que les fonctions de $W_{2,1}^{(1)}(\Omega)$ n'ont plus de traces à la frontière de Ω.

On généralise ici le théorème de P. D. Lax, A. Milgram (cfr. L. Nirenberg [1]), et de cette manière on s'approche beaucoup des idées de M. I. Vishik (cfr. [2]), où le même problème, comme dans cet article, est étudié. En considérant l'équation du second ordre, on s'appuie dans [2] sur l'existence d'une fonction surelliptique, nulle sur la frontière de Ω, (ou sur un morceau), équivalente à la distance $\varrho(P)$, sans discuter les conditions de son existence. Il n'est pas du tout certain que l'on puisse utiliser ce procédé pour les équations elliptiques d'ordre supérieur.

Le principe de notre méthode est basé au contraire sur de nouveaux théorèmes de l'immersion pour les espaces $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ qui sont de « $\varepsilon > 0$ » meilleurs que ceux de L. D. Kudravcev (cfr. [3]). De ce point de vue, on part des idées analogues à celles du travail [4] de l'auteur.

Il est à remarquer que ces résultats ont une signification pratique: dans beaucoup de cas les conditions aux limites ne sont pas des traces d'une fonction de $W^{(k)}_2(\Omega)$, mais le sont pour $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ où $\alpha > 0$, arbitrairement petit.

1. — Les espaces $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$.

On désigne par E_n, $n \geq 1$, l'espace euclidien avec les coordonnées $[x_1, x_2, \dots, x_n] = X$.

On dit d'un domaine borné Ω dans E_n, qu'il est du type $\mathfrak{N}^{(0),1}$ (et on l'écrit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$) si:

1) Il existe m systèmes de coordonnées dans E_n et m fonction a_r de sorte qu'on peut représenter tout point de la frontière sous la forme:

$$[x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn-1}, a_r(x_{r1}, \dots, x_{rn-1})], \quad \text{en bref} \quad [X_r, a_r(X_r)].$$

Les fonctions a_r satisfont à la condition de Lipschitz dans la boule $\Delta_r = |X_r| < \alpha$, c. à d.

$$|a_r(X_r) - a_r(Y_r)| \leq c\,|X_r - Y_r| \quad \text{pour} \quad X_r, X_r \in \Delta_r \left(|X_r| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_{ri}^2\right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

2) Il existe un nombre $\beta \leq 1$ tel que les points $[X_r, x_{rn}]$, $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$ sont à l'intérieur de Ω, tandis que les points $[X_r, x_{rn}]$, $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ sont à l'extérieur de Ω.

Désormais, on ne considère que les domaines du type $\mathfrak{N}^{(0),1}$ (*).

On désigne par $\varrho(P)$ la distance du point P de Ω de la frontière $\dot{\Omega}$ de Ω.

Soient $p \geq 1$, α réel. On désigne par $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes qui sont avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k (prises au sens des distributions) de p-ème puissance sommable avec le poids $\varrho^\alpha(P)$ sur Ω.

(*) Il est manifeste qu'on peut trouver α de sorte que la définition vaut pour $\alpha' > \alpha$, $\alpha' - \alpha$ assez petit. Nous supposons pour notre but α choisi de cette manière.

Pour $\alpha = 0$, on écrit $W_p^{(k)}(\Omega)$, pour $k = 0 : L_{p,\alpha}(\Omega)$; pour $k = 0, \alpha = 0$ on écrit simplement $L_p(\Omega)$. On introduit dans $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ la norme sous la forme

$$(1.1a) \qquad |u|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = \left[\sum_{i=i_1+i_2+\ldots+i_n=0}^{k} \int_\Omega \left| \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|^p \varrho^\alpha \, d\Omega \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Les espaces $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ sont des espaces de Banach. Pour $p = 2$ l'espace $W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire:

$$(1.1b) \qquad (u, v) = \sum_{i=i_1+i_2+\ldots+i_n=0}^{k} \int_\Omega \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \frac{\partial^i \bar{v}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \varrho^\alpha \, d\Omega.$$

On désigne par $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, continues avec toutes leurs dérivées dans $\bar{\Omega}$ (c. à d. dans la fermeture de Ω). On a

THÉORÈME 1.1: *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $\alpha \geq 0$. *Alors on a* $\overline{\mathcal{E}(\Omega)} = W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. (*La fermeture est définie moyennant la norme de* $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$).

DÉMONSTRATION: On désigne par U_r les «cylindres»

$$|X_r| < \alpha, \; a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta.$$

Il existe des fonctions φ_r, indéfiniment différentiables, $0 \leq \varphi_r \leq 1$, leurs supports étant dans U_r, et une fonction $0 \leq \varphi_{m+1} \leq 1$, indéfiniment différentiable avec le support dans Ω, pour lesquelles on a: $X \in \Omega \Longrightarrow \sum_{r=1}^{m+1} \varphi_r(X) = 1$ [1].

Soit $u \in W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ et posons $u_r = u\varphi_r$. On a $u_r \in W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. Soit $1 \leq r \leq m$. Alors on a, posant $u_{r\lambda}(X_r, x_{rn}) = u_r(X_r, x_{rn} - \lambda)$:

$$(1.2) \qquad \lim_{\lambda \to 0} u_{r\lambda} = u_r \quad \text{dans} \quad W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega).$$

Pour le démontrer, considérons la dérivée $\dfrac{\partial^i u_r}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $0 \leq i \leq k$ et désignons

---

[1] Remarquons qu'on va utiliser souvent dans la suite les voisinages U_r et les fonctions φ_r sans répéter leur définition.

la pour le but de la démonstration de (1.2) par g_r. Soit $V_r = E_X(|X_r| < \alpha, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r))$ (²).

