

# *Astérisque*

ARNAUD BEAUVILLE

**Surfaces algébriques complexes**

*Astérisque*, tome 54 (1978)

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1978\\_\\_54\\_\\_R1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__54__R1_0)

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## INTRODUCTION

Ce texte reproduit, avec quelques modifications, le contenu d'un cours de 3e cycle donné à Orsay en 1976-77. Le but de ce cours était de donner une présentation de la classification d'Enriques des surfaces algébriques complexes qui soit relativement élémentaire, c'est-à-dire accessible à un étudiant connaissant le langage de base de la géométrie algébrique (diviseurs, formes différentielles...) ainsi que la cohomologie des faisceaux. J'ai cependant préféré admettre en cours de route quelques théorèmes difficiles de géométrie algébrique, plutôt que de recourir à des démonstrations compliquées et artificielles.

Voici le plan de ce cours. Les deux premiers chapitres, de nature préliminaire, introduisent les outils de base pour l'étude des surfaces : on définit au chapitre I la forme d'intersection sur le groupe de Picard et on établit ses propriétés ; on en déduit, en admettant le théorème de dualité, les formules fondamentales de la théorie (théorème de Riemann-Roch, formule du genre). Le chapitre II est consacré à la structure des applications birationnelles ; on montre notamment que toute surface est obtenue à partir d'une surface minimale par un nombre fini d'éclatements. Le chapitre se clôt sur le critère de contraction de Castelnuovo, qui caractérise les droites exceptionnelles par leurs propriétés numériques.

La classification des surfaces commence au chapitre III avec les surfaces réglées, c'est-à-dire birationnellement isomorphes au produit d'une courbe  $C$  par  $\mathbb{P}^1$ . On démontre (excepté dans le cas rationnel)

que leurs modèles minimaux sont les fibrés en droites projectives de base  $C$ , et on étudie la géométrie de ces fibrés. Le chapitre IV est consacré à des exemples de surfaces rationnelles ; on y feuillette le riche herbier amassé par les géomètres du 19<sup>e</sup> siècle (surface de Veronese, surfaces de del Pezzo...).

Les deux chapitres suivants constituent peut-être la clé de voûte de la classification ; il s'agit de caractériser les surfaces réglées par leurs propriétés numériques - plus précisément par l'annulation des "plurigenres"  $P_n$ . Le cas des surfaces avec  $q=0$  est traité au chapitre V avec le théorème de Castelnuovo : une surface vérifiant  $q=P_2=0$  est rationnelle. On en déduit deux conséquences importantes, la structure des surfaces rationnelles minimales et l'unicité du modèle minimal d'une surface non réglée. Au chapitre VI, on aborde les surfaces avec  $q > 0$ . On montre sans trop de peine qu'une surface satisfaisant à  $p_g=0$ ,  $q \geq 2$  est réglée ; il reste donc à traiter certaines surfaces non réglées avec  $p_g=0$ ,  $q=1$ . Suivant une idée d'Enriques, on classe très précisément ces surfaces, ce qui permet de montrer qu'elles vérifient  $P_{12} > 0$ . Une surface est donc réglée si et seulement si  $P_{12}=0$  (théorème d'Enriques).

Le chapitre VII, très bref, introduit la dimension de Kodaira  $\kappa$ , qui fournit un langage commode pour la classification des surfaces. Les surfaces réglées sont caractérisées par  $\kappa = -\infty$  ; les trois chapitres suivants étudient les surfaces avec  $\kappa = 0, 1$  et  $2$ . Les surfaces avec  $\kappa = 0$ , traitées au chapitre VIII, se répartissent en 4 classes : surfaces K3, surfaces d'Enriques, surfaces abéliennes et surfaces bielliptiques. La liste des surfaces bielliptiques a été donnée au chapitre VI, dans le cadre des surfaces avec  $p_g=0$ ,  $q=1$  ; on étudie ici les surfaces K3 et les surfaces d'Enriques, en donnant de nombreux exemples.

Au chapitre IX on montre que les surfaces avec  $\kappa = 1$  possèdent un pinceau (pas nécessairement rationnel) de courbes elliptiques ; inversement, on étudie les surfaces qui admettent un tel pinceau.

Enfin le chapitre X est consacré aux surfaces avec  $\kappa = 2$ , dites de type général ; bien que ces surfaces soient les plus générales, on ne sait en dire que peu de choses. On s'est contenté ici de donner des exemples et de démontrer l'inégalité de Castelnuovo :  $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$ .

On a énoncé dans un Appendice les résultats de Bombieri et Mumford sur la classification des surfaces en caractéristique  $p$ .

Il est difficile de prétendre à l'originalité dans un sujet où l'essentiel des théorèmes a été démontré vers 1900. Je me suis inspiré largement de la littérature existante, en particulier du séminaire Chafarevitch ([Ch 1]) ; j'ai essayé de retracer, dans une note historique après chaque chapitre, l'origine des principaux théorèmes. J'ai indiqué sous forme d'exercices quelques prolongements possibles du cours.

Je tiens à remercier ici les fidèles auditeurs du cours, en particulier M. Demazure et M. Raynaud, qui par leurs observations pertinentes m'ont permis d'améliorer la version orale de ce texte. Je remercie également Madame Bonnardel pour la qualité remarquable de sa frappe.



## TABLE DES MATIÈRES

	pages
INTRODUCTION	
LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS.....	2
CHAPITRE I      Le groupe de Picard et le théorème de Riemann-Roch.....	3
CHAPITRE II     Applications birationnelles.....	15
CHAPITRE III    Surfaces réglées.....	34
CHAPITRE IV    Surfaces rationnelles.....	53
CHAPITRE V     Le théorème de Castelnuovo et ses applications	74
CHAPITRE VI    Surfaces avec $p_g = 0$ , $q \gg 1$ .....	91
CHAPITRE VII   La dimension de Kodaira.....	116
CHAPITRE VIII  Surfaces avec $\kappa = 0$ .....	120
CHAPITRE IX    Surfaces avec $\kappa = 1$ et surfaces elliptiques	145
CHAPITRE X     Surfaces de type général.....	152
APPENDICE : caractéristique $p$ .....	161
BIBLIOGRAPHIE.....	163
INDEX.....	167
ABSTRACT.....	171

## LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS

Nous dirons simplement surface au lieu de surface projective et lisse sur  $\mathbb{C}$ .

Soient  $S$  une surface,  $D, D'$  deux diviseurs sur  $S$ . On note :

$D \equiv D'$  si  $D$  et  $D'$  sont linéairement équivalents.

$\mathcal{O}_S(D)$  le faisceau inversible associé à  $D$ .

$H^i(S, \mathcal{O}_S(D))$ , ou simplement  $H^i(D)$ , les espaces de cohomologie du faisceau  $\mathcal{O}_S(D)$ .

$h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(D)$ .

$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = h^0(D) - h^1(D) + h^2(D)$ .

$|D|$  = ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à  $D$   
= espace projectif associé à  $H^0(D)$ .

$K_S$  ou  $K$  = diviseur canonique = un diviseur tel que  $\mathcal{O}_S(K) \cong \Omega_S^2$ .

$\text{Pic}(S)$  = groupe des diviseurs sur  $S$  modulo équivalence linéaire  
 $\cong$  groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles.

$\text{NS}(S)$  = groupe de Néron-Severi de  $S$  (I.10).

$\text{Alb}(S)$  = variété d'Albanese de  $S$  (cf. chapitre V).

$q(S)$  ou  $q = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^0(S, \Omega_S^1)$ .

$p_g(S)$  ou  $p_g = \dim H^2(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(K))$ .

$P_n(S)$  ou  $P_n = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(nK))$  ( $n \gg 1$ ).

$b_i(S)$  ou  $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$ .

$\chi_{\text{top}}(S) = \sum (-1)^i b_i(S)$ .

## CHAPITRE I

### LE GROUPE DE PICARD ET LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Nous dirons simplement "surface" pour surface projective et lisse sur  $\mathbb{C}$ . Sauf mention du contraire, nous regarderons les surfaces comme munies de la topologie de Zariski (pour laquelle les fermés sont les sous-variétés algébriques) ; les faisceaux que nous considérerons seront les faisceaux algébriques cohérents. Il s'agit là d'une convention : en effet les théorèmes généraux de Serre ([GAGA]) montrent qu'il existe une correspondance bijective entre faisceaux cohérents algébriques et analytiques, qui préserve les suites exactes, la cohomologie, etc... Tous les raisonnements que nous ferons avec des faisceaux algébriques cohérents restent valides dans le cadre analytique.

Rappel I.1 : Le groupe de Picard.

Soit  $S$  une surface (ou, plus généralement, une variété lisse). Rappelons que le groupe de Picard de  $S$ , noté  $\text{Pic}(S)$ , est le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles (ou de fibrés en droites) sur  $S$ . A tout diviseur effectif  $D$  sur  $S$  on associe un faisceau inversible  $\mathcal{O}_S(D)$  et une section  $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ ,  $s \neq 0$ , définie à multiplication scalaire près, telle que  $\text{div}(s) = D$ . On définit  $\mathcal{O}_S(D)$  par linéarité pour  $D$  quelconque. L'application  $D \mapsto \mathcal{O}_S(D)$  identifie  $\text{Pic}(S)$  au groupe des classes de diviseurs sur  $S$  modulo l'équivalence linéaire.



Soient  $X$  une autre variété lisse,  $f : S \rightarrow X$  un morphisme. On sait définir l'image inverse par  $f$  d'un faisceau inversible : on obtient un homomorphisme  $f^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(S)$ . Si  $f$  est surjectif, on peut définir de plus l'image inverse d'un diviseur, de façon que  $f^* \mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_S(f^*D)$  : il suffit de remarquer que l'image inverse d'une section non nulle de  $\mathcal{O}_X(D)$  est non nulle.

Si  $f$  est un morphisme de surfaces, génériquement fini de degré  $d$ , on définit l'image directe  $f_*C$  d'une courbe irréductible en posant :

- $f_*C = 0$  si  $f(C)$  est un point ;
- $f_*C = r\Gamma$  si  $f(C)$  est une courbe  $\Gamma$ , le morphisme  $C \rightarrow \Gamma$  induit par  $f$  étant fini de degré  $r$ .

Par linéarité on définit  $f_*D$  pour tout diviseur  $D$  sur  $S$ . On vérifie aussitôt que  $f_*D \equiv f_*D'$  si  $D \equiv D'$ . Il résulte de la définition que :

$$f_*f^*D = d.D \quad \text{pour tout diviseur } D \text{ sur } S.$$

L'importance particulière du groupe de Picard pour les surfaces provient de l'existence d'une "forme d'intersection", qu'on va maintenant définir.

Définition I.2 : Soient  $C, C'$  deux courbes irréductibles distinctes sur  $S$ ,  $x$  un point de  $C \cap C'$ ,  $\mathcal{O}_x$  l'anneau local de  $S$  en  $x$ . Si  $f$  (resp.  $g$ ) est une équation de  $C$  (resp.  $C'$ ) dans  $\mathcal{O}_x$ , la multiplicité d'intersection de  $C$  et  $C'$  en  $x$  est par définition :

$$m_x(C \cap C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_x / (f, g).$$

On notera que par le Nullstellensatz l'anneau  $\mathcal{O}_x / (f, g)$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . On laisse au lecteur le soin de se convaincre que cette définition correspond à la notion

intuitive de multiplicité d'intersection. On voit par exemple que  $m_x(C \cap C') = 1$  si et seulement si  $f$  et  $g$  engendrent l'idéal maximal  $m_x$ , i.e. forment un système de coordonnées locales au voisinage de  $x$  : on dira alors que  $C$  et  $C'$  sont transverses en  $x$ .

Définition I.3 : Si  $C$  et  $C'$  sont deux courbes irréductibles distinctes sur  $S$ , le nombre d'intersection  $(C.C')$  est défini par :

$$(C.C') = \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C').$$

Rappelons que le faisceau d'idéaux définissant  $C$  (resp.  $C'$ ) s'identifie au faisceau inversible  $\mathcal{O}_S(-C)$  (resp.  $\mathcal{O}_S(-C')$ ) ; on pose :

$$\mathcal{O}_{C \cap C'} = \mathcal{O}_S / (\mathcal{O}_S(-C) + \mathcal{O}_S(-C')).$$

Le faisceau  $\mathcal{O}_{C \cap C'}$  est un "faisceau gratte-ciel", i.e. concentré en un nombre fini de points, à savoir les points  $x \in C \cap C'$  ; en un tel point on a  $(\mathcal{O}_{C \cap C'})_x = \mathcal{O}_x / (f, g)$  (avec les notations de I.1). Il est donc clair que :

$$(C.C') = \dim H^0(S, \mathcal{O}_{C \cap C'}).$$

Pour tout faisceau  $L$  sur  $S$ , on note  $\chi(L) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(S, L)$  la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $L$ .

Théorème I.4 : Pour  $L, L' \in \text{Pic}(S)$ , posons  $(L.L') = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^{-1}) - \chi(L'^{-1}) + \chi(L^{-1} \otimes L'^{-1})$ . Alors  $(.)$  définit une forme bilinéaire symétrique sur  $\text{Pic}(S)$ , telle que si  $C$  et  $C'$  sont deux courbes irréductibles distinctes sur  $S$  :

$$(\mathcal{O}_S(C) . \mathcal{O}_S(C')) = (C.C').$$

Démonstration : Montrons d'abord la dernière égalité.

Lemme I.5 : Soit  $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C))$  (resp.  $s' \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C'))$ ) une section  $\neq 0$  qui s'annule sur  $C$  (resp.  $C'$ ). La suite :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C-C') \xrightarrow{(s', -s)} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s, s')} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_{C \cap C'} \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration : Soient  $f, g \in \mathcal{O}_x$  des équations locales de  $C, C'$  en un point  $x \in S$  ; il faut montrer que la suite :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{(g, -f)} \mathcal{O}_x^2 \xrightarrow{(f, g)} \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x / (f, g) \rightarrow 0$$

est exacte, c'est-à-dire que si :

$$a, b \in \mathcal{O}_x ; af = bg$$

alors il existe  $k \in \mathcal{O}_x$  tel que  $a = kg$  ,  $b = kf$  .

Cela résulte immédiatement, par exemple, du fait que  $\mathcal{O}_x$  est un anneau factoriel et que  $f$  et  $g$  sont premiers entre eux (s'ils avaient un facteur commun,  $C$  et  $C'$  auraient une composante commune). Le lecteur savant utilisera le fait (beaucoup moins fort) que  $\mathcal{O}_x$  est de Cohen-Macaulay.

L'additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré et le lemme I.5 montrent que  $(\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{O}_S(C')) = (C \cdot C')$ . Pour démontrer le théorème, il reste à prouver que  $(.)$  est une forme bilinéaire sur  $\text{Pic}(S)$  (la symétrie est claire).

Lemme I.6 : Soit  $C$  une courbe irréductible non singulière sur  $S$ .  
Pour tout  $L \in \text{Pic}(S)$ , on a :

$$(\mathcal{O}_S(C) \cdot L) = \text{deg}(L|_C) .$$

Démonstration : Les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow L^{-1}(-C) \rightarrow L^{-1} \rightarrow L^{-1} \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donnent sur les caractéristiques d'Euler-Poincaré :

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) &= \chi(\mathcal{O}_C) \\ - \chi(L^{-1}) + \chi(L^{-1}(-C)) &= - \chi(L^{-1}|_C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } (\mathcal{O}_S(C).L) &= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(L^{-1}|_C) \\ &= -\text{deg } L^{-1}|_C \text{ par le théorème de Riemann-Roch sur } C \\ &= \text{deg } L|_C \text{ , d'où le lemme.} \end{aligned}$$

Considérons maintenant, pour  $L_1, L_2, L_3 \in \text{Pic}(S)$ , l'expression :

$$s(L_1, L_2, L_3) = (L_1.L_2 \otimes L_3) - (L_1.L_2) - (L_1.L_3) .$$

En remplaçant les produits par leur définition, on vérifie aussitôt que cette expression est symétrique en  $L_1, L_2, L_3$  ; d'autre part le lemme I.6 entraîne que  $s(L_1, L_2, L_3)$  est nul lorsque  $L_1 = \mathcal{O}_S(C)$ ,  $C$  étant une courbe non singulière. Par suite  $s(L_1, L_2, L_3)$  est nul si  $L_2$  (ou  $L_3$ ) est un  $\mathcal{O}_S(C)$ .

Pour passer au cas général, rappelons un théorème de Serre (cf. [FAC]) :

Rappel I.7 : Soient  $D$  un diviseur sur  $S$ ,  $H$  une section hyperplane de  $S$  (dans un plongement donné). Il existe  $n \gg 0$  tel que  $D+nH$  soit une section hyperplane (dans un autre plongement). En particulier, on peut écrire  $D \equiv A-B$ , où  $A$  et  $B$  sont des courbes lisses sur  $S$ , avec  $A \equiv D+nH$  et  $B \equiv nH$ .

Soient maintenant  $L, L'$  deux faisceaux inversibles quelconques. On peut écrire  $L' = \mathcal{O}_S(A-B)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux courbes lisses sur  $S$ . En exprimant que  $s(L, L', \mathcal{O}_S(B)) = 0$ , on trouve :

$$(L.L') = (L.\mathcal{O}_S(A)) - (L.\mathcal{O}_S(B))$$

d'où l'on déduit, compte tenu de I.6, que  $(L.L')$  est linéaire en  $L$ . Ceci achève la preuve du théorème I.4.

Si  $D$  et  $D'$  sont deux diviseurs sur  $S$ , on note  $D.D' = (\mathcal{O}_S(D) \cdot \mathcal{O}_S(D'))$ . Le résultat essentiel du théorème I.4 est qu'on peut calculer ce produit en remplaçant  $D$  (ou  $D'$ ) par un diviseur linéairement équivalent. Voici deux exemples d'application de ce principe.

Proposition I.8 : (i) Soient  $C$  une courbe lisse,  $f: S \rightarrow C$  un morphisme surjectif,  $F$  une fibre de  $f$ . On a  $F^2 = 0$ .

(ii) Soient  $S'$  une surface,  $g: S \rightarrow S'$  un morphisme génériquement fini de degré  $d$ ,  $D, D'$  deux diviseurs sur  $S'$ . On a  $(g^* D \cdot g^* D') = d(D.D')$ .

Démonstration : (i) On a  $F = f^*[x]$ ,  $x \in C$ . Il existe un diviseur  $A$  sur  $C$ , linéairement équivalent à  $[x]$ , tel que  $x \notin A$ ; donc  $F \equiv f^*A$ . Comme  $f^*A$  est combinaison linéaire de fibres de  $f$  toutes distinctes de  $F$ , on a  $F^2 = F \cdot f^*A = 0$ .

(ii) D'après I.7, il suffit de démontrer la formule lorsque  $D$  et  $D'$  sont des sections hyperplanes de  $S$  (dans deux plongements différents). Il existe un ouvert  $U \subset S'$  au-dessus duquel  $g$  est étale. On peut bouger  $D$  et  $D'$  de façon que  $D$  et  $D'$  se coupent transversalement et que leurs points d'intersection soient dans  $U$ . Il est clair alors que  $g^*D$  et  $g^*D'$  se coupent transversalement et que  $g^*D \cap g^*D' = g^{-1}(D \cap D')$ , d'où le résultat.

Exemples I.9 : a)  $S = \mathbb{P}^2$ .

On a  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$  : toute courbe de degré  $d$  est linéairement équivalente à  $d$  fois une droite. Soient  $C, C'$  deux courbes de degré  $d, d'$ , et  $L, L'$  deux droites distinctes ; comme  $C \equiv dL$ ,  $C' \equiv d'L'$ , on déduit du théorème I.4 le théorème de Bezout :

$$(C.C') = (dL.d'L') = dd'(L.L') = dd'.$$

b)  $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 =$  quadrique lisse dans  $\mathbb{P}^3$ .

(La dernière égalité provient du plongement de Segre de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  dans  $\mathbb{P}^3$ , défini par  $((X, T); (X', T')) \mapsto (XX', XT', TX', TT')$ ).

Notons  $C = \{0\} \times \mathbb{P}^1$ ,  $C' = \mathbb{P}^1 \times \{0\}$ ,  $U = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) - C - C'$ . L'ouvert  $U$  est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^2$ , donc tout diviseur sur  $U$  est le diviseur d'une fonction rationnelle. Soit  $D$  un diviseur sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ; on a  $D|_U = \text{div } \varphi$  sur  $U$ , de sorte qu'il existe des entiers  $m$  et  $n$  tels que :

$$D = \text{div}(\varphi) + mC + nC'$$

d'où  $D \equiv mC + nC'$ .

Donc  $\text{Pic}(S)$  est engendré par les classes de  $C$  et  $C'$ . Il est clair que  $(C.C') = 1$ ; pour calculer  $C^2$ , on peut d'après I.4 remplacer  $C$  par la courbe  $C_\infty = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$ , qui lui est linéairement équivalente; comme  $C \cap C_\infty = \emptyset$ , on trouve  $C^2 = (C.C_\infty) = 0$ . On a de même  $C'^2 = 0$ . On en déduit immédiatement que  $\mathcal{O}_S(C)$  et  $\mathcal{O}_S(C')$  forment une base de  $\text{Pic}(S)$ , le produit d'intersection étant donné par  $C^2 = C'^2 = 0$ ,  $(C.C') = 1$ .

Soit  $\Gamma$  une courbe dans  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ; elle est définie par une équation bihomogène, i.e. homogène de poids  $m$  en les coordonnées  $(X, T)$  et de poids  $n$  en  $(X', T')$ ; on dira que  $\Gamma$  est de bidegré  $(m, n)$ . On a alors  $\Gamma \equiv mC + nC'$ . Si  $\Gamma'$  est de bidegré  $(m', n')$ , le théorème I.4 donne :

$$(\Gamma.\Gamma') = (mC + nC').(m'C + n'C') = mn' + nm'$$

**I.10 : Interprétation topologique.** On utilise ici les faisceaux analytiques sur  $S$ , munie de la topologie ordinaire. On note  $h_{\mathcal{O}_S}$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $S$ , considérée comme variété analytique.

Considérons l'application exponentielle  $e : h_{\mathcal{O}_S} \rightarrow h_{\mathcal{O}_S}^*$ , définie par  $e(f) = \exp(2\pi if)$ . Elle est localement surjective (existence locale du logarithme), et son noyau est évidemment formé des fonctions localement constantes à valeurs entières. Autrement dit on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow h_{\mathcal{O}_S} \xrightarrow{e} h_{\mathcal{O}_S}^* \rightarrow 1$$

Considérons la suite exacte longue de cohomologie qui s'en déduit. Comme  $H^0(S, h_{\mathcal{O}_S}) = \mathbb{C}$  et  $H^0(S, h_{\mathcal{O}_S}^*) = \mathbb{C}^*$ , on peut commencer aux  $H^1$  :  
 $0 \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, h_{\mathcal{O}_S}) \rightarrow H^1(S, h_{\mathcal{O}_S}^*) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, h_{\mathcal{O}_S})$ .

On sait que  $H^1(S, h_{\mathcal{O}_S}^*)$  s'identifie canoniquement à  $\text{Pic}(S)$  (il s'agit en principe du Pic analytique, mais on sait par [GAGA] que c'est la même chose. De même on a  $H^1(S, h_{\mathcal{O}_S}) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S)$ ). Le groupe  $\text{Pic}(S)$  apparaît donc comme une extension :

$$0 \rightarrow T \rightarrow \text{Pic}(S) \rightarrow \text{NS}(S) \rightarrow 0$$

de deux groupes de nature différente :

- le groupe  $T = H^1(S, \mathcal{O}_S) / H^1(S, \mathbb{Z})$  est un groupe divisible (la théorie de Hodge montre en fait que  $H^1(S, \mathbb{Z})$  est un réseau dans  $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ , donc que  $T$  admet une structure naturelle de tore complexe) ;
- le groupe  $\text{NS}(S) \subset H^2(S, \mathbb{Z})$  est un groupe de type fini, appelé groupe de Néron-Severi de  $S$ .

L'application  $c : \text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  peut être définie topologiquement comme suit. Soit  $C \subset S$  une courbe irréductible ; la restriction  $H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  définit une forme linéaire sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , donc par dualité de Poincaré un élément  $c(C) \in H^2(S, \mathbb{Z})$  ; on définit  $c(D)$ , pour un diviseur quelconque  $D$ , par linéarité. On a  $c(D).c(D') = (D.D')$  pour  $D, D'$  diviseurs sur  $S$  ; autrement dit la forme d'intersection provient de la forme bilinéaire induite sur  $\text{NS}(S)$  par le cup-produit.

Si  $f$  est un morphisme de  $S$  dans une variété lisse  $X$ , on a  $f^*c(D) = c(f^*D)$  pour tout diviseur  $D$  sur  $X$ . Si de plus  $X$  est une surface, le morphisme de Gysin  $f_* : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  est défini, et on a  $f_*c(D) = c(f_*D)$  pour tout  $D$  sur  $S$ .

Rappelons ici sans démonstration le théorème de dualité de Serre :

Théorème I.11 : Soient  $S$  une surface,  $L$  un fibré en droites sur  $S$ . Notons  $\omega_S$  le fibré des 2-formes différentielles sur  $S$ . Alors l'espace  $H^2(S, \omega_S)$  est de dimension 1 ; pour  $0 \ll i \ll 2$ , l'accouplement donné par le cup-produit :

$$H^i(S, L) \otimes H^{2-i}(S, \omega_S \otimes L^{-1}) \rightarrow H^2(S, \omega_S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

est une dualité. On a en particulier  $\chi(L) = \chi(\omega_S \otimes L^{-1})$ .

On peut maintenant démontrer le théorème de Riemann-Roch :

Théorème I.12 (Riemann-Roch) : Pour tout  $L \in \text{Pic}(S)$ , on a :

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L \cdot \omega_S) .$$

Démonstration : Calculons le produit d'intersection  $(L^{-1} \cdot L \otimes \omega_S^{-1})$  par la formule de définition :

$$(L^{-1} \cdot L \otimes \omega_S^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_S \otimes L^{-1}) + \chi(\omega_S) .$$

Par dualité de Serre, on a  $\chi(\omega_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$  et  $\chi(\omega_S \otimes L^{-1}) = \chi(L)$ , d'où :

$$(L^{-1} \cdot L \otimes \omega_S^{-1}) = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L)) .$$

En utilisant la bilinéarité de la forme d'intersection, on trouve immédiatement la formule de l'énoncé.

I.13 : Remarques. 1) Nous écrirons le plus souvent ces deux théorèmes en termes de diviseurs. On pose  $h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(S, \mathcal{O}_S(D))$  ; d'autre part on note traditionnellement  $K$  un diviseur quelconque tel que  $\mathcal{O}_S(K) = \omega_S$  : on dit que  $K$  est un "diviseur canonique". La dualité de Serre donne l'égalité  $h^i(D) = h^{2-i}(K-D)$  ( $0 \ll i \ll 2$ ) ; le théorème de Riemann-Roch s'écrit alors :

$$h^0(D) + h^0(K-D) - h^1(D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K) .$$



Le plus souvent on n'aura pas d'information sur  $h^1(D)$ , et on utilisera Riemann-Roch sous forme de l'inégalité :

$$h^0(D) + h^0(K-D) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D.K) .$$

2) On a donné le théorème de Riemann-Roch sous sa forme classique. On entend généralement aujourd'hui par théorème de Riemann-Roch la version d'Hirzebruch, qui est la réunion du théorème I.12 et de l'importante formule de M. Noether, que nous admettrons :

**I.14 : Formule de Noether**

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi_{\text{top}}(S))$$

où  $\chi_{\text{top}}(S)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de la surface  $S$  :  $\chi_{\text{top}}(S) = \sum (-1)^i b_i$ , avec  $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$ .

Voici une conséquence importante du théorème de Riemann-Roch :

**I.15 : Formule du genre**. Soit  $C$  une courbe irréductible sur une surface  $S$ . Le genre de  $C$  (défini par  $g(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ ) est donné par la formule :  $g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$ .

Démonstration : La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

donne  $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$  ; la formule découle alors de Riemann-Roch.

Remarques I.16 : 1) On prendra garde que le genre de  $C$  n'est pas égal à celui de sa normalisée. Plus précisément, notons  $f: N \rightarrow C$  la normalisation de  $C$  ; on définit un faisceau  $\delta$  sur  $C$  par la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow f_* \mathcal{O}_N \rightarrow \delta \rightarrow 0 .$$

Le faisceau  $\delta$  est concentré aux points singuliers de  $C$ , de sorte que  $H^1(C, \delta) = 0$ ,  $H^0(C, \delta) = \bigoplus_{x \in C} \delta_x$ . On a  $\delta = 0$  si et seulement si  $f$

est un isomorphisme, i.e.  $C$  est lisse.

La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte précédente donne :

$$g(C) = g(N) + \sum_{x \in C} \dim(\delta_x) .$$

Donc  $g(C) > g(N)$  si  $C$  n'est pas lisse. En particulier la condition  $g(C) = 0$  entraîne que  $C$  est rationnelle et lisse, c'est-à-dire isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ .

2) La formule du genre s'écrit aussi  $2g-2 = \deg(K+C)|_C$  (cf. I.6). Si  $C$  est lisse, on va voir qu'on a en fait  $(\mathcal{O}_S(K+C))|_C = \omega_C$ . Pour cela rappelons que :

Rappel I.17 : Soient  $X, Y$  deux variétés lisses,  $j$  un plongement de  $X$  dans  $Y$ ,  $I$  l'idéal de  $X$  dans  $Y$ . Le faisceau  $j^*I = I/I^2$  sur  $X$  est localement libre de rang  $\text{codim}(X, Y)$ , et on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow I/I^2 \xrightarrow{d} j^*\Omega_Y^1 \xrightarrow{j^*} \Omega_X^1 \rightarrow 0 .$$

Revenons au cas  $C \subset S$  : alors  $I = \mathcal{O}_S(-C)$ , et la suite exacte précédente s'écrit :  $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C)|_C \rightarrow \Omega_S^1|_C \rightarrow \omega_C \rightarrow 0$ . En considérant les puissances extérieures, on obtient l'égalité annoncée.

(Si  $C$  est singulière, on a encore  $(\mathcal{O}_S(K+C))|_C = \omega_C$ , où  $\omega_C$  est le faisceau dualisant de  $C$ . Mais nous n'utiliserons pas la théorie de la dualité pour les courbes singulières).

#### Note historique

Les résultats de ce chapitre constituent la base de la théorie des surfaces ; ils sont tous connus avant 1900. Les systèmes linéaires, bien connus sur les courbes, sont introduits en toute généralité sur les surfaces par Max Noether ([N1]), puis étudiés très complètement par

Enriques ([E1]). La formule du genre est démontrée en 1886 par Noether ([N2]), qui en déduit le théorème de Riemann-Roch - mais en supposant implicitement  $h^1(D) = h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ . La version correcte est donnée en 1896 par Enriques ([E1]), s'appuyant sur un résultat de Castelnuovo.

La formule de Noether est démontrée dans [N1] ; Noether projette la surface birationnellement sur une surface (singulière) de  $\mathbb{P}^3$ , et calcule explicitement les 3 invariants qui entrent dans la formule (le rôle de  $\chi_{\text{top}}$  est joué par "l'invariant de Zeuthen-Segre").

Ces géomètres ne considèrent que des courbes effectives ; toutefois la nécessité d'introduire des "courbes virtuelles", i.e. des diviseurs, est très vite ressentie, en particulier par Severi. La théorie est alors achevée ; mais l'introduction des faisceaux cohérents par Serre en 1955 ([FAC]) en modifie totalement la présentation, rendant la plupart des résultats formels. En 1956 Hirzebruch généralise le théorème de Riemann-Roch aux variétés de dimension quelconque ([H]). Sa version contient la formule de Noether ; indiquons brièvement l'idée de sa démonstration.

Un calcul formel de classes caractéristiques donne l'égalité

$p_1 = K^2 - 2\chi_{\text{top}}(S)$ , où  $p_1$  est la (première) classe de Pontrjagin de  $S$ . La théorie du cobordisme montre que  $p_1 = 3\tau$ , où  $\tau$  est la signature de la forme d'intersection sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  ; en effet les deux termes de l'égalité sont invariants par cobordisme, et ils coïncident sur  $\mathbb{P}^2$ . Enfin la théorie de Hodge donne la formule  $\tau = 2 + 4h^2(\mathcal{O}_S) - b_2 = 4\chi(\mathcal{O}_S) - \chi_{\text{top}}(S)$ .

On en conclut :

$$K^2 + \chi_{\text{top}}(S) = 3\tau + 3\chi_{\text{top}}(S) = 12\chi(\mathcal{O}_S) .$$

On a suivi à peu près ici l'exposé de Mumford dans [M1].

## CHAPITRE II

### APPLICATIONS BIRATIONNELLES

Avant de commencer à classifier, il faut savoir quand est-ce que l'on décidera que deux des objets qu'on veut classifier sont équivalents. En géométrie algébrique, on peut classifier les variétés à isomorphisme près, ou, plus grossièrement, à isomorphisme birationnel près. Le problème ne se pose pas pour les courbes, puisqu'une application rationnelle d'une courbe lisse dans une autre est en fait un morphisme. Pour les surfaces, on va voir que la structure des applications birationnelles est très simple : ce sont des composés d'applications birationnelles "élémentaires", à savoir les éclatements. Signalons que le problème est beaucoup plus compliqué en dimension supérieure.

II.1 Rappel : éclatements.

Soit  $S$  une surface,  $p \in S$ . Il existe une surface  $\hat{S}$  et un morphisme  $\epsilon : \hat{S} \rightarrow S$ , uniques à isomorphisme près, tels que :

- la restriction de  $\epsilon$  à  $\epsilon^{-1}(S-p)$  est un isomorphisme sur  $S-p$  ;

-  $\epsilon^{-1}(p) = E$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ .

On dit que  $\epsilon$  est l'éclatement de  $S$  en  $p$ , et  $E$  la droite exceptionnelle de l'éclatement.

Rappelons rapidement la construction de  $\epsilon$  : soit  $U$  un ouvert contenant  $p$  tel qu'il existe un système de coordonnées locales  $(x, y)$

en  $p$  (i.e. les courbes  $x=0$ ,  $y=0$  se coupent transversalement en  $p$ ). On peut supposer que  $p$  est le seul point de  $U$  situé sur les deux courbes  $x=0$ ,  $y=0$ . Soit  $\hat{U} \subset U \times \mathbb{P}^1$  la sous-variété d'équation  $xY - yX = 0$  ( $X, Y$  étant des coordonnées homogènes sur  $\mathbb{P}^1$ ). Il est clair que la projection  $\varepsilon : \hat{U} \rightarrow U$  est un isomorphisme au-dessus des points de  $U$  où au moins une des coordonnées  $x, y$  est non nulle, tandis que  $\varepsilon^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ . On obtient  $\hat{S}$  en recollant  $\hat{U}$  et  $S-p$  le long de  $\hat{U} - \varepsilon^{-1}(p) \cong U-p$ .

Il résulte de cette construction que les points de  $E$  s'identifient naturellement aux directions tangentes sur  $S$  au point  $p$ . Soit  $\varepsilon : \hat{S} \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p$ ; considérons une courbe irréductible  $C$  sur  $S$ , passant par  $p$  avec multiplicité  $m$ . L'adhérence de  $\varepsilon^{-1}(C-p)$  dans  $\hat{S}$  est une courbe irréductible  $\hat{C}$  sur  $\hat{S}$ , qu'on appelle le transformé strict de  $C$  dans  $\hat{S}$ .

Lemme II.2 :  $\varepsilon^* C = \hat{C} + mE$ .

Démonstration : Il est clair que  $\varepsilon^* C = \hat{C} + kE$ , où  $k \in \mathbb{N}$ . Choisissons un système de coordonnées  $(x, y)$  dans un voisinage  $U$  de  $p$  tel que la courbe  $y=0$  ne soit tangente à aucune branche de  $C$  en  $p$ ; dans l'anneau local complété  $\hat{\mathcal{O}}_{S,p}$ , l'équation de  $C$  s'écrit comme une série formelle :

$$f = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \dots$$

où les  $f_k$  sont des polynômes homogènes de degré  $k$  en  $x, y$ ; l'entier  $m$  est par définition la multiplicité de  $C$  en  $p$ , et l'on a  $f_m(x, 0) \neq 0$ . Construisons comme précédemment  $\hat{U} \subset U \times \mathbb{P}^1$ ; au voisinage du point  $(p, \infty)$  de  $\hat{U}$ , on peut prendre comme coordonnées locales  $x$  et  $t = \frac{y}{x}$ . On a alors :

$$\varepsilon^* f = f(x, tx) = x^m [f_m(1, t) + x f_{m+1}(1, t) + \dots].$$

Il en résulte aussitôt que  $k=m$ .