Alors on a

$$\left[\int_{V_r} | g_r(X_r, x_{rn}) - g_r(X_r, x_{rn} - \lambda) |^p \varrho^\alpha(X)\, dX \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c \left[\int_{V_r} | g_r(X_r, x_{rn}) - g_r(X_r, x_{rn} - \lambda) |^p (a_r(X_r) - x_{rn})^\alpha\, dX \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c \left\{ \left[\int_{V_r} \left| g_r(X_r, x_{rn})(a_r(X_r) - x_{rn})^{\frac{\alpha}{p}} - g_r(X_r, x_{rn} - \lambda)(a_r(X_r) - x_{rn} + \lambda)^{\frac{\alpha}{p}} \right|^p dX \right]^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{V_r} | g_r(X_r, x_{rn} - \lambda) |^p [(a_r(X_r) - x_{rn} + \lambda)^{\frac{\alpha}{p}} - (a_r(X_r) - x_{rn})^{\frac{\alpha}{p}}]^p\, dX \right]^{\frac{1}{p}} \right\} (^3).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $0 < c_1$ si petit que l'on a

$$\int_{|X_r| < \alpha} dX_r \int_{a_r(X_r) - c_1}^{a_r(X_r)} | g_r(X_r, x_{rn} - \lambda) |^p (a_r(X_r) - x_{rn} + \lambda)^\alpha\, dx_{rn} < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$$

pour n'importe quel $\lambda < \frac{\beta}{2}$ en vertu de la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue. c_1 étant fixée, il existe λ si petit qu'on obtient:

$$\operatorname*{Max}_{|X_r| < \alpha,\, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) - c_1} \left| 1 - \left(\frac{a_r(X_r) - x_{rn}}{a_r(X_r) - x_{rn} + \lambda} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \right|^p \int_{|X_r| < \alpha} dX_r \int_{a_r(X_r) - \beta}^{a_r(X_r) - c_1} | g_r(X_r, x_{rn} - \lambda) |^p (a_r(X_r) - x_{rn} + \lambda)^\alpha dx_{rn} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'où } (1.3) \lim_{\lambda \to 0} \int_{V_r} | g_r(X_r, x_{rn} - \lambda) |^p [(a_r(X_r) - x_{rn} + \lambda)^{\frac{\alpha}{p}} - (a_r(X_r) - x_{rn})^{\frac{\alpha}{p}}]^p\, dX = 0.$$

(²) On utilise quelque fois dans la suite les voisinages V_r sans répéter leur définition.

(³) On va désigner dans la suite la plupart des constantes par le même symbole c. Au danger d'ambiguité, on se sert des indices ou des autres symboles.

Tenant compte de (1.3) et de la continuité en moyenne, on obtient (1.2).

Soit maintenant pour $X \in \Omega : u_{r\lambda h}(X) = \frac{1}{\mathcal{K} h^n} \int\limits_{|X-Y|<h} \exp \frac{|X-Y|^2}{|X-Y|^2-h^2} u_{r\lambda}(Y) dY,$

où $\frac{1}{\mathcal{K} h^n} \int\limits_{|Y|<h} \exp \frac{|Y|^2}{|Y|^2 - h^2} dY = 1$. Il est bien connu que $\lim\limits_{h \to 0} u_{r\lambda h} = u_{r\lambda}$ dans $W_p^{(k)}(\Omega)$, alors à plus forte raison dans $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. Soit alors $\varepsilon > 0$. En choisissant h assez petit on parvient à

$$|u_{r\lambda h} - u_r|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{m+1} . \tag{1.4}$$

En ce qui concerne la fonction u_{m+1}, on a par le dernier procédé

$$|u_{m+1\,h} - u_{m+1}|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{m+1} \tag{1.5}$$

après avoir choisi h assez petit.

Les fonctions $u_{r\lambda h}$, $r = 1, 2, \dots m$, $u_{m+1\,h}$ étant dans $\mathcal{E}(\Omega)$, les relations (1.4) et (1.5) achèvent la démonstration.

Nous allons démontrer maintenant que les fonctions de $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ ont des traces.

On désigne par $L_p(\dot{\Omega})$ l'espace des fonctions de p-ième puissance sommable sur $\dot{\Omega}$. On munit $L_p(\dot{\Omega})$ de la norme $|u|_{L_p(\dot{\Omega})} = \left(\int\limits_{\dot{\Omega}} |u|^p \, dS\right)^{\frac{1}{p}}$.

Théorème 1.2 *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $0 \le \alpha < p - 1$. Alors il existe une et une seule transformation Z, linéaire et continue de $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ dans $L_p(\dot{\Omega})$, telle qu'on ait*

$$u \in \mathcal{E}(\Omega) \Longrightarrow Z(u) = u.$$

Démonstration: Soit $u \in \mathcal{E}(\Omega)$. Considérons l'ensemble V_r. On a pour $0 < \eta \le \beta$

$$u(X_r, a_r(X_r)) = u(X_r, a_r(X_r) - \eta) + \int\limits_{a_r(X_r)-\eta}^{a_r(X_r)} \frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r, \xi)\, d\xi. \tag{1.6}$$

De (1.6) il découle

$$(1.7) \qquad |u(X_r, a_r(X_r))|^p \leq 2^{p-1}\Bigg[|u(X_r, a_r(X_r)-\eta)|^p +$$

$$+\left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r,\xi)\right|^p \varrho^\alpha(X_r,\xi)\,d\xi\right)\left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)}\varrho(X_r,\xi)^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,d\xi\right)^{(p-1)}\Bigg].$$

Ω étant dans $\mathfrak{N}^{(0),1}$, on a $\left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)}\varrho(X_r,\xi)^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,d\xi\right)^{p-1} < \infty.$

Intégrons (1.7) en η dans l'intervalle $\left(\frac{\beta}{2},\beta\right)$. On a

$$(1.8) \qquad |u(X_r, a_r(X_r))|^p \leq c\Bigg[\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)-\frac{\beta}{2}} |u(X_r,\xi)|^p\,d\xi +$$

$$+\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r,\xi)\right|^p\varrho^\alpha(X_r,\xi)\,d\xi\Bigg].$$

En intégrant (1.8) en X_r dans $\Delta_r = |X_r| < \alpha$ on parvient à l'inégalité

$$(1.9) \qquad \int_{\Delta_r} |u(X_r, a_r(X_r))|^p\,dX_r \leq c\,|u|^p_{W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)}$$

d'où

$$(1.10) \qquad |u|_{L_p(\dot\Omega)} \leq c\,|u|_{W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)}\,.$$

Tenant compte du théorème 1.1, on obtient de (1.10) la transformation Z par le prolongement continu.

Ayant maintenant une fonction u de $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$, $0 \leq \alpha < p-1$, on peut en vertu du théorème 1.2 parler des valeurs frontières des dérivées $\dfrac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}$, $0 \leq i \leq k-1$ qui sont au moins dans $L_p(\dot\Omega)$.

Remarquons que la condition $0 \leq \alpha < p - 1$ ne peut pas etre remplacée par $\alpha \leq p - 1, p > 1$. En effet, soit $\Omega = \underset{X}{\mathcal{E}}\left(0 < x_i < \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, n\right)$. Posons

$$u(X) = \int_{\frac{1}{2}}^{x_n} \frac{dx}{x \lg x}.$$

On a

$$u \in W^{(1)}_{p,p-1}(\Omega), \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x \lg x} = \infty.$$

Alors l'inégalité

$$|u|_{L_q(\dot{\Omega})} \leq c \, |u|_{W^{(1)}_{p,p-1}}(\Omega)$$

n'a lieu pour aucun $q \geq 1$.

Pour pouvoir utiliser les théorèmes de l'immersion de S. L. Sobolev (cfr. p. ex. E. Gagliardo [5]), il est facile à démontrer, et nous chargeons le Lecteur de le faire, le théorème suivante:

THÉORÈME 1.3 *Soit*

$$\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}, \ 0 \leq \alpha < p - 1, \ 1 \leq q < \frac{p}{1 + \alpha}.$$

Alors

$$W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset W^{(k)}_{q}(\Omega).$$

Nous dirigeons maintenant notre intérêt vers les théorèmes de l'immersion du type

$$W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset W^{(k-1)}_{p,\alpha-p}(\Omega)$$

qui jouent le rôle principal dans ce qui va suivre. Pour parvenir à ces théorèmes, il paraît utile de s'appuyer sur les inégalitées de Hardy (cfr. G. H. Hardy, I. E. Littlewood, G. Pólya [6]):

THÉORÈME 1.4 *Soit u une fonction complexe, mesurable sur $0 < x < \infty$. Soit*

$$1 < p, \ \alpha \neq p - 1.$$

Soit

$$\int_0^\infty |u(X)|^p x^\alpha \, dx < \infty.$$

Si $\alpha < p - 1$, on a

$$(1.10) \qquad \int_0^\infty \left[\int_0^x | u(\xi) | \, d\xi \right]^p x^{\alpha-p} \, dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - p + 1|} \right)^p \int_0^\infty | u(x) |^p x^\alpha dx; \text{ si } \alpha > p-1, \text{ on a,}$$

$$(1.11) \qquad \int_0^\infty \left[\int_x^\infty | u(\xi) | \, d\xi \right]^p x^{\alpha-p} \, dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - p + 1|} \right)^p \int_0^\infty | u(x) |^p x^\alpha \, dx.$$

On désigne par $L_{p,loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions de p-ième puissance sommable sur chaque compact contenu dans Ω.

Il est maintenant facile de démontrer

THÉORÈME 1.5 *Soit*

$$\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}, \quad u \in L_{p,loc}(\Omega), \quad p > 1, \quad 0 \leq \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{p,\alpha}(\Omega).$$

(Les derivées premières au sens des distributiones). Si $\alpha > p - 1$, *alors* $u \in L_{p,\alpha-p}(\Omega)$, *sinon, alors* $u \in L_{p,-1+\varepsilon}(\Omega)$ *où* $\varepsilon > 0$, *arbitrairement petit. Les injections sont continues.*

DÉMONSTRATION: Supposons d'abord $\alpha > p - 1$. Démontrons que $u \in L_{p,\alpha}(\Omega)$.

En effet: considerons le voisinage V_r. On peut changer la fonction u sur un ensemble de mesure nulle de manière que u ainsi changée soit absolument continue sur presque toutes les paralèles à l'axe x_{rn} (cfr. p. ex. J. Deny, J. L. Lions [7]). La dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}$ au sens usuel coïncide maintenant avec celle au sens des distributiones. On a pour presque tous les points X_r de Δ_r et pour

$$a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r), \, y_{rn} < x_{rn}, \, a_r(X_r) - \beta < y_{rn} : u(X_r, x_{rn}) = u(X_r, y_{rn}) + \\ + \int_{y_{rn}}^{x_{rn}} \frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r, \xi) \, d\xi,$$

alors

$$(1.12) \qquad | u(X_r, x_{rn}) |^p \leq 2^{p-1} \Bigg[| u(X_r, y_{rn}) |^p + \\ + \left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r, \xi) \right|^p \varrho^\alpha(X_r, \xi) d\xi \left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{x_{rn}} \varrho(X_r, \xi)^{-\frac{\alpha}{p-1}} d\xi \right)^{p-1} \right) \Bigg].$$

Intégrons (1.12) en y_{rn} dans l'intervalle

$$\left(a_r(X_r) - \beta,\ a_r(X_r) - \frac{\beta}{2}\right).$$

On a

$$|u(X_r, x_{rn})|^p \leq c\left[\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X)-\frac{\beta}{2}} |u(X_r, \eta)|^p \, d\eta + \right. \tag{1.13}$$

$$\left. + \left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r, \xi)\right|^p \varrho^\alpha(X_r, \xi)\, d\xi\right)\left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{x_{rn}} \varrho(X_r, \xi)^{-\frac{\alpha}{p-1}}\right)^{p-1}\right].$$

On obtient tenant compte de ce que

$$\Omega \in \mathfrak{D}\mathfrak{l}^{(0),1}: \varrho^\alpha(X_r, x_{rn})\left(\int_{a_r(X_r)-\beta}^{x_{rn}} \varrho(X_r, \xi)^{-\frac{\alpha}{p-1}}\, d\xi\right)^{p-1} \leq c\,(a_r(X_r) - x_{rn})^{p-1},$$

alors il suit de (1.13) l'inégalité

$$\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)} |u(X_r, x_{rn})|^p \varrho^\alpha(X_r, x_{rn})\, dx_{rn} \leq \tag{1.14}$$

$$\leq c\left[\int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)-\frac{\beta}{2}} |u(X_r, \eta)|^p\, d\eta + \int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r, \xi)\right|^p \varrho^\alpha(X_r, \xi)\, d\xi\right].$$

Après avoir intégré (1.14) dans $\Delta_r = |X_r| < \alpha$, on parvient à

$$\int_{V_r} |u(X)|^p \varrho^\alpha(X)\, dX < \infty \tag{1.15}$$

pour $r = 1, 2, \ldots m$. En ce qui concerne $r = m + 1$, (1.15) est triviale.