Proposition II.3 : Soient  $S$  une surface,  $\varepsilon : \hat{S} \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p$ ,  $E$  la droite exceptionnelle.

(i) L'application de  $\text{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}$  sur  $\text{Pic}(\hat{S})$ , définie par  $(D, n) \mapsto \varepsilon^* D + nE$ , est un isomorphisme.

(ii) Soient  $D, D'$  deux diviseurs sur  $S$ ; on a :

$$(\varepsilon^* D \cdot \varepsilon^* D') = (D \cdot D') \quad (E \cdot \varepsilon^* D) = 0 \quad E^2 = -1 .$$

(iii) On a  $\text{NS}(\hat{S}) \cong \text{NS}(S) \oplus \mathbb{Z} \cdot [E]$  .

(iv) On a  $K_{\hat{S}} = \varepsilon^* K_S + E$  .

Démonstration : Démontrons d'abord (ii). Pour prouver les deux premières formules, on peut remplacer  $D$  et  $D'$  par des diviseurs linéairement équivalents (théorème I.4) ; on peut donc supposer qu'aucune composante de  $D$  et  $D'$  ne passe par  $p$ . Les deux formules sont alors immédiates.

Enfin choisissons une courbe  $C$  passant par  $p$  avec multiplicité 1. Son transformé strict  $\hat{C}$  rencontre  $E$  transversalement en un point, qui correspond (dans  $E$ ) à la direction tangente à  $C$  en  $p$ . On a donc  $\hat{C} \cdot E = 1$  ; comme  $\hat{C} = \varepsilon^* C - E$  (lemme II.2) et  $\varepsilon^* C \cdot E = 0$ , on en déduit  $E^2 = -1$  .

Démontrons (i). Toute courbe irréductible sur  $\hat{S}$ , différente de  $E$ , est le transformé strict de son image sur  $S$  ; il en résulte aussitôt que l'application considérée est surjective. Supposons qu'il existe un diviseur  $D$  sur  $S$  et un entier  $n$  tel que  $\varepsilon^* D + nE \equiv 0$ . Par produit avec  $E$ , on trouve  $n=0$  ; en appliquant  $\varepsilon_*$ , on trouve  $D=0$ . Ceci prouve (i).

Compte tenu du fait que  $\varepsilon_*$  et  $\varepsilon^*$  sont définis au niveau du groupe de Néron-Severi (I.10), la même démonstration donne (iii).

Démontrons enfin (iv). On peut trouver une 2-forme méromorphe  $\omega$  sur  $S$ , telle que  $\omega$  soit holomorphe au voisinage de  $p$  et  $\omega(p) \neq 0$ . Il est clair qu'en dehors de  $E$ , les zéros ou les pôles de  $\varepsilon^* \omega$  sont

ceux de  $\omega$  (via  $\varepsilon$ ) ; donc  $\text{div}(\varepsilon^* \omega) = \varepsilon^* \text{div}(\omega) + kE$  , et il reste à montrer que  $k=1$  . Soit  $(x,y)$  un système de coordonnées locales en  $p$  ; dans un voisinage  $U$  de  $p$  , on a  $\omega = a \, dx \wedge dy$  , avec  $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  ,  $a(p) \neq 0$  . Construisons comme plus haut l'éclaté  $\hat{U} \subset U \times \mathbb{P}^1$  ; au voisinage de  $(p, \infty) \in \hat{U}$  , on peut prendre comme coordonnées locales  $x$  et  $t = \frac{y}{x}$  ; alors :

$$\varepsilon^* \omega = (\varepsilon^* a) \cdot dx \wedge d(tx) = (\varepsilon^* a) x \, dx \wedge dt$$

s'annule avec multiplicité 1 sur  $E$  , d'où (iv).

Nous pouvons maintenant aborder les théorèmes fondamentaux de la géométrie birationnelle des surfaces. Il nous faut commencer par quelques rappels.

Rappel II.4 : Applications rationnelles.

Soient  $X$  une variété irréductible,  $Y$  une variété. Une application rationnelle  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  est un morphisme d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $Y$  , qui n'est pas la restriction d'un morphisme  $U' \rightarrow X$  avec  $U' \not\supseteq U$  . On dit que  $\varphi$  est définie en  $x$  si  $x \in U$  .

Supposons que  $X$  soit une surface (lisse). Alors  $U$  est de la forme  $X-F$  , où  $F$  est un ensemble fini (pour le prouver on se ramène aussitôt au cas  $Y = \mathbb{P}^n$  , puis  $Y = \mathbb{P}^1$  , i.e. au cas où  $\varphi$  est une fonction rationnelle ; alors les points où  $\varphi$  n'est pas définie sont les points d'intersection du diviseur des zéros et du diviseur des pôles de  $\varphi$  , ils forment donc un ensemble fini). Voici deux applications de ce résultat :

a) Soit  $C$  une courbe irréductible sur  $S$  ; alors  $\varphi$  est définie sur  $C-F$  . En particulier on peut parler de l'image de  $C$  , notée  $\varphi(C)$  : on pose  $\varphi(C) = \overline{\varphi(C-F)}$  . De même on pose  $\varphi(S) = \overline{\varphi(S-F)}$  .

b) Le groupe des diviseurs sur  $S$  est isomorphe (par restriction) au groupe des diviseurs sur  $S-F$ , et on a un isomorphisme  $\text{Pic}(S) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(S-F)$ . Ceci permet de parler de l'image inverse par  $\varphi$  d'un diviseur  $D$  (resp. d'un système linéaire  $P$ , resp. d'un faisceau inversible  $L$ ) sur  $Y$ ; on le notera  $\varphi^*D$  (resp.  $\varphi^*P$ ,  $\varphi^*L$ ).

Rappel II.5 : Systèmes linéaires.

Si  $D$  est un diviseur sur la surface  $S$ , on note  $|D|$  l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à  $D$ . Toute section non nulle de  $\mathcal{O}_S(D)$  admet comme diviseur des zéros un élément de  $|D|$ , et inversement tout élément de  $|D|$  est le diviseur des zéros d'une section  $\neq 0$  de  $\mathcal{O}_S(D)$ , déterminée à multiplication scalaire près; par suite  $|D|$  s'identifie naturellement à l'espace projectif associé à l'espace vectoriel  $H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ . Une sous-variété linéaire  $P \subset |D|$  est appelée système linéaire sur  $S$ ; elle peut aussi être définie par la donnée d'un sous-espace vectoriel de  $H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ . On dit que le système est complet si  $P = |D|$ . La dimension du système linéaire est par définition la dimension de l'espace projectif  $P$ . Un système linéaire de dimension un est appelé un pinceau (on évite d'utiliser le mot faisceau, qui prête à une confusion évidente!).

On dit qu'une courbe  $C$  est une composante fixe de  $P$  si tout diviseur de  $P$  contient  $C$ ; on appelle partie fixe de  $P$  le plus grand diviseur  $F$  contenu dans tous les diviseurs de  $P$ . Le système linéaire  $|D-F|$ , pour  $D \in P$ , est sans composantes fixes.

On dit qu'un point  $p$  de  $S$  est un point base (ou point fixe) de  $P$  si tous les diviseurs de  $P$  passent par  $p$ . Si le système linéaire  $P$  est sans composantes fixes, il n'a qu'un nombre fini  $b$  de points bases; il est clair que  $b \ll D^2$  ( $D \in P$ ).

Rappel II.6 : Applications rationnelles et systèmes linéaires.

Soit  $S$  une surface. Il y a une correspondance bijective entre :



- les applications rationnelles  $\varphi$  de  $S$  dans  $\mathbb{P}^n$  telles que  $\varphi(S)$  n'est pas contenu dans un hyperplan ;
- les systèmes linéaires sans composante fixe sur  $S$ , de dimension  $n$ .

Indiquons la correspondance dans les deux sens : à l'application  $\varphi$  on associe le système linéaire  $\varphi^*|H|$ , où  $|H|$  est le système des hyperplans de  $\mathbb{P}^n$  (cf. II.4). Inversement, soit  $P$  un système linéaire sans composante fixe sur  $S$ , et notons  $\check{P}$  l'espace projectif dual de  $P$ . On définit une application rationnelle  $\varphi : S \dashrightarrow \check{P}$  de la façon suivante : à tout point  $s$  de  $S$  qui n'est pas un point base de  $P$  on associe l'hyperplan de  $P$  formé des diviseurs passant par  $s$ .

Il résulte de cette construction que les points où  $\varphi$  n'est pas définie sont exactement les points bases du système linéaire  $P$ .

Théorème II.7 ("élimination des indéterminations") : Soit  $\varphi$  une application rationnelle d'une surface  $S$  dans une variété projective  $X$ . Il existe une surface  $S'$ , un morphisme  $\eta : S' \rightarrow S$ , composé d'un nombre fini d'éclatements, et un morphisme  $f : S' \rightarrow X$  tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & S' & \\
 \eta \swarrow & & \searrow f \\
 S & \xrightarrow{\varphi} & X
 \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration : Puisque  $X$  est contenu dans un espace projectif, il suffit de démontrer le théorème avec  $X = \mathbb{P}^m$ . De plus on peut supposer que l'image de  $\varphi$  n'est pas contenue dans un hyperplan de  $\mathbb{P}^m$ . L'application rationnelle  $\varphi$  correspond alors à un système linéaire  $P \subset |D|$  de dimension  $m$  sur  $S$ , sans composantes fixes. Si  $P$  n'a pas de point base,  $\varphi$  est un morphisme - auquel cas le théorème est bien sûr vrai.

Supposons donc que  $P$  admette des points bases ; considérons l'éclatement  $\varepsilon : S_1 \rightarrow S$  de l'un de ces points. Le système linéaire  $\varepsilon^* P \subset |\varepsilon^* D|$  admet la droite exceptionnelle  $E$  comme composante fixe, avec une certaine multiplicité  $k \gg 1$  : cela signifie que le système  $\hat{P} \subset |\varepsilon^* D - kE|$ , obtenu en retranchant  $kE$  de chaque diviseur de  $\varepsilon^* P$ , n'a pas de composante fixe. Il définit donc une application rationnelle  $\varphi_1 : S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ , qui coïncide avec  $\varphi \circ \varepsilon$ . Si  $\varphi_1$  est un morphisme, le théorème est démontré ; sinon, on recommence le procédé. On construit ainsi par récurrence une suite d'éclatements  $\varepsilon_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$  et un système linéaire sur  $S_n$  sans composante fixe  $P_n \subset |D_n|$ , avec  $D_n = \varepsilon_n^* D_{n-1} - k_n E_n$ . En utilisant II.3 (ii) on obtient :

$$D_n^2 = D_{n-1}^2 - k_n^2 < D_{n-1}^2 .$$

Comme  $P_n$  n'a pas de composante fixe, on a  $D_n^2 \gg 0$  pour tout  $n$ . Ceci montre que le procédé ne peut continuer indéfiniment, c'est-à-dire qu'on arrive nécessairement à un système  $P_n$  sans point base ; il définit donc un morphisme  $f : S_n \rightarrow \mathbb{P}^m$  qui répond à la question.

On remarquera que la démonstration donne une méthode explicite pour construire  $S'$  et  $f$  ; elle donne de plus une borne supérieure au nombre  $n$  d'éclatements nécessaires, à savoir  $n < D^2$ .

Proposition II.8 (propriété universelle de l'éclatement) : Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme birationnel de surfaces ; on suppose que l'application rationnelle  $f^{-1}$  n'est pas définie en un point  $p$  de  $S$ . Alors  $f$  se factorise en :

$$f : X \xrightarrow{g} \hat{S} \xrightarrow{\varepsilon} S$$

où  $g$  est un morphisme birationnel, et  $\varepsilon$  l'éclatement de  $S$  en  $p$ .

Lemme II.9 : Soient  $S$  une surface irréductible mais non nécessairement lisse,  $S'$  une surface lisse,  $f : S \rightarrow S'$  un morphisme bira-

tionnel. On suppose que l'application rationnelle  $f^{-1}$  n'est pas définie en un point  $p$  de  $S'$ . Alors  $f^{-1}(p)$  est une courbe sur  $S$ .

Démonstration : On peut supposer  $S$  affine (avec  $f^{-1}(p) \neq \emptyset$ ), de sorte qu'il existe un plongement  $j : S \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ . L'application rationnelle  $j \circ f^{-1} : S' \dashrightarrow \mathbb{A}^n$  est définie par  $n$  fonctions rationnelles  $g_1, \dots, g_n$ ; l'une d'elles - par exemple  $g_1$  - n'est pas définie en  $p$ , i.e. n'appartient pas à l'anneau local  $\mathcal{O}_p$  de  $S$  en  $p$ . Ecrivons  $g_1 = \frac{u}{v}$ , avec  $u, v \in \mathcal{O}_p$ ,  $u$  et  $v$  sans facteurs communs, et  $v(p) = 0$ . Considérons la courbe  $D$  sur  $S$  définie par  $f^*v = 0$ . Sur  $S$ , on a :

$$f^*u = x_1 \cdot f^*v$$

où  $x_1$  est la fonction "première coordonnée" sur  $S \subset \mathbb{A}^n$ . Par suite on a  $f^*u = f^*v = 0$  sur  $D$ , soit  $D = f^{-1}(Z)$  où  $Z$  est le sous-ensemble de  $S'$  défini par  $u=v=0$ . Or  $Z$  est fini (sans quoi  $u$  et  $v$  auraient un facteur commun); quitte à restreindre  $S'$  on peut donc supposer  $Z = \{p\}$ . On a alors  $D = f^{-1}(p)$  ensemblistement.

Lemme II.10 : Soit  $\varphi : S \dashrightarrow S'$  une application birationnelle de surfaces, telle que  $\varphi^{-1}$  ne soit pas définie en un point  $p$  de  $S'$ . Il existe une courbe  $C$  sur  $S$  telle que  $\varphi(C) = p$ .

Démonstration : L'application  $\varphi$  correspond à un morphisme  $f$  d'un ouvert  $U$  de  $S$  dans  $S'$ . Notons  $\Gamma \subset U \times S'$  le graphe de  $f$ , i.e. l'ensemble des points  $(u, f(u))$  pour  $u \in U$ ; soit  $S_1$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $S \times S'$ . C'est une surface irréductible, pouvant admettre des singularités; les deux projections  $q, q'$  de  $S_1$  sur  $S, S'$  sont des morphismes birationnels, et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ q \swarrow & & \searrow q' \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S' \end{array}$$

est commutatif.

Puisque  $\varphi^{-1}$  n'est pas définie au point  $p$  de  $S'$ ,  $q'^{-1}$  n'est pas définie en  $p$ . Il résulte du lemme II.9 qu'il existe une courbe irréductible  $C_1 \subset S_1$  telle que  $q'(C_1) = p$ . Comme  $S_1 \subset S \times S'$ , l'image  $q(C_1)$  est une courbe  $C$  dans  $S$ , qui vérifie  $\varphi(C) = p$ .

Démonstration de la proposition II.8 : Notons  $g$  l'application birationnelle  $\varepsilon^{-1} \circ f$ , et  $s = g^{-1}$ . Supposons que  $g$  ne soit pas définie en un point  $q$  de  $X$ . Le lemme II.10 montre qu'il existe une courbe  $C \subset \hat{S}$  telle que  $s(C) = q$ ; ceci entraîne  $\varepsilon(C) = f(q)$ , donc  $C = E$  et  $f(q) = p$ . Notons  $\mathcal{O}_q$  l'anneau local de  $X$  en  $q$ ,  $m_q$  son idéal maximal. Il existe une coordonnée locale  $y$  sur  $S$  en  $p$  telle que  $f^*y \in m_q^2$ . Soit en effet  $(x, t)$  un système de coordonnées locales en  $p$ ; si  $g^*t$  n'appartient pas à  $m_q^2$ , il s'annule sur  $g^{-1}(p)$  avec multiplicité 1, et définit donc une équation pour  $g^{-1}(p)$  dans  $\mathcal{O}_q$ . On a alors  $g^*x = u.g^*t$ , avec  $u \in \mathcal{O}_q$ . Posant  $y = x - u(q).t$ , on obtient  $g^*y = (u - u(q)).g^*t \in m_q^2$ .

Soit alors  $e$  un point quelconque de  $E$  où l'application  $s$  est définie; on a :  $s^*g^*y = \varepsilon^*y \in m_e^2$  et ce pour tout  $e$  dans  $E$  moins un ensemble fini. Mais il résulte de la construction de l'éclatement que  $\varepsilon^*y$  est une coordonnée locale en tous les points de  $E$  sauf un, d'où contradiction.

Théorème II.11 : Soit  $f : S \rightarrow S_0$  un morphisme birationnel de surfaces. Il existe des éclatements  $\varepsilon_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), et un isomorphisme  $u : S \xrightarrow{\sim} S_n$  tels que  $f = \varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_n \circ u$ .

Démonstration : Si  $f$  est un isomorphisme, le théorème est évident; sinon il existe un point  $p$  sur  $S_0$  tel que  $f^{-1}$  n'est pas défini en  $p$ . D'après la proposition II.8,  $f$  se factorise en  $\varepsilon_1 \circ f_1$ , où  $\varepsilon_1$  est l'éclatement de  $S_0$  en  $p$  et  $f_1 : S \rightarrow S_1$  un morphisme birationnel. En supposant le théorème faux, on construit ainsi par récurrence une

suite infinie d'éclatements  $\varepsilon_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$  et des morphismes birationnels  $f_k : S \rightarrow S_k$ , tels que  $\varepsilon_k \circ f_k = f_{k-1}$ . Notons  $n(f_k)$  le nombre de courbes irréductibles qui sont contractées sur un point par  $f_k$ . Comme  $\varepsilon_k \circ f_k = f_{k-1}$ , il est clair que toute courbe contractée par  $f_k$  est contractée par  $f_{k-1}$ ; de plus il existe au moins une courbe irréductible  $C$  sur  $S_k$  telle que  $f_k(C)$  soit le diviseur exceptionnel de  $\varepsilon_k$ , et que par suite  $C$  soit contractée par  $f_{k-1}$  et non par  $f_k$ . On a donc  $n(f_k) < n(f_{k-1})$ , d'où  $n(f_k) < 0$  pour  $k$  assez grand, ce qui est impossible.

Corollaire II.12 : Soit  $\varphi : S \dashrightarrow S'$  une application birationnelle de surfaces. Il existe une surface  $\hat{S}$  et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \hat{S} & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S' \end{array}$$

où les morphismes  $f$  et  $g$  sont composés d'éclatements et d'isomorphismes.

Démonstration : Cela résulte immédiatement du théorème II.7 et du théorème II.11 .

Remarques II.13 : 1) Soit  $f : S \rightarrow S'$  un morphisme birationnel de surfaces, composé de  $n$  éclatements (et d'un isomorphisme). On déduit de II.1 (iii) que  $NS(S) \cong NS(S') \oplus \mathbb{Z}^n$ ; comme les groupes de Néron-Severi sont de type fini, cette formule détermine l'entier  $n$ , qui est donc indépendant de la factorisation choisie. Il en résulte aussi que tout morphisme birationnel de  $S$  dans elle-même est un isomorphisme.

2) L'éclatement  $\varepsilon : \hat{S} \rightarrow S$  d'un point  $p$  possède aussi une propriété universelle "dans l'autre sens" : tout morphisme  $f$  de  $\hat{S}$  dans une variété  $X$  qui contracte  $E$  sur un point se factorise en  $g \circ \varepsilon$ , où  $g$  est un morphisme de  $S$  dans  $X$ . La démonstration est

cette fois très facile : on se ramène aussitôt au cas  $X$  affine, puis  $X = \mathbb{A}^n$ , puis  $X = \mathbb{A}^1$  ; alors  $f$  définit une fonction sur  $S-p$ , mais toute fonction sur  $S-p$  est la restriction d'une fonction sur  $S$ , d'où le résultat.

II.14 Exemples : 1) Soient  $S \subset \mathbb{P}^n$  une surface,  $p \in S$ . L'ensemble des droites passant par  $p$  s'identifie à un espace projectif  $\mathbb{P}^{n-1}$ . En associant à tout point  $q$  de  $S$  ( $q \neq p$ ) la droite  $\langle qp \rangle$ , on définit une application rationnelle  $S \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ , qu'on appelle la projection de centre  $p$ . Elle est définie en dehors de  $p$  ; on vérifie facilement qu'elle s'étend en un morphisme  $\hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ , où  $\hat{S}$  est l'éclaté de  $S$  en  $p$ .

2) Considérons en particulier une quadrique lisse  $Q \subset \mathbb{P}^3$ . La projection depuis un point  $p$  de  $Q$  définit un morphisme  $f: \hat{Q} \rightarrow \mathbb{P}^2$ . L'image inverse d'un point de  $\mathbb{P}^2$ , correspondant à une droite  $\ell$  passant par  $p$ , est formée du second point d'intersection de  $\ell$  avec  $Q$  - sauf si  $\ell$  est contenue dans  $Q$ , auquel cas on trouve tous les points de  $\ell$ . Par suite  $f$  est un morphisme birationnel, qui contracte les deux génératrices de  $Q$  passant par  $p$  (ces deux génératrices sont disjointes dans  $\hat{Q}$ ). On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \hat{Q} & \\ \epsilon \swarrow & & \searrow f \\ Q & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

où  $f$  est - à isomorphisme près - l'éclatement de deux points distincts dans  $\mathbb{P}^2$ , et  $\epsilon$  l'éclatement de  $p$  dans  $Q$ .

3) Soient  $p, q, r$  3 points non alignés dans  $\mathbb{P}^2$ ,  $P$  le système linéaire (de dimension 2) des coniques passant par ces trois points. Il définit une application rationnelle  $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \check{P} \cong \mathbb{P}^2$ , appelée "transformation quadratique". Le système  $P$  a 3 points bases  $p, q, r$ , et on vérifie que  $\varphi$  s'étend en un morphisme  $f: S \rightarrow \check{P}$ , où  $S$  est

l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $p, q, r$ . Soit  $x \in \mathbb{P}^2$ , correspondant à un pinceau de coniques  $\lambda C_1 + \mu C_2$ , avec  $C_1, C_2 \in \mathbb{P}$ ;  $f^{-1}(x)$  contient les points bases de ce pinceau sur  $S$ , c'est-à-dire les points de  $\hat{C}_1 \cap \hat{C}_2$  ( $\hat{C}_i$  désignant le transformé strict de  $C_i$ ). Il y a deux possibilités :

a)  $C_1 \cap C_2$  se compose de 4 points :  $p, q, r$  et un 4e point  $s$ , qui est l'unique point de  $f^{-1}(x)$ .

b)  $C_1$  et  $C_2$  contiennent une droite commune  $\ell$ ; alors  $C_1 \cap C_2 = \ell \cup \{t\}$ , avec  $t \in \mathbb{P}^2$ . Ceci n'est possible que si  $t$  est l'un des 3 points  $p, q, r$  et  $\ell$  passe par les deux autres points, ce qui donne trois pinceaux  $x, y, z \in \mathbb{P}$ .

Par suite  $\varphi$  est birationnelle, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \varepsilon \swarrow & & \searrow f \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P} = \mathbb{P}^2 \end{array}$$

où  $\varepsilon$  est l'éclatement de  $p, q, r$  dans  $\mathbb{P}^2$ , et  $f$  est (à isomorphisme près) l'éclatement de  $x, y, z$  dans  $\mathbb{P}$ .

On va maintenant comparer la classification birationnelle des surfaces et la classification à isomorphisme près. Pour toute surface  $S$ , notons  $B(S)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces birationnellement isomorphes à  $S$ . Si  $S_1, S_2 \in B(S)$ , on dit que  $S_1$  domine  $S_2$  s'il existe un morphisme birationnel de  $S_1$  dans  $S_2$ . Compte tenu de la remarque II.13 1), on introduit ainsi une relation d'ordre sur  $B(S)$ .

Définition II.15 : On dit qu'une surface  $S$  est minimale si sa classe dans  $B(S)$  est minimale, c'est-à-dire si tout morphisme birationnel de  $S$  dans une surface  $S'$  est un isomorphisme.

Proposition II.16 : Toute surface domine une surface minimale.

Démonstration : Soit  $S$  une surface. Si  $S$  n'est pas minimale, il existe un morphisme birationnel  $S \rightarrow S_1$  qui n'est pas un isomorphisme. Si  $S_1$  n'est pas minimale, il existe de même un morphisme birationnel  $S_1 \rightarrow S_2$ , et ainsi de suite ; comme :

$$\text{rg NS}(S) > \text{rg NS}(S_1) > \text{rg NS}(S_2) > \dots \quad (\text{remarque II.13.1})$$

on arrive nécessairement à une surface minimale dominée par  $S$ .

Les éléments de  $B(S)$  sont donc obtenus à partir des éléments minimaux par des éclatements successifs. Nous verrons plus loin qu'à l'exception des surfaces réglées (i.e. birationnellement isomorphes à  $C \times \mathbb{P}^1$ , où  $C$  est une courbe), toute surface admet un unique modèle minimal. Le problème de la classification des surfaces se ramifie donc en deux branches : d'un côté les surfaces réglées, qui sont connues du point de vue birationnel mais dont on cherchera les modèles minimaux ; de l'autre les surfaces non réglées, pour lesquelles la classification "birégulière" revient essentiellement au même que la classification birationnelle : il suffira de classer les surfaces minimales.

Disons qu'une courbe  $E \subset S$  est exceptionnelle si elle est la droite exceptionnelle d'un éclatement  $\varepsilon : S \rightarrow S'$  ( $S'$  surface lisse) ; une courbe exceptionnelle  $E$  est donc isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , et vérifie  $E^2 = -1$ . Il résulte du théorème II.11 qu'une surface est minimale si et seulement si elle ne contient pas de courbe exceptionnelle.

On va terminer ce chapitre avec un théorème plus difficile que les précédents, qui caractérise numériquement les courbes exceptionnelles :

Théorème II.17 (Critère de contraction de Castelnuovo) : Soient  $S$  une surface,  $E \subset S$  une courbe isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , telle que  $E^2 = -1$ .



Alors E est une courbe exceptionnelle sur S .

Démonstration : L'idée consiste à modifier une section hyperplane de S de façon que le morphisme dans  $\mathbb{P}^n$  qu'elle définit soit encore un plongement en dehors de E , mais contracte E sur un point. Il faut ensuite montrer (c'est le point délicat) que la surface image obtenue est lisse.

a) Soit H une section hyperplane de S vérifiant  $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = (0)$  (une telle section existe car par un théorème général de Serre on a, pour toute section hyperplane H' :  $H^1(S, \mathcal{O}_S(nH')) = (0)$  pour n assez grand : cf. [FAC]). Posons  $k = (H.E)$  et  $H' = H+kE$ . Comme les faisceaux inversibles sur E sont déterminés par leur degré, on a  $\mathcal{O}_S(H)|_E = \mathcal{O}_E(k)$ ,  $\mathcal{O}_S(E)|_E = \mathcal{O}_E(-1)$  et  $\mathcal{O}_S(H')|_E = \mathcal{O}_E$ . Notons s une section de  $\mathcal{O}_S(E)$  dont le diviseur des zéros est E. Considérons les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(H+(i-1)E) \rightarrow \mathcal{O}_S(H+iE) \rightarrow \mathcal{O}_E(k-i) \rightarrow 0 \quad (1 \ll i \ll k)$$

Comme  $H^1(E, \mathcal{O}_E(r)) = (0)$  pour  $r \gg 0$ , on en déduit des suites exactes longues :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H+(i-1)E)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H+iE)) \xrightarrow{r_i} H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i)) \rightarrow \\ H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(i-1)E)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(H+iE)) \rightarrow 0 \quad (1 \ll i \ll k). \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur i que  $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+iE)) = (0)$  pour  $1 \ll i \ll k$ , et que l'application de restriction  $r_i$  est surjective.

Choisissons :

- une base  $s_0, \dots, s_n$  de  $H^0(S, \mathcal{O}_S(H))$  ;
- pour  $1 \ll i \ll k$ , des éléments  $a_{i,0}, \dots, a_{i,k-i}$  de  $H^0(S, \mathcal{O}_S(H+iE))$  tels que les  $r_i(a_{i,j})$  ( $0 \ll j \ll k-i$ ) forment une base de  $H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i))$ .

Alors les éléments :

$$s^k s_0, \dots, s^k s_n ; s^{k-1} a_{1,0}, \dots, s^{k-1} a_{1,k-1}; \dots; s a_{k-1,0}, s a_{k-1,1}; a_{k,0}$$

forment une base de  $H^0(S, \mathcal{O}_S(H'))$ . Notons  $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  l'application rationnelle définie par ces éléments. Comme l'application définie par  $(s_0, \dots, s_n)$  est un plongement, on voit que la restriction de  $\varphi$  à  $S-E$  est un plongement ; comme  $a_{k,0}$  induit sur  $E$  une fonction constante non nulle, on voit que  $\varphi$  est partout définie, et qu'elle contracte  $E$  sur le point  $p = (0, \dots, 0, 1)$ . Notons  $S'$  la surface (peut-être singulière) image de  $\varphi$  ; on a obtenu un morphisme  $\varepsilon : S \rightarrow S'$ , qui est un isomorphisme en dehors de  $E$  et qui contracte  $E$  sur le point  $p$  de  $S'$ . Il suffit maintenant (compte tenu du théorème II.11) de prouver que  $S'$  est lisse en  $p$ .

b) Soit  $U \subset S$  l'ouvert (contenant  $E$ ) où  $a_{k,0} \neq 0$ . Notons  $x, y$  les sections de  $H^0(U, \mathcal{O}_U(-E))$  définies par :

$$x = \frac{a_{k-1,0}}{a_{k,0}} \quad y = \frac{a_{k-1,1}}{a_{k,0}}$$

leurs restrictions à  $E$  forment une base de  $H^0(E, \mathcal{O}_E(1))$  ; par suite, quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer que  $x$  et  $y$  ne s'annulent pas simultanément sur  $U$ . Elles définissent donc un morphisme  $h_2 : U \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Les fonctions  $sx, sy$  sur  $U$  définissent un morphisme  $h_1 : U \rightarrow \mathbb{A}^2$  ; le morphisme  $(h_1, h_2)$  de  $U$  dans  $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$  se factorise en  $h : U \rightarrow \hat{\mathbb{A}}^2$ , où  $\hat{\mathbb{A}}^2$  désigne l'éclaté de  $\mathbb{A}^2$  à l'origine (considéré comme sous-variété de  $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ , cf. II.1). Le morphisme  $h$  possède les propriétés suivantes :

- (i) La restriction de  $h$  à  $E$  est un isomorphisme sur la droite exceptionnelle de  $\hat{\mathbb{A}}^2$  ;
- (ii) pour tout point  $q$  de  $E$ ,  $h$  est étale au voisinage de  $q$ .

En effet, (i) résulte du choix de  $x, y$ . Pour prouver (ii), il faut montrer que l'image inverse par  $h$  d'un système de coordonnées locales en  $h(q)$  est un système de coordonnées locales en  $q$ . Notons  $u, v$  (resp.  $U, V$ ) les coordonnées naturelles sur  $\mathbb{A}^2$  (resp.  $\mathbb{P}^1$ ) ;

rappelons que  $\hat{\mathbb{A}}^2$  est défini dans  $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$  par l'équation  $uV - vU = 0$ . On peut supposer que  $x(q) = 0$ ,  $y(q) = 1$ , de sorte que  $h(q)$  a les coordonnées  $u = v = U = 0$ ,  $V = 1$ ; on peut prendre  $v$  et  $\frac{U}{V}$  comme coordonnées locales en  $h(q)$ . On a :

$$h^* v = sy \quad h^* \left( \frac{U}{V} \right) = \frac{x}{y}$$

la première fonction s'annule sur  $E$  avec multiplicité 1, tandis que la seconde, restreinte à  $E$ , est une coordonnée locale sur  $E$  en  $q$ . Par suite on obtient un système de coordonnées locales sur  $S$  en  $q$ , ce qui prouve (ii).

Pour terminer la démonstration, on va utiliser la topologie ordinaire des variétés analytiques; on va voir qu'il existe un ouvert ordinaire  $U \supset E$  tel que la restriction de  $h$  à  $U$  soit un isomorphisme analytique de  $U$  sur un ouvert (ordinaire)  $V$  de  $\hat{\mathbb{A}}^2$  contenant la droite exceptionnelle. Montrons que cela entraînera le théorème. Par construction, les fonctions  $sx$ ,  $sy$  sur  $U$  proviennent par image inverse de fonctions sur  $\varepsilon(U)$ ; autrement dit il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & \hat{\mathbb{A}}^2 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \eta \\ \varepsilon(U) & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{A}^2 \end{array}$$

où  $\eta$  est l'éclatement de l'origine dans  $\mathbb{A}^2$ , et  $\bar{h}$  un morphisme ( $\varepsilon(U)$  est ouvert par propriété de  $\varepsilon$ ).

Si  $h$  est un isomorphisme de  $U$  sur  $V$ ,  $\bar{h}$  est un isomorphisme de  $\varepsilon(U)$  sur  $\eta(V)$ : en effet  $\varepsilon \circ h^{-1}$  se factorise par un morphisme de  $\eta(V)$  sur  $\varepsilon(U)$  (remarque II.13.2), qui est inverse de  $\bar{h}$ . Comme  $\eta(V)$  est un ouvert de  $\mathbb{A}^2$ ,  $\varepsilon(U)$  est lisse, i.e.  $S'$  est lisse en  $p$ . Le théorème résultera donc du lemme suivant :

Lemme II.18 : Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application continue d'espaces topologiques séparés,  $K \subset X$  un compact. On suppose que :

- (i) La restriction de  $f$  à  $K$  est un homéomorphisme ;
- (ii) Pour tout  $k \in K$ ,  $f$  est un homéomorphisme local au voisinage de  $k$ .

Alors, il existe un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $K$ , et un ouvert  $V$  de  $Y$ , tels que  $f$  induise un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$ .

Indications pour la démonstration : En restreignant  $X$ , on peut supposer que  $f$  est un homéomorphisme local en tout point de  $X$ .

a) Soit  $\Omega = \{(x,y) \in X \times X, f(x) \neq f(y) \text{ ou } x=y\}$ . Le fait que  $f$  est un homéomorphisme local entraîne que  $\Omega$  est ouvert dans  $X \times X$ . L'hypothèse (i) montre que  $K \times K \subset \Omega$ .

b) Soient  $K$  un compact dans un espace topologique  $X$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $X \times X$  contenant  $K \times K$ ; il existe alors un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $K$  tel que  $U \times U \subset \Omega$ . En effet pour tout  $k \in K$  on construit par compacité un ouvert  $U_k \times V_k$  tel que :  $\{k\} \times K \subset U_k \times V_k \subset \Omega$ . Un nombre fini de ces ouverts, disons pour  $k = k_1, \dots, k_n$ , recouvrent  $K \times K$ ; l'ouvert  $U = (\bigcup_i U_{k_i}) \cap (\bigcap_i V_{k_i})$  répond à la question.

La conjonction de a) et b) entraîne que  $f|_U$  est une injection, donc un homéomorphisme.

Note historique

C'est avec les articles déjà cités de Noether, puis d'Enriques ([N1],[E1]) que le point de vue birationnel s'introduit dans la géométrie des surfaces. Noether introduit une notion de courbes exceptionnelles ("ausgezeichnet"), qui diffère légèrement de la nôtre ; sa définition est revue par Enriques, qui introduit la terminologie classique (dont nous nous sommes écartés) : les courbes exceptionnelles sont appelées "de 1<sup>e</sup> espèce", et Enriques appelle "courbes exceptionnelles de 2<sup>e</sup> espèce" celles qui sont contractées par une application rationnelle (cf. exercice 3). Ces dernières n'existent que sur les surfaces réglées ; elles jouent un rôle très différent des courbes exceptionnelles. C'est pourquoi nous ne les avons pas considérées ici.