On est alors arrivé au résultat suivant: pour $\alpha > p - 1, p > 1$, on a $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$.

En vertu du théorème 1.1 on peut supposer $u \in \mathcal{E}(\Omega)$. Soit $u_r = u\varphi_r$, $r = 1, 2, \dots m+1$. On a pour $1 \leq r \leq m$ l'inégalité suivante :

$$\int_{V_r} |u_r(X)|^p \varrho^{\alpha-p}(X)\,dX \leq c \int_{\Delta_r} dX_r \int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)} |u_r(X_r, x_{rn})|^p (a_r(X_r) - x_{rn})^{\alpha-p}\,dx_{rn}.$$

En utilisant (1.11) on parvient à

$$|u_r|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leq c\,|u_r|_{W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)} \leq c\,|u|_{W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Pour $r = m+1$ l'inégalité (1.16) est triviale, alors le cas de $\alpha > p-1$ est fini.

Soit $\alpha \leq p-1$. Posons $\alpha^* = p - 1 + \varepsilon$. Evidemment

$$W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset W^{(1)}_{p,\alpha^*}(\Omega) \subset L_{p,-1+\varepsilon}(\Omega);$$

la démonstration est par là achevée.

On désigne par $\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$, la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$. On a le théorème d'une signification fondamentale :

THÉORÈME 1.6 *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $\alpha < p-1$. *Alors on a*

$$\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{(k-i)}_{p,\alpha-ip}(\Omega),$$

les injections sont continues. Posant pour $u \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$

$$|u|_{\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)} = \left[\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right|^p \varrho^\alpha\,d\Omega\right]^{\frac{1}{p}},$$

on parvient à

$$|u|_{W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)} \leq c\,|u|_{\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit évidemment de démontrer pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ l'inégalité :

$$|u|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leq c\,|u|_{\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)}. \tag{1.17}$$

Observons u dans V_r. On a, tenant compte de ce que $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$,

$$\int_{V_r} | u(X)|^p \varrho(X)^{\alpha-p} dX \le c \int_{\Delta_r} dX_r \int_{a_r(X_r)-\beta}^{a_r(X_r)} | u(X_r, x_{rn})|^p (a_r(X_r) - x_{rn})^{\alpha-p} dx_{rn} .$$

En utilisant (1.10) on parvient à

$$\int_{V_r} | u |^p \varrho^{\alpha-p} dX \le c \, | u |^p_{\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)} . \tag{1.18}$$

Nous avons

$$| u |_{W_p^{(1)}(U_{m+1})} \le c \left[| u |_{\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_p(U_{m+1})} + \sum_{r=1}^{m} | u |_{L_p(U_{m+1} V_r)} \right] . \tag{1.19}$$

En effet, on peut supposer que la frontière de U_{m+1} est assez régulière, p. ex. que $U_{m+1} \in \mathfrak{N}^{0),1}$. Considérons l'espace $W_p^{(1)}(U_{m+1})$ et ici deux normes :

$$| u |_{W_p^{(1)}(U_{m+1})} \tag{1.20}$$

et l'autre

$$| u |_{\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_p(U_{m+1})} + \sum_{r=1}^{m} | u |_{L_p(U_{m+1} V_r)} . \tag{1.21}$$

On désigne par H_1 l'espace $W_p^{(1)}(U_{m+1})$ avec la norme (1.20), par H_2 l'espace $W_p^{(1)}(U_{m+1})$ avec la norme (1.21). Le domaine U_{m+1} étant dans $\mathfrak{N}^{(0),1}$, il résulte que H_2 est un espace complet. La transformation identique de H_1 sur H_2 étant continue, il en va de même pour la transformation inverse, d'où (1.19). Maintenant (1.17) est la conséquence immediate de (1.18) et (1.19) d'où le théorème.

2. — Un théorème sur les domaines du type $\mathfrak{N}^{(0),1}$

THÉORÈME 2.1 *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Alors il existe une fonction σ, continue sur $\overline{\Omega}$, indéfiniment continûment différentiable dans Ω et on a*

$$c_1 \varrho(X) \le \sigma(X) \le c_2 \varrho(X), \tag{2.1}$$

$$\left| \frac{\partial^i \sigma(X)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right| \le \frac{c(i)}{[\sigma(X)]^{i-1}} \tag{2.2}$$

pour $X \in \Omega$, $1 \le i$ où $c(i)$ sont des constantes dépendantes de i.

DÉMONSTRATION. Considérons l'ensemble V_r, choisissons $\tilde{\alpha} < \alpha$ de manière que les ensembles

$$\tilde{U}_r = \mathop{\mathcal{E}}_{X}(|X_r| < \tilde{\alpha}, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta), \qquad r = 1, 2, \dots m,$$

recouvrent $\dot{\Omega}$ et posons

$$\tilde{V}_r = \mathop{\mathcal{E}}_{X}(|X_r| < \tilde{\alpha}, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)).$$

Soit pour $X_r \in \tilde{\Delta}_r \equiv |X_r| < \tilde{\alpha}$

$$a_r(h, X_r) = \frac{1}{\mathcal{H} h^{n-1}} \int\limits_{|Y_r|<h} \exp \frac{|X_r - Y_r|^2}{|X_r - Y_r|^2 - h^2} a_r(Y_r)\, a Y_r, \; (h < \alpha - \tilde{\alpha}). \tag{2.3}$$

En ce qui concerne $\mathcal{H}$, cf. théorème 1.1. La fonction $a_r(h, X_r)$ est indéfiniment continûment différentiable en $x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn-1}, h$ $(h > 0)$ et par un calcul utilisant le fait que a_r est une fonction lipschitzienne on parvient aux estimations:

$$\left| \frac{\partial^i a_r(h, X_r)}{\partial x_{r1}^{i_1} \partial x_{r2}^{i_2} \dots \partial x_{rn-1}^{i_n} \partial h^{i_n}} \right| \leq \frac{c(i)}{h^{i-1}}, \qquad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Posons

$$b_r(h_r, X_r) = a_r(h, X_r) - 2(c(1) + 1)h.$$

On a

$$\frac{\partial b_r}{\partial h} \leq -(c(1) + 1). \tag{2.5}$$

Tenant compte de ce que a_r est une fonction lipschitzienne on obtient:

$$|a_r(h, X_r) - a_r(X_r)| \leq ch \qquad \text{pour } X_r \in \tilde{\Delta}_r. \tag{2.6}$$

Soit

$$G_r = \mathop{\mathcal{E}}_{X}(|X_r| < \tilde{\alpha}, b_r(h_0, X_r) < x_{rn} < a_r(X_r))$$

où $h_0 \geq \frac{\alpha - \tilde{\alpha}}{2}$ et choisi de la manière que $G_r \subset V_r$. A chaque point de G_r il existe en vertu de (2.5) précisément un paramètre h de l'intervalle

$0 < h < \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}$, tel que $x_{rn} = b_r(h, X_r)$. La fonction $h = h_r(X_r, x_{rn})$ est indéfiniment continûment différentiable dans G_r, continûment prolongeable sur $\bar{G}_r$,

$$X \in G_r \Longrightarrow h(X) > 0,\ X = [X_r, a_r(X_r)] \Longrightarrow h(X) = 0$$

et de (2.4) on obtient pour $X \in G_r$:

$$(2.7) \qquad \left| \frac{\partial^i h_r(X)}{\partial x_{r1}^{i_1} \partial x_{r2}^{i_2} \dots \partial x_{rn}^{i_n}} \right| \leq \frac{d(i)}{[h_r(X)]^{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \dots .$$

En vertu de l'inégalité (2.5) et tenant compte de ce que $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, on parvient à l'inégalité

$$(2.8) \qquad \left| \frac{\partial^i h_r(X)}{\partial x_{r1}^{i_1} \dots \partial x_{rn}^{i_n}} \right| \leq \frac{e(i)}{\varrho(X)^{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \dots .$$

Soit maintenant Ω^* un domaine pour lequel on a

$$\Omega^* \subset \bar{\Omega}^* \subset \Omega$$

et

$$\Omega = \sum_{r=1}^{m} G_r + \Omega^*.$$

Soient

$$0 \leq \psi_r \leq 1, \qquad r = 1, 2, \dots m+1$$

des fonctions indéfiniment différentiables dans

$$E_n,\ X \in \Omega,\ \psi_r(X) \neq 0,\ 1 \leq r \leq m \Longrightarrow X \in G_r;$$

$$\psi_{m+1} \in \mathcal{D}(\Omega^*),\ X \in \Omega \Longrightarrow \sum_{r=1}^{m+1} \psi_r(X) = 1.$$

Posons

$$\sigma_r(X) = h_r(X)$$

pour

$$X \in \bar{G}_r,\ \sigma_r(X) = 0 \qquad \text{pour} \qquad X \notin \bar{G}_r.$$

Nous avons

$$(2.9) \qquad \sigma_r(X) \geq c_r\, \varrho(X) \qquad \text{pour} \qquad X \in G_r.$$

Soit pour $X \in \Omega$:

$$\sigma(X) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{c_r} \sigma_r(X) \psi_r(X) + \psi_{m+1}(X) \cdot$$

$\sigma(x)$ est indéfiniment continûment différentiable dans Ω. On a $\sigma(X) \leq c\,\varrho(X)$. Soit

$$M = \max_{X \in \overline{\Omega}} \varrho(X).$$

On a

$$\sigma(X) \geq \varrho(X) \sum_{r=1}^{m} \psi_r(X) + \psi_{m+1}(X) \frac{\varrho(X)}{M+1} \geq \frac{\varrho(X)}{M+1}.$$

L'inégalité (2.1) est alors démontrée. En ce qui concerne (2.2), il suffit de tenir compte de (2.1) et (2.8).

3. — Les inégalités fondamentales.

Considérant les espaces complexes et les opérateurs différentiels elliptiques, le théorème de P. D. Lax et A. Milgram (cf. p. ex. L. Nirenberg [1]) paraît être très utile pour la méthode variationnelle. D'abord nous en signalons une généralisation facile:

THÉORÈME 3.1. *Soiet H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $B(v, u)$ forme bilinéaire, $v \in H_1$, $u \in H_2$, $B(v, u)$ jouissant des propriétés:*

(3.1) $$| B(v, u) | \leq c_1 \, | v |_{H_1} \, | u |_{H_2},$$

(3.2) $$\sup_{\substack{v \in H_1 \\ |v|_{H_1} \leq 1}} | B(v, u) | \geq c_2 \, | u |_{H_2},$$

(3.3) $$\sup_{\substack{u \in H_2 \\ |u|_{H_2} \leq 1}} | B(v, u) | \geq c_3 \, | v |_{H_1}.$$

Alors étant donné une fonctionnelle $F(v)$ sur H_1, il existe précisément un élément u de H_2 tel que $B(v, u) = F(v)$ et on a

(3.4) $$| u |_{H_2} \leq c \, | F | .$$

DÉMONSTRATION. En désignant par $(\ ,\ )_{H_1}$ le produit scalaire dans H_1, on peut faire correspondre à chaque u de H_2, en vertu du théorème de

Riesz, précisément un élément $Z(u)$ de H_1 de sorte que

$$v \in H_1 \Longrightarrow B(v, u) = (v, Z(u))_{H_1}.$$

On a $Z^{-1}(0) = 0$ en vertu de (3.2) La transformation Z est évidemment linéaire et continue; elle est de plus ouverte. En effet on a

$$\sup_{|v|_{H_1} \leq 1} | B(v, u) | = | Z(u) |_{H_1} \geq c_2 | u |_{H_2}. \tag{3.5}$$

$Z(H_2)$ est alors fermé. On a $Z(H_2) = H_1$. En effett si ce n'est pas le cas il existe $v_0 \in H_1$, $| v_0 |_{H_1} = 1$ de la manière que $0 = (v_0, Z(u))_{H_1}$ pour $u \in H_2$. De (3.3) il découle la contradiction. Tenant compte de (3.5) on obtient le résultat.