En 1901 Castelnuovo et Enriques ([C-E]) démontrent le critère de contraction dit de Castelnuovo (la démonstration est à peu près celle qu'on a donnée ici), en même temps que l'existence d'un modèle minimal pour les surfaces non réglées, obtenu à partir de la surface par contraction d'un nombre fini de courbes exceptionnelles. Bien que les éclatements apparaissent dans cette construction, ils ne sont pas mis en vedette ; le théorème de structure des applications birationnelles n'est apparemment remarqué que beaucoup plus tard par Zariski ([Z1 p. 538], 1944). Zariski clarifie ensuite complètement la théorie des applications birationnelles et des modèles minimaux (cf. par exemple [Z2]) : on a suivi ici ses idées, telles qu'elles sont exposées dans [Ch1].

Exercices

1) Soit  $C$  une courbe irréductible sur une surface  $S$ . Montrer qu'il existe un morphisme  $\hat{S} \rightarrow S$ , composé d'un nombre fini d'éclatements, tel que le transformé strict  $\hat{C}$  de  $C$  dans  $S$  soit lisse.

(Montrer que le genre diminue strictement lorsqu'on éclate un point singulier).

2) Soient  $C$  une courbe irréductible sur  $S$ ,  $p$  un point de  $C$ ,  $\hat{C}$  le transformé strict de  $C$  dans l'éclatement de centre  $p$ . Les points proches de  $p$  sur  $C$  (ou points infiniment voisins d'ordre 1) sont par définition les points de  $\hat{C}$  au-dessus de  $p$ ; leur multiplicité est (par définition) la multiplicité sur  $\hat{C}$ . Les points infiniment voisins d'ordre  $n$  sont les points proches des points infiniment voisins d'ordre  $(n-1)$ .

a) Montrer que la multiplicité de  $C$  en  $p$  est la somme des multiplicités aux points proches.

b) Si  $C$  et  $C'$  sont 2 courbes irréductibles distinctes, montrer que :  $m_p(C \cap C') = \sum m_x(C) \cdot m_x(C')$ , la somme étant prise sur les points infiniment voisins de  $p$  sur  $C$  et  $C'$ .

c) Montrer que  $g(C) = g(N) + \sum_i \frac{1}{2} m_i(m_i-1)$ , les  $m_i$  étant les multiplicités des points singuliers de  $C - y$  compris les points singuliers infiniment voisins.

3) On dit qu'une courbe irréductible  $C$  sur  $S$  est de 2e espèce s'il existe une application birationnelle  $\varphi$  de  $S$  sur une surface  $S'$  telle que  $\varphi(C) = p$ , et que  $\varphi$  ne soit pas partout définie sur  $C$ .

a) Montrer que  $C$  est une courbe rationnelle (éventuellement singulière); avec les notations de 2 c), on a :

$$C^2 = \sum m_i^2 - 1 + n \quad C.K = -\sum m_i - 1 - n$$

où  $n \geq 0$ , et  $n > 0$  si  $C$  est lisse.

b) Soit  $C$  une courbe rationnelle sur  $S$  telle que  $C^2 \geq \sum m_i^2 - 1$  (et de plus  $C^2 \geq 0$  si  $C$  est lisse). Montrer que  $C$  est une courbe de 2e espèce.

## CHAPITRE III

### SURFACES RÉGLÉES

Définition III.1 : Une surface  $S$  est réglée si elle est birationnellement isomorphe à  $C \times \mathbb{P}^1$ , où  $C$  est une courbe lisse. Si de plus  $C = \mathbb{P}^1$ , on dit que  $S$  est rationnelle.

Exemples III.2 : a)  $C \times \mathbb{P}^1$  est une surface réglée.

b) Plus généralement, soit  $E$  un fibré vectoriel de rang 2 sur la courbe  $C$ . Considérons le fibré projectif  $\mathbb{P}_C(E)$  associé à  $E$ ; c'est une surface fibrée au-dessus de  $C$ , la fibre en un point  $x \in C$  étant l'espace projectif associé à l'espace vectoriel  $E_x$ . Comme  $E$  est localement trivial,  $\mathbb{P}_C(E)$  est, localement sur  $C$ , isomorphe à  $C \times \mathbb{P}^1$ , donc c'est une surface réglée.

c) Nous verrons au Ch. IV de nombreux exemples de surfaces rationnelles.

Pour déterminer les modèles minimaux des surfaces réglées, nous aurons besoin d'une notion auxiliaire :

Définition III.3 : Soit  $C$  une courbe lisse. Une surface géométriquement réglée de base  $C$  est une surface  $S$ , munie d'un morphisme lisse  $p : S \rightarrow C$  dont les fibres sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$ .

Les exemples II.3 a) et b) sont des surfaces géométriquement réglées. Il n'est pas évident a priori qu'une surface géométriquement réglée est réglée. Cela résultera aussitôt du théorème suivant :

Théorème III.4 (Noether-Enriques) : Soient S une surface, p un morphisme de S sur une courbe lisse C . On suppose qu'il existe  $x \in C$  tel que p soit lisse au-dessus de x et que la fibre  $p^{-1}(x)$  soit isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  . Alors il existe un ouvert U de C contenant x et un isomorphisme de  $p^{-1}(U)$  sur  $U \times \mathbb{P}^1$  , tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \simeq & U \times \mathbb{P}^1 \\ p \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

soit commutatif. En particulier S est réglée.

Commençons par une remarque évidente, mais qui servira bien souvent :

Remarque utile III.5 : Soient D un diviseur effectif, C une courbe irréductible telle que  $C^2 \gg 0$  . Alors  $(D.C) \gg 0$  .

Démonstration : Ecrivons  $D = D' + nC$  , où  $D'$  ne contient pas  $C$  , et  $n \gg 0$  ; alors  $(D.C) = (D'.C) + nC^2 \gg 0$  .

Démonstration du théorème :

Pas 1 :  $H^2(S, \mathcal{O}_S) = (0)$  .

Notons  $F = p^{-1}(x)$  . On a  $F^2 = 0$  et  $F.K = -2$  (I.8 (i) et formule du genre). Supposons que  $H^2(S, \mathcal{O}_S) \neq (0)$  ; alors  $|K|$  contient un diviseur effectif  $D$  (dualité de Serre I.11). On a  $D.F = -2$  , mais aussi  $D.F \gg 0$  par la remarque utile, d'où contradiction.

Pas 2 : Il existe un diviseur H sur S tel que  $(H.F) = 1$  .

Notons  $f$  la classe de  $F$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  . Comme  $H^2(S, \mathcal{O}_S) = (0)$  , la flèche  $\text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est surjective (I.10). Il suffit donc de mon-



trer qu'il existe une classe  $h \in H^2(S, \mathbb{Z})$  telle que  $h.f = 1$ . Pour  $a$  variable dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , l'ensemble des entiers  $a.f$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , de la forme  $d.\mathbb{Z}$  ( $d \geq 1$ ). L'application  $a \mapsto \frac{1}{d}(a.f)$  est une forme linéaire sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$ ; or la dualité de Poincaré dit que le cup-produit :  $H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  est une dualité, c'est-à-dire que l'application associée :

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H^2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

est surjective et a pour noyau le sous-groupe de torsion. Par suite il existe un élément  $f' \in H^2(S, \mathbb{Z})$  tel que :

$$(a.f') = \frac{1}{d}(a.f) \quad \text{pour tout } a \in H^2(S, \mathbb{Z})$$

et donc  $f = df'$  modulo torsion dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ .

Remarquons que si  $k$  désigne la classe de  $K$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , l'expression  $a^2 + a.k$  est paire pour toute classe de diviseur  $a$  (donc ici pour tout  $a \in H^2(S, \mathbb{Z})$ ) ; en effet cette expression est linéaire en  $a \pmod{2}$ , et elle est paire pour  $a$  irréductible par la formule du genre. Comme  $f^2 = 0$  et  $f.k = -2$  on a  $f'^2 = 0$  et  $f'.k = -\frac{2}{d}$ , d'où nécessairement  $d=1$ . Il existe donc un élément  $a \in H^2(S, \mathbb{Z})$  tel que  $a.f = 1$ , d'où le résultat.

Pas 3 : Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(H+(r-1)F) \rightarrow \mathcal{O}_S(H+rF) \rightarrow \mathcal{O}_F(1) \rightarrow 0 \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

On en déduit la suite exacte longue de cohomologie :

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(H+rF)) \xrightarrow{a_r} H^0(F, \mathcal{O}_F(1)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(r-1)F)) \xrightarrow{b_r} H^1(S, \mathcal{O}_S(H+rF)) \rightarrow 0.$$

La suite des espaces quotients  $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+rF))$  doit être stationnaire pour  $r$  assez grand ; donc il existe un  $r$  tel que  $b_r$  soit bijectif, et par suite  $a_r$  surjectif. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $H^0(S, \mathcal{O}_S(H+rF))$ , de dimension 2, tel que  $a_r(V) = H^0(F, \mathcal{O}_F(1))$  ; notons  $P$  le pinceau correspondant. Il peut avoir des composantes

fixes, mais elles doivent être contenues dans certaines fibres

$F_{x_1}, \dots, F_{x_k}$  de  $p$  distinctes de  $F$  (puisque  $P$  n'a pas de points bases sur  $F$ ). De même les points bases de la partie mobile de  $P$  sont contenus dans des fibres  $F_{x_{k+1}}, \dots, F_{x_\ell}$  distinctes de  $F$ . Enfin notons  $F_{x_{\ell+1}}, \dots, F_{x_m}$  les fibres de  $p$  qui ne sont pas irréductibles. Posons  $U = C - \{x_1, \dots, x_m\}$ . Le pinceau  $P'$ , restriction de  $P$  à  $p^{-1}(U)$ , est sans points bases. Toute courbe  $C_t$  de  $P'$  est réunion d'une section de  $p$  et éventuellement d'un certain nombre de fibres ; mais en fait  $C_t$  ne contient pas de fibres, sans quoi elle aurait des points communs avec la courbe  $C_{t'}$ , ( $t' \neq t$ ), et ces points seraient des points bases de  $P'$ . Donc les diviseurs de  $P'$  sont des sections  $(C_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  de la fibration  $p$ . Comme le pinceau  $P'$  est sans points bases, il définit un morphisme  $g : p^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}^1$ , de fibre  $g^{-1}(t) = C_t$ . Considérons le morphisme  $h = (p, g)$  de  $p^{-1}(U)$  sur  $U \times \mathbb{P}^1$ . Comme  $h^{-1}((y, t)) = F_y \cap C_t$ ,  $h$  est un isomorphisme, d'où le théorème.

Remarque III.6 : Le lecteur savant remplacera le pas 3 par la démonstration suivante. Posons  $E = p_*(\mathcal{O}_S(H))$  ; soit  $U$  un ouvert de  $C$  au-dessus duquel  $p$  est lisse. Il résulte des théorème généraux sur les morphismes propres que  $E|_U$  est localement libre de rang 2, et que la flèche naturelle  $p^*E \rightarrow \mathcal{O}_S(H)$  est surjective sur  $p^{-1}(U)$ . On en déduit un  $U$ -morphisme  $p^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}_U(E)$  qui est un isomorphisme sur chaque fibre, d'où le résultat. Cette partie est donc formelle ; le pas important de la démonstration est le pas 2. On le démontre d'habitude par le théorème de Tsen.

Proposition III.7 : Toute surface géométriquement réglée de base  $C$  est  $C$ -isomorphe à  $\mathbb{P}_C(E)$  pour un fibré vectoriel  $E$  de rang 2 sur  $C$ . Les fibrés  $\mathbb{P}_C(E)$ ,  $\mathbb{P}_C(E')$  sont  $C$ -isomorphes si et seulement si il existe un fibré en droites  $L$  sur  $C$  tel que  $E' \cong E \otimes L$ .

Démonstration : Le théorème de Noether-Enriques montre que la fibration  $p : S \rightarrow C$  est localement triviale (i.e. il existe un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  de  $C$  et des  $U_\alpha$ -isomorphismes :

$\tau_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{P}^1$ ). Suivant un formalisme bien connu (cf. par exemple [H] Ch.I, 3.2), l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés s'identifie à l'ensemble de cohomologie  $H^1(C, G)$ , où  $G$  est le faisceau de groupes (non commutatifs) défini par :

$$G(U) = \text{Aut}_U(U \times \mathbb{P}^1) = \{\text{morphisms de } U \text{ dans le groupe algébrique } \text{PGL}(2, \mathbb{C})\}$$

(rappelons le principe de cette identification : en composant les trivialisations  $\tau_\beta$  et  $\tau_\alpha^{-1}$  restreintes au-dessus de  $U_\alpha \cap U_\beta$ , on obtient un 1-cocycle de Čech  $(\alpha, \beta) \mapsto g_{\alpha\beta} \in G(U_\alpha \cap U_\beta)$ , d'où une classe dans  $H^1(C, G)$ ).

On note  $G = \text{PGL}(2, \mathcal{O}_C)$ . De la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow 1$$

on déduit une suite exacte de faisceaux :

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_C^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathcal{O}_C) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathcal{O}_C) \rightarrow 1$$

où  $\text{GL}(2, \mathcal{O}_C)$  est le faisceau des matrices 2-2 inversibles à coefficients dans  $\mathcal{O}_C$ . On obtient alors une suite exacte d'ensembles de cohomologie :

$$H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \rightarrow H^1(C, \text{GL}(2, \mathcal{O}_C)) \rightarrow H^1(C, \text{PGL}(2, \mathcal{O}_C)) \rightarrow H^2(C, \mathcal{O}_C^*)$$

où  $H^1(C, \text{GL}(2, \mathcal{O}_C))$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang 2 sur  $C$  ; on vérifie aussitôt que le groupe

$H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \cong \text{Pic}(C)$  opère sur cet ensemble par produit tensoriel. La

dernière assertion de la proposition résulte alors de la suite exacte ;

la première en résultera aussi si l'on sait que  $H^2(C, \mathcal{O}_C^*) = (0)$ . Or il

y a (au moins) deux bonnes raisons à cela : la première est que puisque

$\dim(C) = 1$ , on a  $H^2(C, F) = 0$  pour tout faisceau sur  $C$  (pour la

topologie de Zariski : cf. [FAC]) ; la seconde est que de toutes façons  $H^2(T, \mathcal{O}_T^*) = (0)$  pour toute variété lisse  $T$ , à cause de la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_T^* \rightarrow K_T^* \rightarrow \text{Div}(T) \rightarrow 0$$

qui définit une résolution à deux crans de  $\mathcal{O}_T^*$  par des faisceaux flasques.

Lemme III.8 : Soient  $S$  une surface minimale,  $C$  une courbe lisse,  $p : S \rightarrow C$  un morphisme dont la fibre générique est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ . Alors  $S$  est géométriquement réglée par  $p$  (i.e.  $C$ -isomorphe à un fibré projectif  $\mathbb{P}_C(E)$ ).

Démonstration : Soit  $F$  une fibre de  $p$  ; on a  $F^2 = 0$ ,  $F.K = -2$ . Supposons d'abord  $F$  irréductible. L'argument de (III.4, pas 2) montre que  $F$  ne peut pas être multiple ; la formule du genre (et la remarque I.16.1)) montre alors que  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , et que  $p$  est lisse sur  $F$ . Il suffit donc de montrer que  $F$  ne peut pas être irréductible.

Lemme III.9 : Soient  $p$  un morphisme surjectif d'une surface sur une courbe lisse, à fibres connexes,  $F = \sum n_i C_i$  une fibre réductible de  $p$ . Alors  $C_i^2 < 0$  pour tout  $i$ .

$$\text{Démonstration} : n_i C_i^2 = C_i \cdot (F - \sum_{j \neq i} n_j C_j).$$

Or  $C_i \cdot F = 0$  puisqu'on peut remplacer  $F$  par une autre fibre (cf. I.8 (i)),  $(C_i \cdot C_j) \geq 0$  pour  $j \neq i$ , et  $(C_i \cdot C_j) \geq 0$  pour au moins un  $j$  puisque  $f$  est connexe.

Fin de la démonstration de III.8 : Soit  $F = \sum n_i C_i$  une fibre réductible ; la formule du genre et le lemme III.9 montrent que  $K \cdot C_i \geq -1$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $C_i^2 = -1$ ,  $g(C_i) = 0$  ; or ces deux conditions impliquent que  $C_i$  est une courbe exceptionnelle, ce qui est exclus par l'hypothèse. Donc  $K \cdot C_i \geq 0$  pour tout  $i$ , et

$K.F \gg 0$  , ce qui contredit  $K.F = -2$  .

Théorème III.10 : Soit  $C$  une courbe lisse non rationnelle. Les modèles minimaux de  $C \times \mathbb{P}^1$  sont les surfaces géométriquement réglées de base  $C$  , c'est-à-dire les fibrés projectifs  $\mathbb{P}_C(E)$ .

Démonstration : Montrons qu'une surface géométriquement réglée  $p: S \rightarrow C$  ne contient pas de courbes exceptionnelles. Une telle courbe  $E$  ne peut être égale à une fibre de  $p$  , puisque  $E^2 = -1$  ; on devrait donc avoir  $p(E) = C$  , ce qui entraînerait que  $C$  est rationnelle, contrairement à l'hypothèse.

Soient maintenant  $S$  une surface minimale,  $\varphi$  une application birationnelle de  $S$  sur  $C \times \mathbb{P}^1$  ,  $q$  la projection de  $C \times \mathbb{P}^1$  sur  $C$  . Considérons l'application rationnelle  $q \circ \varphi : S \dashrightarrow C$  ; par le théorème d'élimination des indéterminations (II.7), il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{S} & \\
 \varepsilon_n \nearrow & & \searrow f \\
 S & \dashrightarrow & C \\
 \varepsilon_1 \nearrow & & \dashrightarrow q\varphi
 \end{array}$$

où les  $\varepsilon_i$  sont des éclatements, et  $f$  un morphisme. On peut supposer que  $n$  est le nombre d'éclatements minimum nécessaire pour qu'un diagramme de ce type existe. Supposons  $n > 0$  , et soit  $E$  la droite exceptionnelle de l'éclatement  $\varepsilon_n$  ; comme  $C$  n'est pas rationnelle,  $f(E)$  est nécessairement réduit à un point, de sorte que  $f$  se factorise en  $f' \circ \varepsilon_n$  (remarque II.13.2) ce qui contredit la minimalité de  $n$  . Par suite  $n=0$  , c'est-à-dire que  $q\varphi$  est un morphisme, de fibre générique isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  . On conclut avec le lemme III.8 .

On remarquera que la démonstration ne peut s'appliquer aux surfaces rationnelles. On va remettre au chapitre V la recherche des surfaces rationnelles minimales, et essayer de donner un aperçu de la classification des surfaces géométriquement réglées de base  $C$  donnée. D'après la proposition III.7, il revient au même de classifier les fibrés vectoriels de rang 2 sur  $C$ , modulo tensorisation par un fibré en droites. La théorie des fibrés vectoriels sur une courbe est délicate, mais peut être considérée comme bien comprise - cf. [R]. Nous nous contenterons ici de remarques élémentaires, pour montrer qu'il y a "beaucoup" de surfaces réglées minimales.

Soient  $C$  une courbe lisse,  $E$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $C$ . On identifiera  $E$  au faisceau (localement libre de rang 2) de ses sections locales. On pose  $\text{deg}(E) = \text{deg}(\wedge^2 E)$ ,  $h^i(E) = \dim H^i(C, E)$ ,  $\chi(E) = h^0(E) - h^1(E)$ .

Notons que  $\text{deg}(E \otimes L) = \text{deg}(E) + 2\text{deg}(L)$  pour  $L \in \text{Pic}(C)$ , ce qui permet éventuellement de modifier  $\text{deg}(E)$ , et ce arbitrairement à condition d'en conserver la parité.

Lemme III.11 : (i) Il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0 \quad \text{avec } L, M \in \text{Pic}(C) .$$

(ii) Si  $h^0(E) \geq 1$ , on peut prendre  $L = \mathcal{O}_C(D)$ , avec  $D \geq 0$ .

(iii) Si  $h^0(E) \geq 2$  et  $\text{deg}(E) > 0$ , on peut supposer  $D \geq 0$ .

Démonstration : Notons que pour démontrer (i), on peut supposer  $h^0(E) \geq 1$  : en effet on peut remplacer  $E$  par  $E \otimes N$ ,  $N \in \text{Pic}(C)$ , et pour  $N$  convenable ce fibré admet des sections.

Supposons donc que  $E$  admette une section non nulle  $s$  ; on en déduit un morphisme non nul  $\overset{\vee}{s}$  du dual  $\overset{\vee}{E}$  de  $E$  dans  $\mathcal{O}_C$ . Son image est un idéal de  $\mathcal{O}_C$ , c'est-à-dire un faisceau  $\mathcal{O}_C(-D)$ , où  $D$  est un diviseur effectif sur  $C$ . Le noyau du morphisme surjectif  $\overset{\vee}{E} \rightarrow \mathcal{O}_C(-D)$  est alors un faisceau inversible. En dualisant, on obtient (i) et (ii).

Il ressort de cette construction que  $D$  est le diviseur des zéros de la section  $s$ . Pour démontrer (iii), il suffit donc de montrer qu'il existe une section non nulle de  $E$  qui s'annule en au moins un point. Soient  $s, t$  deux sections linéairement indépendantes ; la section  $s \wedge t$  de  $\wedge^2 E$  s'annule en au moins un point  $p$  de  $C$  (puisque  $\deg(E) > 0$ ), ce qui signifie qu'il existe  $\alpha, \beta \in C$ ,  $\alpha$  ou  $\beta \neq 0$ , tels que  $\alpha s(p) + \beta t(p) = 0$ . La section  $\alpha s + \beta t$  s'annule donc en  $p$ , d'où le résultat.

Corollaire III.12 (Riemann-Roch pour les fibrés de rang 2) : On a

$$\chi(E) = \deg(E) + 2 - 2g(C) .$$

Démonstration : Par III.11 (i) et Riemann-Roch pour les faisceaux inversibles, on a :

$$\chi(E) = \chi(L) + \chi(M) = \deg(L) + \deg(M) + 2(1-g(C)) = \deg(E) + 2 - 2g(C) .$$

Remarque III.13 : Géométriquement, III.11 (i) signifie que la fibration  $p : \mathbb{P}_C(E) \rightarrow C$  admet une section (cf. Rappel III.17 plus loin). Cette propriété peut se démontrer directement : la fibration  $p$ , étant localement triviale, admet des sections locales, c'est-à-dire des applications rationnelles  $s : C \dashrightarrow \mathbb{P}_C(E)$  telles que  $p \circ s = \text{Id}_C$ . Mais toute application rationnelle de  $C$  dans une variété complète est un morphisme, d'où le résultat.

Rappel III.14 : Extension de faisceaux.

Etant donnée l'extension III.11 (i) de  $M$  par  $L$ , il est naturel de rechercher si elle est triviale, c'est-à-dire si  $E \cong L \oplus M$ . Il revient au même de dire que la suite exacte :

$$0 \rightarrow L \otimes M^{-1} \rightarrow E \otimes M^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est scindée ; or c'est le cas si et seulement si elle possède une section, c'est-à-dire s'il existe une section de  $H^0(C, E \otimes M^{-1})$  qui s'applique sur  $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$ . Compte tenu de la suite exacte de cohomologie :

$$H^0(C, E \otimes M^{-1}) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\partial} H^1(C, L \otimes M^{-1})$$

cela signifie que  $\partial(1) = 0$ . La classe  $\partial(1) \in H^1(C, L \otimes M^{-1})$  est appelée classe de l'extension  $L \rightarrow E \rightarrow M$ ; sa nullité est nécessaire et suffisante pour que l'extension soit triviale. Plus généralement, on voit facilement que deux extensions sont isomorphes si et seulement si leurs classes sont proportionnelles. En particulier si  $h^1(L \otimes M^{-1}) = 1$ , il y a - à isomorphisme près - une seule extension non triviale de  $M$  par  $L$ .

Proposition III.15 : (i) Tout fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathbb{P}^1$  est décomposable (i.e. somme de deux fibrés inversibles). En particulier toute surface géométriquement réglée de base  $\mathbb{P}^1$  est isomorphe à l'une des surfaces  $F_n = \mathbb{P}^1 \times_{\mathbb{P}^1} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$  pour  $n \geq 0$ .

(ii) Tout fibré vectoriel de rang 2 sur une courbe elliptique est soit décomposable, soit isomorphe à  $E \otimes L$ , où  $L \in \text{Pic}(C)$  et  $E$  est l'un des fibrés suivants :

- l'extension non triviale de  $\mathcal{O}_C$  par  $\mathcal{O}_C$  ;
- pour tout  $p \in E$ , l'extension non triviale de  $\mathcal{O}_C(p)$  par  $\mathcal{O}_C$ .

(iii) Pour toute courbe  $C$  de genre  $g$ , il existe des variétés (ouvertes)  $S$  et des familles de fibrés de rang 2 sur  $C$  paramétrées par  $S : (E_s)_{s \in S}$ , telles que  $\wedge^2 E_s$  soit constant, que  $E_s$  soit indécomposable et que  $E_s \not\cong E_{s'}$ , pour  $s \neq s'$ ; on peut trouver de telles familles avec  $\dim(S) \geq 2g-3$ .

(La bonne dimension est en fait  $3g-3$ ; on veut simplement montrer ici qu'il y a "plus" de fibrés indécomposables que de décomposables).

Démonstration : (i) Soit  $E$  un fibré de rang 2 sur  $\mathbb{P}^1$ ; en remplaçant  $E$  par  $E \otimes L$ , on peut supposer  $d = \deg(E) = 0$  ou  $-1$ . Par Riemann-Roch (III.12), on a alors  $h^0(E) \geq d+2 \geq 1$ , donc il existe une



suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-k) \rightarrow 0$$

avec  $k \geq 0$  (III.11 (ii)). La classe de cette extension appartient à  $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2k-d))$  qui est toujours nul, d'où (i).

(ii) Soit  $E$  un fibré de rang 2 sur une courbe elliptique  $C$  ; on peut supposer  $d = \deg(E) = 1$  ou  $2$ , de sorte que  $h^0(E) \geq 1$  par Riemann-Roch. Il existe donc des faisceaux inversibles  $L_k$  et  $M_{d-k}$ , de degrés  $k \geq 0$  et  $d-k$ , et une suite exacte :

$$0 \rightarrow L_k \rightarrow E \rightarrow M_{d-k} \rightarrow 0.$$

De plus si  $d=2$  on peut supposer  $k \geq 1$  (III.11 (iii)), et  $L_0 = \mathcal{O}_C$  si  $k=0$ .

La classe de l'extension vit dans  $H^1(C, L_k \otimes M_{d-k}^{-1})$ , qui est nul sauf si :

- $d=1$ ,  $k=0$  :  $E$  est extension d'un faisceau de degré 1 par  $\mathcal{O}_C$ ,
- $d=2$ ,  $k=1$  et  $L \otimes M_1^{-1} \cong \mathcal{O}_C$  ; alors  $E \otimes L_1^{-1}$  est extension de  $\mathcal{O}_C$  par  $\mathcal{O}_C$ .

Ceci prouve (ii). On peut remarquer que le fibré  $E_p$  (resp.  $E_0$ ) extension de  $\mathcal{O}_C(p)$  (resp.  $\mathcal{O}_C$ ) par  $\mathcal{O}_C$ , est indécomposable : cela résulte aussitôt du fait qu'il contient le fibré trivial comme sous-fibré, et que  $h^0(E_p) = h^0(E_0) = 1$ . Par ailleurs on a  $E_q = E_p \otimes L$ , avec  $L^2 = \mathcal{O}_C(q-p)$  (exercice), de sorte qu'il n'existe à isomorphisme près que deux surfaces géométriquement réglées de base  $C$  qui correspondent à des fibrés indécomposables.

Pour prouver (iii), choisissons un faisceau inversible  $L$  sur  $C$ , de degré  $g-1$ , tel que  $h^0(L) = 0$  ; prenons pour  $S$  un hyperplan affine, ne contenant pas l'origine, de  $H^1(C, L^{-1})$ . A tout  $s \in S$  on associe le fibré sur  $C$  défini par l'extension :

$$(\mathcal{E}_s) : 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_s \rightarrow L \rightarrow 0$$

de classe  $s$ . Les fibrés  $(E_s)_{s \in S}$  forment une famille de fibrés sur  $C$  paramétrée par  $S$ . Comme  $h^0(E_s) = 1$ , l'extension  $(\mathcal{O}_s)$  est déterminée de manière unique par la donnée du fibré  $E_s$ ; il en résulte que  $E_s \neq E_{s'}$ , pour  $s \neq s'$ , et aussi que  $E_s$  est indécomposable.

Remarque III.16 : On a étudié les surfaces géométriquement réglées sur  $C$  à  $C$ -isomorphisme près; il est naturel aussi de considérer la situation à isomorphisme près. On verra au ch. IV le cas des surfaces rationnelles; supposons ici  $C \neq \mathbb{P}^1$ . Alors pour tout isomorphisme  $v: \mathbb{P}_C(E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_C(E')$ , il existe un automorphisme  $u$  de  $C$  et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_C(E) & \xrightarrow{v} & \mathbb{P}_C(E') \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ C & \xrightarrow{u} & C \end{array} .$$

En effet on pose  $u = p' v s$ , où  $s$  est une section arbitraire de  $p$ . Puisque  $C$  n'est pas rationnelle,  $v$  transforme les fibres de  $p$  en les fibres de  $p'$ ; on en déduit aussitôt que  $u p = p' v$ .

Ainsi les surfaces  $\mathbb{P}_C(E)$  et  $\mathbb{P}_C(E')$  sont isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme  $u$  de  $C$ , et un fibré en droites  $L$  sur  $C$ , tels que  $u^* E' \cong E \otimes L$ .

Nous allons maintenant décrire le groupe de Picard des surfaces géométriquement réglées.

Rappel III.17 : Fibrés projectifs.

Soient  $S = \mathbb{P}_C(E)$ , et  $p: S \rightarrow C$  le morphisme structural. Le fibré  $p^*E$  sur  $S$  a un sous-fibré en droites naturel  $N$ : au-dessus d'un point  $s$  de  $S$  - correspondant à une droite  $D \subset E_{p(s)}$ , - on a  $N_s = D$ . Le fibré  $\mathcal{O}_S(1)$ , appelé parfois "fibré tautologique" sur  $S$ , est

défini par la suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow p^*E \xrightarrow{u} \mathcal{O}_S(1) \rightarrow 0 .$$

Soient  $T$  une variété,  $f: T \rightarrow C$  un morphisme. A tout  $C$ -morphisme  $g: T \rightarrow \mathbb{P}_C(E)$  on associe le fibré en droites  $L = g^*\mathcal{O}_S(1)$  et le morphisme surjectif  $g^*u: f^*E \rightarrow L$ . Inversement étant donné un fibré en droites  $L$  sur  $T$  et un morphisme surjectif  $v: f^*E \rightarrow L$ , on définit un  $C$ -morphisme  $g: T \rightarrow \mathbb{P}_C(E)$  en associant à un point  $t$  de  $T$  la droite  $\text{Ker}(v_t) \subset E_{f(t)}$ . Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

En particulier, il revient au même de se donner une section  $s: C \rightarrow S$  de  $p$ , ou un fibré en droites quotient de  $E$ .

Proposition III.18 : Soient  $S = \mathbb{P}_C(E)$  une surface géométriquement réglée de base  $C$ ,  $p: S \rightarrow C$  le morphisme structural. On note  $h$  la classe dans  $\text{Pic}(S)$  (ou dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ ) du faisceau  $\mathcal{O}_S(1)$ . On a :

- (i)  $\text{Pic}(S) \cong p^*\text{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}.h$
- (ii)  $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.f \oplus \mathbb{Z}.h$ ,  $f$  désignant la classe d'une fibre.
- (iii)  $h^2 = \text{deg}(E)$ .
- (iv)  $[K] = -2h + (\text{deg}(E) + 2g(C) - 2)f$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ .

Démonstration : Démontrons (i). Soit  $F$  une fibre de  $p$ ; comme  $F.h = 1$ , tout élément de  $\text{Pic}(S)$  s'écrit  $D + mh$ , avec  $D.F = 0$ ; il suffit de montrer que  $D$  est l'image inverse d'un diviseur sur  $C$ . Posons  $D_n = D + nF$ ; on a  $D_n^2 = D^2$ ,  $D_n.K = D.K - 2n$  et  $h^0(K - D_n) = 0$  dès que  $n$  est suffisamment grand. La formule de Riemann-Roch montre alors que  $h^0(D_n) \gg n + C^{\text{te}}$ , de sorte que le système  $|D_n|$  est non vide pour  $n$  assez grand. Soit  $E \in |D_n|$ ; comme  $E.F = 0$ , toutes les composantes de  $E$  sont des fibres de  $p$ , donc  $E$  est l'image inverse par  $p$  d'un diviseur sur  $C$ .

On peut démontrer (ii) soit directement par la topologie (suite exacte des fibrés en sphères), soit à partir de (i) : comme  $H^2(S, \mathbb{Z})$

est un quotient de  $\text{Pic}(S)$  (cf. Th. III.4, pas 1) et que deux points de  $C$  ont la même classe de cohomologie dans  $H^2(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est engendré par les éléments  $f$  et  $h$ ; ceux-ci sont linéairement indépendants puisque  $f^2 = 0$ ,  $f.h = 1$ .

Pour démontrer (iii), nous utiliserons le résultat auxiliaire suivant : soit  $E'$  un fibré vectoriel sur une surface  $S$ , tel qu'il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow L \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0 \quad \text{avec } L, M \in \text{Pic}(S) ;$$

$$\begin{aligned} \text{on a alors } (L.M) &= (L^{-1}.M^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(M) + \chi(L \otimes M) & (I.4) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(E') + \chi(\Lambda^2 E') . \end{aligned}$$

En particulier le nombre  $(L.M)$  ne dépend que de  $E'$ ; on le notera ici  $c_2(E')$ .

Appliquons cette remarque au fibré  $p^*E$  sur  $S$ . Comme il existe une suite exacte  $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$  sur  $C$ , on a

$$c_2(p^*E) = (p^*L.p^*M) = 0 . \text{ Comme par ailleurs on a la suite exacte :}$$

$$0 \rightarrow N \rightarrow p^*E \rightarrow \mathcal{O}_S(1) \rightarrow 0$$

on trouve  $h.[N] = 0$ . Or on déduit de cette suite exacte un isomorphisme  $N \otimes \mathcal{O}_S(1) \cong p^*\Lambda^2 E$ , d'où  $[N] = -h + p^*e$ , en désignant par  $e$  la classe de  $\Lambda^2 E$  dans  $\text{Pic}(C)$ . Par suite  $h^2 = h.p^*e = \text{deg}(E)$ .

Par (ii) on a  $[K] = ah + bf$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ ; de plus  $a = K.f = -2$ . Soit  $s: C \rightarrow S$  une section de  $p$ , de sorte que  $[s(C)] = h + rf$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  pour un entier  $r$ . La formule du genre appliquée à  $s(C)$  s'écrit :

$$2g(C) - 2 = (h+rf)^2 + (h+rf)(-2h+bf) = -\text{deg}(E) + b , \text{ d'où (iv).}$$

Invariants numériques.

Nous terminerons ce chapitre avec le calcul des invariants numériques d'une surface réglée. A toute surface  $S$  sont attachés un certain nombre d'entiers ; on a par exemple des invariants algébro-géométriques :

$$\begin{aligned} q(S) &= \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) \\ p_g(S) &= \dim H^2(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(K)) \quad (\text{par dualité de Serre}) \\ P_n(S) &= \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(K)^{\otimes n}) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

On dit parfois que les  $P_n$  sont les "plurigenres" de  $S$ ,  $p_g = P_1$  le "genre géométrique",  $q$  "l'irrégularité" de  $S$ . On a  $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$ .

On considérera aussi les invariants topologiques :

$$b_i(S) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R}) \quad \chi_{\text{top}}(S) = \sum_i (-1)^i b_i(S).$$

On a  $b_0 = b_4 = 1$  et  $b_3 = b_1$  par dualité de Poincaré, d'où  $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S)$ .

On note simplement  $q, p_g, P_n, b_i$  quand il n'y a pas d'ambiguïté sur  $S$ . Ces invariants sont liés par la relation suivante, qui résulte de la théorie de Hodge ([W]) et que nous admettons :

Rappel III.19 :  $q(S) = \dim H^0(S, \Omega_S^1) = \frac{1}{2} b_1(S)$ .

Rappelons que nous admettons également la formule de Noether

(I.14) :  $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12} (\chi_{\text{top}}(S) + K_S^2)$ .