En certains cas il est convenable de supprimer la condition (3.3) et d'y substituer directement l'exigence que $Z(H_2)$ soit dense dans H_1. On en tire:

THÉORÈME 3.2. *Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $B(v, u)$ une forme bilinéaire, $v \in H_1$, $u \in H_2$, satisfaisant à* (3.1). *Soit $B(v, u) = (v, Z(u))_{H_1}$; $(\ ,\ )_{H_1}$ signifie le produit scalaire dans H_1, $Z(u)$ l'élément de H_1 représentant la fonctionelle $B(v, u)$ (v change). Alors si l'on a* (3.2) *et si $Z(H_2)$ est dense dans H_1; on obtient l'assertion du théorème* (3.1).

On considère dans la suite l'opérateur différentiel de la forme:

$$Du = (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u), \tag{3.6}$$

où i, j sont les vecteurs

$$i = [i_1, i_2, \dots i_n], \qquad j = [j_1, j_2, \dots j_n]$$

avec composantes

$$0, 1, \dots k, \quad | i | = i_1 + i_2 + \dots i_n, \quad | j | = j_1 + j_2 + \dots + j_n,$$

$$0 \leq | i | \leq k, \quad 0 \leq | j | \leq k, \quad k \geq 1, \quad D^j u = \frac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}}, \ a_{ij}$$

sont des fonctions mesurables, bornées; la convention usuelle de la sommation est utilisée.

Chaque opérateur D produit une forme bilinéaire de la forme

$$B(v, u) = \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^i v\, D^j \overline{u}\, a\Omega. \tag{3.7}$$

On dit de D qu'il est elliptique pour le problème de Dirichlet-Poisson (nous disons dans la suite simplement: elliptique) si l'on a:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow |\, B(\varphi, \varphi) \,| \geq c \,|\, \varphi \,|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)}. \tag{3.8}$$

THÉORÈME 3.3. *Soit Du un opérateur elliptique. Alors le plus grand intervalle J (ouvert, fermé, semiouvert) des $\alpha < 1$ pour lesquels on a:*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow |\, B(\psi, \varphi) \,| \geq c(\alpha) \,|\, \varphi \,|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)}, \tag{3.9}$$

où ψ est une fonction convenablement choisie de $\mathcal{D}(\Omega)$, $|\,\psi\,|_{W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} = 1$, est non vide et contient un voisinage de 0.

Le plus grand intervalle J^* des $\alpha > -1$ pour lesquels on a:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow |\, B(\varphi, \psi^*) \,| \geq c^*(\alpha) \,|\, \varphi \,|_{W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)}, \tag{3.10}$$

où $\psi^* \in \mathcal{D}(\Omega)$, convenablement choisie, $|\,\psi^*\,|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = 1$, est non vide et contient un voisinage de 0.

Si $B(\psi, \varphi) = \overline{B(\varphi, \psi)}$, alors $\inf J = -\sup J^*$, $\sup J = -\inf J^*$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et posons $\psi = \varphi\sigma^\alpha$ où σ est la fonction construite au théorème 2.1. On a

$$B(\psi, \varphi) = \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^i(\varphi\sigma^\alpha)\, D^j\overline{\varphi}\, d\Omega = \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^i(\varphi\sigma^{\frac{\alpha}{2}})\, D^j(\overline{\varphi}\sigma^{\frac{\alpha}{2}})\, d\Omega + B_\alpha. \tag{3.11}$$

Estimons B_α. Nous avons

$$B_\alpha = \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, [D^i(\varphi\sigma^\alpha)\, D^j\overline{\varphi} - D^i(\varphi\sigma^{\frac{\alpha}{2}})\, D^j(\overline{\varphi}\sigma^{\frac{\alpha}{2}})]\, d\Omega. \tag{3.12}$$

Il est manifeste que sous le signe de l'intégrale (3.12) chaque terme contien une dérivée de σ^α où $\sigma^{\frac{\alpha}{2}}$. On vient à considérer les membres de la forme (à ce moment on prend les vecteurs $i, j, p, q, s, t,$ fixes)

$$\lambda(i, j, p, q) \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^p\varphi\, D^q\sigma^\alpha\, D^j\overline{\varphi}\, d\Omega \tag{3.13}$$

où

$$|q| \geq 1, \qquad |p| + |q| = |i|, \qquad \lambda(i, j, p, q)$$

sont des constantes connues, et de la forme

$$\mu(p, q, s, t) \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^p\varphi\, D^q\sigma^{\frac{\alpha}{2}}\, D^s\,\overline{\varphi}\, D^t\sigma^{\frac{\alpha}{2}}\, d\Omega \tag{3.14}$$

où

$$|q| + |t| \geq 1, \quad |p| + |q| = |i|, \quad |s| + |t| = |j|, \qquad \mu(p, q, s, t)$$

sont des constantes connues. En vertu du théorème 2.1 on obtient:

$$|D^q\sigma^\alpha| \leq |\alpha|\, c_q\, \sigma^{\alpha-|q|}, \qquad |D^q\,\sigma^{\frac{\alpha}{2}}| \leq |\alpha|\, d_q\, \sigma^{\frac{\alpha}{2}-|q|}. \tag{3.15}$$

Tenant compte du théorème 1.6, on parvient à l'inégalité:

$$\left|\lambda(i, j, p, q) \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^p\varphi\, D^q\sigma^\alpha\, D^j\,\overline{\varphi}\, d\Omega\right| \leq |\alpha|\, c(i, j, p, q)\cdot \tag{3.16}$$

$$\cdot\left(\int_\Omega |D^p\varphi|^2\, \sigma^{\alpha-2|q|}\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D^j\overline{\varphi}|^2\, \sigma^\alpha\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \leq |\alpha|\, d(i, j, p, q)\, |\varphi|^2_{W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)},$$

$$\left|\mu(p, q, s, t) \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^p\,\varphi\, D^q\,\sigma^{\frac{\alpha}{2}}\, D^s\,\overline{\varphi}\, D^t\,\sigma^{\frac{\alpha}{2}}\, d\Omega\right| \leq \tag{3.17}$$

$$\leq |\alpha|\, e(p, q, s, t)\, |\varphi|^2_{W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)}.$$

De (3.12), (3.16), (3.17) on obtient

$$|B_{\dot\alpha}| \leq |\alpha|\, a\, |\varphi|^2_{W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)}. \tag{3.18}$$

En vertu de l'ellipticité de l'opérateur D, le premier terme du second membre de (3.11) peut être apprécié de la manière suivante :

$$\left| \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^i (\varphi\, \sigma^{\frac{\alpha}{2}})\, D^j (\overline{\varphi}\, \sigma^{\frac{\alpha}{2}})\, d\Omega \right| \geq c_1 \mid \varphi \sigma^{\frac{\alpha}{2}} \mid^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} . \tag{3.19}$$

En s'appuyant de nouveau sur le théorème 1.6 on est amené à l'inégalité :

$$\mid \varphi \sigma^{\frac{\alpha}{2}} \mid^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} \geq \mid \varphi \mid^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} - c_2 \mid \alpha \mid \mid \varphi \mid^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \tag{3.20}$$

Il découle de (3.11), (3.18), et (3.20)

$$\mid B(\psi, \varphi) \mid \geq (c_1 - c_1 c_2 \mid \alpha \mid - a \mid \alpha \mid) \mid \varphi \mid^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \tag{3.21}$$

En s'appuyant encore une fois sur le théorème 1.6 on obtient,

$$\mid \varphi \sigma^\alpha \mid^2_{W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leq \mid \varphi \mid^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} + c_3 \mid \alpha \mid \mid \varphi \mid^2_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \tag{3.22}$$

On a finalement

$$\frac{\mid B(\psi, \varphi) \mid}{\mid \psi \mid_{W_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)}} \geq \frac{c_1 - c_1 c_2 \mid \alpha \mid - a \mid \alpha \mid}{(1 + c_3 \mid \alpha \mid)^{\frac{1}{2}}} \mid \varphi \mid_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \tag{3.23}$$

Posant $\mid \alpha \mid < \dfrac{c_1}{c_1 c_2 + a}$, on obtient (3.9).

La démonstration de (3.10) est analogue si l'on pose $\psi^* = \varphi \sigma^{-\alpha}$. Le reste du théorème 3.2 étant trivial, on achève par là la démonstration du théorème 3.3.

4. — Problème de Dirichlet.

On désigne par $W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$ l'espace des fonctionnelles sur $\overset{\circ}{W}{}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$. f étant de $W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$, on écrit formellement $f(v) = (v, f)$.

Soit $f \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$, $u_0 \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. Pour $u \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ on dit $Du = f$, si $v \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow$

$$B(v, u) = (v, f). \tag{4.1}$$

On dit que u a les mêmes valeurs frontières que u_0 si

$$u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega). \tag{4.2}$$

On dit: u de $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ résoud le problème de Dirichlet $Du = f$ sur Ω, $u = u_0$ sur $\dot{\Omega}$, si (4.1) et (4.2) ont lieu.

THÉORÈME 4.1. *Si $f = (-1)^{|i|} D^i g_i$ (la convention ordinaire de sommation est utilisée) où $|i| \leq k$, $g_i \in L_{2,\alpha}(\Omega)$, alors $f \in W^{(-k)}_{2,\alpha}(\Omega)$. (Les dérivées sont prises au sens des distributions.) Si $\alpha > -1$, il suffit que $g_i \in L_{2,\alpha+2(k-|i|)}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. On a au sens des distributions pour

$$v \in \mathcal{D}(\Omega) : (v, f) = \int_\Omega D^i v \, \bar{g}_i \, d\Omega,$$

alors $|(v, f)| \leq c \, |v|_{W^{(k)}_{2,-\alpha}(\Omega)}$ c.q.f.d.

THÉORÈME 4.2. *Si $\alpha \geq 0$ et $2k > n$, ou si $-1 < \alpha < 0$* et $\dfrac{2k}{1-\alpha} > n$, *alors f étant une mesure, on a*

$$\int_\Omega v \, d\bar{f} \in W^{(-k)}_{2,\alpha}(\Omega).$$

Soit q un nombre quelconque > 1 si $\alpha \geq 0$ et $2k = n$, ou si $-1 < \alpha < 0$ et $\dfrac{2k}{1-\alpha} = n$. Soit $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{k}{n}$ si $\alpha \geq 0$, $2k < n$, $\dfrac{1}{q} < \dfrac{1+\alpha}{2} + \dfrac{k}{n}$ si

$$-1 < \alpha < 0, \qquad \frac{2k}{1-\alpha} < n.$$

Alors $f \in L_q(\Omega) \subset W^{(-k)}_{q,\alpha}(\Omega)$ au sens de $(v, f) = \int_\Omega v \bar{f} \, d\Omega$.

La démonstration du théorème 4.2 est une conséquence immédiate du théorème 1.3 et des théorèmes sur l'immersion (cfr. p. ex E. Gagliardo [5]).

THÉORÈME 4.3. *Soit $-1 < \alpha$. Alors $f \in L_{2,2k+\alpha}(\Omega) \subset W^{(-k)}_{2,-\alpha}(\Omega)$ au sens de $(v, f) = \int_\Omega v \bar{f} \, d\Omega$.*

Théorème 4.2 est un cas spécial du théorème 4.1.