Proposition III.20 : Les entiers  $q, p_g, P_n$  sont des invariants birationnels.

Démontrons l'invariance birationnelle de  $q(S) = \dim H^0(S, \Omega_S^1)$ . Soit  $\varphi : S' \dashrightarrow S$  une application birationnelle ; elle correspond à un morphisme  $f : S' - F \rightarrow S$ , où  $F \subset S'$  est un ensemble fini. Pour toute 1-forme  $\omega \in H^0(S, \Omega_S^1)$ , la forme  $f^* \omega$  définit une 1-forme rationnelle sur  $S'$ , à pôles concentrés sur  $F$  ; comme les pôles d'une forme diffé-

rentielle sont des diviseurs,  $f^*\omega$  est en fait holomorphe sur  $S'$  tout entier. On peut donc définir une application injective  $\varphi^* : H^0(S, \Omega_S^1) \rightarrow H^0(S', \Omega_{S'}^1)$ ; comme  $\varphi$  est birationnelle,  $\varphi^*$  admet une application inverse, donc  $q(S) = q(S')$ .

On démontre de la même façon l'invariance birationnelle de  $p_g$  et des  $P_n$ .

On notera que  $K^2$  et  $b_2$  ne sont pas des invariants birationnels (cf. Proposition II.3).

Proposition III.21 : Soit  $S$  une surface réglée de base  $C$  ; on a :

$$q(S) = g(C) ; p_g(S) = 0 ; P_n(S) = 0 \text{ pour tout } n \gg 2 .$$

Si  $S$  est géométriquement réglée, on a :

$$K_S^2 = 8(1 - g(C)) \quad b_2(S) = 2 .$$

On verra au ch. VI que la condition  $P_n = 0$  pour tout  $n$  caractérise les surfaces réglées. Pour démontrer III.21, nous utiliserons le fait général suivant :

Rappel III.22 : Soient  $X, Y$  deux variétés,  $p, q$  les projections de  $X \times Y$  sur  $X, Y$ .

(i) Si  $F$  (resp.  $G$ ) est un faisceau cohérent sur  $X$  (resp.  $Y$ ), l'homomorphisme canonique :

$$H^0(X, F) \otimes H^0(Y, G) \rightarrow H^0(X \times Y, p^*F \otimes q^*G) \text{ est un isomorphisme.}$$

(ii) Si  $X$  et  $Y$  sont lisses, on a  $\Omega_{X \times Y}^1 \cong p^*\Omega_X^1 \oplus q^*\Omega_Y^1$ .

Rappelons brièvement une démonstration de (i) : la formule de projection (dont la démonstration est élémentaire) donne un isomorphisme de

$p_*(p^*F \otimes q^*G)$  sur  $F \otimes p_*q^*G$  ; la même formule appliquée au faisceau  $q^*G$  sur  $U \times Y$ , pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , montre que  $p_*q^*G \cong \otimes_X \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, G)$ . On en déduit aussitôt (i). L'assertion (ii) résulte immédiatement du fait suivant : si  $x_1, \dots, x_p$  (resp.  $y_1, \dots, y_q$ ) est un système de coordonnées locales sur  $X$  (resp.  $Y$ ), alors  $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$  est un système de coordonnées locales sur  $X \times Y$ .

Démonstration de III.21 : Pour calculer les invariants birationnels de  $S$ , on peut supposer  $S = C \times \mathbb{P}^1$ . On a alors d'après III.22 :

$$H^0(S, \Omega_S^1) \cong H^0(C, \omega_C) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) \quad \text{d'où } q(S) = g(C)$$

$$H^0(S, \omega_S^{\otimes n}) \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes n}) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes n}) = (0) \quad \text{d'où } p_n(S) = 0 \quad (n \gg 1).$$

Lorsque  $S$  est géométriquement réglée, le calcul de  $K^2$  et  $b_2$  résulte immédiatement de III.18.

Note historique

Le théorème de Noether-Enriques est démontré par Noether ([N3]) pour les surfaces rationnelles, et par Enriques dans le cas général ([E2]).

Le théorème III.10 est dû à Severi ([Se1]).

Le "genre arithmétique"  $p_a = p_g - q$  et le genre géométrique  $p_g$  sont introduits par Clebsch et Noether (cf. [N1]), qui démontrent leur caractère birationnel (la terminologie provient de ce que si l'on représente la surface dans  $\mathbb{P}^3$ , avec une courbe double et des points triples, le "genre arithmétique" - ou "numérique" - est défini par une formule explicite en fonction du degré de la surface, du degré et du genre de la courbe double, etc...). Ils semblent soupçonner initialement que  $p_a = p_g$ , mais Cayley remarque que  $p_a < p_g$  pour les surfaces réglées non rationnelles (1871). Les surfaces pour lesquelles l'inégalité stricte

est vérifiée, considérées alors comme exceptionnelles, sont appelées irrégulières ; le nombre  $q = p_g - p_a$  (positif ou nul par définition) est appelé l'irrégularité.

### Exercices

Soient  $C$  une courbe,  $E$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $C$ ,  $S = \mathbb{P}_C(E)$ .

1) Soient  $s \in S$ ,  $F$  la fibre de la fibration projective passant par  $s$ . Montrer que dans l'éclaté de  $S$  en  $s$  on peut contracter le transformé strict de  $F$ . La surface obtenue est une surface géométriquement réglée  $S'$  ; l'application rationnelle  $S \dashrightarrow S'$  s'appelle transformation élémentaire de centre  $s$ .

2) Un point  $s$  de  $S$  correspond à un homomorphisme surjectif  $u_s : E \rightarrow \mathcal{C}(s)$ , où  $\mathcal{C}(s)$  désigne le faisceau nul en dehors de  $s$  et de fibre  $\mathcal{C}$  en  $s$  (cf. Rappel III.17). Montrer que  $E' = \text{Ker}(u_s)$  est un fibré de rang 2 sur  $C$ , que  $S' \cong \mathbb{P}_C(E')$  (exer. 1) et que la transformation élémentaire  $S \dashrightarrow S'$  correspond à l'injection  $E' \rightarrow E$ .

3) On suppose  $C \neq \mathbb{P}^1$  ; soient  $X$  une surface minimale,  $\varphi : X \dashrightarrow S$  une application birationnelle. Sans utiliser le théorème III.10, montrer que  $\varphi$  est composé d'un isomorphisme et de transformations élémentaires (si  $n(\varphi)$  est le nombre minimum d'éclatements nécessaires pour rendre  $\varphi$  partout définie, montrer qu'il existe une transformation élémentaire  $t : \mathbb{P}_C(E) \dashrightarrow \mathbb{P}_C(E')$  telle que  $n(t \circ \varphi) < n(\varphi)$ ). En déduire une autre démonstration du théorème III.10.

4) On note  $\text{Aut}_b(S)$  le groupe des automorphismes birationnels de  $S$ . Si  $C \neq \mathbb{P}^1$ , montrer qu'il existe une suite exacte :

$$1 \rightarrow \text{PGL}(2, K) \rightarrow \text{Aut}_b(S) \rightarrow \text{Aut}(C) \rightarrow 1$$

où  $K$  est le corps des fonctions rationnelles sur  $C$ . De plus le choix d'une application birationnelle de  $S$  sur  $C \times \mathbb{P}^1$  permet de définir un scindage naturel de cette suite.



5) Soient  $F_n = \mathbb{P}^1(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ ,  $s \in S$ . Montrer que le transformé élémentaire de centre  $s$  de  $F_n$  est isomorphe à  $F_{n-1}$  ou à  $F_{n+1}$ , suivant la position de  $s$ . Distinguer les deux cas.

6) Montrer que la surface  $F_1$  contient une droite exceptionnelle  $B$ . On appelle encore transformations élémentaires les deux opérations suivantes :

- éclater un point de  $F_1$  non situé sur  $B$ , puis contracter  $B$ ;
- l'automorphisme  $(x,y) \mapsto (y,x)$  de  $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

7) Soient  $S$  une surface rationnelle minimale,  $\varphi : S \dashrightarrow F_n$  une application birationnelle. Montrer que :

- ou bien  $\varphi$  est composée d'un isomorphisme et de transformations élémentaires ; en particulier  $S \cong F_m$  pour  $m \neq 1$  ;
  - ou bien  $n=1$ ,  $S \cong \mathbb{P}^2$  et  $\varphi$  est l'inverse d'un éclatement.
- (Cf. Hartshorne, "Curves with high self-intersection on algebraic surfaces", Publ. Math. IHES n° 36).

8) Montrer qu'à homéomorphisme près, il n'existe que deux types différents de surfaces géométriquement réglées de base  $C$ , suivant la parité de  $\deg(E)$  (on rappelle que toute suite exacte de fibrés sur  $C$  est scindée, et que deux fibrés en droites de même degré sont topologiquement isomorphes ; si  $L_i$  est un fibré en droites de degré  $i$ , montrer que  $L_p \oplus L_{2r-p} \cong (L_r)^2$ ).

9) Soit  $S$  une surface de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3$  contenant deux droites doubles non coplanaires. Montrer que la normalisée de  $S$  est une surface géométriquement réglée de base une courbe elliptique.

10) Soit  $S \subset \mathbb{P}^3$  une surface non nécessairement lisse, telle que tout point de  $S$  soit situé sur une droite contenue dans  $S$ . Montrer que  $S$  est birationnellement isomorphe à une surface réglée.

Inversement, montrer que toute surface réglée est birationnellement isomorphe à une surface du type précédent (et plus précisément, si l'on veut, à un cône dans  $\mathbb{P}^3$ ).

## CHAPITRE IV

### SURFACES RATIONNELLES

Ce sont les surfaces birationnellement équivalentes à  $\mathbb{P}^2$ . On va étudier d'abord les surfaces géométriquement réglées de base  $\mathbb{P}^1$ , puis donner des exemples simples de surfaces rationnelles plongées dans  $\mathbb{P}^n$ .

#### Les surfaces $F_n$ .

Rappelons (III.15) que les seules surfaces géométriquement réglées de base  $\mathbb{P}^1$  sont les surfaces  $F_n = \mathbb{P}^1(\oplus_{\mathbb{P}^1} \oplus_{\mathbb{P}^1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ ,  $n \geq 0$ . On note  $h$  (resp.  $f$ ) la classe dans  $\text{Pic}(F_n)$  du fibré  $\mathcal{O}_{F_n}(1)$  (resp. d'une fibre).

Proposition IV.1 : (i) On a  $\text{Pic}(F_n) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$ , avec :

$$f^2 = 0, \quad f \cdot h = 1, \quad h^2 = n.$$

(ii) Si  $n > 0$ , il existe une unique courbe irréductible  $B$  sur  $F_n$  de carré négatif ; si  $b$  désigne sa classe dans  $\text{Pic}(F_n)$ , on a  $b = h - nf$ ,  $b^2 = -n$ .

(iii)  $F_n$  n'est pas isomorphe à  $F_m$  pour  $n \neq m$  ;  $F_n$  est minimale sauf pour  $n = 1$ . La surface  $F_1$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  avec un point éclaté.

Démonstration : L'assertion (i) vient de III.18. Pour démontrer (ii), considérons la section  $s$  de la fibration projective qui correspond au fibré quotient  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$  (cf. rappel III.16). Notons  $B = s(C)$ ,  $b$  la classe de  $B$  dans  $\text{Pic}(F_n)$  ; on a  $b = h + rf$

pour un  $r \in \mathbb{Z}$ . Comme  $s^* \mathcal{O}_{F_n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ , on voit que  $h.b = 0$ , d'où  $r = -n$ ; par suite  $b^2 = (h-nf)^2 = -n$ .

Soit maintenant  $C$  une courbe irréductible sur  $F_n$ ,  $C \neq B$ . Posons  $[C] = \alpha h + \beta f$  dans  $\text{Pic}(F_n)$ . Comme  $C.f \gg 0$ , on trouve  $\alpha \gg 0$ ; comme  $C.B \gg 0$  et  $h.b = 0$ , on obtient  $\beta \gg 0$ . Donc  $C^2 = \alpha^2 n + 2\alpha\beta \gg 0$ , d'où (ii).

Si l'on remarque de plus que sur  $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  on a  $C^2 \gg 0$  pour toute courbe irréductible, il résulte de (ii) que l'entier  $n$  est bien déterminé par la classe d'isomorphisme de la surface  $F_n$ , et que  $F_n$  est minimale pour  $n \neq 1$ . Enfin soient  $o$  un point de  $\mathbb{P}^2$ ,  $S$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $o$ ,  $E$  le diviseur exceptionnel; la projection de centre  $o$  définit un morphisme  $p: S \rightarrow \mathbb{P}^1$  (exemple II.14.1) qui fait de  $S$  une surface géométriquement réglée de base  $\mathbb{P}^1$ . Comme  $E^2 = -1$ ,  $S$  est isomorphe à  $F_1$ , d'où (iii).

Pour une description plus classique des surfaces  $F_n$ , cf. exercices 1 et 2.

#### IV.2 Exemples de surfaces rationnelles.

Soit  $S \subset \mathbb{P}^n$  une surface rationnelle. En choisissant une application birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  sur  $S$ , on obtient une application rationnelle  $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ , d'où (Rappel II.6) un système linéaire sans composante fixe sur  $\mathbb{P}^2$ . Nous allons maintenant considérer les systèmes linéaires les plus simples sur  $\mathbb{P}^2$  (coniques, cubiques) et étudier les surfaces rationnelles plongées qui leur correspondent.

Soient  $P$  un tel système,  $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \bigvee_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^N$  l'application rationnelle associée. Voici les questions que l'on aura à examiner :

- 1) La dimension  $N$  de  $P$ ; rappelons à ce sujet :

Rappel IV.3 :  $\dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)) = \binom{r+k}{r}$  .

2) L'application  $\varphi$  n'est pas partout définie en général ; il faut pour la rendre définie éclater les points bases du système  $P$  . Nous nous placerons ici pour simplifier dans le cas où il suffit de le faire une fois ; c'est-à-dire que si  $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  est l'éclatement de  $r$  points bases distincts  $p_1, \dots, p_r$  ,  $f = \varphi \circ \varepsilon$  est un morphisme de  $S$  dans  $\mathbb{P}^N$  . Il correspond à un système linéaire  $\hat{P}$  sur  $S$  ; si on note  $m_i$  la multiplicité minimum des courbes de  $P$  en  $p_i$  ,  $d$  leur degré,  $L = \varepsilon^* \ell$  ( $\ell$  droite de  $\mathbb{P}^2$ ),  $E_i = \varepsilon^{-1}(p_i)$ , on a :  $\hat{P} \subset |dL - \sum_i m_i E_i|$  .

3) Nous nous intéressons surtout au cas où  $f$  est un plongement. Vu la définition de  $\varphi$  , cela signifie :

a) Le système linéaire  $\hat{P}$  sur  $S$  sépare les points : étant donnés  $x, y \in S$  ,  $x \neq y$  , il existe une courbe  $C$  de  $\hat{P}$  passant par  $x$  et pas par  $y$  .

b)  $\hat{P}$  sépare les tangentes : pour tout  $x \in S$  , les courbes de  $\hat{P}$  passant par  $x$  ne sont pas toutes tangentes à une même direction.

Du point de vue du système  $P$  sur  $\mathbb{P}^2$  , la condition a) s'interprète en traduisant "C passe par  $x$ " (pour  $x \in E_i$ ) par "C est tangente en  $p_i$  à la direction correspondant à  $x$ " . Si  $x \in E_i$  , la condition b) s'interprète de la façon suivante : soit  $P_x$  le système des courbes de  $P$  tangentes à  $x$  en  $p_i$  . Pour toute conique  $Q$  tangente à  $x$  en  $p_i$  , il existe une courbe de  $P_x$  ayant avec  $Q$  un contact d'ordre 2 (exactement) en  $p_i$  .

4) Supposons que  $f$  soit un plongement ; la surface  $S' = f(S)$  est donc une surface rationnelle lisse dans  $\mathbb{P}^N$  . On va s'intéresser à la géométrie de  $S'$  , et plus précisément :

- Son groupe de Picard : avec les notations de 2), il admet comme base orthogonale  $L = \varepsilon^* \ell$  et les  $E_i$  , avec  $L^2 = 1$  et  $E_i^2 = -1$  . Une section

hyperplane  $H$  de  $S'$  s'écrit  $dL - \sum_i m_i E_i$ , en désignant par  $d$  le degré des courbes de  $P$ .

- Son degré : il est égal à  $H^2 = d^2 - \sum_i m_i^2$ .

- Les droites tracées sur  $S'$  : ce sont les diviseurs effectifs  $D$  sur  $S'$  tels que  $D.H=1$ .

- Eventuellement les équations de  $S'$  dans  $\mathbb{P}^N$ .

5) Soit  $H$  un hyperplan dans le système linéaire  $P$ , correspondant à un point  $h$  de  $\overset{V}{P}$ . Le système linéaire  $H$  définit une application rationnelle  $\psi : S \dashrightarrow \overset{V}{H}$ ; on vérifie aussitôt que  $\psi$  est le composé de  $\varphi$  et de la projection de centre  $h$  de  $\overset{V}{P}$  sur  $\overset{V}{H}$ . En particulier si  $s \in S$ , la surface rationnelle obtenue à partir du système des courbes de  $P$  passant par  $s$  est la projection de centre  $f(s)$  de la surface  $S'$ .

On est donc conduit à étudier les projections de  $S'$  dans des espaces de dimension  $\leq N$ . Rappelons à ce propos le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

Lemme IV.4 : Soient  $S$  une surface dans  $\mathbb{P}^N$ ,  $p$  un point de  $\mathbb{P}^N - S$  (resp. de  $S$ ). Soit  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$  (resp.  $\hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ ) la projection de centre  $p$ . Pour que  $f$  soit un plongement, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de droite passant par  $p$  et coupant  $S$  en 2 points (resp. 3) au moins, comptés avec multiplicités.

L'ensemble des droites bisécantes (resp. tangentes) à la surface  $S$  est paramétré par  $S \times S$  moins la diagonale (resp. par le fibré projectif tangent à  $S$ ). On en déduit que la réunion des bisécantes (resp. des tangentes) de  $S$  est contenue dans une sous-variété de  $\mathbb{P}^N$  de dimension  $\leq 5$  (resp. 4). Le lemme IV.4 entraîne alors :

Proposition IV.5 : Toute surface est isomorphe, par projection générique, à une surface lisse dans  $\mathbb{P}^5$ .

Si  $S$  est une surface dans  $\mathbb{P}^5$ , la projection depuis un point générique est un plongement en dehors d'un nombre fini de points  $p_1, p_1', p_2, p_2', \dots, p_s, p_s'$ ; elle identifie le point  $p_i'$  au point  $p_i$ .

Revenons maintenant aux systèmes linéaires sur  $\mathbb{P}^2$ .

Systemes linéaires de coniques.

Il est clair que le système linéaire de toutes les coniques de  $\mathbb{P}^2$  définit un plongement  $j: \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ . L'image de  $j$  est la surface de Veronese  $V$ , de degré 4. Elle ne contient pas de droites (si  $d \in \text{Pic}(V)$  était la classe d'une droite, on devrait avoir  $h.d = 2\ell.d = 1$ ). Par contre elle contient un système linéaire de dimension 2 de coniques, qui sont les images des droites de  $\mathbb{P}^2$ . Cette propriété a une conséquence amusante :

Proposition IV.6 : Soit  $p$  un point générique de  $\mathbb{P}^5$ . La projection de centre  $p$  induit un isomorphisme de  $V$  sur son image  $V' \subset \mathbb{P}^4$ .

(On peut montrer en fait que la surface de Veronese est la seule surface de  $\mathbb{P}^5$  qui ait cette propriété, cf. [Se 2]),

Démonstration : Pour chaque droite  $d$  de  $\mathbb{P}^2$ , notons  $P_d$  le plan de la conique  $j(d)$ ; soit  $X$  la réunion des  $P_d$ . C'est une variété de dimension  $\leq 4$  : en effet c'est la projection sur  $\mathbb{P}^4$  de la variété  $Z \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$  définie par :  $Z = \{(d, x), x \in P_d\}$ ; or  $Z$  est fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $\mathbb{P}^2$ . Soient  $x, y$  deux points distincts de  $V$ ; la droite  $\langle x, y \rangle$  est contenue dans  $P_d$ , où  $d$  est la droite joignant les points  $j^{-1}(x)$  et  $j^{-1}(y)$  de  $\mathbb{P}^2$ . Par suite toute bisécante de  $V$  est contenue dans  $X$ , d'où le résultat.

La projection générique de la surface  $V'$  est une surface de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3$ , appelée surface de Steiner. On peut montrer (exercice 7) qu'elle possède trois droites doubles concourantes en un point, triple pour la surface.

La projection de  $V$  depuis un point de  $V$  est la surface  $S \subset \mathbb{P}^4$ , de degré 3, obtenue à partir du système linéaire des coniques sur  $\mathbb{P}^2$  passant par un point  $o$ . Il est immédiat que ce système définit un plongement  $j: F_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ , où  $F_1$  désigne l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $o$  (cf. IV.1 (iii)). Avec les notations de IV.1,  $j$  correspond au système linéaire  $|h+f|$  sur  $F_1$ .

Cherchons les droites contenues dans  $S$ . On a  $f.(h+f) = 1$ , de sorte que les images des fibres de la fibration  $F_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  forment une famille de droites  $(D_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  sur  $S$ , avec  $D_t \cap D_{t'} = \emptyset$  pour  $t \neq t'$ . Comme  $b.(h+f) = 1$ , la courbe  $B$  sur  $F_1$  (IV.1 (ii)) a pour image une droite, qui rencontre toutes les droites  $D_t$ . Ce sont les seules droites contenues dans  $S$ : toute courbe irréductible  $C$  sur  $F_1$  distincte de  $B$  s'écrit dans  $\text{Pic}(F_1)$   $ah+bf$ , avec  $a, b \gg 0$  (IV.1 (ii)). Alors  $C.(h+f) = 2a+b \gg 1$  sauf si  $C = f$ .

Le même raisonnement montre que les coniques contenues dans  $S$  sont les images par  $j$  des transformés totaux des droites de  $\mathbb{P}^2$ : les droites ne passant pas par  $o$  donnent des coniques lisses, tandis que celles qui passent par  $o$  donnent les coniques dégénérées  $j(B) \cup D_t$ .

Proposition IV.7 : La surface réglée cubique  $S \subset \mathbb{P}^4$  est contenue dans un système linéaire de dimension 2 de quadriques dans  $\mathbb{P}^4$ , dont elle est l'intersection. Pour tout pinceau de quadriques  $(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$  contenant  $S$ , on a  $Q_1 \cap Q_2 = S \cup P$ , où  $P$  est un plan et  $P \cap S$  une conique. Inversement pour toute conique sur  $S$ , contenue dans un plan

$P$ , la réunion  $P \cup S$  est intersection de deux quadriques.

Démonstration : Les quadriques de  $\mathbb{P}^4$  découpent sur  $F_1$  les transformés stricts des quartiques de  $\mathbb{P}^2$  passant par  $o$  avec multiplicité 2. Les systèmes linéaires  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)|$  et  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)|$  ont même dimension ; comme le fait de passer doublement par un point donné impose 3 conditions à une courbe plane, il existe au moins 3 quadriques linéairement indépendantes contenant  $S$ . Soient  $Q_1, Q_2$  deux de ces quadriques ; elles sont nécessairement irréductibles. L'intersection  $Q_1 \cap Q_2$  est une surface de degré 4 qui contient  $S$  : c'est donc la réunion de  $S$  et d'un plan  $P$ . Si  $P$  a pour équations  $L=M=0$ , l'équation de  $Q_i$  est de la forme  $LA_i + MB_i = 0$  ( $i=1,2$ ), où  $L, M, A_i, B_i$  sont des formes linéaires en les coordonnées sur  $\mathbb{P}^4$ . Le déterminant  $A_1B_2 - A_2B_1$  s'annule en tout point de  $S-P$ , donc  $S$  est contenue dans la quadrique  $Q_3 : A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ . On vérifie aussitôt que  $S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$  ; ceci entraîne que le système des quadriques contenant  $S$  est engendré par  $Q_1, Q_2, Q_3$ , donc est de dimension 2. L'intersection  $P \cap S = P \cap Q_3$  est une conique. Inversement, si  $C$  est une conique  $\subset S$  et  $P$  le plan qui la contient, il existe un pinceau de coniques contenant  $P$  : en effet il suffit d'imposer aux quadriques de  $R$  de contenir un point de  $P-C$  pour qu'elles contiennent  $P$ . Il est alors clair que l'intersection des quadriques du pinceau est  $P \cup S$ .

Corollaire IV.8 : Si  $p$  est un point de  $\mathbb{P}^4-S$  la projection de centre  $p$  de  $S$  est une surface cubique ayant comme seules singularités une droite double.

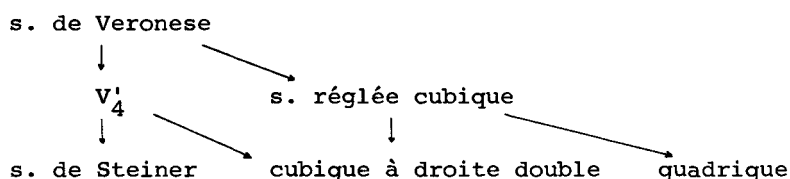
Démonstration : Soient  $Q_1, Q_2$  deux quadriques distinctes contenant  $S$  et  $p$ . On a  $Q_1 \cap Q_2 = S \cup P$ , où  $P$  est un plan passant par  $p$ . Toute bisécante à  $S$  passant par  $p$  coupe  $Q_1$  et  $Q_2$  en 3 points : elle est donc contenue dans  $Q_1$  et  $Q_2$ , et par suite dans  $P$ . On en déduit que la projection de centre  $p$  est un isomorphisme en



dehors de la conique  $C = P \cap S$ , et que sa restriction à  $C$  est un morphisme de degré 2 sur une droite, qui est donc une droite double pour  $p(S)$ .

La projection de  $S$  depuis un point  $s \in S$  est une quadrique irréductible dans  $\mathbb{P}^3$ ; on vérifie facilement qu'elle est lisse si et seulement si  $s \notin j(B)$ .

Finalement on peut représenter les surfaces obtenues par le schéma suivant, dans lequel les flèches verticales (resp. obliques) désignent la projection d'un point générique de l'espace (resp. d'un point de la surface) :



Systèmes linéaires de cubiques .

On considère  $r$  points distincts  $p_1, \dots, p_r$  de  $\mathbb{P}^2$  ( $r \leq 6$ ). On dira que ces points sont en position générale s'il n'existe pas de droite passant par 3 d'entre eux ni de conique passant par 6 d'entre eux.

On note  $\varepsilon : \mathbb{P}_r \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'éclatement des points  $p_1, \dots, p_r$ . On pose  $d = 9-r$ .

Proposition IV.9 : Si  $p_1, \dots, p_r$  sont en position générale ( $r \leq 6$ ), le système linéaire des cubiques passant par  $p_1, \dots, p_r$  définit un plongement  $j : \mathbb{P}_r \hookrightarrow \mathbb{P}^{9-r}$ . La surface  $S_d = j(\mathbb{P}_r)$  est une surface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^d$ , appelée surface de del Pezzo de degré  $d$ . En particulier,  $S_3$  est une surface cubique dans  $\mathbb{P}^3$ ;  $S_4$  est intersection complète de deux quadriques dans  $\mathbb{P}^4$ .

(Pour le cas où les  $p_i$  ne sont pas en position générale, voir par exemple [X]).

Démonstration : Conformément à IV.2.3 il faut vérifier que le système linéaire des cubiques passant par  $p_1, \dots, p_r$  sépare les points et sépare les tangentes sur  $P_r$ . Cela entraînera en effet aussitôt que ce système est sans points fixes sur  $P_r$ , et aussi (par récurrence sur  $r$ ) que sa dimension est  $9-r$ . De plus il suffit de vérifier ces propriétés pour  $r=6$ , les autres cas s'en déduisant immédiatement. Soient  $i < j \leq 6$ , et  $x \in P_6$  tel que  $\varepsilon(x) \notin \{p_i, p_j\}$ . La condition de position générale entraîne qu'il existe une seule conique  $Q_{ij}^x$  passant par  $x$  et les 4 points  $p_k$  pour  $k \neq i, j$  (rappelons que si  $x \in E_i$ , passer par  $x$  signifie être tangent en  $p_i$  à la direction  $x$ ). De même, il existe une seule conique  $Q_i$  passant par les 5 points  $p_j$  pour  $j \neq i$ ; on a  $\hat{Q}_i \cap \hat{Q}_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  (le chapeau dénote les transformés stricts). On note  $L_{ij}$  la droite  $\langle p_i, p_j \rangle$  pour  $i \neq j$ .

a) Montrons que le système linéaire considéré sépare les points de  $P_6$ . Soient  $x, y \in P_6$ ,  $x \neq y$ . Choisissons  $i$  tel que  $p_i \neq \varepsilon(x), \varepsilon(y)$ , et  $x \notin \hat{Q}_i$ . On a alors  $\hat{Q}_{ij}^x \cap \hat{Q}_{ik}^x = \{x\}$  pour  $p_k \notin \{p_i, p_j, \varepsilon(x)\}$ . Par conséquent  $y$  appartient à  $\hat{Q}_{ij}^x$  pour au plus une valeur de  $j$ . Par ailleurs on a  $y \in \hat{L}_{ij}$  pour au plus un  $j$ ; donc il existe  $j$  tel que la cubique  $\hat{Q}_{ij}^x \cup \hat{L}_{ij}$  passe par  $x$  et non par  $y$ , ce qui prouve l'injectivité du morphisme  $j: P_6 \rightarrow \mathbb{P}^3$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{P}^2 - \{p_1, \dots, p_6\}$ . Les cubiques  $Q_i \cup \langle p_i, x \rangle$  ont une tangente en  $x$  qui n'est pas constante; ceci montre que  $j$  est une immersion en  $x$ . Soit maintenant  $x \in E_1$ ; les coniques  $Q_{23}^x$  et  $Q_{24}^x$  se coupent en  $x$  avec multiplicité 2. Ceci entraîne que les cubiques  $\hat{Q}_{23}^x \cup \hat{L}_{23}$  et  $\hat{Q}_{24}^x \cup \hat{L}_{24}$  n'ont pas la même tangente en  $x$ , ce qui achève de prouver que  $j$  est un plongement.

Conformément à IV.2.4 on a  $\deg(j(P_r)) = 9-r$ , de sorte que  $j(P_r) = S_d$  est une surface lisse de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^d$ , avec  $d = 9-r$ . En particulier,  $S_3$  est une surface cubique dans  $\mathbb{P}^3$ ;  $S_4$  est une surface de degré 4 dans  $\mathbb{P}^4$ . Montrons que  $S_4$  est contenue dans deux quadriques distinctes : comme  $\dim H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)) = 15$ , il faut montrer que  $\dim H^0(S_4, \mathcal{O}(2H)) \ll 13$ . Soit  $C \in |H|$  une section hyperplane lisse de  $S_4$ ; c'est une courbe elliptique, puisqu'elle se projette isomorphiquement sur une cubique dans  $\mathbb{P}^2$ . Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{S_4}(H) \rightarrow \mathcal{O}_{S_4}(2H) \rightarrow \mathcal{O}_C(2H|_C) \rightarrow 0.$$

On en déduit en utilisant la suite exacte de cohomologie :

$$h^0(S_4, \mathcal{O}_{S_4}(2H)) \ll h^0(S_4, \mathcal{O}_{S_4}(H)) + h^0(C, \mathcal{O}_C(2H|_C)).$$

Comme  $H.C = H^2 = 4$ , on a  $h^0(C, \mathcal{O}_C(2H|_C)) = 8$  par Riemann-Roch, d'où  $h^0(S_4, \mathcal{O}_{S_4}(2H)) \ll 13$ .

Ainsi  $S_4$  est contenue dans deux quadriques distinctes  $Q_1, Q_2$ , nécessairement irréductibles;  $Q_1 \cap Q_2$  est une surface de degré 4 qui contient  $S_4$ , donc lui est égale.

Remarques IV.10 : 1) Le système linéaire des cubiques passant par  $p_1, \dots, p_r$  joue un rôle particulier : c'est en effet le "système anticanonique"  $|-K|$  sur la surface  $P_r$ . On peut montrer que les surfaces de Del Pezzo sont les seules surfaces (avec  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  plongé dans  $\mathbb{P}^8$ ) plongées dans  $\mathbb{P}^N$  par le système anticanonique complet (Ch.V Exercice 2).

2) Les cubiques et les intersections complètes de 2 quadriques sont les seules surfaces intersections complètes plongées par le système anticanonique. Cela résulte aussitôt du lemme suivant :

Lemme IV.11 : Soit  $S$  une surface, intersection dans  $\mathbb{P}^{r+2}$  de  $r$  hypersurfaces  $H_1, \dots, H_r$  de degrés  $d_1, \dots, d_r$ . Soit  $H$  une section hyperplane de  $S$ . On a  $K_S \equiv (\sum d_i - r - 3)H$ .

Démonstration : Soit  $I$  l'idéal de  $S$  dans  $\mathbb{P}^{r+2}$ . Puisque les équations des hypersurfaces  $H_i$  engendrent  $I$ , on a une surjection :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+2}}(-d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+2}}(-d_r) \rightarrow I$$

d'où par restriction à  $S$  une application

$$u : \mathcal{O}_S(-d_1H) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S(-d_rH) \rightarrow I|_S \cong I/I^2.$$

Comme les deux faisceaux sont localement libres de rang  $r$ , la surjection  $u$  est un isomorphisme. Par suite  $\Lambda^r(I/I^2) \cong \mathcal{O}_S(-(\sum d_i) \cdot H)$ ; comme  $\Omega_{\mathbb{P}^{r+2}}^{r+2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+2}}(-r-3)$ , on conclut par I.17.

On verra plus loin que toute surface cubique dans  $\mathbb{P}^3$  (resp. intersection de 2 quadriques dans  $\mathbb{P}^4$ ) est une surface de del Pezzo.

Etudions maintenant les droites contenues dans la surface  $S_d$ .

Proposition IV.12 : La surface  $S_d$  contient un nombre fini de droites ; ce sont les images par  $j$  des courbes suivantes dans  $\mathbb{P}_r$  :

- les diviseurs exceptionnels  $E_i$  ;
- les transformés stricts des droites  $\langle p_i, p_j \rangle$  ( $i \neq j$ ) ;
- les transformés stricts des coniques passant par 5 des

points  $p_i$  .

Leur nombre est donné dans le tableau suivant :

$r =$ nombres des $E_i$	0	1	2	3	4	5	6
nombre des droites $\langle p_i, p_j \rangle$	0	0	1	3	6	10	15
nombre des coniques passant par 5 des $p_i$	0	0	0	0	0	1	6
nombre des droites contenues dans $S_d$	0	1	3	6	10	16	27

Démonstration : Notons que comme  $H \equiv -K$ , les droites contenues dans  $S$  sont les droites exceptionnelles sur  $S$ ; en particulier les  $j(E_i)$  sont des droites sur  $S$ . Soit  $E$  une droite sur  $S$  distincte des  $E_i$ ; on a  $E.H = 1$ , et  $E.E_i = 0$  ou  $1$ . Par suite  $E \equiv mL - \sum m_i E_i$ , avec  $m_i = 0$  ou  $1$  et  $E.H = 3m - \sum m_i = 1$ . Les seules solutions sont  $m=1$  avec 2 des  $m_i$  égaux à  $1$ , et  $m=2$  avec 5 des  $m_i$  égaux à  $1$ : on obtient ainsi les courbes définies dans l'énoncé. Le calcul du nombre de ces courbes est immédiat.

La proposition donne bien sûr beaucoup plus que le nombre des droites contenues dans  $S_d$ : elle donne leurs classes dans  $\text{Pic}(S_d)$ , donc la configuration de l'ensemble des droites (incidence, etc...). Cette configuration a été étudiée de manière très complète par les géomètres classiques - cf. exercices 12, 13, 14.

Théorème IV.13 : Soit  $S \subset \mathbb{P}^3$  une surface cubique lisse. Alors  $S$  est une surface de del Pezzo  $S_3$  (i.e. isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  avec 6 points éclatés).

Lemme IV.14 :  $S$  contient une droite.