THÉORÈME 4.4. *Soit comme toujours $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$. Soit D un opérateur elliptique. Soit $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha \in J$, où J est l'intervalle du théorème 3.2.*

Soit $u_0 \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$, $f \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$. Alors il existe précisément une solution $u \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ du problème de Dirichlet-Poisson et l'on a

$$|u|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leq c\,[\,|u_0|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} + |f|_{W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)}]. \tag{4.3}$$

DÉMONSTRATION. La forme bilinéaire (3.7) vérifie (3.1) et (3.2) si on pose $H_1 = \mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)$, $H_2 = \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. On définit $(\ ,\ )_{H_1}$, $(\ ,\ )_{H_2}$ par (1.16). Par là on obtient la transformation, soit Z, linéaire et continue de H_2 dans H_1, telle qu'on ait $B(v, u) = (v, Z(u))_{H_1}$. On a $\overline{Z(H_2)} = H_1$. En effet, soit $h \in H_1$. Soient $h_k \rightarrow h$ dans H_1, $h_k \in \mathcal{D}(\Omega)$. La fonctionnelle $(v, h_k)_{H_1}$ peut être continûment prolongée en une fonctionnelle sur $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$. En vue de l'ellipticité de l'operateur D, il existe d'après le théorème 3.1 une fonction u_k de $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega) \subset \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ pour laquelle on a $B(v, u_k) = (v, h_k)_{H_1}$. Alors $Z(u_k) \rightarrow h$. Ayant (3.1), (3.2) et $\overline{Z(H_2)} = H_1$, on obtient suivant le théorème 3.2 : il existe précisément un élément w de $\mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ tel qu'on ait

$$B(v, w) = (v, g), \qquad v \in \mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega), \qquad g \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega).$$

Posons $g = f - (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u_0)$. En vertu du théorème 4.1 $g \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$. Posons $u = u_0 + w$. On obtient par là l'existence de la solution. L'unicité découle de (3.2).

THÉORÈME 4.5. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, D elliptique. Soit $-1 < \alpha \leq 0$, $\alpha \in J \cdot J^*$ où J, J^* sont des intervalles du théorème 3.2. Soit $u_0 \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$, $f \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$.*

Alors il existe précisément une solution $u \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ du problème de Dirichlet-Poisson et on a (4.3).

DÉMONSTRATION. Lorsqu'on pose

$$H_1 = \mathring{W}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega), \; H_2 = \mathring{W}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega),$$

la forme bilinéaire (3.7) vérifie (3.1), (3.2) et (3.3). Posons

$$g = f - (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u).$$

En vertu du théorème 4.1 on a $g \in W_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)$; en s'appuyant sur le théorème 3.1, il existe précisément un élément w de $v \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ de sorte que nous avons

$$v \in \overset{\circ}{W}{}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega) \Longrightarrow B(v, w) = (v, g) \cdot$$

$u = u_0 + w$ est solution. Evidemment en vertu de (3.2), elle est unique.

Nous finirons cet article par quelques remarques.

La régularité de la solution du problème de Dirichlet-Poisson au voisinage de la frontière est donnée par des théorèmes § 1 sur les espaces $W_{p\,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. La régularité intérieure dépend de la régularité des coefficients a_{ij} et de la fonctionnelle f; ce sont des résultats assez bien connus. Leur démonstration par les méthodes de l'analyse fonctionnelle est contenue dans L. Nirenberg [1].

En observant le cas $\alpha > 0$, on obtient une classe de conditions aux limites plus large que celle, formée des traces des fonctions de $W_2^{(k)}(\Omega)$. En parlant approximativement on peut dire que les conditions considérées contiennent les fonctions régulières par parties.

Considérons p. ex. un barrage, soumis à la force des glacons ; supposons que le barrage soit construit (c'est le cas pratique) de deux sortes de béton. On doit déterminer la tension au barrage. Du point de vue mathématique, on obtient une équation elliptique du $4^{-ième}$ ordre, Ω est un polygone, a_{ij} sont constantes par parties

$$f = 0,\ u_0 \in W_{2,\alpha}^{(2)}(\Omega),\ \alpha > 0$$

arbitrairement petit, $u \notin W_2^{(2)}(\Omega)$.

En ce qui concerne la classe des fonctionnelles f, considérant $\alpha > 0$, elle est plus vaste que celle considérée dans le cas de $\alpha = 0$. Ce sont les théorèmes 4.1 et 4.3 qui sont utiles dans ce cas-là :

Considérons maintenant le cas de $\alpha < 0$. Posant $u_0 = 0, f \in L_{2,2k+\alpha}$, $|\alpha|$ assez petit (cfr. théorème 4.5), on obtient que la solution du problème de Poisson $Du = f$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$, étant unique, coïncide avec celle produit par le théorème 4.5, alors $u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. Nous avons obtenu ainsi quelque chose de plus pour la régularité de la solution au voisinage de la frontière. Il est manifeste qu'en tout cas $L_2(\Omega) \subset L_{2,2k+\alpha}$, car $-1 < \alpha$.

LITTÉRATURE

[1] L. NIRENBERG : *Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations*, Vol. VIII, 1955, 649-675.

[2] M. I. VIŠIK : *O pěrvoj krajevoj zadače dla ellipticeskich uravnenij v novoj funkcionalnoj postanovke,* Doklady Akademii Nauk SSSR 107, 1956, 781-784.

[3] L. D. KUDRJAVCEV : *Prjamyje i obratnyje teoremy vloženija,* Trudy matematičeskovo instituta imeni V. A. Steklova LV. 1959.

[4] J. NEČAS : On *the Regularity of Solutions of Second-order Elliptic Partial Differential Equations with an Unbounden Dirichlet Integral,* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 9, n. 2, 1962, 134-144.

[5] E. GAGLIARDO : *Proprietà di alcune classi di funzioui in più variabili.* Ricerche di Matematica, vol. VII, 1958, 102-137.

[6] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA : Inequalities, 1934.

[7] J. DENY, J. L. LIONS : *Les espaces du type de Beppo Levi,* Annales de l'Institute Fourier. V. 1953-54, 305-370.