Démonstration : Notons  $P = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|$  l'espace projectif de toutes les cubiques dans  $\mathbb{P}^3$ , et  $G_4$  l'ensemble des droites de  $\mathbb{P}^3$ ;  $G_4$  a une structure naturelle de variété de dimension 4 (une droite de  $\mathbb{P}^3$  est déterminée par ses coordonnées plückeriennes homogènes  $A, B, C, L, M, N$ , soumises à la seule relation  $AL+BC+MN = 0$ , de sorte que  $G_4$  s'identifie à une quadrique lisse dans  $\mathbb{P}^5$ ). Considérons la sous-variété de  $G_4 \times P$  définie par :  $Z = \{(\ell, S), \ell \subset S\}$ ; notons  $p$  et  $q$  les projections de  $Z$  sur  $G_4$  et  $P$ . Une surface cubique  $S \subset \mathbb{P}^3$  contient la droite d'équations  $X=Y=0$  si et seulement si les coefficients de  $X^3, X^2Y, XY^2, Y^3$  dans  $F$  sont nuls; par suite  $Z$  est fibré sur  $G_4$  avec des

fibres de dimension  $\dim(P) - 4$ , de sorte que  $\dim(Z) = \dim(P)$ . Si le lemme n'est pas vrai,  $q$  n'est pas surjectif ; son image est de codimension  $\geq 1$  dans  $P$ , et la fibre  $q^{-1}(S)$ , pour  $S \in P$ , est vide ou de dimension  $\geq 1$ . Il suffit donc de mettre en évidence une surface cubique qui contienne un nombre fini (non nul) de droites ; or c'est le cas de la surface de del Pezzo  $S_3$ .

Lemme IV.15 : Soit  $\ell$  une droite contenue dans  $S$  ; il existe exactement 10 droites contenues dans  $S$  qui rencontrent  $\ell$  (distinctes de  $\ell$ ). Ces droites se répartissent en 5 paires distinctes de droites concourantes. En particulier,  $S$  contient deux droites disjointes.

Démonstration : Considérons le pinceau des plans  $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$  passant par  $\ell$ . L'intersection de  $S$  avec  $P_\lambda$  est réunion de  $\ell$  et d'une conique  $C_\lambda$ . Remarquons que  $C_\lambda$  ne peut être de rang 1, ni contenir  $\ell$  : en effet si le plan  $L=0$  coupe  $S$  suivant la droite  $M=0$  et la droite  $N=0$  comptée deux fois, l'équation de  $S$  s'écrit  $LQ + MN^2 = 0$  ( $Q$  étant une forme quadratique sur  $\mathbb{P}^3$ ) ; mais alors les deux points vérifiant  $L=N=Q=0$  sont des points singuliers de  $S$  (critère jacobien). Toute conique singulière  $C_\lambda$  est donc réunion de deux droites concourantes rencontrant  $\ell$  (distinctes de  $\ell$ ), et on obtient ainsi toutes les droites rencontrant  $\ell$ .

Choisissons des coordonnées  $(X, Y, Z, T)$  sur  $\mathbb{P}^3$  telles que  $\ell$  ait pour équations  $X=Y=0$ . L'équation de  $S$  s'écrit :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0,$$

$A, B, \dots$  étant des polynômes homogènes en  $Z, T$ . En faisant  $Z = \lambda T$  et en divisant par  $T$ , on obtient l'équation de  $C_\lambda$ . Cette conique est

singulière lorsque le déterminant  $\Delta(Z, T) = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$  s'annule.

C'est un polynôme homogène de degré 5 en  $Z, T$  ; il faut montrer qu'il a 5 racines distinctes. Supposons que  $Z=0$  soit une racine ; soit  $s$  le point singulier de la conique  $C_0$ . Si  $s \notin \ell$ , on peut

supposer que l'équation de  $C_0$  est  $XY=0$  ; cela signifie que tous les coefficients de  $\Delta$  sont divisibles par  $Z$ , sauf  $B$ . Remarquons que  $F$  n'est pas divisible par  $Z^2$ , sans quoi  $s$  serait point singulier de  $S$ . Par suite  $\Delta$ , qui est somme de termes divisibles par  $Z^2$  et de  $B^2F$  qui ne l'est pas, n'est pas divisible par  $Z^2$ . Si  $s \in \ell$ , on peut prendre  $XT=0$  comme équation de  $C_0$  ; le même argument montre que  $Z=0$  est une racine simple de  $\Delta$ . Il y a donc 5 coniques distinctes  $C_\lambda$  qui sont singulières.

Pour prouver la dernière assertion du lemme, notons que si 3 droites distinctes contenues dans  $S$  se rencontrent en un point  $p$ , elles sont nécessairement contenues dans le plan tangent à  $S$  en  $p$ , donc coplanaires. Soient alors  $C_0, C_1$  deux coniques singulières du pinceau  $(C_\lambda)$ ,  $C_0 = d_0 \cup d'_0$ ,  $C_1 = d_1 \cup d'_1$  ; les droites  $d_0, d_1$  et  $\ell$  n'étant pas coplanaires, il est clair que  $d_0 \cap d_1 = \emptyset$ .

Démonstration du théorème : Soient  $\ell, \ell'$  deux droites disjointes contenues dans  $S$ . Définissons deux applications rationnelles  $\varphi : \ell \times \ell' \dashrightarrow S$  et  $\psi : S \dashrightarrow \ell \times \ell'$  de la manière suivante. Si  $(p, p')$  est un point générique de  $\ell \times \ell'$ , la droite  $\langle p, p' \rangle$  rencontre  $S$  en un troisième point  $p''$  : on pose  $\varphi(p, p') = p''$ . Si  $s \in S - \ell - \ell'$ , on pose  $p = \ell \cap \langle s, \ell' \rangle$ ,  $p' = \ell' \cap \langle s, \ell \rangle$  et  $\psi(s) = (p, p')$ . Il est clair que  $\varphi$  et  $\psi$  sont inverses l'une de l'autre. En outre,  $\psi$  est un morphisme : on peut en effet le définir sur  $\ell$  (ou  $\ell'$ ) en remplaçant, pour  $s \in \ell$ , le plan  $\langle s, \ell \rangle$  par le plan tangent à  $S$  en  $s$  (la vérification qu'on obtient ainsi un morphisme est immédiate). Ainsi  $\psi$  est un morphisme birationnel, donc un composé d'éclatements ; les droites contractées par  $\psi$  sont les droites contenues dans  $S$  qui rencontrent à la fois  $\ell$  et  $\ell'$ .

Cherchons le nombre de ces droites. On a vu (lemme IV.15) que les droites rencontrant  $\ell$  se répartissent en 5 paires  $d_i, d'_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), telles que  $d_i, d'_i$  et  $\ell$  sont contenues dans un plan  $P_i$ . Le plan

$P_i$  rencontre  $\ell'$  en un point, situé sur  $d_i$  ou sur  $d'_i$  (et non sur les deux, sans quoi  $d_i$ ,  $d'_i$  et  $\ell'$  seraient coplanaires). Ainsi une droite dans chaque paire rencontre aussi  $\ell'$  : il y a donc 5 droites disjointes qui sont contractées par  $\psi$ . Par suite  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  éclaté en 5 points  $(p_i, p'_i)$  ( $i=1, \dots, 5$ ), avec  $p_i \neq p_j$  et  $p'_i \neq p'_j$  pour  $i \neq j$  ; compte tenu de II.14.2,  $S$  est aussi isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  éclaté en 6 points distincts. De plus le plongement de  $S$  dans  $\mathbb{P}^3$  est le plongement anticanonique (remarque IV.10.2), donc  $S$  est l'image de  $\mathbb{P}^2$  éclaté en 6 points plongé par le système des cubiques passant par les 6 points : autrement dit  $S$  est une surface de del Pezzo  $S_3$ .

Proposition IV.16 : Soit  $S$  une surface dans  $\mathbb{P}^4$ , intersection de deux quadriques. Alors  $S$  est une surface de del Pezzo  $S_4$ .

Démonstration : Montrons d'abord que  $S$  ne contient qu'un nombre fini de droites. Toute droite  $E \subset S$  vérifie  $E.H = 1$  donc  $E.K = -1$  et par suite  $E^2 = -1$  ; il en résulte que deux droites distinctes  $E, E'$  ont des classes différentes dans  $NS(S)$  (puisque  $E.E' = 0$  ou  $1$ ). Fixons une droite  $\ell \subset S$  ; si deux droites distinctes  $E, E'$  rencontrent  $\ell$ , on a nécessairement  $E.E' = 0$  (sans quoi le plan engendré par  $E, E', \ell$  serait contenu dans  $S$ ). Il résulte donc de la finitude du groupe  $NS(S)$  qu'il n'existe qu'un nombre fini de droites de  $S$  rencontrant une droite donnée. S'il existait une infinité de droites dans  $S$ , on pourrait alors construire une suite infinie de droites  $(E_n)$  avec  $E_i.E_j = 0$  pour  $i \neq j$ , ce qui contredirait de nouveau la finitude de  $NS(S)$ .

Soient  $p$  un point de  $S$  par lequel ne passe aucune droite de  $S$ ,  $f: \hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$  la projection de centre  $p$ . Toute trisécante de  $S$  est contenue dans les quadriques contenant  $S$ , donc dans  $S$  ; il n'existe donc pas de trisécante de  $S$  passant par  $p$ . D'après IV.4,  $f$  est un isomorphisme sur une surface cubique  $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ . Le diviseur exceptionnel dans l'éclatement de  $p$  donne une droite  $E \subset S_3$ . En choisissant comme



précédemment deux droites disjointes  $\ell, \ell'$  qui rencontrent  $E$ , on obtient un morphisme birationnel  $h: S_3 \rightarrow \mathbb{P}^2$  qui contracte 6 droites, parmi lesquelles  $E$ . Il en résulte que  $h$  se factorise via un morphisme  $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ , de sorte que  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  avec 5 points distincts éclatés : comme  $S$  est plongé dans  $\mathbb{P}^4$  par le système anticanonique, on conclut que  $S$  est une surface de del Pezzo  $S_4$ .

Note historique

Les exemples de ce chapitre (et des exercices) ne constituent qu'un mince échantillon de l'énorme masse de résultats - aujourd'hui bien oubliés - obtenus dans l'étude des surfaces particulières par les géomètres du 19e siècle (Clebsch, Cremona, Darboux, Klein, Kronecker, Kummer...). Avant 1880, le point de vue était un peu différent du nôtre puisqu'on ne regardait que les surfaces dans  $\mathbb{P}^3$ , éventuellement singulières. C'est avec la première génération de l'école italienne (Bertini, C. Segre, Veronese) que la "géométrie hyperspatiale" se développe : on découvre que de nombreuses surfaces sont des projections de surfaces lisses plongées dans des espaces de dimension supérieure, et que ce fait permet d'expliquer naturellement beaucoup de leurs propriétés.

C'est ainsi que Veronese introduit la surface qui porte son nom ([V]), étudie ses projections et retrouve ainsi la "surface romaine" de Steiner (découverte en 1844). C. Segre montre que la quartique de  $\mathbb{P}^3$  contenant une conique double (très étudiée avant lui) est projection de la surface de Del Pezzo  $S_4$  (exercice 15), et démontre ainsi facilement ses propriétés ([Sg 2]). Il étudie aussi systématiquement les surfaces réglées ([Sg 1]).

Del Pezzo classifie les surfaces de degré  $n$  dans  $\mathbb{P}^n$  ([DP]) et introduit à cette occasion les surfaces  $S_d$ .

Une excellente exposition de ce sujet se trouve dans le livre de Conforto (d'après Enriques) "Le superficie razionale", Zanichelli, Bologne (1939).

Exercices

1) Avec les notations de IV.1, montrer que le système linéaire  $|h|$  sur  $F_n$  définit un morphisme  $f: F_n \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ , qui est un plongement en dehors de  $B$  et contracte  $B$  sur un point  $p$ . Montrer que  $f(F_n)$  est un cône de sommet  $p$ , de base la courbe rationnelle projectivement normale de degré  $n$  dans  $\mathbb{P}^n$  (c'est-à-dire plongée dans  $\mathbb{P}^n$  par le système complet  $|\mathcal{O}(n)|$ ).

(On pourra montrer que  $h^1(h-f)$  est nul, par exemple en le comparant à  $h^1(-f)$ ; utiliser par ailleurs la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{F_n} \rightarrow \mathcal{O}_{F_n}(C) \rightarrow \mathcal{O}_{F_n}(C)|_C \rightarrow 0, \text{ avec } C \in |h|.$$

2) Montrer que le système  $|h+kf|$  ( $k \gg 1$ ) définit un plongement  $j$  de  $F_n$  dans  $\mathbb{P}^{n+2k+1}$ . Montrer que les fibres  $f_t$  sont transformées en une famille de droites disjointes; la courbe  $j(B)$  (resp.  $j(C)$ , pour  $C$  générique dans  $|h|$ ) est une courbe rationnelle projectivement normale de degré  $k$  (resp.  $n+k$ ), qui rencontre une fois toutes les droites  $j(f_t)$ ;  $j(F_n)$  est une surface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^{d+1}$ , avec  $d = n+2k$ .

Inversement, soient  $H_k$  et  $H_{d-k}$  deux sous-espaces projectifs disjoints dans  $\mathbb{P}^{d+1}$ , de dimensions  $k$  et  $d-k$ , avec  $2k < d$ ; soient  $R_k$  (resp.  $R_{d-k}$ ) une courbe rationnelle projectivement normale de degré  $k$  (resp.  $d-k$ ) dans  $H_k$  (resp.  $H_{d-k}$ ), et  $u$  un isomorphisme de  $R_k$  sur  $R_{d-k}$ . Montrer que la surface réunion des droites  $\langle r, u(r) \rangle$ , pour  $r \in R_k$ , est isomorphe à la surface  $F_n$  ( $n = d-2k$ ), plongée par

le système  $|h+kf|$  .

3) Montrer que toute surface irréductible (pas nécessairement lisse) de degré  $\leq n-2$  dans  $\mathbb{P}^n$  est contenue dans un hyperplan.

4) Soit  $S$  une surface irréductible, pas nécessairement lisse, de degré  $n-1$  dans  $\mathbb{P}^n$ , non contenue dans un hyperplan. Montrer que  $S$  est une des surfaces suivantes :

- un cône sur une courbe rationnelle projectivement normale de degré  $n-1$  ;

- la surface de Veronese ;

- la surface  $F_r$  ( $r \leq n-3$ ,  $r \equiv n-1 \pmod{2}$ ) plongée par le système  $|h+kf|$ , avec  $2k = n-1-r$  .

(Si  $S$  est singulière, c'est un cône à cause de 3) ; si  $S$  est lisse, montrer qu'une section hyperplane lisse  $H$  de  $S$  est rationnelle, puis que le système  $|K_S + 2H|$  est sans point base; en déduire  $K_S^2 \geq 8$ . Si  $K_S^2 = 8$ , montrer qu'on a  $S = F_r$  et  $K_S + 2H = (n-3)f$  ).

5) Soient  $P$  un plan projectif,  $\check{P}$  le plan dual. L'espace projectif  $Q$  des coniques sur  $P$  est en dualité ("apolarité") avec l'espace  $\check{Q}$  des coniques sur  $\check{P}$ . Soit  $q \in \check{Q}$ ; vérifier que :

(i) Si  $q$  est de rang 1 - i.e.  $q$  est l'ensemble des droites passant par un point  $p$  de  $P$  -, les coniques de  $P$  apolaires à  $q$  sont celles qui passent par  $p$  .

(ii) Si  $q$  est de rang 2 - i.e.  $q$  est l'ensemble des droites passant par un des deux points  $p_1$  ou  $p_2$  de  $P$  -, une conique  $C$  de  $P$  est apolaire à  $q$  si et seulement si les 2 points de  $C \cap \langle p_1, p_2 \rangle$  sont conjugués harmoniques par rapport à  $p_1, p_2$  .

6) Le système des coniques définit un plongement de  $P$  dans  $\check{Q}$ , dont l'image est la surface de Veronese  $V \subset \check{Q}$ . Montrer que  $V$  est l'ensemble des coniques de rang 1 sur  $\check{P}$  (utiliser 5 (i)). En déduire

que  $V$  est intersection de 5 quadriques dans  $\mathbb{P}^4$ . Montrer que la réunion des bisécantes de  $V$  est l'ensemble  $X$  des coniques singulières sur  $\mathbb{P}^4$ . En déduire que  $X$  est une hypersurface de degré 3 dans  $\mathbb{P}^4$ , dont le lieu singulier est  $V$ .

7) Soit  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$  le morphisme associé à un système linéaire  $R$  de coniques dans  $\mathbb{P}^2$ , de dimension 3, sans point base. Soit  $\mathbb{R}$  le pinceau dual de coniques dans  $\mathbb{P}^2$ ; on suppose que  $\mathbb{R}$  contient 3 coniques singulières distinctes, de rang 2. Ces 3 coniques correspondent donc à 3 paires de points  $(p_i, p_i')$ ,  $i=1,2,3$ . Montrer que  $f$  est un plongement en dehors des 3 droites  $\langle p_i, p_i' \rangle$ , que la restriction de  $f$  à ces droites est un morphisme de degré 2 sur une droite double de  $S = f(\mathbb{P}^2)$ , et que les 3 sommets du triangle ont pour image un même point triple de  $S$ , par lequel passent les 3 droites doubles.  $S$  est la "surface romaine" de Steiner.

8) Soit  $S$  une surface de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3$  avec 3 droites doubles (non coplanaires) concourantes en un point triple  $t$  de  $S$ . Montrer que  $S$  est une surface de Steiner (projeter depuis  $t$ , puis effectuer une transformation quadratique).

9) Soit  $S$  une surface cubique dans  $\mathbb{P}^3$  contenant une droite double  $d$ . Montrer que  $S$  est projection d'une surface réglée cubique  $R \subset \mathbb{P}^4$ . On suppose que la conique  $C \subset R$  qui se projette sur  $d$  est non-singulière. Montrer qu'il existe une droite  $\ell \subset S$ , disjointe de  $d$ , et un morphisme de degré 2  $f: \ell \rightarrow d$  tels que  $S = \bigcup_{p \in \ell} \langle p, f(p) \rangle$ .

10) Calculer le nombre de pincesaux de coniques (resp. de systèmes de cubiques gauches) sur la surface de Del Pezzo  $S_d$ .

11) On considère  $r$  points en position générale, avec  $r=7$  ou 8 (si  $r=8$ , il faut ajouter aux conditions de IV.9 qu'il n'existe pas de cubique passant par 7 des points et ayant un point double au

huitième). On note  $P_r$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en les  $r$  points,  $H$  le transformé strict d'une cubique passant par les  $r$  points.

a) Si  $r=7$ , montrer que  $|H|$  définit un morphisme fini de degré 2 de  $P_7$  sur  $\mathbb{P}^2$ , ramifié le long d'une quartique lisse;  $|2H|$  définit un plongement de  $P_7$  dans  $\mathbb{P}^6$ .

b) Si  $r=8$ ,  $|2H|$  définit un morphisme fini de degré 2 sur une quadrique de rang 3 dans  $\mathbb{P}^3$ ;  $|3H|$  définit un plongement de  $P_8$  dans  $\mathbb{P}^6$ .

12) Sur une surface cubique  $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ , montrer qu'il existe douze droites ("double-six")  $\ell_1, \dots, \ell_6; \ell'_1, \dots, \ell'_6$  telles que, pour  $i \neq j$  :  
 $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$ , et  $\ell_i \cap \ell'_i = \{\text{un point}\}$ .  
 Montrer qu'il existe 36 "doubles-six".

13) Montrer que les 10 droites contenues dans la surface de Del Pezzo  $S_5$  peuvent être arrangées selon la configuration suivante : six côtés d'un hexagone gauche ; trois transversales joignant les côtés opposés de l'hexagone ; une droite joignant les trois transversales.

14) Il résulte de l'exercice 11 - ou d'un calcul direct - que la projection d'une surface cubique  $S_3$  depuis un point  $p$  de  $S_3$  définit un revêtement double de  $\mathbb{P}^2$  ramifié le long d'une quartique lisse  $C$ . Montrer que les droites de  $S_3$ , ainsi que l'éclaté de  $p$ , se projettent suivant des droites de  $\mathbb{P}^2$  bitangentes à  $C$ ; en déduire que  $C$  admet précisément 28 bitangentes distinctes.

(Inversement, si l'on sait que  $C$  admet 28 bitangentes - ce qui est un résultat classique - on en déduit directement que  $S_3$  contient 27 droites).

15) Montrer que la projection de la surface de Del Pezzo  $S_4 \subset \mathbb{P}^4$ , depuis un point générique de  $\mathbb{P}^4 - S$ , est une quartique contenant une conique double. Inversement toute surface de ce type est projection d'une  $S_4$ . En déduire par exemple qu'une quartique de  $\mathbb{P}^3$  admettant

une conique double contient 16 droites distinctes.

Dans les exercices qui suivent, on donne des points  $p_i$  distincts dans  $\mathbb{P}^2$  et un système linéaire  $P$  de courbes passant par les  $p_i$  ; on demande d'étudier comme en IV.2 l'application rationnelle définie par  $P$ , en faisant les hypothèses de "position générale" nécessaires.

16)  $P =$  courbes de degré  $n$  passant par  $p_1, \dots, p_{n-1}$ , et passant par  $p_0$  avec multiplicité  $(n-1)$ . Montrer que la surface image est une surface  $F_r$ , plongée par le système  $|h+kf|$ , avec  $r+2k = n$ . L'entier  $r$  dépend de la position des  $p_i$  ; si par exemple les  $p_i$  ( $i \neq 0$ ) sont alignés, on a  $r = n-2$ .

17)  $P =$  quartiques passant par  $p_1, \dots, p_7$ , ayant un point double en  $p_0$ . L'image est une surface  $S$  de degré 5 dans  $\mathbb{P}^4$  ; il existe un plan  $H$  tel que  $S \cup H$  soit intersection d'une quadrique et d'une cubique.  $S$  contient 14 droites et un unique pinceau de coniques.

18)  $P =$  quartiques passant par  $p_1, \dots, p_8$ , et doublement par  $p_0$ . L'image est une quartique de  $\mathbb{P}^3$  contenant une droite double - image de la cubique de  $\mathbb{P}^2$  passant par les  $p_i$ .

19)  $P =$  quartiques passant par 9 points. L'image est une surface  $S$  de degré 7 dans  $\mathbb{P}^5$  ; il existe un plan  $H$  tel que  $S \cup H$  soit intersection complète de 3 quadriques.

20)  $P =$  quartiques passant par 10 points. L'image est une surface  $S$  de degré 6 dans  $\mathbb{P}^4$  ("surface de Bordiga").  $S$  contient 10 droites disjointes et 10 cubiques planes disjointes, telles que chaque droite rencontre une seule cubique plane ("double-dix").

## CHAPITRE V

### LE THÉORÈME DE CASTELNUOVO ET SES APPLICATIONS

Théorème V.1 (Castelnuovo) : Soit  $S$  une surface avec  $q = P_2 = 0$ .  
Alors  $S$  est rationnelle.

Commentaires V.2 : La condition  $P_2 = 0$  entraîne  $p_g = 0$ . On verra plus tard qu'on ne peut remplacer la condition donnée dans l'énoncé par la condition plus faible  $q = p_g = 0$ , qui paraît plus naturelle (cf. surfaces d'Enriques, surfaces de Godeaux...).

Le théorème de Castelnuovo a un corollaire important, dont l'énoncé demande deux définitions :

Définitions V.3 : Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ .

- $V$  est unirationnelle s'il existe une application rationnelle dominante (i.e. génériquement surjective)  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow V$ .
- $V$  est rationnelle s'il existe une application birationnelle  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow V$ .

En d'autres termes,  $V$  est rationnelle (resp. unirationnelle) si le corps des fonctions rationnelles sur  $V$  est une (resp. une sous-extension d'une) extension transcendante pure de  $\mathbb{C}$ .

Rappelons que pour les courbes, on a le :

Théorème V.4 (Lüroth) : Toute courbe unirationnelle est rationnelle.

## THÉORÈME DE CASTELNUOVO

Démonstration : Si  $C$  est unirationnelle, il existe un morphisme surjectif  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ . Il n'existe pas de forme holomorphe sur  $C$  non nulle (sinon son image inverse serait une forme holomorphe non nulle sur  $\mathbb{P}^1$ ) ; donc  $C$  est de genre 0, donc rationnelle.

Le théorème de Lüroth est en fait vrai sur un corps quelconque (non nécessairement algébriquement clos). Ce n'est pas le cas du résultat analogue pour les surfaces :

Corollaire V.5 (du théorème de Castelnuovo) : Toute surface unirationnelle est rationnelle.

Démonstration : Soit  $S$  une surface unirationnelle. D'après le théorème d'élimination des indéterminations (II.7), il existe un morphisme surjectif  $R \rightarrow S$ , où  $R$  est une surface rationnelle. Comme  $q = P_2 = 0$  pour  $R$  (III.21), on conclut comme précédemment que  $q = P_2 = 0$  pour  $S$ , d'où le résultat.

Le problème de Lüroth pour les variétés de dimension  $\geq 2$  est resté longtemps ouvert, ou plutôt mal fermé : de nombreux contre-exemples ont été proposés (Fano, Roth...), mais les démonstrations de non-rationalité sont aujourd'hui considérées comme incomplètes. Des contre-exemples irréprochables ont été donnés récemment ([C-G] et [I-M]) : hypersurfaces de degré 3 (resp. 4) dans  $\mathbb{P}^4$ . On notera qu'il ne s'agit pas de constructions pathologiques, mais des variétés les plus simples possibles ; moralement, "presque toutes" les variétés unirationnelles de dimension  $\geq 3$  ne sont pas rationnelles.

On ignore s'il existe des conditions numériques, analogues à celles de V.1, caractérisant les variétés unirationnelles.

Nous déduirons le théorème de la proposition suivante :

Proposition V.6 : Soit  $S$  une surface minimale avec  $q = P_2 = 0$ . Il existe une courbe rationnelle lisse  $C$  sur  $S$  telle que  $C^2 \gg 0$ .



On remarquera que la proposition n'est pas du tout évidente pour une surface rationnelle  $S$ .

V.7 : Montrons comment la proposition entraîne le théorème de Castelnuovo. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \sigma_S \longrightarrow \sigma_S(C) \longrightarrow \sigma_C(C^2) \longrightarrow 0$$

et de la nullité de  $H^1(S, \sigma_S)$ , on déduit  $h^0(C) \geq 2$ . Soit  $D$  un diviseur de  $|C|$  différent de  $C$ . Le pinceau engendré par  $C$  et  $D$  n'a pas de composantes fixes ; après éclatement des points fixes, il définit donc un morphisme  $\hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$  dont une fibre est isomorphe à  $C$ . Par suite  $S$  est rationnelle par le théorème de Noether-Enriques (III.4).

Pour démontrer la proposition nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme V.8 : Soit  $S$  une surface minimale avec  $K^2 < 0$ . Pour tout  $a > 0$ , il existe un diviseur effectif  $D$  sur  $S$  tel que  $K.D \ll -a$ ,  $|K+D| = \emptyset$ .

Démonstration : Il suffit de trouver un diviseur effectif  $E$  sur  $S$  tel que  $K.E < 0$ . En effet, il existe alors une composante  $C$  de  $E$  telle que  $K.C < 0$ . La formule du genre (I.15) montre que  $C^2 \geq -1$ , et  $C^2 = -1$  seulement si  $C$  est une courbe exceptionnelle, ce qui est exclus. Ainsi  $C^2 \geq 0$  ; comme le produit  $(aC+nK).C$  devient négatif quand  $n$  croît, il résulte de la remarque utile (III.5) que  $|aC+nK| = \emptyset$  pour  $n$  assez grand. Il existe donc  $n$  tel que  $|aC+nK| \neq \emptyset$ ,  $|aC+(n+1)K| = \emptyset$  ; si  $D \in |aC+nK|$ , on a  $K.D \ll -a$  et  $|K+D| = \emptyset$ .

Soit  $H$  une section hyperplane de  $S$ . Si  $K.H < 0$ , on peut prendre  $E=H$ ; si  $K.H = 0$ , le système  $|K+nH|$  est non vide pour  $n$  assez grand, et on peut prendre  $E \in |K+nH|$ . On peut donc supposer  $K.H > 0$ . Posons  $r_0 = K.H/(-K^2)$ . On a :

$$(H+r_0K)^2 = H^2 + \frac{(K.H)^2}{-K^2} > 0 \quad \text{et} \quad (H+r_0K).K = 0,$$

de sorte que si  $r$  est un rationnel  $> r_0$  et suffisamment voisin de  $r_0$ , on a :

$$(H+rK)^2 > 0 \quad (H+rK).K < 0 \quad (H+rK).H > 0.$$

Si  $r = \frac{p}{q}$  ( $p, q > 0$ ), posons  $D_m = mq(H+rK)$ . Alors  $D_m$  est un diviseur, satisfaisant à  $D_m^2 > 0$ ,  $D_m.K < 0$ . Le théorème de Riemann-Roch montre que :  $h^0(D_m) + h^0(K-D_m) \rightarrow \infty$  quand  $m \rightarrow \infty$ .

Comme  $(K-D_m).H$  devient négatif pour  $m$  assez grand, on conclut que  $|D_m| \neq \emptyset$  pour  $m$  grand ; on prend  $E \in |D_m|$ .

V.9 Démonstration de la proposition V.6 :

a) Il suffit de montrer qu'il existe un diviseur effectif  $D$  sur  $S$  tel que  $K.D < 0$ ,  $|K+D| = \emptyset$ . En effet, une des composantes  $C$  de  $D$  vérifie alors  $K.C < 0$ ,  $|K+C| = \emptyset$ ; appliquant Riemann-Roch à  $K+C$ , on obtient :

$$0 = h^0(K+C) \geq 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K) = g(C)$$

donc  $C$  est une courbe rationnelle lisse. La formule du genre donne alors  $C^2 \geq -1$ ; si  $C^2 = -1$ ,  $C$  est une droite exceptionnelle, ce qui est exclus. Donc  $C^2 \geq 0$ , ce qui prouve la proposition dans ce cas.

b)  $K^2 < 0$ .

La proposition résulte alors de a) et de V.8.

c)  $K^2 = 0$ .

Comme  $P_2 = 0$ , on a par Riemann-Roch  $h^0(-K) \geq 1 + K^2$ , d'où  $|-K| \neq \emptyset$  si  $K^2 > 0$ . Soit  $H$  une section hyperplane de  $S$ . Il existe  $n > 0$  tel

que  $|H+nK| \neq \emptyset$ ,  $|H+(n+1)K| = \emptyset$ . Soit  $D \in |H+nK|$ ; on a  $|K+D| = \emptyset$ , et  $K.D = K.H < 0$  puisque  $|-K| \neq \emptyset$ . On conclut par a).

d)  $K^2 > 0$ .

On a alors  $h^0(-K) \geq 2$ . Supposons qu'il existe un diviseur réductible  $D \in |-K|$ ,  $D = A+B$ ; comme  $D.K < 0$  on a par exemple  $A.K < 0$ , et  $|K+A| = |-B| = \emptyset$ , donc la proposition est démontrée par a). On peut donc supposer désormais que tout diviseur  $D \in |-K|$  est irréductible.

Soit  $H$  un diviseur effectif; comme  $|-K| \neq \emptyset$ , il existe  $n > 0$  tel que :  $|H+nK| \neq \emptyset$   $|H+(n+1)K| = \emptyset$ .

Il faut maintenant distinguer deux cas.

d<sub>1</sub>) On peut trouver  $H, n$  comme précédemment, et tels que  $H+nK \neq 0$ .

Soit alors  $E \in |H+nK|$ ,  $E = \sum n_i C_i$ . On a  $K.E = -D.E$  ( $D \in |-K|$ ) et  $D.E \geq 0$  par la remarque utile (III.5), puisque  $D$  est irréductible.

Donc il existe  $i$  tel que  $K.C_i < 0$ . Posons  $C_i = C$ . On a  $|K+C| = \emptyset$ , d'où  $g(C) = 0$  (cf. a)) et  $C^2 = -2 - K.C$  (formule du genre).

- Si  $K.C < -2$ , on trouve  $C^2 > 0$ , ce qui démontre la proposition dans ce cas.

- Si  $K.C = -1$ ,  $C^2 = -1$ :  $C$  serait une droite exceptionnelle, ce qui est exclus.

- Si  $K.C = 0$ ,  $C^2 = -2$ , calculons  $h^0(-K-C)$ . Comme  $h^0(2K+C) < h^0(K+C) = 0$ , on obtient par Riemann-Roch :

$$h^0(-K-C) \geq 1 + \frac{1}{2}[(K+C)^2 + K.(K+C)] = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + 3K.C + 2K^2)$$

d'où  $h^0(-K-C) \geq K^2 \geq 1$ .

Comme  $C^2 = -2$ , on a  $C \neq -K$ ; par suite il existe un diviseur effectif non nul  $A$  tel que  $A+C \in |-K|$ . Ainsi  $|-K|$  contient un diviseur réductible, ce qui contredit l'hypothèse.

d<sub>2</sub>) Il reste à examiner le cas où tout diviseur effectif est un multiple de  $K$ , c'est-à-dire  $\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}.[K]$ . On déduit de la suite exacte :

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S)$$

que  $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot [K]$ . Donc  $b_2 = 1$ ; de plus la dualité de Poincaré entraîne que la forme d'intersection sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est inversible, i.e. de déterminant  $\pm 1$ ; on a donc ici  $K^2 = 1$ . Mais alors la formule de Noether

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi_{\text{top}}(S)) = \frac{1}{12}(K^2 + 2 - 2b_1 + b_2)$$

donne  $b_1 = -4$ , d'où contradiction: la proposition est démontrée, et donc aussi le théorème de Castelnuovo.

On remarquera que seule la dernière partie de la démonstration ( $d_2$ ) ne s'étend pas directement en caractéristique  $p$ .

La proposition V.6 permet d'obtenir la structure des modèles minimaux des surfaces rationnelles:

Théorème V.10: Soit  $S$  une surface rationnelle minimale. Alors  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  ou à une des surfaces  $F_n$  (IV.1) pour  $n \neq 1$ .

Démonstration: Soit  $H$  une section hyperplane de  $S$ . Considérons l'ensemble  $A$  des courbes rationnelles lisses  $C$  telles que  $C^2 \gg 0$ ;  $A$  est non vide par la proposition V.6. Soit  $m = \min\{C^2, C \in A\}$ . Considérons le sous-ensemble  $A_m$  de  $A$  formé des courbes  $C$  telles que  $C^2 = m$ ; choisissons une courbe  $C \in A_m$  telle que  $C.H$  soit minimum dans  $A_m$ .

a) Montrons que tout diviseur  $D \in |C|$  est une courbe rationnelle lisse. Posons  $D = \sum n_i C_i$ . Notons que  $h^0(K+D) = h^0(K+C) = 0$  par la remarque utile, puisque  $(K+C).C = -2$ . On a donc  $h^0(K+C_i) = 0$  pour tout  $i$ , ce qui montre que chaque courbe  $C_i$  est rationnelle lisse (V.9 a)). Puisque  $K.C < 0$ , il existe  $i$  tel que  $K.C_i < 0$  donc  $C_i^2 \gg 0$  puisque  $S$  est minimale. Posons  $D' = \sum_{j \neq i} n_j C_j$ , de sorte que  $D = n_i C_i + D'$  et  $D'.C_i \gg 0$ . On a:

$$C^2 = D^2 = n_i^2 C_i^2 + n_i(C_i.D') + D.D'$$

Or  $D.D' = C.D' \gg 0$ , donc  $m = C^2 \gg n_1^2 C_1^2 \gg 0$ . La minimalité de  $m$  entraîne alors  $C_1^2 = m$ . De plus on a  $H.C = n_1 H.C_1 + H.D'$ , d'où  $n_1 = 1$ ,  $H.D' = 0$  (minimalité de  $H.C$  dans  $A_m$ ), c'est-à-dire  $D' = 0$  et  $D = C_1$ .

b) Montrons que  $\dim|C| \ll 2$ . Soient  $p$  un point quelconque de  $S$ ,  $\mathcal{O}_p$  son anneau local,  $\mathfrak{m}_p$  son idéal maximal. Comme  $\dim(\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^2) = 3$ , le système linéaire des courbes de  $|C|$  passant par  $p$  avec multiplicité  $\gg 2$  est de codimension  $\ll 3$  dans  $|C|$ ; il est donc non vide dès que  $\dim|C| \gg 3$ , contredisant alors a).

c) Soit  $C_0 \in |C|$ . Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \rightarrow \mathcal{O}_{C_0}(m) \rightarrow 0.$$

Comme  $H^1(S, \mathcal{O}_S) = (0)$ , on en déduit que  $h^0(C) = m+2$ , et que  $|C|$  n'a pas de points bases sur  $C_0$ ; il en résulte que  $|C|$  est sans points bases. Compte tenu de b), il y a deux possibilités :

-  $m=0$  : alors  $|C|$  définit un morphisme  $S \rightarrow \mathbb{P}^1$  dont toutes les fibres sont rationnelles lisses :  $S$  est une surface géométriquement réglée de base  $\mathbb{P}^1$ , donc une surface  $F_n$ , avec  $n \neq 1$  puisque  $S$  est minimale.

-  $m=1$  :  $|C|$  définit un morphisme  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ ; pour tout  $p \in \mathbb{P}^2$ , la fibre  $f^{-1}(p)$  est intersection de deux courbes distinctes de  $|C|$  : elle est donc réduite à un point. Par suite  $f$  est un isomorphisme.

Nous avons donc déterminé les modèles minimaux des surfaces rationnelles et réglées ; pour terminer l'étude des modèles minimaux, il reste à montrer l'unicité du modèle minimal d'une surface non réglée. Nous allons la déduire du théorème de Castelnuovo ; nous aurons besoin pour cela d'un outil technique très utile, la variété d'Albanese.

Rappel V.11 : tores complexes.

Un tore complexe est une variété quotient  $T = V/\Gamma$ , où  $V$  est un espace vectoriel complexe et  $\Gamma$  un réseau dans  $V$  (i.e.  $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq V$ ). C'est une variété analytique compacte, munie d'une structure de groupe commutatif. Si  $T$  admet un plongement dans un espace projectif, on dit que c'est une variété abélienne.

Pour tout point  $p$  de  $T$ , l'espace tangent en  $p$  s'identifie par translation à l'espace tangent à l'origine, lui-même canoniquement isomorphe à  $V$ . Le faisceau tangent (resp. cotangent) à  $T$  est donc canoniquement isomorphe au faisceau libre  $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$  (resp.  $V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ ). On a en particulier un isomorphisme  $\delta : V^* \simeq H^0(T, \Omega_T^1)$ , qui s'explicité comme suit : une forme  $x^* \in V^*$  définit une fonction sur  $V$ , qui vérifie :  $x^*(v+\gamma) = x^*(v) + C^{te}$  pour  $v \in V, \gamma \in \Gamma$ . Par conséquent la différentielle  $dx^*$  définit une forme  $\delta x^* \in H^0(T, \Omega_T^1)$ .

Le morphisme  $V \rightarrow V/\Gamma$  est le revêtement universel de  $T$ ; par suite  $\Gamma \cong \pi_1(T) \cong H_1(T, \mathbb{Z})$ . L'isomorphisme  $h : \Gamma \rightarrow H_1(T, \mathbb{Z})$  s'explicité comme suit : à tout  $\gamma \in \Gamma$  on associe le chemin  $t \mapsto t\gamma$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Il est clair que :  $\int_{h\gamma} \delta x^* = \int_0^1 d(\langle x^*, t\gamma \rangle) = \langle x^*, \gamma \rangle$  pour  $x^* \in V^*, \gamma \in \Gamma$ .

Rappelons enfin la proposition suivante, qui est bien connue :

Proposition V.12 : Soient  $T_1 = V_1/\Gamma_1, T_2 = V_2/\Gamma_2$  deux tores complexes,  $u : T_1 \rightarrow T_2$  un morphisme. Alors  $u$  est composé d'une translation et d'un morphisme  $a : T_1 \rightarrow T_2$  qui est un homomorphisme de groupes ;  $a$  est induit par une application linéaire  $\bar{a} : V_1 \rightarrow V_2$ , telle que  $\bar{a}(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$ . En particulier  $a$  est déterminé par  $a^* : H^0(T_2, \Omega_{T_2}^1) \rightarrow H^0(T_1, \Omega_{T_1}^1)$ .

Démonstration : Le morphisme  $u$  induit sur les revêtements universels un morphisme  $\bar{u} : V_1 \rightarrow V_2$ , tel que  $\bar{u}(x+\gamma) - \bar{u}(x) \in \Gamma_2$  pour  $x \in V_1, \gamma \in \Gamma_1$ . Par suite l'expression  $\bar{u}(x+\gamma) - \bar{u}(x)$  est indépendante de  $x$ . Ceci entraîne que les dérivées partielles de  $\bar{u}$  sont invariantes par

les translations de  $\Gamma_1$  ; elles définissent ainsi des fonctions holomorphes sur  $T_1$  , donc constantes. Ainsi  $\bar{u}$  est une application affine, de la forme  $x \mapsto \bar{a}(x) + b$  , où  $\bar{a}$  est un homomorphisme de  $V_1$  dans  $V_2$  et  $b \in V_2$  . On doit avoir  $\bar{a}(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$  , de sorte que  $\bar{a}$  induit un homomorphisme  $a : T_1 \rightarrow T_2$  . Il est clair que  $a^*$  s'identifie - via les identifications  $\delta : V_i^* \simeq H^0(T_i, \Omega_{T_i}^1)$  - au transposé de  $\bar{a}$  , ce qui achève de prouver la proposition.

Théorème V.13 : Soit X une variété projective lisse. Il existe une variété abélienne A et un morphisme  $\alpha : X \rightarrow A$  possédant la propriété universelle suivante :

- Pour tout tore complexe T et tout morphisme  $f : X \rightarrow T$  , il existe un unique morphisme  $\tilde{f} : A \rightarrow T$  tel que  $\tilde{f} \circ \alpha = f$  .

La variété abélienne A , déterminée à isomorphisme près par cette condition, s'appelle variété d'Albanese de X ; on la note Alb(X). Le morphisme  $\alpha$  induit un isomorphisme  $\alpha^* : H^0(A, \Omega_A^1) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)$ .

Démonstration : Nous admettrons le résultat suivant, qui se démontre par la théorie de Hodge (cf. [W]) :

- Soit  $i : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^*$  l'application définie par  $\langle i(\gamma), \omega \rangle = \int_{\gamma} \omega$  pour  $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$  ,  $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ . L'image de  $i$  est un réseau dans  $H^0(X, \Omega_X^1)^*$  , et le quotient est une variété abélienne.

Nous noterons  $H = \text{Im}(i)$  ,  $\Omega = H^0(X, \Omega_X^1)$  , et nous poserons  $A = \Omega^*/H$ . On va maintenant définir  $\alpha$ .

Fixons un point  $p$  de  $X$  . Soit  $c_x$  un chemin joignant  $p$  à un point  $x$  de  $X$  , et soit  $a(c_x) \in \Omega^*$  la forme linéaire  $\omega \mapsto \int_{c_x} \omega$  . Si l'on remplace  $c_x$  par un autre chemin  $c'_x$  (joignant  $p$  à  $x$ ), on modifie  $a(c_x)$  par un élément de  $H$  ; par suite la classe de  $a(c_x)$  dans  $A$  ne dépend que de  $x$  : on la note  $\alpha(x)$ .

Vérifions que  $\alpha$  est analytique au voisinage d'un point  $q \in X$  . Choisissons un chemin  $c$  de  $p$  à  $q$  , et un voisinage  $U$  de  $q$  dans

$X$  isomorphe à une boule  $B$  dans  $\mathbb{C}^n$  ; on identifiera  $U$  à  $B$  . Pour  $x \in U$  , posons  $a(x) = a(c_x)$ , où  $c_x$  est le chemin somme de  $c$  et du segment  $\langle q, x \rangle$  . Il est clair que  $a : U \rightarrow \Omega^*$  est un morphisme analytique ; comme  $\alpha|_U = \pi \circ a$  , où  $\pi$  désigne la projection de  $\Omega^*$  sur  $A = \Omega^*/H$  ,  $\alpha$  est analytique dans  $U$  .

On a  $\alpha(p) = 0$  ; on notera que si l'on change le point  $p$  , on modifie  $\alpha$  par une translation de  $A$  .

Démontrons la dernière assertion du théorème. Comme  $\delta : \Omega \rightarrow H^0(A, \Omega_A^1)$  est un isomorphisme (V.11), il suffit de montrer que  $\alpha^*(\delta\omega) = \omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$  . Localement sur  $X$  , on peut écrire comme plus haut  $\alpha = \pi \circ a$  , d'où :

$$\alpha^*(\delta\omega) = a^* \pi^*(\delta\omega) = a^* d(\langle \omega, . \rangle) .$$

La valeur de cette forme en un point  $x \in X$  est :

$$d(\langle \omega, a(x) \rangle) = d\left(\int_p^x \omega\right) = \omega(x)$$

ce qui prouve que  $\alpha^*(\delta\omega) = \omega$  .

Démontrons maintenant la propriété universelle de  $A$  . Soient  $T = V/\Gamma$  un tore complexe,  $f : X \rightarrow T$  un morphisme. Montrons l'unicité de  $\tilde{f}$  . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \Omega_X^1) & \xleftarrow{f^*} & H^0(T, \Omega_T^1) \\ \uparrow \alpha^* & \swarrow \tilde{f}^* & \\ H^0(A, \Omega_A^1) & & \end{array}$$

qui détermine  $\tilde{f}^*$  , puisque  $\alpha^*$  est un isomorphisme. Par suite  $\tilde{f}$  est déterminé à translation près (proposition V.12) ; comme  $\tilde{f}(0) = f(p)$  est imposé,  $\tilde{f}$  est unique.

Pour montrer l'existence de  $\tilde{f}$  , il suffit (compte tenu de la proposition V.12) de montrer que l'homomorphisme composé  $u : V^* \xrightarrow{\delta} H^0(T, \Omega_T^1) \xrightarrow{f^*} \Omega$  satisfait à  $t_u(H) \subset \Gamma$  . Soient  $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ ,  $v^* \in V^*$  ; on a :



$$\langle t_{u(i(\gamma)), v^*} \rangle = \langle i(\gamma), u(v^*) \rangle = \int_Y f^*(\delta v^*) = \int_{f_*Y} \delta v^*$$

et

$$\int_{f_*Y} \delta v^* = \langle h^{-1}(f_*Y), v^* \rangle \quad (V.11),$$

d'où  $t_{u(i(\gamma))} = h^{-1}(f_*Y) \in \Gamma$ , ce qui achève la preuve du théorème.

Remarques V.14.

1) On a  $\dim \text{Alb}(X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1)$ . En particulier si  $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$  (par exemple si  $X = \mathbb{P}^1$ , ou  $X$  est une surface avec  $q=0$ ), tout morphisme de  $X$  dans un tore complexe est trivial (i.e. d'image réduite à un point).

2) Il résulte immédiatement de la propriété universelle que la variété d'Albanese a un caractère fonctoriel : si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de variétés projectives lisses, il existe un unique morphisme  $F : \text{Alb}(X) \rightarrow \text{Alb}(Y)$  tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \alpha_X & & \downarrow \alpha_Y \\ \text{Alb}(X) & \xrightarrow{F} & \text{Alb}(Y) \end{array}$$

soit commutatif.

3) On déduit aussi de la propriété universelle que  $\alpha(X)$  engendre la variété abélienne  $A$ , c'est-à-dire que tout point de  $A$  est somme de points  $\alpha(x_i)$  (car la sous-variété abélienne de  $A$  engendrée par  $\alpha(X)$  satisfait aussi à la propriété universelle). En particulier  $\alpha(X)$  n'est pas réduit à un point si  $A \neq (0)$ . Il en résulte aussi que si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme surjectif, le morphisme  $F : \text{Alb}(X) \rightarrow \text{Alb}(Y)$  déduit de  $f$  (2)) est également surjectif.

4) Si  $X$  est une courbe,  $\text{Alb}(X)$  est bien sûr égal à la jacobienne  $JX$ .

5) Il résulte de la construction de  $A = \text{Alb}(X)$  que l'application :  $\alpha_* : H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(A, \mathbb{Z})$  est surjective et a pour noyau le sous-groupe de torsion de  $H_1(S, \mathbb{Z})$ . Cela entraîne en particulier que l'image

inverse par  $\alpha$  d'un revêtement étale connexe de  $A$  est connexe.

Proposition V.15 : Soient  $S$  une surface,  $\alpha : S \rightarrow \text{Alb}(S)$  l'application d'Albanese. Supposons que  $\alpha(S)$  soit une courbe  $C$ . Alors  $C$  est une courbe lisse de genre  $g$ , et les fibres de  $\alpha$  sont connexes.

On dira parfois que le morphisme  $S \rightarrow C$  déduit de  $\alpha$  est la "fibration d'Albanese" de  $S$ . Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme V.16 : Supposons que  $\alpha$  se factorise en  $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{j} \text{Alb}(S)$ , avec  $f$  surjectif. Alors  $\tilde{j} : \text{Alb}(T) \rightarrow \text{Alb}(S)$  est un isomorphisme.

Démonstration : La functorialité de la variété d'Albanese (V.14.2) fournit un morphisme  $F : \text{Alb}(S) \rightarrow \text{Alb}(T)$ . On a :

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{f} & T \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha_T \\
 \text{Alb}(S) & \xrightarrow{F} & \text{Alb}(T)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \searrow j \\
 \xrightarrow{\tilde{j}} \\
 \text{Alb}(S)
 \end{array}
 \quad
 \tilde{j} \circ F \circ \alpha = j \circ f = \alpha$$

d'où  $\tilde{j} \circ F = \text{Id}$  vu la propriété universelle de  $\alpha$ . Comme  $F$  est surjectif (V.14.3),  $\tilde{j}$  et  $F$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Démonstration de la proposition : Soit  $N$  la normalisée de  $C$ . Comme  $S$  est normale,  $\alpha$  se factorise en  $\alpha : S \xrightarrow{f} N \xrightarrow{j} \text{Alb}(S)$ . D'après le lemme,  $\tilde{j} : \text{Alb}(N) \rightarrow \text{Alb}(S)$  est un isomorphisme. Comme  $\alpha_N : N \rightarrow \text{Alb}(N)$  est un plongement, il en est de même de  $j$ , ce qui prouve que  $N=C$ . Donc  $C$  est une courbe lisse de genre  $g$ . Pour prouver que les fibres de  $\alpha$  sont connexes, nous "rappellerons" le résultat suivant, essentiellement équivalent au "théorème de Connexion" de Zariski (cf. [EGA III], 4.3) :

Rappel V.17 (factorisation de Stein) : Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre (de variétés, ou de schémas). Alors  $f$  se factorise en

$f : X \xrightarrow{p} \tilde{Y} \xrightarrow{g} Y$ , où  $g$  est un morphisme fini, et  $p$  un morphisme surjectif à fibres connexes.

Fin de la démonstration de V.15 : Factorisons  $\alpha$  en  $\alpha : S \xrightarrow{p} \tilde{C} \xrightarrow{g} C$  comme ci-dessus ; notons que quitte à remplacer  $\tilde{C}$  par sa normalisée, on peut supposer que  $\tilde{C}$  est lisse. Il résulte du lemme V.16 que  $g$  induit un isomorphisme de  $\tilde{C}$  sur  $JC$ , tel que  $G\alpha_C = \alpha_C \circ g$  ; ceci entraîne que  $g$  est un isomorphisme, d'où la proposition.

La proposition V.15 servira essentiellement dans le cas suivant :

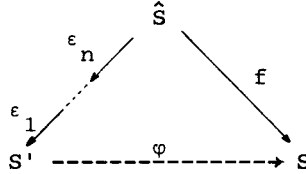
Lemme V.18 : Soient  $S$  une surface avec  $p_g = 0$ ,  $q \geq 1$ ,  $\alpha : S \rightarrow \text{Alb}(S)$  son application d'Albanese. Alors  $\alpha(S)$  est une courbe.

Démonstration : Si  $\alpha(S)$  est une surface, le morphisme  $\tilde{\alpha} : S \rightarrow \alpha(S)$  est génériquement fini, donc étale au-dessus d'un ouvert  $U \subset \alpha(S)$ . Soit  $x \in U$  ;  $\alpha(S)$  est lisse en  $x$ , et il existe des coordonnées locales  $u_1, \dots, u_q$  sur  $\text{Alb}(S)$  en  $x$  telles que  $\alpha(S)$  soit défini localement par  $u_3 = \dots = u_q = 0$ . Puisque  $A = \text{Alb}(S)$  est parallélisable, il existe une 2-forme  $\omega \in H^0(A, \Omega_A^2)$  qui coïncide en  $x$  avec  $du_1 \wedge du_2$  ; mais alors  $\alpha^* \omega$  est une 2-forme globale sur  $S$ , non nulle au-dessus de  $x$ , d'où contradiction.

Théorème V.19 : Soient  $S, S'$  deux surfaces minimales non réglées. Toute application birationnelle de  $S'$  sur  $S$  est un isomorphisme.

En particulier, toute surface non réglée admet un seul modèle minimal (à isomorphisme près) ; le groupe des applications birationnelles d'une surface minimale non réglée dans elle-même coïncide avec le groupe des automorphismes de la surface.

Démonstration : Soit  $\varphi$  une application birationnelle de  $S'$  dans  $S$ . Par le théorème d'élimination des indéterminations, il existe un diagramme commutatif :



où les  $\epsilon_i$  sont des éclatements, et  $f$  un morphisme. Parmi tous les diagrammes de ce type, choisissons-en un avec  $n$  minimum. Si  $n=0$ , le théorème est démontré ; supposons donc  $n \neq 0$ . Soit  $E$  la droite exceptionnelle de l'éclatement  $\epsilon_n$ . L'image  $f(E)$  est une courbe  $C$  sur  $S$ , sans quoi  $f$  se factoriserait en  $f' \circ \epsilon_n$  et on contredirait la minimalité de  $n$ .

Calculons maintenant  $(C.K)$ . Remarquons que si  $\epsilon : \hat{X} \rightarrow X$  est l'éclatement d'un point dans une surface  $X$ , et  $\hat{\Gamma}$  une courbe irréductible sur  $\hat{X}$ , telle que  $\epsilon(\hat{\Gamma})$  soit une courbe  $\Gamma$ , on a :

$$K_{\hat{X}} \cdot \hat{\Gamma} = (\epsilon^* K_X + E)(\epsilon^* \Gamma - mE), \text{ avec } m = (E, \hat{\Gamma}) \text{ (cf. II.3) d'où}$$

$$K_{\hat{X}} \cdot \hat{\Gamma} = K_X \cdot \Gamma + m \gg K_X \cdot \Gamma, \text{ l'égalité n'ayant lieu que si } \hat{\Gamma} \text{ ne rencontre pas le diviseur exceptionnel.}$$

Le morphisme birationnel  $f$  étant composé d'éclatements, on a donc  $K_S \cdot C \ll K_{\hat{S}} \cdot E = -1$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $E$  ne rencontre aucune des droites contractées par  $f$ . Mais dans ce cas la restriction de  $f$  à  $E$  est un isomorphisme, de sorte que  $C$  est une courbe rationnelle lisse avec  $K \cdot C = -1$ , c'est-à-dire une courbe exceptionnelle, ce qui est impossible. Ainsi  $K \cdot C \ll -2$ , et donc  $C^2 \gg 0$  (formule du genre).

Notons que ces deux inégalités entraînent que tous les  $P_n$  sont nuls : si  $|nK|$  contenait un diviseur  $D$  ( $n \gg 1$ ), on aurait  $D \cdot C \gg 0$  par la remarque utile, donc  $K \cdot C \gg 0$ , d'où contradiction. Il faut alors distinguer deux cas :

- Si  $q=0$ , le théorème de Castelnuovo entraînerait que  $S$  est rationnelle, ce qui est exclus.
- Si  $q > 0$ , l'application d'Albanese de  $S$  définit un morphisme  $p : S \rightarrow B$  surjectif à fibres connexes,  $B$  étant une courbe lisse de

genre  $g$  (lemme V.18 et proposition V.15). Comme  $C$  est rationnelle,  $C$  est contenue dans une fibre  $F$  de  $p$  ; puisque  $c^2 \gg 0$  , le lemme III.9 montre que  $F = rC$  pour un entier  $r$  . De plus on a alors  $c^2 = 0$  , donc  $K.C = -2$  . La formule du genre donne  $r = 1$  ,  $g(F) = 0$  . Dès lors le théorème de Noether-Enriques (III.4) entraîne que  $S$  est réglée, d'où contradiction.

Note historique

Castelnuovo a d'abord démontré le corollaire V.5 ([C1]), puis le théorème V.1 ([C2]). Sa démonstration est basée sur "l'extinction de l'adjonction" (c'est-à-dire la relation  $|D+nK| = \emptyset$  pour  $n$  assez grand, pour tout diviseur  $D$ ), comme celle qu'on a donnée ici ; elle est nettement plus compliquée. Nous avons suivi ici essentiellement la démonstration de Kodaira (cf. [S2]).

Une démonstration valable en toute caractéristique est due à Zariski ([Z2] et [Z3]).

L'unicité du modèle minimal pour les surfaces non réglées apparaît dès 1901, sous la forme équivalente de non-existence de "courbes exceptionnelles de 2e espèce" ([C-E]) ; elle y est déjà reliée au théorème de Castelnuovo. Une version "moderne" est donnée par Zariski dans [Z2].

La classification des surfaces rationnelles minimales semble énoncée pour la première fois par Vaccaro ([Va]) ; la démonstration exposée ici est due à Andreotti ([A]), avec une légère amélioration de Kodaira.

Exercices

1) Soit  $S$  une surface dont le système anticanonique  $|-K|$  est ample (i.e. un de ses multiples définit un plongement de  $S$  dans  $\mathbb{P}^N$ ). Montrer que ou bien  $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , ou bien  $S$  est obtenue à partir de  $\mathbb{P}^2$  en éclatant  $r$  points distincts ( $r \leq 8$ ) en position générale (cf. ch. IV exer. 11).

(Montrer que  $S$  est rationnelle à l'aide du théorème de Castelnuovo ; utiliser V.10, en remarquant que si  $S$  domine une surface  $F_n$  ( $n \geq 2$ ),  $-K_S$  n'est pas ample).

2) Soit  $S$  une surface dans  $\mathbb{P}^n$ ,  $H$  une section hyperplane. On suppose que  $H \equiv -K$ . Montrer que  $S$  est :

- ou bien une surface de Del Pezzo  $S_d$  ( $3 \leq d \leq 9$ ) ;
- ou bien la surface  $S'_8$ , image de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  plongé dans  $\mathbb{P}^8$  par le système  $|2(\mathbb{P}^1 \times \{0\}) + 2(\{0\} \times \mathbb{P}^1)|$

(cette surface est souvent considérée également comme une surface de Del Pezzo).

3) Soit  $S$  une surface non réglée. Montrer que pour tout plongement de  $S$  dans  $\mathbb{P}^n$ , le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^n$  qui fixent  $S$  est fini (utiliser la théorie des groupes algébriques). En déduire que le groupe d'automorphismes de  $S$  est extension d'un groupe discret par une variété abélienne de dimension  $\leq q$ .

4) Soit  $G$  le groupe d'automorphismes de la surface  $F_n$ ,  $n \geq 1$ . Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow 1$$

où  $T$  est le produit semi-direct de  $\mathbb{C}^*$  par  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$  sur lequel  $\mathbb{C}^*$  opère par multiplication.

Calculer  $\text{Aut}(F_0)$ .

5) Montrer qu'une surface contenant une infinité de droites exceptionnelles est rationnelle, et qu'il existe de telles surfaces. (On pourra considérer la surface  $S$  obtenue en éclatant dans  $\mathbb{P}^2$  les points d'intersection  $p_1, \dots, p_9$  de deux cubiques. Montrer que  $\text{Pic}(S)$  contient une infinité de diviseurs  $D$  avec  $D^2 = -1$ ,  $K \cdot D = -1$ , et qu'un tel diviseur est équivalent à une courbe irréductible).

## CHAPITRE VI

### SURFACES AVEC $p_g = 0$ , $q \gg 1$

L'objet de ce chapitre est de donner une classification complète des surfaces indiquées dans le titre ; on en déduira, comme cas particulier, diverses caractérisations des surfaces réglées.

Lemme VI.1 : a) Soit  $S$  une surface avec  $p_g = 0$ ,  $q \gg 1$  ; on a  $K^2 \ll 0$ , et  $K^2 < 0$  sauf si  $q = 1$ ,  $b_2 = 2$ .

b) Soit  $S$  une surface minimale avec  $K^2 < 0$  ; alors  $p_g = 0$ ,  $q \gg 1$ .

Démonstration : a) Compte tenu de  $2q = b_1$  (III.19), la formule de Noether s'écrit ici :  $12 - 12q = K^2 + 2 - 4q + b_2$

$$\text{soit } K^2 = 10 - 8q - b_2.$$

Pour prouver a) il faut s'assurer que  $b_2 \gg 2$  si  $q = 1$ . Considérons la fibration d'Albanese  $\alpha : S \rightarrow B$ , où  $B = \text{Alb}(S)$  est une courbe elliptique. Soient  $f$  la classe dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  d'une fibre générique de  $\alpha$ ,  $h$  la classe d'une section hyperplane ; comme  $f^2 = 0$ ,  $f \cdot h > 0$ , on conclut que  $f$  et  $h$  sont linéairement indépendants dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , d'où  $b_2 \gg 2$ .

b) Supposons  $p_g \neq 0$ , et soit  $D \in |K|$ ,  $D = \sum n_i C_i$  ( $n_i > 0$ ). Comme  $K \cdot D < 0$ , il existe  $i$  tel que  $K \cdot C_i < 0$  ; mais comme  $(C_i \cdot C_j) \gg 0$  pour  $j \neq i$ , cette relation implique  $C_i^2 < 0$ . La formule du genre



donnerait alors  $C_1$  exceptionnelle, ce qui est impossible.

Le même raisonnement donne  $P_2 = 0$  (et  $P_n = 0 \forall n$ ) ; si  $q = 0$ , le théorème de Castelnuovo donnerait  $S$  rationnelle, donc  $K^2 = 8$  ou  $9$ .

Proposition VI.2 : Soit  $S$  minimale avec  $K^2 < 0$ . Alors  $S$  est réglée.

Démonstration : D'après les lemmes VI.1 b) et V.18, le morphisme d'Albanese définit une fibration  $p : S \rightarrow B$  à fibres connexes, où  $B$  est une courbe lisse. On supposera que  $S$  n'est pas réglée.

Pas 1 : Soit  $C$  une courbe irréductible sur  $S$  telle que  $K.C < 0$ ,  $|K+C| = \emptyset$ . Alors la restriction de  $p$  à  $C$  est un revêtement étale, et même un isomorphisme si  $q \geq 2$  (i.e.  $C$  définit une section de  $p$ ).  
On a donc  $g(C) = q$ .

Démonstration : Appliquons Riemann-Roch à  $K+C$  :

$$0 = h^0(K+C) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(C^2 + C.K) = 1 - q + g(C) - 1$$

d'où  $g(C) \leq q$ .

Comme  $S$  est minimale, on a  $C^2 \geq 0$  ; donc  $C$  ne peut pas être une composante d'une fibre réductible de  $p$  d'après le lemme III.9. Si  $C$  était une fibre de  $p$ , on aurait  $C^2 = 0$ , donc  $C.K = -2$  et  $g(C) = 0$  ; mais alors  $S$  serait réglée par le théorème de Noether-Enriques (III.4).

Par suite on a  $p(C) = B$ . Soit  $N$  la normalisation de  $C$  ;  $p$  définit un revêtement ramifié  $N \rightarrow B$ , de degré  $d$ . La formule de Riemann-Hurwitz donne :

$$g(N) = 1 + d(g(B) - 1) + \frac{r}{2}$$

où  $r$  est le nombre de points de ramification du revêtement, comptés avec leur indice. On a donc :

$$q \geq g(C) \geq g(N) \geq 1 + d(q - 1).$$

On en déduit immédiatement, soit  $d=1$  , soit  $q=1$  et  $C=N$  , ce qui prouve notre assertion.

Pas 2 : Il existe sur  $S$  une courbe irréductible  $C$  telle que  $|K+C| = \emptyset$  ,  $K.C < -1$  .

Démonstration : Le lemme V.8 montre qu'il existe un diviseur effectif  $D$  tel que  $|K+D| = \emptyset$  ,  $K.D < -1$  . Ecrivons  $D = \sum_{i=1}^r n_i C_i$  ( $n_i \geq 1$ ); quitte à supprimer certain des  $C_i$  , on peut supposer  $K.C_i < 0$  pour tout  $i$  . On va montrer qu'alors  $D$  est en fait irréductible.

a) Supposons qu'il existe un  $i$  avec  $n_i \geq 2$  , donc  $|2C_i+K| = \emptyset$  . Le théorème de Riemann-Roch donne :

$$0 = h^0(2C_i+K) \geq 1 - q + 2C_i^2 + C_i.K = 1 - q + 2(C_i^2 + C_i.K) - C_i.K .$$

D'après le pas 1 on a  $C_i^2 + C_i.K = 2(q-1)$ , d'où

$$0 \geq 3(q-1) : \text{ contradiction.}$$

b) Supposons  $r \geq 2$  ; alors  $|K+C_1+C_2| = \emptyset$  , d'où en utilisant de nouveau le Pas 1 :

$$\begin{aligned} 0 &= h^0(K+C_1+C_2) = h^1(K+C_1+C_2) + 1 - q + \frac{1}{2}(C_1^2+C_1.K) + \frac{1}{2}(C_2^2+C_2.K) + C_1.C_2 \\ &= (q-1) + h^1(K+C_1+C_2) + (C_1.C_2) \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si  $C_1.C_2 = h^1(K+C_1+C_2) = 0$  ; or si  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C_1-C_2) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit la suite exacte de cohomologie :

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(-C_1-C_2))$$

et par suite  $h^1(K+C_1+C_2) = h^1(-C_1-C_2) \geq 1$  , d'où contradiction.

Le diviseur  $D$  est donc une courbe irréductible  $C$  , qui vérifie  $|K+C| = \emptyset$  et  $(K.C) < -1$  .

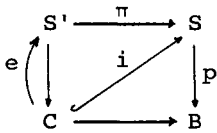
Pas 3 : où l'on arrive à une contradiction.

Soit  $C$  une courbe irréductible sur  $S$  avec  $(C.K) < -1$ ,  $|C+K| = \emptyset$ ; supposons d'abord que  $C$  définisse une section de  $p$ . Le théorème de Riemann-Roch donne :

$$h^0(C) \gg 1 - g + \frac{1}{2}(C^2 - C.K) = -(C.K) \gg 2$$

autrement dit le diviseur  $C$  bouge linéairement. Soit  $F$  une fibre générique de  $p$ ; le point d'intersection de  $C$  et de  $F$  doit lui aussi bouger linéairement dans  $F$  (sans quoi  $C$  serait fixe), ce qui implique que  $F$  est rationnelle, d'où contradiction.

Supposons maintenant que  $g=1$  et que  $p|_C : C \rightarrow B$  soit un revêtement étale. L'injection  $i : C \hookrightarrow S$  définit une section  $e : C \hookrightarrow S \times_B C$ ;



notons  $S'$  la composante connexe de  $S \times_B C$  qui contient  $e(C)$ ,  $C' = e(C) \subset S'$ . La

projection  $\pi : S' \rightarrow S$  est un revêtement étale; on a donc  $\pi^* \Omega_S^1 \cong \Omega_{S'}^1$ , et

$K' \equiv \pi^* K$ ,  $K'$  désignant un diviseur canonique sur  $S'$ . Par suite :

$$K'.C' = \deg_C(e^* \mathcal{O}_S(K')) = \deg_C(i^* \mathcal{O}_S(K)) = K.C < -1 \quad (\text{cf. I.6}).$$

On en déduit comme d'habitude  $p_g(S') = 0$ , puis par Riemann-Roch :

$$h^0(C') \gg \chi(\mathcal{O}_{S'}) - 1 + g(C') - (K'.C').$$

Comme  $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 0$  par le lemme VI.3 ci-dessous, on conclut que  $h^0(C') \gg 2$ , et l'on arrive comme précédemment à une contradiction.

Lemme VI.3 : Soit  $\pi : S' \rightarrow S$  un revêtement étale de surfaces, de degré  $n$ . On a  $K'^2 = n.K^2$ ,  $\chi_{\text{top}}(S') = n.\chi_{\text{top}}(S)$ ,  $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = n.\chi(\mathcal{O}_S)$ .

Démonstration : La troisième égalité résulte des deux autres et de la formule de Noether. La première est claire puisque  $K' \equiv \pi^* K$ ; la seconde est bien connue des topologues, et peut se démontrer de la manière suivante : choisissons une triangulation de  $S$ , c'est-à-dire

un homéomorphisme de  $S$  avec un polyèdre ; on a  $\chi_{\text{top}}(S) = \sum_i (-1)^i f_i(S)$ , où  $f_i(S)$  est le nombre de faces de dimension  $i$ . Comme les faces sont simplement connexes, on obtient une triangulation de  $S'$  en prenant les images inverses des faces de  $S$  ; il est alors clair que  $f_i(S') = n.f_i(S)$ , d'où le résultat.

Pour achever la classification des surfaces avec  $p_g = 0$  ,  $q \geq 1$  , il reste à étudier le cas  $K^2 = 0$  ,  $q = 1$  ,  $b_2 = 2$  (cf. lemme VI.1). On aura besoin des lemmes suivants :

Lemme VI.4 : Soient  $S$  une surface,  $B$  une courbe lisse,  $p : S \rightarrow B$  un morphisme surjectif. Soit  $\Sigma$  l'ensemble (fini) des points de  $B$  au-dessus desquels  $p$  n'est pas lisse, et soit  $\eta \in B - \Sigma$  . On note  $F_b$  la fibre  $p^{-1}(b)$  pour  $b \in B$  . On a :

$$\chi(S) = \chi(B) \cdot \chi(F_\eta) + \sum_{s \in \Sigma} (\chi(F_s) - \chi(F_\eta)) \quad (\text{VI.4})$$

(on écrit pour simplifier  $\chi$  au lieu de  $\chi_{\text{top}}$ ).

Démonstration : Rappelons d'abord que pour tout espace topologique  $X$  , et tout fermé  $F \subset X$  on a une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_c^i(X-F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^i(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^{i+1}(X-F, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

d'où  $\chi(X) = \chi(F) + \chi_c(X-F)$ , l'indice  $c$  indiquant qu'il s'agit de cohomologie à supports compacts.

Revenant au lemme, on pose  $U = S - \bigcup_{s \in \Sigma} F_s$  ; d'après ce qui précède, on a :

$$\chi(S) = \chi_c(U) + \sum_{s \in \Sigma} \chi(F_s)$$

et aussi  $\chi(B) = \chi_c(B-\Sigma) + \chi(\Sigma) = \chi_c(B-\Sigma) + \text{Card}(\Sigma)$ .

Le morphisme propre et lisse  $p : U \rightarrow B-\Sigma$  est une fibration topologique localement triviale, donc :  $\chi_c(U) = \chi_c(B-\Sigma) \cdot \chi(F_\eta)$ .

Le lemme résulte aussitôt de ces trois formules.

Lemme VI.5 : Soit C une courbe (réduite mais non nécessairement irréductible). On a  $\chi_{\text{top}}(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C)$  ; il y a égalité si et seulement si C est lisse.

Démonstration : Soit  $n : N \rightarrow C$  la normalisation de C ; considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{C}_C & \rightarrow & n_*\mathbb{C}_N & \rightarrow & \varepsilon \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_C & \rightarrow & n_*\mathcal{O}_N & \rightarrow & \delta \rightarrow 0 \end{array}$$

où  $\mathbb{C}_X$  désigne le faisceau constant de fibre  $\mathbb{C}$  sur la variété X , et les faisceaux  $\varepsilon$  ,  $\delta$  sont définis de façon que les suites horizontales soient exactes.

La flèche  $\varphi$  est injective : en effet cela revient à dire, après un peu de chasse au diagramme, qu'une section locale de  $n_*\mathcal{O}_N$  qui provient à la fois de  $n_*\mathbb{C}_N$  et de  $\mathcal{O}_C$  , provient en fait de  $\mathbb{C}_C$  ; autrement dit qu'une fonction holomorphe sur un ouvert de C , qui devient constante sur N , l'était déjà sur C - ce qui est parfaitement clair.

On en conclut que  $h^0(\delta) \geq h^0(\varepsilon)$  ; or on déduit du diagramme que :

$$\chi_{\text{top}}(N) = \chi_{\text{top}}(C) + h^0(\varepsilon)$$

$$\chi(\mathcal{O}_N) = \chi(\mathcal{O}_C) + h^0(\delta)$$

d'où, compte tenu de  $\chi_{\text{top}}(N) = 2\chi(\mathcal{O}_N)$  :

$$\chi_{\text{top}}(C) = 2\chi(\mathcal{O}_C) + h^0(\delta) + (h^0(\delta) - h^0(\varepsilon)) .$$

Par suite  $\chi_{\text{top}}(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C)$ , et l'égalité entraîne  $h^0(\delta) = 0$  , d'où  $\delta = 0$  et  $C = N$  .

Proposition VI.6 : Soient S une surface minimale avec  $p_g = 0$  ,  $q = 1$  et  $K^2 = 0$  , B la variété d'Albanese de S (qui est une courbe elliptique),  $p : S \rightarrow B$  la fibration d'Albanese, g le genre d'une fibre générique de p .

- Si  $g \geq 2$  , le morphisme  $p$  est lisse.

- Si  $g = 1$  , les fibres non lisses de  $p$  sont de la forme

$F_b = nE$  , où  $E$  est une courbe elliptique lisse.

Démonstration : Montrons d'abord que la relation  $b_2 = 2$  (VI.1 a)) entraîne que les fibres de  $p$  sont irréductibles. Supposons qu'une fibre contienne deux composantes  $F_1$  ,  $F_2$  ; soit  $H$  une section hyperplane de  $S$  . Il suffit de prouver qu'il n'existe pas de relation :

$$\alpha H + \beta F_1 + \gamma F_2 = 0 \quad \text{dans } H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Supposons qu'une telle relation existe ; soit  $F$  une fibre générique.

Si  $\alpha \neq 0$  , on trouverait  $H.F = 0$  , ce qui est impossible : donc  $\alpha = 0$  .

On a donc  $F_2 = rF_1$  ,  $r \in \mathbb{Q}$  ; prenant l'intersection avec  $H$  , on trouve

$r > 0$  ; prenant l'intersection avec  $F_1$  (compte tenu du lemme III.9),

on trouve  $r < 0$  , d'où contradiction.

Les fibres de  $p$  sont irréductibles ; elles peuvent cependant être multiples, i.e.  $F_s = nC$  où  $C$  est une courbe irréductible,  $n \geq 1$  .

Dans ce cas on a :

$$\chi_{\text{top}}(F_s) = \chi_{\text{top}}(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C) \quad \text{par le lemme VI.5}$$

$$2\chi(\mathcal{O}_C) = -C^2 - C.K = -\frac{1}{n}(F_s.K) = -\frac{1}{n}(F_\eta.K) = \frac{2}{n}\chi(\mathcal{O}_{F_\eta}) = \frac{1}{n}\chi_{\text{top}}(F_\eta) .$$

Comme on suppose  $g \geq 1$  , i.e.  $\chi_{\text{top}}(F_\eta) < 0$  , on trouve finalement :

$$\chi_{\text{top}}(F_s) \geq \chi_{\text{top}}(F_\eta)$$

l'égalité n'ayant lieu que si on a à la fois :

-  $\chi_{\text{top}}(C) = 2\chi(\mathcal{O}_C)$  , c'est-à-dire  $C$  lisse ;

-  $\frac{1}{n}\chi_{\text{top}}(F_\eta) = \chi_{\text{top}}(F_\eta)$  , c'est-à-dire ou bien  $n=1$  ( $F_s$

lisse), ou bien  $g=1$  et aussi  $g(C)=1$  .

Par suite pour  $s \in \Sigma$  (notation du lemme VI.4), l'expression  $\chi_{\text{top}}(F_s) - \chi_{\text{top}}(F_\eta)$  est positive, et ne peut être nulle que si  $F_s = n.E$  ,  $E$  courbe elliptique lisse,  $g(F_\eta) = 1$  . Appliquons maintenant la formule VI.4 ; on a  $\chi(S) = 2 - 2b_1 + b_2 = 0$  et  $\chi(B) = 0$  , d'où

$\sum_{s \in \Sigma} (\chi(F_s) - \chi(F_\eta)) = 0$  ; d'après ce qui précède, ceci entraîne la proposition.

Les fibrations  $S \rightarrow B$  lisses sont extrêmement particulières et peuvent être classifiées complètement. Dans le cas des fibres multiples ( $g = 1$ ), on se ramènera à une fibration lisse grâce au :

Lemme VI.7 : Soit  $p : S \rightarrow B$  un morphisme (d'une surface dans une courbe lisse) dont les fibres sont soit lisses, soit des multiples de courbes lisses. Il existe un revêtement ramifié  $q : B' \rightarrow B$  , galoisien de groupe  $G$  , une surface  $S'$  et un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{q'} & S \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

tel que l'action de  $G$  sur  $B'$  se relève à  $S'$  , que  $q'$  définisse un isomorphisme  $S'/G \xrightarrow{\sim} S$  , et que  $p'$  soit lisse.

Démonstration : Il suffit d'éliminer chaque fibre multiple en prenant des revêtements ramifiés successifs ; le lemme résulte donc de la variante locale suivante :

Lemme VI.7' : Soit  $\Delta \subset \mathbb{C}$  le disque unité, U une surface analytique (non compacte) lisse, p : U  $\rightarrow \Delta$  un morphisme lisse au-dessus de  $\Delta - 0$  , tel que  $p^* 0 = nC$  où  $C \subset U$  est une courbe lisse. Soient  $q : \Delta \rightarrow \Delta$  le morphisme  $z \mapsto z^n$  ,  $\tilde{U}$  le produit fibré défini par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{q}} & U \\ \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ \Delta & \xrightarrow{q} & \Delta \end{array}$$

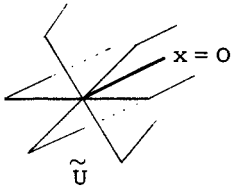
$U'$  la normalisation de  $\tilde{U}$  ,  $p'$ ,  $q'$  les projections de  $U'$  sur  $\Delta$  ,  $U$  .

Le groupe  $\mu_n$  des racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité opère sur  $\Delta$  (par  $z \mapsto \zeta z$ ), donc sur  $\tilde{U} = U \times_{\Delta} \Delta$  (par action sur le 2e facteur), donc sur  $U'$  ;  $q'$  définit un isomorphisme  $U'/\mu_n \xrightarrow{\sim} U$ . La fibration  $p' : U' \rightarrow \Delta$  est lisse.

Démonstration : La vérification étant locale sur  $U$ , on peut supposer qu'il existe sur  $U$  des coordonnées  $x, y$  telles que  $p(x, y) = x^n$ ,  $C$  étant définie par l'équation  $x=0$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \{((x, y); z) , (x, y) \in U, z \in \Delta, x^n = z^n\} \\ &= \bigcup_{\zeta \in \mu_n} U_{\zeta} \quad , \text{ avec } U_{\zeta} = \{((x, y); \zeta x) , (x, y) \in U\} . \end{aligned}$$

Les variétés  $U_{\zeta}$  sont isomorphes à  $U$  via la projection  $\tilde{q}$  ;  $\tilde{U}$  est réunion des  $n$  variétés  $U_{\zeta}$ , recollées le long de la droite  $x=0$ .



La normalisation  $U'$  est la réunion disjointe des  $U_{\zeta}$  ;  $\mu_n$  opère sur  $U'$  en échangeant les  $U_{\zeta}$  ; la projection  $p' : U_{\zeta} \rightarrow \Delta$  s'écrit, en identifiant  $U_{\zeta}$

à  $U$ ,  $(x, y) \mapsto \zeta x$ . Toutes les assertions du lemme sont claires.

Remarquons que la construction donnée ne nous assure pas que le revêtement  $q : B' \rightarrow B$  est ramifié uniquement aux points de  $B$  qui correspondent à des fibres multiples, ni que le revêtement  $S' \rightarrow S$  est étale. Le fait qu'on peut trouver un revêtement  $q$  avec ces propriétés résultera des constructions qui suivent.

Proposition VI.8 : Soient  $S$  une surface,  $B$  une courbe lisse,  $p : S \rightarrow B$  un morphisme lisse,  $F$  une fibre de  $p$ . On suppose soit  $g(B) = 1$  et  $g(F) \gg 1$ , soit  $g(F) = 1$ . Alors il existe un revêtement étale  $B' \rightarrow B$  telle que la fibration image réciproque  $p' : S' = S \times_B B' \rightarrow B'$  soit triviale, i.e.  $S' \cong B' \times F$ . On peut supposer le revêtement  $B' \rightarrow B$  galoisien de groupe  $G$ , de sorte que  $S \cong (B' \times F)/G$ .



Démonstration : Elle consiste en des "rappels" de la théorie des espaces de modules des courbes, pour laquelle une bonne référence est [G].

Soit  $T$  une variété. Une "courbe de genre  $g$  sur  $T$ " est un morphisme lisse  $f: X \rightarrow T$  dont les fibres sont des courbes de genre  $g$ . Topologiquement,  $f$  est une fibration localement triviale ; le faisceau  $R^1 f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est donc localement constant pour tout  $n$ . Il est muni d'une forme symplectique donnée par le cup-produit :

$$R^1 f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes R^1 f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T .$$

La donnée d'un tel faisceau équivaut à celle de sa fibre en un point  $t \in T$ , c'est-à-dire ici  $H^1(X_t, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , munie de l'action du groupe fondamentale  $\Pi_1(T, t)$  ; cette action respecte la forme symplectique sur  $H^1(X_t, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .

Notons  $V_{g,n}$  le faisceau constant  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T^{2g}$ , muni de la forme symplectique standard. Une "courbe de genre  $g$   $J_n$ -rigidifiée sur  $T$ " est une courbe de genre  $g$  sur  $T$  munie d'un isomorphisme symplectique  $V_{g,n} \xrightarrow{\sim} R^1 f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Une courbe de genre  $g$  sur  $T$  peut être  $J_n$ -rigidifiée si l'action de  $\Pi_1(T, t)$  sur  $H^1(X_t, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est triviale ; ce n'est bien sûr pas toujours le cas, mais comme le groupe d'automorphismes de  $H^1(X_t, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est fini, il y a un sous-groupe d'indice fini du  $\Pi_1$  qui opère trivialement, et donc un revêtement étale  $T' \rightarrow T$  tel que l'image inverse de la courbe donnée soit  $J_n$ -rigidifiable sur  $T'$ .

Supposons  $n \geq 3$ . On montre alors que la  $J_n$ -rigidification permet d'éliminer les automorphismes ; ceci entraîne qu'il existe une courbe de genre  $g$   $J_n$ -rigidifiée universelle, notée  $U_{g,n} \rightarrow T_{g,n}$ . Cela signifie que toute courbe  $J_n$ -rigidifiée sur une variété  $T$  est l'image réciproque de la courbe universelle par un morphisme  $T \rightarrow T_{g,n}$  uniquement déterminé. Les espaces  $T_{g,n}$  sont des variétés quasi-projectives ([M2]), mais il nous suffit ici de savoir, comme dans [G], qu'ils existent comme espaces analytiques. Nous aurons besoin aussi des propriétés suivantes :

(1) Pour  $g \geq 2$  , il n'existe pas de morphisme analytique  $h : \mathbb{C} \rightarrow T_{g,n}$  non trivial (i.e. tel que  $h(\mathbb{C})$  contienne plus d'un point).

(2) Pour  $g = 1$  , il n'existe pas de morphisme analytique non trivial d'une variété compacte connexe  $X$  dans  $T_{1,n}$  .

La propriété (2) est élémentaire : l'invariant  $j$  définit une fonction holomorphe sur la variété compacte  $X$  , donc constante. L'application de  $X$  dans la courbe  $T_{1,n}$  ne peut être surjective, elle est donc triviale.

La démonstration de (1) est plus délicate. On peut invoquer le fait - difficile - que le revêtement universel de  $T_{g,n}$  (l'espace de Teichmüller  $T_g$ ) est un domaine borné, et donc ne reçoit pas de morphisme non trivial de source  $\mathbb{C}$  . On peut aussi considérer l'espace  $A_{g,n}$  qui classifie les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension  $g$   $J_n$ -rigidifiées ; son revêtement universel est par construction le demi-espace de Siegel  $H_g$  , qui est un domaine borné. On conclut par le théorème de Torelli, qui entraîne que le morphisme  $T_{g,n} \rightarrow A_{g,n}$  , obtenu en associant à une courbe sa jacobienne, est fini.

Montrons comment la proposition résulte des propriétés (1) et (2). Soit  $p : S \rightarrow B$  un morphisme lisse, dont les fibres sont de genre  $g$  ; il existe un revêtement étale  $B' \rightarrow B$  telle que la courbe  $S' \rightarrow B'$ , image réciproque de  $S \rightarrow B$  , soit  $J_n$ -rigidifiable ( $n$  fixé  $\geq 3$ ). Choisissons une  $J_n$ -rigidification ; on en déduit un morphisme  $h : B' \rightarrow T_{g,n}$  tel que la courbe  $S' \rightarrow B'$  soit l'image réciproque par  $h$  de la courbe universelle. Si  $g(B) = 1$  et  $g \geq 2$  , on a  $g(B') = 1$  ; comme le revêtement universel de  $B'$  est  $\mathbb{C}$  ,  $h$  est trivial par la propriété (1). Si  $g = 1$  ,  $h$  est trivial par la propriété (2). La proposition en résulte.

Corollaire VI.9 : Soit  $S$  une surface minimale non réglée avec  $p_g = 0$  ,  $q = 1$  ,  $K^2 = 0$  . Il existe deux courbes  $B, F$  , de genre  $\geq 1$  , et

un groupe  $G$  d'automorphismes de  $B$ , opérant sur  $B \times F$  de manière compatible avec l'action sur  $B$  (i.e.  $g.(b,f) = (gb, .)$  pour  $g \in G$ ,  $b \in B$ ,  $f \in F$ ), de façon que  $S \cong (B \times F)/G$ . La courbe  $B/G$  est elliptique ; si de plus  $g(F) \gg 2$ ,  $B$  est elliptique et  $G$  est un groupe de translations de  $B$ .

Cela résulte aussitôt du lemme VI.7 et des propositions VI.6 et VI.8 .

Lemme VI.10 : Soient  $B, F$  deux courbes de genre  $\gg 1$ ,  $G$  un groupe d'automorphismes de  $B$  opérant sur  $B \times F$  de manière compatible avec l'action sur  $B$ .

(i) Si  $g(F) \gg 2$ ,  $G$  opère sur  $F$  et on a  $g(b,f) = (gb, gf)$  pour  $g \in G$ ,  $b \in B$ ,  $f \in F$ .

(ii) Si  $g(F) = 1$ , il existe un revêtement étale  $\tilde{B}$  de  $B$  et un groupe  $H$  opérant sur  $\tilde{B}$  et  $F$  (donc sur le produit  $\tilde{B} \times F$ ), de façon que  $\tilde{B}/H \cong B/G$  et  $(\tilde{B} \times F)/H \cong (B \times F)/G$ .

Démonstration :

Pas 1. Pour  $g \in G$ ,  $b \in B$ , on doit avoir  $g.(b,f) = (gb, \varphi_g(b).f)$ , où  $\varphi_g(b)$  est un automorphisme de  $F$ , dépendant continûment de  $b$ . Si  $g(F) \gg 2$ , le groupe d'automorphismes de  $F$  est fini ; il en résulte que  $\varphi_g(b)$  est en fait indépendant de  $b$ , ce qui prouve (i).

Il reste à étudier le cas où  $F$  est une courbe elliptique ; nous supposerons choisie une origine sur  $F$ , de sorte que  $F$  a une structure naturelle de groupe (i.e. de variété abélienne). L'automorphisme  $\varphi_g(b)$  est alors de la forme  $f \mapsto a_g(b).f + t_g(b)$ , où  $a_g(b)$  est un automorphisme de  $F$  (préservant la structure de groupe) et  $t_g(b) \in F$  (cf. proposition V.12). Le groupe des automorphismes de  $F$  préservant la structure de groupe est fini (V.12 ou VI.16 plus loin), de sorte que  $a_g(b) = a_g$  est indépendant de  $b$  ; on vérifie aussitôt que  $t_g : B \rightarrow F$  est un morphisme. On a  $a_{gh} = a_g \circ a_h$  pour  $g, h \in G$ , de sorte que a

définit un homomorphisme de  $G$  dans le groupe  $\text{Aut}_0(F)$  des automorphismes de  $F$  qui préservent la structure de groupe.

Pas 2. Il existe un morphisme  $\rho : B \rightarrow F$  , et un entier  $n$  , tel que :

$$(*) \quad \rho(gb) - a_g \cdot \rho(b) = n \cdot t_g(b) \quad \text{pour } b \in B, g \in G .$$

Démonstration : Rappelons qu'il existe un isomorphisme canonique de  $F$  sur  $\text{Pic}^0(F)$ , donné par  $f \mapsto [f] - [O]$  (dans ce qui suit nous notons  $f_1 + f_2$  le point de  $F$  somme de  $f_1$  et  $f_2$  , et  $[f_1] + [f_2]$  le diviseur de degré 2 sur  $F$ ). On a donc  $[f_1] + \dots + [f_r] \equiv (r-1)[O] + [\Sigma f_i]$  pour  $f_i \in F$  . Soit  $u$  un automorphisme de  $F$  , donné par  $u(f) = a \cdot f + t$  , avec  $a \in \text{Aut}_0(F)$  et  $t \in F$  ; si  $D = (n-1)[O] + [f]$  , on a :

$$\begin{aligned} u^* D &= (n-1)[u^{-1}(O)] + [u^{-1}(f)] = (n-1)[-a^{-1} \cdot t] + [a^{-1}f - a^{-1}t] \\ &\equiv (n-1)[O] + [a^{-1}f - na^{-1}t] . \end{aligned}$$

Soit  $H$  une section hyperplane de  $B \times F$  ; le faisceau inversible  $L = \mathcal{O}_{B \times F}(\Sigma_{g \in G} g^* H)$  est stable par  $G$  . Pour  $b \in B$  , notons  $L_b$  la restriction de  $L$  à  $\{b\} \times F$  : c'est un faisceau inversible sur  $F$  , de degré  $n > 0$  . L'invariance de  $L$  sous  $G$  se traduit par :

$$L_b = (g^* L)|_{\{b\} \times F} = \varphi_g(b)^* L_{gb} .$$

Définissons le morphisme  $\rho$  par :  $L_b = \mathcal{O}_F((n-1)[O] + [\rho(b)])$ .

L'égalité précédente s'écrit :

$$\rho(b) = a_g^{-1} \cdot \rho(gb) - n a_g^{-1} \cdot t_g(b)$$

ce qui est la relation annoncée.

Pas 3. Supposons pour un instant  $n=1$  ; soit  $u$  l'automorphisme de  $B \times F$  défini par  $u(b, f) = (b, f - \rho(b))$ . La relation (\*) entraîne alors  $u g u^{-1}(b, f) = (gb, a_g \cdot f)$  ; autrement dit  $u$  définit un isomorphisme de  $(B \times F)/G$  sur  $(B \times F)/H$  , le groupe  $H = u G u^{-1}$  agissant sur  $B \times F$  par l'action produit d'une action sur chacun des deux facteurs. Ceci prouve (ii) dans ce cas.

Pour traiter le cas général, on considère le revêtement (non nécessairement connexe)  $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$  de  $B$  défini par le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow n \\ B & \xrightarrow{\rho} & F \end{array}$$

On a  $\tilde{B} \subset B \times F$ , et la formule (\*) entraîne que  $\tilde{B}$  est stable par  $G$ . Par ailleurs le groupe  $F_n$  des points d'ordre  $n$  de  $F$  opère également sur  $\tilde{B}$ , par  $\varepsilon.(b, f) = (b, f + \varepsilon)$ . Notons  $H$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(\tilde{B})$  engendré par  $G$  et  $F_n$ ; on a  $g \varepsilon g^{-1} = a_g . \varepsilon$  pour  $g \in G$ ,  $\varepsilon \in F_n$ , de sorte que  $H$  est produit semi-direct de  $G$  par  $F_n$ : on a une suite exacte scindée:  $0 \rightarrow F_n \rightarrow H \xrightarrow{V} G \rightarrow 1$ .

Faisons opérer  $H$  sur  $\tilde{B} \times F$  par  $h(\tilde{b}, f) = (h\tilde{b}, \varphi_{vh}(\pi\tilde{b}).f)$ . Comme  $\tilde{B}/F_n \cong B$ , on a  $\tilde{B}/H \cong B/G$  et  $(\tilde{B} \times F)/H \cong (B \times F)/G$ . Considérons l'automorphisme  $u$  de  $\tilde{B} \times F$  défini par  $u(\tilde{b}, f) = (\tilde{b}, f - \tilde{\rho}(\tilde{b}))$ ; on a:  $uhu^{-1}(\tilde{b}, f) = (h\tilde{b}, a_{vh}.f + \theta_h(\tilde{b}))$ , avec  $\theta_h(\tilde{b}) = a_{vh}.\tilde{\rho}(\tilde{b}) - \tilde{\rho}(h\tilde{b}) + t_{vh}(\pi\tilde{b})$ .

Or il résulte de (\*) que  $n.\theta_h(\tilde{b}) = 0$ , c'est-à-dire  $\theta_h(\tilde{b}) \in F_n$ ; ainsi  $\theta_h$  est indépendant de  $\tilde{b}$ , et l'action de  $H$  sur  $\tilde{B} \times F$  - après transport par  $u$  - est de la forme cherchée.

Si  $\tilde{B}$  n'est pas connexe, soient  $B_0$  une composante connexe de  $\tilde{B}$  et  $H_0$  le sous-groupe de  $H$  qui préserve  $B_0$ ; il est clair que  $(B_0 \times F)/H_0 \cong (\tilde{B} \times F)/H$ , ce qui achève de prouver le lemme.

On peut donc écrire dans tous les cas  $S = (B \times F)/G$ , où  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $B$  opérant sur  $F$ . Notons que si un sous-groupe distingué  $H$  de  $G$  opère trivialement sur  $F$ , on peut écrire  $S = (B' \times F)/G'$  avec  $B' = B/H$ ,  $G' = G/H$ ; on peut donc toujours supposer que  $G \subset \text{Aut}(F)$  - ce qu'on fera désormais. Ceci entraîne que les points fixes de  $G$  sont en nombre fini. Or le quotient

d'une variété lisse  $X$  par un groupe fini  $G$  ne peut être lisse que si les sous-variétés fixées par un élément  $g \neq 1$  sont des diviseurs, pour tout  $g \in G$  ,  $g \neq 1$  . (Cela résulte du théorème de pureté de Zariski, qui est dans ce cas presque trivial : si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme fini de variétés lisses, le lieu de ramification de  $f$  est défini par l'annulation de la fonction  $\det(df)$ , c'est donc un diviseur). Il en résulte que  $G$  opère librement sur  $B \times F$  (i.e.  $\forall g \neq 1$  ,  $\forall s \in B \times F$  ,  $gs \neq s$ ).

Il reste à déterminer, parmi toutes les surfaces de la forme  $(B \times F)/G$  , lesquelles vérifient effectivement  $p_g = 0$  et  $q \geq 1$  . Il nous faut pour ceci calculer les invariants numériques d'une variété quotient.

Lemme VI.11 : Soit  $G$  un groupe fini d'automorphismes d'une variété lisse  $X$  ; on suppose que  $Y = X/G$  est lisse, et on note  $\pi : X \rightarrow Y$  la projection. Alors les  $p$ -formes  $k$ -tensorielles  $\alpha \in H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes k})$  invariantes sous  $G$  sont les formes  $\pi^* \omega$  , où  $\omega$  est une  $p$ -forme  $k$ -tensorielle méromorphe sur  $Y$  telle que  $\pi^* \omega$  soit holomorphe sur  $X$  .

Démonstration : Traitons le cas des 1-formes, le cas général s'en déduisant immédiatement. Si  $V = X$  ou  $Y$  , notons  $K_V$  le corps des fonctions rationnelles sur  $V$  et  $M_V^1$  l'espace des 1-formes méromorphes sur  $V$  ; c'est un espace vectoriel sur  $K_V$  , de dimension  $m = \dim V$  . Il s'agit de montrer que la flèche  $\pi^* : M_Y^1 \rightarrow (M_X^1)^G$  est un isomorphisme. Soit  $\{dy_1, \dots, dy_m\}$  une base de  $M_Y^1$  sur  $K_Y$  ; alors  $\{\pi^* dy_1, \dots, \pi^* dy_m\}$  est une base de  $M_X^1$  sur  $K_X$  . Une 1-forme  $\alpha = \sum_i A_i \pi^* dy_i$  ( $A_i \in K_X$ ) sur  $X$  est invariante par  $G$  si et seulement si tous les  $A_i$  le sont, c'est-à-dire si  $A_i = \pi^* B_i$  avec  $B_i \in K_Y$  ; on a alors  $\alpha = \pi^* \omega$  , avec  $\omega = \sum B_i dy_i$  . Le lemme est maintenant évident.

Exemples VI.12 :

1) Cas où  $\pi$  est étale (i.e.  $G$  opère librement).

Alors une forme  $\alpha$  est holomorphe si et seulement si  $\pi^* \alpha$  est holomorphe ; donc  $\pi^* : H^0(Y, (\Omega_Y^p)^{\otimes k}) \rightarrow H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes k})^G$  est un isomorphisme.

2) Cas des courbes.

On notera  $\Omega^1 = \omega$ . Cherchons à déterminer les formes  $k$ -tensorielles méromorphes  $\alpha$  sur  $Y$  telles que  $\pi^* \alpha \in H^0(X, \omega_X^{\otimes k})$ . Aux points où  $\pi$  est étale, il faut et il suffit que  $\alpha$  soit holomorphe. Soit  $P \in Y$  un point de ramification de  $\pi$ . Le groupe  $G$  opère transitivement sur la fibre  $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ , de sorte que les stabilisateurs des  $Q_i$  dans  $G$  sont conjugués ; leur cardinal  $e_p$  (ou simplement  $e$ ) est l'indice de ramification du point  $Q_i$  ( $i=1, \dots, s$ ), et on a  $e.s = \text{Card}(G)$ . Il existe des coordonnées locales :  $y$  sur  $Y$  en  $P$ ,  $x_i$  sur  $X$  en  $Q_i$ , telles que :

$$\pi^* y = x_i^e \quad \text{au voisinage de } Q_i .$$

La forme  $\alpha$  s'écrit au voisinage de  $P$   $\alpha = A y^{-r} (dy)^{\otimes k}$ , où  $A$  est une fonction  $\neq 0$  en  $P$  et  $r \in \mathbb{Z}$ . On a au point  $Q_i$  :

$$\begin{aligned} \pi^* \alpha &= \pi^* A . x_i^{-re} (e x_i^{e-1} dx_i)^{\otimes k} \\ &= A_i . x_i^{-re+k(e-1)} (dx_i)^{\otimes k} \end{aligned}$$

où  $A_i$  est une fonction  $\neq 0$  en  $Q_i$ .

Donc  $\pi^* \alpha$  est holomorphe si et seulement si  $-re+k(e-1) \geq 0$ , c'est-à-dire  $r \leq k(1-\frac{1}{e})$ . Autrement dit la flèche :

$$\pi^* : H^0(Y, \omega_Y^{\otimes k}(\sum_{P \in Y} P . [k(1-\frac{1}{e_P})])) \rightarrow H^0(X, \omega_X^{\otimes k})^G$$

est un isomorphisme ( $[x]$  signifie partie entière de  $x$  ; la sommation

$\sum_{P \in Y}$  porte en fait sur un nombre fini de points, à savoir les points de ramification de  $\pi$ , puisque  $e_p = 1$  pour les autres).

On remarque que pour  $k=1$ , on trouve  $H^0(X, \omega_X)^G \cong H^0(Y, \omega_Y)$  ; mais l'égalité analogue peut être fautive dès que  $k \geq 2$ .

3) Cas des p-formes.

On peut en fait démontrer, en toute dimension, que  $\pi^* : H^0(Y, \Omega_Y^p) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^p)^G$  est un isomorphisme ; il suffit de savoir qu'il existe une application  $\text{Tr} : H^0(X, \Omega_X^p) \rightarrow H^0(Y, \Omega_Y^p)$  telle que  $\pi^* \text{Tr}(\omega) = \sum_{g \in G} g^* \omega$  (cf. par exemple [Gr]). Il n'y a pas de résultat analogue pour les formes k-tensorielles, comme le montre le cas des courbes.

Nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite.

Théorème VI.13 : Soit S une surface minimale non réglée avec  $p_g = 0$  ,  $q \geq 1$  . Alors  $S = (B \times F)/G$  , où B et F sont des courbes lisses non rationnelles, G est un groupe fini opérant fidèlement sur B et sur F , B/G est elliptique, F/G est rationnelle, et l'une des conditions suivantes est réalisée :

Cas I : B est elliptique, et par suite G est un groupe de translations de B ;

Cas II : F est elliptique, et G opère librement sur  $B \times F$  .

Inversement, toute surface de ce type est une surface minimale non réglée avec  $p_g = 0$  ,  $q = 1$  ,  $K^2 = 0$  .

Démonstration : Soit S minimale non réglée avec  $p_g = 0$  ,  $q \geq 1$  ; on a alors  $q = 1$  ,  $K^2 = 0$  (VI.1.a et VI.2). On a vu (VI.9 et VI.10) que  $S = (B \times F)/G$  , G opérant sur B et sur F , de façon que B/G soit elliptique ; on a de plus B elliptique (Cas I) ou F elliptique (Cas II). Dans chaque cas G opère librement sur  $B \times F$  , de sorte que la projection  $\pi : B \times F \rightarrow S$  est étale.

Cherchons à quelle condition la surface  $(B \times F)/G$  vérifie  $p_g = 0$  ,  $q = 1$  . Notons qu'elle est minimale et non réglée : si elle contenait une courbe rationnelle, son image inverse dans  $B \times F$  serait une réunion de courbes rationnelles, lesquelles devraient s'appliquer surjectivement sur un des facteurs B ou F , ce qui est impossible.



Posons  $\tilde{S} = B \times F$ . D'après III.22 on a :

$$H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^1) \cong H^0(B, \omega_B) \oplus H^0(F, \omega_F) \quad \text{d'où} \quad q(\tilde{S}) = g(B) + g(F)$$

$$H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^2) \cong H^0(B, \omega_B) \otimes H^0(F, \omega_F) \quad \text{d'où} \quad p_g(\tilde{S}) = g(B) \cdot g(F) .$$

En particulier, on a  $\chi(\Theta_{\tilde{S}}) = \chi(\Theta_B) \cdot \chi(\Theta_F)$ , donc  $\chi(\Theta_{\tilde{S}}) = 0$  puisque B ou F est elliptique. Si B (resp. F) est elliptique, on a  $\Omega_{\tilde{S}}^2 \cong q^* \omega_F$  (resp.  $\Omega_{\tilde{S}}^2 \cong p^* \omega_B$ ), où q (resp. p) désigne la projection de  $\tilde{S}$  sur F (resp. B) ; par suite  $K_{\tilde{S}}^2 = 0$ . Il résulte alors de VI.3 que :

$$\chi(\Theta_S) = 0 \quad K_S^2 = 0 .$$

Comme  $\pi$  est étale, on a (exemple VI.12.1) :

$$\begin{aligned} H^0(S, \Omega_S^1) &= H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^1)^G = H^0(B, \omega_B)^G \oplus H^0(F, \omega_F)^G \\ &= H^0(B/G, \omega_{B/G}) \oplus H^0(F/G, \omega_{F/G}) \quad \text{par l'exemple 12.2 .} \end{aligned}$$

Comme B/G est elliptique, on voit que  $q(S) = 1$  si et seulement si F/G est rationnelle ; dans ce cas, on a bien  $p_g(S) = 0$  puisque  $\chi(\Theta_S) = 0$ . Ceci achève la démonstration du théorème.

Exemples VI.14 :

1) Il est immédiat de construire tous les exemples dans le cas I : on se donne une courbe elliptique B ; le groupe G doit être de la forme  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ , avec  $a, b \gg 1$ . On choisit donc un revêtement (ramifié) galoisien F de  $\mathbb{P}^1$ , de groupe  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ , qui ne soit pas rationnel, et on forme  $S = (B \times F)/G$ .

2) Il est plus délicat de donner un exemple du cas II, car la condition que G opère librement est assez contraignante (on ne peut, par exemple, avoir G cyclique). Donnons un exemple avec  $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ , opérant sur la courbe elliptique F par les automorphismes  $x \mapsto -x$  et  $x \mapsto x + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  point d'ordre 2). On se donne la courbe elliptique B', et il faut trouver un revêtement (ramifié) galoisien B de B', de groupe  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ , dans lequel deux des éléments

non triviaux du groupe opèrent sans points fixes (on s'arrangera alors pour qu'ils correspondent aux automorphismes  $x \mapsto -x$  et  $x \mapsto -x + \epsilon$  de  $F$ ). Pour cela on choisit :

- un revêtement étale double  $B_1 \rightarrow B'$  ;
- un revêtement ramifié double  $B_2 \rightarrow B'$  ,

et on pose  $B = B_1 \times_{B'} B_2$ . Notons  $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_2$ ) la  $B'$ -involution de  $B_1$  (resp.  $B_2$ ), et  $\bar{\sigma}_1$  (resp.  $\bar{\sigma}_2$ ) l'involution  $(\sigma_1, 1)$  (resp.  $(1, \sigma_2)$ ) de  $B$  ; le groupe  $G = (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)$  opère sur  $B$  (par  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_2$ ) et en fait un revêtement galoisien de  $B'$ . De plus  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2$  opèrent sans points fixes, donc  $G$  opère librement sur  $B \times F$ .

On va maintenant calculer les plurigenres  $P_n$  des surfaces  $(B \times F)/G$ , de façon à les distinguer numériquement des surfaces réglées elliptiques.

Proposition VI.15 : Soit  $S = (B \times F)/G$  une surface vérifiant les conditions énoncées dans le théorème VI.13.

- 1) On a  $P_4 \neq 0$  ou  $P_6 \neq 0$  ; en particulier  $P_{12} \neq 0$  .
- 2) Si  $B$  ou  $F$  n'est pas elliptique, il existe une suite  $(n_i)$  tendant vers l'infini telle que  $P_{n_i}$  tende vers l'infini.
- 3) Si  $B$  et  $F$  sont elliptiques, on a  $4K \equiv 0$  ou  $6K \equiv 0$  , et en particulier  $12K \equiv 0$  .

Démonstration : Notons que 3) résulte aussitôt de 1) : car si  $B$  et  $F$  sont elliptiques, le diviseur canonique sur  $B \times F$  est trivial ; donc si  $D \in |4K|$  (resp.  $|6K|$ ), on a  $\pi^* D = 0$ , donc  $D = 0$ .

Démontrons 1) et 2) dans le cas I. On a :

$$H^0(S, (\Omega_S^2)^{\otimes k}) \cong H^0(\tilde{S}, (\Omega_{\tilde{S}}^2)^{\otimes k})^G = [H^0(B, \omega_B^{\otimes k}) \otimes H^0(F, \omega_F^{\otimes k})]^G .$$

L'espace  $H^0(B, \omega_B^{\otimes k})$  est un espace de dimension un, invariant par  $G$  (puisque la 1-forme holomorphe non nulle sur  $B$  est invariante par translations). Par suite on trouve en utilisant l'exemple VI.12.2 :

$$P_k(S) = \dim H^0(F, \omega_F^{\otimes k})^G = \dim H^0(F/G, L_k)$$

$$\text{avec } L_k = \omega_{F/G}^{\otimes k} \left( \sum_{P \in F/G} P \left[ k \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \right] \right).$$

Comme  $F/G$  est rationnelle, le faisceau  $L_k$  est caractérisé par son degré :

$$\deg L_k = -2k + \sum_P \left[ k \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \right].$$

Considérons par ailleurs la formule de Riemann-Hurwitz :

$$(RH) \quad 2g(F) - 2 = -2n + \sum_P n \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \quad (\text{cf. Exemple VI.12.2}).$$

On peut remarquer tout de suite que si  $r$  désigne le nombre de points de ramification, on a :

$$\deg L_k \gg -2k + \sum_P \left\{ k \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) - 1 \right\} = k \cdot \frac{2g(F) - 2}{n} - r$$

donc si  $g(F) \gg 2$ ,  $P_k(S) = \sup(\deg L_k + 1, 0)$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini. Donc 2) est démontré dans ce cas.

Classons les indices de ramification par ordre croissant :

$e_1 \ll e_2 \ll \dots \ll e_r$ . On doit avoir  $\sum_i \left( 1 - \frac{1}{e_i} \right) \gg 2$  par (RH). Il s'agit de montrer que pour  $k$  convenable (divisant 4 ou 6), on a  $\deg L_k \gg 0$ .

Distinguons plusieurs cas :

a)  $r \gg 4$ . Comme  $2 \left( 1 - \frac{1}{e_i} \right) \gg 1$ , on a alors  $\deg L_2 \gg 0$ .

On a  $r \gg 3$  par (RH), donc il reste à examiner le cas  $r = 3$ . (RH) s'écrit alors  $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \ll 1$ .

b)  $e_1 \gg 3$ . Alors  $3 \left( 1 - \frac{1}{e_i} \right) \gg 2$ , donc  $\deg L_3 \gg 0$ .

On peut donc supposer  $e_1 = 2$ , et  $\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \ll \frac{1}{2}$  (RH).

c)  $e_2 \gg 4$ . Alors  $\deg L_4 \gg 0$ .

d) Reste le cas  $e_2 = 3$ ; alors  $e_3 \gg 6$  (RH), donc  $\deg L_6 \gg 0$ .

Ainsi l'assertion 1) est démontrée dans le cas I.

Pour traiter le cas II, nous aurons besoin d'un rappel :

Rappel VI.16 : Soit F une courbe elliptique, munie d'une structure de groupe. Tout automorphisme de F est composé d'une translation et d'un automorphisme de groupe. Les automorphismes de groupe non triviaux sont la symétrie  $x \mapsto -x$  et en outre :

- Pour la courbe  $F_i = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)$ , les automorphismes  $x \mapsto \pm ix$ .
- Pour la courbe  $F_\rho = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho)$ , avec  $\rho^3 = 1$  ,  $\rho \neq 1$  , les automorphismes  $x \mapsto \pm \rho x$  ,  $x \mapsto \pm \rho^2 x$ .

Cela résulte aussitôt de la proposition V.12 .

Soit alors  $S = (B \times F)/G$  une surface satisfaisant aux hypothèses du cas II ; supposons  $F \neq F_i, F_\rho$  (resp.  $F = F_i$  , resp.  $F = F_\rho$ ). On a :

$$H^0(S, (\Omega_S^2)^{\otimes k}) \cong [H^0(B, \omega_B^{\otimes k}) \otimes H^0(F, \omega_F^{\otimes k})]^G .$$

Il résulte de VI.16 que si  $\omega$  désigne une forme holomorphe  $\neq 0$  sur  $F$  , la forme  $\omega^{\otimes 2}$  (resp.  $\omega^{\otimes 4}$  , resp.  $\omega^{\otimes 6}$ ) est invariante par le groupe d'automorphismes de  $F$  . Par suite si  $k$  est divisible par 2 (resp. 4 , resp. 6), on trouve :

$$\begin{aligned} P_k(S) &= \dim H^0(B, \omega_B^{\otimes k})^G \\ &= \dim H^0(B/G, \mathcal{O}_{B/G}(\sum_P P \cdot [k(1 - \frac{1}{e_P})])) \quad (\text{exemple VI.12.2}) \end{aligned}$$

puisque  $B/G$  est une courbe elliptique.

Il est clair que cette expression est non nulle, et tend vers l'infini lorsque  $k \rightarrow \infty$  si  $g(B) \geq 2$  (puisque'il existe alors au moins un point de ramification). Ceci prouve 1) et 2) dans le cas II.

Théorème VI.17 (Enriques) : Soit S une surface vérifiant  $P_4 = P_6 = 0$  (ou  $P_{12} = 0$ ). Alors S est réglée.

Démonstration : Si  $q = 0$  , on conclut déjà avec  $P_2 = 0$  par le théorème de Castelnuovo. Si  $q \geq 1$  , le théorème résulte de VI.13 et VI.15 .

Corollaire VI.18 : Pour une surface S , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) S est réglée.
- 2) Il existe une courbe C sur S , non exceptionnelle, telle que  $C.K < 0$  .
- 3) Pour tout diviseur D , le système  $|D+nK|$  est vide pour n assez grand ("l'adjonction s'éteint").
- 4)  $P_n = 0$  pour tout n .
- 5)  $P_{12} = 0$  .

Démonstration : 2)  $\implies$  3) : comme C n'est pas exceptionnelle, on a  $C^2 \gg 0$  par la formule du genre. Comme  $(D+nK).C < 0$  pour n grand, on conclut par la "remarque utile" (III.5).

Il est clair que 3)  $\implies$  4) (on fait  $D=0$ ) et 4)  $\implies$  5) ; le théorème VI.17 montre que 5)  $\implies$  1).

Montrons que 1)  $\implies$  2). Compte tenu de la structure des modèles minimaux des surfaces réglées, il existe un morphisme birationnel  $f : S \rightarrow M$  , où M est une surface géométriquement réglée (resp.  $\mathbb{P}^2$ ). Il existe une fibre F de M (resp. une droite L de  $\mathbb{P}^2$ ) au-dessus de laquelle f est un isomorphisme ; on a alors :

$$f^*F.K_S = F.K_M = -2 \qquad \text{resp. } f^*L.K_S = L.K_{\mathbb{P}^2} = -3$$

ce qui achève de prouver le corollaire.

Nous terminerons ce chapitre avec l'étude des surfaces de la forme  $(B \times F)/G$  , lorsque B et F sont elliptiques (donc  $12K \equiv 0$  par VI.15).

Définition VI.19 : Les surfaces  $S = (E \times F)/G$  , où E et F sont des courbes elliptiques lisses et G un groupe fini de translations de E opérant sur F de façon que  $F/G$  soit rationnelle, sont appelées

surfaces bielliptiques.

On rencontre plutôt dans la littérature actuelle la dénomination "surfaces hyperelliptiques", qui crée une confusion avec la terminologie classique et paraît de plus peu adéquate.

Il est facile maintenant de donner une liste complète des surfaces bielliptiques. Le groupe  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $F$  , donc par VI.16 c'est un produit semi-direct  $T \rtimes A$  , où  $T$  est un groupe de translations de  $F$  et  $A$  un groupe d'automorphismes de la structure de groupe. Comme  $F/G$  est rationnelle on a  $A \neq (0)$  , donc  $A = \mathbb{Z}/a$  avec  $a = 2, 3, 4$  ou  $6$  (VI.16).

Comme par ailleurs  $G$  est un groupe de translations de  $E$  , le produit  $T \rtimes A$  doit être direct ; cela signifie que les éléments de  $T$  sont invariants par  $A$  . Il est immédiat de déterminer les points fixes de  $A$  ; ce sont :

- Pour la symétrie  $x \mapsto -x$  : les points d'ordre 2.
- Pour la courbe  $F_i = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)$  et  $A$  engendré par l'automorphisme  $x \mapsto ix$  : les points  $0, \frac{1+i}{2}$  .
- Pour la courbe  $F_\rho = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho)$  et  $A$  engendré par  $x \mapsto \rho x$  : les points  $0, \pm(\frac{1-\rho}{3})$ .
- Pour  $F_\rho$  et  $A$  engendré par  $x \mapsto -\rho x$  : le point  $0$  .

De plus le groupe  $T \rtimes A$  doit être un groupe de translations de  $E$  , donc être engendré par deux éléments ; cela exclut le produit  $F_2 \times (\mathbb{Z}/2)$  , où  $F_2$  est le groupe des points d'ordre 2 de  $F$  . On conclut :

Liste VI.20 (Bagnera-De Franchis) : Désignons par  $E, F$  des courbes elliptiques arbitraires, par  $G$  un groupe de translations de  $E$  opérant sur  $F$  . Toute surface bielliptique est de l'un des types suivants:

- 1)  $(E \times F)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/2$  opérant sur  $F$  par symétrie.
- 2)  $(E \times F)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  opérant sur  $F$  par  $x \mapsto -x$  ,  $x \mapsto x + \epsilon$   
( $\epsilon \in F_2$ ).

- 3)  $(E \times F_i)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/4$  opérant par  $x \mapsto ix$  .
- 4)  $(E \times F_i)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$  opérant par  $x \mapsto ix$  ,  $x \mapsto x + \frac{1+i}{2}$  .
- 5)  $(E \times F_\rho)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/3$  opérant par  $x \mapsto \rho x$  .
- 6)  $(E \times F_\rho)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$  opérant par  $x \mapsto \rho x$  ,  $x \mapsto x + \frac{1-\rho}{3}$  .
- 7)  $(E \times F_\rho)/G$  ,  $G = \mathbb{Z}/6$  opérant par  $x \mapsto -\rho x$  .

On a  $2K \equiv 0$  dans les cas 1 et 2,  $4K \equiv 0$  dans les cas 3 et 4,  $3K \equiv 0$  dans les cas 5 et 6,  $6K \equiv 0$  dans le cas 7.

#### Note historique

Le résultat essentiel de ce chapitre, à savoir la caractérisation des surfaces réglées par "l'extinction de l'adjonction" ou par l'existence d'une courbe  $C$  vérifiant  $C.K < 0$  , apparaît dans l'article [C-E] de 1901 ; Enriques démontre plus tard la forme plus précise donnée dans le théorème VI.17 ([E3], 1905). On a suivi ici grosso modo le plan de sa démonstration.

Les surfaces bielliptiques ("surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang  $> 1$ " dans la terminologie classique) sont classifiées dans [B-DF] .

Exercices

1) Soit  $S \subset \mathbb{P}^n$  une surface dont les sections hyperplanes lisses sont des courbes elliptiques. Montrer que  $S$  est :

- ou bien une surface de Del Pezzo  $S_d$  ou  $S'_g$  (ch.V exer.2);

- ou bien une surface réglée elliptique. Donner des exemples de ce cas.

(Montrer que  $q(S) \ll 1$ ; si  $q=0$ , montrer que  $K \equiv -H$  et utiliser l'exercice V.2; si  $q=1$ , montrer que  $S$  est réglée par le corollaire VI.18).

2) Soit  $S$  une surface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^n$ , non contenue dans un hyperplan.

a) Si  $S$  n'est pas réglée, on a  $d \gg 2n-2$ ; l'égalité n'a lieu que si  $K_S \equiv 0$ .

b) Si  $S$  est réglée, on a  $d \gg n+q-1$ .

(Utiliser la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(H) \rightarrow \mathcal{O}_S(H)|_H \rightarrow 0$  et le lemme de Clifford : si  $D$  est un diviseur sur une courbe avec  $0 \ll \deg(D) \ll 2g-2$ , on a  $h^0(D) \ll \frac{1}{2} \deg(D)+1$ ).

3) Montrer que les surfaces bielliptiques sont caractérisées par les égalités  $p_g = 0$ ,  $P_{12} = q = 1$ .

(S'inspirer de la démonstration de la proposition VI.15).

4) Soit  $S$  une surface minimale non réglée avec  $\chi_{\text{top}}(S) = 0$ . On suppose qu'il existe un morphisme surjectif de  $S$  sur une courbe. Montrer qu'il existe deux courbes lisses  $B, F$ , avec  $B$  elliptique, et un groupe  $G$  opérant sur  $B$  et  $F$  de façon que  $S \cong (B \times F)/G$ .



## CHAPITRE VII

### LA DIMENSION DE KODAIRA

Le chapitre précédent nous a montré l'importance des systèmes multicanoniques  $|nK|$  dans la classification des surfaces. Dans ce court chapitre nous allons systématiser ce point de vue en répartissant les surfaces algébriques en quatre classes, suivant "l'amplitude" du diviseur canonique.

Définition VII.1 : Soient  $V$  une variété projective lisse,  $K$  un diviseur canonique de  $V$ ,  $\varphi_{nK}$  l'application rationnelle de  $V$  dans un espace projectif associée au système  $|nK|$ . La dimension de Kodaira de  $V$ , notée  $\kappa(V)$ , est la dimension maximum des images  $\varphi_{nK}(V)$ , pour  $n \gg 1$ .

Rappelons que l'image d'une application rationnelle est bien définie (II.4) ; si  $|nK| = \emptyset$ , on a  $\varphi_{nK}(V) = \emptyset$ , et on pose  $\dim(\emptyset) = -\infty$ . Il est immédiat d'expliciter cette définition pour une courbe :

Exemple VII.2 : Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g$ . Alors :

- $\kappa(C) = -\infty \iff g = 0$
- $\kappa(C) = 0 \iff g = 1$
- $\kappa(C) = 1 \iff g \geq 2$ .

Traduisons maintenant la définition pour une surface.

Exemple VII.3 : Soit  $S$  une surface. Alors :

- $\kappa(S) = -\infty \iff P_n = 0$  pour tout  $n \gg 1 \iff S$  réglée (théorème d'Enriques).
- $\kappa(S) = 0 \iff P_n = 0$  ou  $1$ , et il existe  $N$  tel que  $P_N = 1$ .
- $\kappa(S) = 1 \iff \exists N, P_N \gg 2$ , et pour tout  $n$ ,  $\varphi_{nK}(S)$  est au plus une courbe.
- $\kappa(S) = 2 \iff \exists N, \varphi_{NK}(S)$  est une surface.

Dans les chapitres qui suivent, nous allons classifier les surfaces avec  $\kappa = 0, 1, 2$ . Nous nous contenterons ici de donner quelques exemples.

Proposition VII.4 : Soient  $C, D$  deux courbes lisses,  $S = C \times D$ .

Alors :

- Si  $C$  ou  $D$  est rationnelle,  $S$  est réglée (i.e.  $\kappa(S) = -\infty$ ).
- Si  $C$  et  $D$  sont elliptiques,  $\kappa(S) = 0$ .
- Si  $C$  est elliptique et  $g(D) \gg 2$ ,  $\kappa(S) = 1$ .
- Si  $C$  et  $D$  sont de genre  $\gg 2$ ,  $\kappa(S) = 2$ .

Démonstration : Si  $p$  et  $q$  sont les deux projections de  $S$  sur  $C$  et  $D$ , on a :

$$\Omega_S^2 \cong p^* \omega_C \otimes q^* \omega_D \quad \text{et} \quad H^0(S, \mathcal{O}_S(nK)) \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes n}) \otimes H^0(D, \omega_D^{\otimes n})$$

de sorte que l'application rationnelle  $\varphi_{nK} : S \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  se factorise en  $\varphi_{nK} : C \times D \xrightarrow{(\varphi_{nK_C}, \varphi_{nK_D})} \mathbb{P}^{N'} \times \mathbb{P}^{N''} \xrightarrow{s} \mathbb{P}^N$ , où  $s$  est un plongement de Segre (défini par  $(X_i), (Y_j) \rightarrow (X_i Y_j)$ ). La proposition résulte alors aussitôt de l'exemple VII.2.

Proposition VII.5 : Notons  $S_{d_1, \dots, d_r}$  une surface intersection complète dans  $\mathbb{P}^{r+2}$  de  $r$  hypersurfaces de degrés  $d_1, \dots, d_r$ . Alors :

- les surfaces  $S_2, S_3, S_{2,2}$  sont rationnelles (donc vérifient  $\kappa = -\infty$ ).

- Les surfaces  $S_4$  ,  $S_{2,3}$  ,  $S_{2,2,2}$  vérifient  $K \equiv 0$  et  $\kappa = 0$  .
- Toutes les autres surfaces  $S_{d_1, \dots, d_r}$  vérifient  $\kappa = 2$  .

Démonstration : On a  $K \equiv k.H$  , où  $H$  est une section hyperplane de la surface (dans le plongement donné) et  $k = (\sum d_i) - r - 3$  (lemme IV.11). Pour  $k < 0$  , on trouve les surfaces  $S_2$  ,  $S_3$  et  $S_{2,2}$  qui sont rationnelles (cf. IV.13 et IV.16). Avec  $k = 0$  (c'est-à-dire  $K \equiv 0$ ), on trouve les surfaces  $S_4$  ,  $S_{2,3}$  ,  $S_{2,2,2}$  ; pour les autres surfaces intersections complètes, le diviseur canonique est multiple d'une section hyperplane, donc  $\kappa = \dim \varphi_K(S) = 2$  .

Notons enfin que les surfaces pour lesquelles  $nK \equiv 0$  pour un  $n$  (par exemple les surfaces abéliennes, ou les surfaces bielliptiques (VI.19)) vérifient évidemment  $\kappa = 0$  .

#### Note historique

L'importance des plurigenres dans la classification des surfaces devient claire avec les théorèmes de Castelnuovo et Enriques caractérisant les surfaces rationnelles et réglées. La répartition des surfaces suivant les 4 valeurs de  $\kappa$  apparaît dans l'article [E4], avec une formulation différente, en terme du plurigendre  $P_{12}$  (cf. exercice 3, chapitre VIII) :

$$\begin{aligned} \kappa = -\infty &\iff P_{12} = 0 \\ \kappa = 0 &\iff P_{12} = 1 \\ \kappa = 1 &\iff P_{12} \geq 2 , K^2 = 0 \\ \kappa = 2 &\iff P_{12} \geq 2 , K^2 > 0 . \end{aligned}$$

L'article en question contient d'ailleurs la classification plus précise qui va être exposée dans les chapitres suivants, et que l'on appelle maintenant classification d'Enriques.

C'est beaucoup plus tard que l'invariant  $\kappa$  est introduit : il apparaît pour la première fois - à ma connaissance - dans le séminaire Chafarévitch [Ch 2].

### Exercices

1) Soit  $V$  une variété lisse projective. On considère l'algèbre  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \mathcal{O}_V(nK))$  et on note  $d$  sa dimension de Krull (c'est-à-dire le degré de transcendance sur  $\mathbb{C}$  de son corps de fractions). Montrer que :

$$\kappa(V) = d-1 \quad \text{si } \kappa(V) \gg 0 .$$

2) Si  $V, W$  sont deux variétés projectives lisses, montrer que  $\kappa(V \times W) = \kappa(V) + \kappa(W)$ .

3) Soit  $f : V \rightarrow W$  un morphisme surjectif de variétés lisses projectives. On a  $\kappa(W) \leq \kappa(V)$ , avec égalité si  $f$  est étale.

## CHAPITRE VIII

### SURFACES AVEC $\kappa = 0$

Dans le reste de ce cours, nous allons étudier les surfaces avec  $\kappa = 0, 1$  ou  $2$ . Ces surfaces admettent un modèle minimal unique ; aussi pourrions-nous considérer uniquement les surfaces minimales. Nous utiliserons constamment le fait que  $K.D \gg 0$  pour tout diviseur effectif  $D$  sur une surface minimale avec  $\kappa \gg 0$  (c'est la partie immédiate du corollaire VI.18 : si une courbe  $C$  vérifie  $C.K \ll 0$ , on a  $C^2 \gg 0$  d'où  $|nK| = \emptyset$  pour tout  $n \gg 1$  par la remarque utile).

Dire que  $\kappa = 0$  signifie que  $P_n = 0$  ou  $1$  pour tout  $n$ , et qu'il existe  $m \gg 1$  avec  $P_m = 1$ .

Lemme VIII.1 : Soit  $S$  une surface minimale avec  $\kappa = 0$ .

- a) On a  $K^2 = 0$ .
- b) On a  $\chi(\mathcal{O}_S) \gg 0$ .
- c) Soient  $n, m$  deux entiers  $\gg 1$ , d leur p.g.c.d. Si

$P_n = P_m = 1$ , on a  $P_d = 1$ .

Démonstration : a) Il existe  $m \gg 1$  tel que  $|mK|$  contienne un diviseur effectif  $D$  ; comme  $D.K \gg 0$ , on a  $K^2 \gg 0$ . Supposons  $K^2 \gg 0$  ; le théorème de Riemann-Roch donne :

$$h^0(nK) + h^0((1-n)K) \gg \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(n^2 - n)K^2.$$

Pour  $n \gg 2$ , le système  $| (1-n)K |$  ne peut contenir un diviseur  $E$ , sans quoi on aurait  $E.K \gg 0$  d'où  $K^2 \ll 0$  ; on trouve donc que  $h^0(nK) = P_n$  tend vers l'infini quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui contredit  $\kappa = 0$ .

b) Comme  $K^2 = 0$ , la formule de Noether devient :

$$12\chi(\mathcal{O}_S) = \chi_{\text{top}}(S) = 2-4q+b_2$$

ou encore :  $8\chi(\mathcal{O}_S) = -2-4p_g+b_2 \gg -2-4p_g \gg -6$

(puisque  $p_g \ll 1$ ), d'où  $\chi(\mathcal{O}_S) \gg 0$ .

c) Soient  $D \in |nK|$ ,  $E \in |mK|$ . Posons  $n = n'd$ ,  $m = m'd$ , avec  $(n', m') = 1$ . Comme les diviseurs  $m'D$  et  $n'E$  appartiennent au même système linéaire  $|\frac{nm}{d}K|$ , de dimension projective 0, ils sont égaux ; on en déduit qu'il existe un diviseur effectif  $\Delta$  tel que :

$$D = n'\Delta \quad E = m'\Delta.$$

Notons  $\varepsilon$  la classe dans  $\text{Pic}(S)$  de  $\Delta - dK$  ; comme  $D \in |nK|$  et  $E \in |mK|$ , on trouve  $n'\varepsilon = 0$  et  $m'\varepsilon = 0$ , d'où  $\varepsilon = 0$  puisque  $(n', m') = 1$  ; donc  $\Delta \in |dK|$  et  $P_d = 1$ .

Théorème (et définitions) VIII.2 : Soit  $S$  une surface minimale avec  $\kappa = 0$ . L'une des 4 possibilités suivantes est réalisée :

1)  $p_g = 0$ ,  $q = 0$  : on a alors  $2K \equiv 0$ . On dit que  $S$  est une "surface d'Enriques".

2)  $p_g = 0$ ,  $q = 1$  : alors  $S$  est une surface bielliptique (VI.19).

3)  $p_g = 1$ ,  $q = 0$  : on a alors  $K \equiv 0$ . On dit que  $S$  est une "surface  $K^3$ ".

4)  $p_g = 1$ ,  $q = 2$ . Alors  $S$  est une surface abélienne.

Démonstration : On a  $p_g \ll 1$  ; supposons d'abord  $p_g = 0$ .

- Si  $q = 0$ , on a  $P_2 \gg 1$  compte tenu du théorème de Castelnuovo (V.1) ; comme  $K^2 = 0$ , le théorème de Riemann-Roch donne :

$$h^0(-2K) + h^0(3K) \gg 1.$$

Comme  $p_g = 0$ , on doit avoir  $P_3 = 0$  par le lemme VIII.1.c, donc  $h^0(-2K) \gg 1$  ; il en résulte que  $2K \equiv 0$ .

- Les surfaces minimales avec  $p_g = 0$ ,  $q \geq 1$  ont été classifiées au chapitre VI ; la proposition VI.15 montre que les seules parmi elles qui vérifient  $\kappa = 0$  sont les surfaces bielliptiques.

Supposons maintenant  $p_g = 1$ . Par le lemme VIII.1.b, on a  $q = 0, 1$  ou  $2$ .

- Si  $q = 0$ , le théorème de Riemann-Roch donne :  $h^0(-K) + h^0(2K) \geq 2$ , d'où  $h^0(-K) = 1$  et  $K \equiv 0$ .

- Supposons  $q = 1$ . Cela entraîne (I.10) qu'il existe un diviseur  $\epsilon$  non linéairement équivalent à zéro, mais tel que  $2\epsilon \equiv 0$ ; en particulier on a  $(\epsilon.D) = 0$  pour tout diviseur  $D$  sur  $S$ , et  $h^0(\epsilon) = h^0(-\epsilon) = 0$ . Or la formule de Riemann-Roch s'écrit :

$$h^0(\epsilon) + h^0(K-\epsilon) \geq 1 \quad \text{d'où} \quad h^0(K-\epsilon) \geq 1.$$

Soient  $D \in |K-\epsilon|$  et  $K_0 \in |K|$ . On a  $2D \in |2K|$ , d'où  $2D = 2K_0$  (puisque  $P_2 = 1$ ) et donc  $D = K_0$ , ce qui contredit  $\epsilon \neq 0$ . Il n'existe donc pas de surface minimale avec  $p_g = P_2 = q = 1$ .

Il reste à démontrer le point 4). Notons d'abord la proposition importante suivante :

Proposition VIII.3 : Soient  $S$  une surface,  $C_i$  des courbes irréductibles sur  $S$ ,  $m_i$  des entiers  $> 0$ . On pose  $F = \sum m_i C_i$ , et on suppose que :

$$(F.C_i) \leq 0 \quad \forall i.$$

Soit  $D = \sum r_i C_i$ , avec  $r_i \in \mathbb{Z}$  (ou si l'on veut  $r_i \in \mathbb{Q}$ ),  $D \neq 0$ .

a) On a  $D^2 \leq 0$ .

b) Supposons  $F$  connexe. Si  $D^2 = 0$ , on a  $D = rF$ , avec  $r \in \mathbb{Q}$ , et  $F.C_i = 0 \quad \forall i$ .

(En d'autres termes, la matrice d'intersection  $(C_i.C_j)$  est négative ; si  $F$  est connexe, son noyau est de dimension au plus 1).

Démonstration : Posons  $m_i C_i = G_i$  et  $s_i = \frac{r_i}{m_i}$ , de sorte que  $F = \sum G_i$  et  $D = \sum s_i G_i$ . On a :

$$D^2 = \sum_i s_i^2 G_i^2 + 2 \sum_{i < j} s_i s_j (G_i \cdot G_j) .$$

Ecrivons  $G_i^2 = G_i \cdot (F - \sum_{j \neq i} G_j)$  :

$$\begin{aligned} D^2 &= \sum_i s_i^2 (G_i \cdot F) - \sum_{i < j} (G_i \cdot G_j) (s_i^2 + s_j^2 - 2s_i s_j) \\ &= \sum_i s_i^2 (G_i \cdot F) - \sum_{i < j} (G_i \cdot G_j) (s_i - s_j)^2 . \end{aligned}$$

L'inégalité a) est alors claire. Supposons  $F$  connexe et  $D^2 = 0$ . On doit avoir :

$$s_i = s_j \text{ chaque fois que } C_i \cap C_j \neq \emptyset .$$

Comme  $F$  est connexe, on peut toujours joindre deux composantes  $C_i$  et  $C_j$  par une chaîne de  $C_k$ ; on en déduit que tous les  $s_i$  sont égaux (et donc non nuls). On doit avoir de plus  $s_i^2 (G_i \cdot F) = 0 \quad \forall i$ , donc  $(C_i \cdot F) = 0 \quad \forall i$ .

On a en vue deux types d'applications de la proposition :

Corollaire VIII.4 : Soient  $S$  une surface,  $B$  une courbe lisse,  $p : S \rightarrow B$  un morphisme surjectif à fibres connexes. Supposons que  $p^*[b] = F_b = \sum_i m_i F_i$ ; soit  $D = \sum_i r_i F_i$ , avec  $r_i \in \mathbb{Z}$ . On a  $D^2 \ll 0$ , avec égalité si et seulement si  $D = r F_b$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ .

Démonstration : Cela résulte directement de la proposition (avec  $F_i = C_i$ ,  $F_b = F$ ).

Corollaire VIII.5 : Soient  $S$  une surface,  $S'$  une surface projective non nécessairement lisse,  $g : S \rightarrow S'$  un morphisme surjectif,  $p$  un point de  $S'$ ,  $C_i$  des courbes irréductibles telles que  $g(C_i) = p$ ,  $D = \sum_i r_i C_i$  avec  $r_i \in \mathbb{Z}$ . On a  $D^2 \ll 0$ .



Démonstration : Il suffit de démontrer le corollaire lorsque  $UC_i$  est connexe (on l'appliquera ensuite à chaque composante). En remplaçant  $g$  par sa factorisation de Stein (V.17), on peut supposer que les fibres de  $g$  sont connexes. On a donc  $g^{-1}(p) = \bigcup_i C'_i$ , où les  $C'_i$  sont des courbes irréductibles parmi lesquelles se trouvent les  $C_i$ . Soit  $H$  une section hyperplane de  $S'$  qui passe par  $p$ . Ecrivons :

$$g^*H = \tilde{H} + \sum_i m_i C'_i, \text{ où } \tilde{H} \text{ ne contient aucune courbe } C'_i,$$

et posons  $F = g^*H - \tilde{H}$ . On a  $(g^*H.C'_i) = 0 \quad \forall i$ , puisqu'on peut faire bouger  $H$  en dehors de  $p$ ; donc  $(F.C'_i) \ll 0$ , et l'inégalité est stricte pour au moins un  $i$  puisque  $\tilde{H}$  rencontre la fibre  $g^{-1}(p)$ . La proposition entraîne alors le résultat.

(VIII.6) Démonstration du point 4) du théorème VIII.2 :

Soit  $S$  une surface minimale avec  $\kappa = 0$ ,  $p_g = 1$ ,  $q = 2$ . Nous noterons  $K$  le diviseur effectif canonique :  $K \in |K|$ .

$\alpha$ ) Structure de  $K$ .

Si  $K \neq 0$ , on a  $K = \sum_i n_i C_i$ , où les  $C_i$  sont des courbes irréductibles et  $n_i > 0$ ; comme  $K^2 = 0$  et  $K.C_i \geq 0$  on doit avoir  $K.C_i = 0 \quad \forall i$ . En remplaçant  $K$  par sa valeur, on trouve  $n_i C_i^2 + \sum_{j \neq i} n_j (C_i.C_j) = 0$ , donc :

- ou bien  $C_i^2 < 0$ , i.e.  $C_i^2 = -2$  et  $C_i$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ ;
- ou bien  $C_i^2 = 0$  et  $(C_i.C_j) = 0 \quad \forall j \neq i$ . Alors  $C_i$  est une courbe elliptique lisse ou une courbe rationnelle à point double, et  $C_i$  est une composante connexe de  $UC_i$ .

Ecrivons  $K = \sum D_\alpha$ , où les  $D_\alpha$  sont des diviseurs effectifs connexes et  $(D_\alpha.D_\beta) = 0$  pour  $\alpha \neq \beta$  (on dira que les  $D_\alpha$  sont les composantes connexes de  $K$ ). On a  $D_\alpha^2 = 0$ , et il résulte de ce qui précède que chaque  $D_\alpha$  est :

- soit un multiple d'une courbe elliptique lisse ou rationnelle à point

double ;

- soit une réunion de courbes rationnelles lisses.

On va considérer maintenant le morphisme d'Albanese  $\alpha : S \rightarrow \text{Alb}(S)$ , et montrer que c'est un revêtement étale. Il faut pour cela considérer les différents cas possibles :

$\beta$ )  $\alpha(S)$  est une courbe,  $K \neq 0$  .

Alors  $\alpha(S) = B$  est une courbe lisse de genre 2 (V.15). On ne peut envoyer surjectivement une courbe de genre 0 ou 1 sur  $B$  ; donc toute composante connexe  $D$  de  $K$  est contenue dans une fibre  $F_b$  de la fibration  $p : S \rightarrow B$ . Comme  $D^2 = 0$ , ceci entraîne d'après le corollaire VIII.4 que  $D = \frac{m}{q} \cdot F_b$ , avec  $m, q$  entiers positifs. Mais alors :

$$rq D = rm F_b = p^*(rm[b])$$

par suite  $h^0(nD)$ , et donc aussi  $h^0(nK)$ , tendent vers l'infini quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui contredit  $\kappa = 0$ .

$\gamma$ )  $\alpha(S)$  est une courbe,  $K \equiv 0$  .

Considérons un revêtement étale connexe  $B' \rightarrow B$  de degré  $\gg 2$ , et posons  $S' = S \times_B B'$ . Alors  $S'$  est connexe (remarque VI.14.5) ; on a  $K_{S'} \equiv \pi^* K_S \equiv 0$  et  $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 0$  (lemme VI.3), ce qui entraîne  $q(S') = 2$  ; mais par ailleurs on a  $q(S') \gg g(B') \gg 3$ , d'où une contradiction.

$\delta$ )  $\alpha$  est surjectif,  $K \neq 0$  .

Soit  $D$  une composante connexe de  $K$ . Comme  $D^2 = 0$ , le corollaire VIII.5 montre que l'image  $\alpha(D)$  n'est pas réduite à un point ; ainsi  $D$  ne peut être une réunion de courbes rationnelles. D'après  $\alpha$ ), on a donc  $D = nE$ , où  $E$  est une courbe elliptique lisse, et où  $\alpha(E)$  est une courbe elliptique lisse  $E' \subset \text{Alb}(S)$ . Posons  $A = \text{Alb}(S)$  ; quitte à translater l'origine dans  $A$ , on peut supposer que  $E'$  est

une sous-variété abélienne de  $A$  (cf. V.12). Considérons la courbe quotient  $F = A/E'$  et le morphisme surjectif  $f: S \rightarrow F$ ; soit  $S \xrightarrow{g} B \rightarrow F$  sa factorisation de Stein (V.17). La courbe  $E$  étant contenue dans une fibre  $F_b$  de  $g$ , on a par le corollaire VIII.4  $E = \frac{1}{q} F_b$  ( $q \in \mathbf{N}$ ), d'où comme précédemment  $h^0(mD) \rightarrow \infty$  avec  $m$  et donc  $h^0(mK) \rightarrow \infty$  avec  $m$ : contradiction.

Il reste donc une seule possibilité :

$\varepsilon) \alpha$  est surjectif et  $K \equiv 0$ .

Soit  $\{\eta_1, \eta_2\}$  une base de  $H^0(A, \Omega_A^1)$ ; posons  $\omega_1 = \alpha^* \eta_1$ ,  $\omega_2 = \alpha^* \eta_2$ . Comme  $\eta_1, \eta_2$  forment une base de  $\Omega_A^1$  en tout point de  $A$ ,  $\alpha$  est étale en un point  $x \in S$  si et seulement si la 2-forme  $\omega_1 \wedge \omega_2$  ne s'annule pas en  $x$ . Or puisque  $\alpha$  est génériquement étale (c'est ici qu'on utilise la caractéristique nulle - la démonstration est beaucoup plus délicate en caractéristique  $p$ , cf. [B-M]), la 2-forme  $\omega_1 \wedge \omega_2$  n'est pas identiquement nulle; comme  $K \equiv 0$ , elle n'est donc jamais nulle. Ainsi  $\alpha$  est un revêtement étale; comme tout revêtement étale d'une variété abélienne est une variété abélienne,  $S$  est une surface abélienne. Ceci achève la démonstration du théorème VIII.2.

Corollaire VIII.7 : Une surface minimale avec  $\kappa = 0$  vérifie  $4K \equiv 0$  ou  $6K \equiv 0$ .

En effet on a  $K \equiv 0$  pour les  $K3$  et les surfaces abéliennes,  $2K \equiv 0$  pour les surfaces d'Enriques et  $4K \equiv 0$  ou  $6K \equiv 0$  pour les surfaces bielliptiques (VI.20).

L'étude des surfaces abéliennes ressort beaucoup plus de la théorie générale des variétés abéliennes que de celle des surfaces: on n'en dira donc rien ici, se contentant de renvoyer par exemple à [M3]. Les surfaces bielliptiques ont été traitées en VI.20; dans la suite de ce chapitre, on va donner quelques exemples de surfaces  $K3$  et surfaces d'Enriques.

Surfaces K3.

Ce sont, par définition, les surfaces avec  $K \equiv 0$ ,  $q = 0$ . Il est clair que la condition  $K \equiv 0$  entraîne qu'elles sont minimales ; la formule de Noether montre que  $\chi_{\text{top}} = 24$ , d'où  $b_2 = 22$ .

Exemple VIII.8 : intersections complètes.

On a vu (VII.5) que les seules intersections complètes avec  $K \equiv 0$  sont les quartiques dans  $\mathbb{P}^3$ , les  $S_{2,3}$  dans  $\mathbb{P}^4$  et les  $S_{2,2,2}$  dans  $\mathbb{P}^5$ . Ce sont des surfaces K3 en vertu du lemme suivant :

Lemme VIII.9 : Soit  $V \subset \mathbb{P}^n$  une variété de dimension  $d$  intersection complète. Alors  $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$  pour  $0 < i < d$ .

Démonstration : On va démontrer en fait, plus généralement, que  $H^i(V, \mathcal{O}_V(k)) = 0$  pour  $0 < i < d$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{O}_V(k)$  désignant la restriction à  $V$  du faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ . En faisant une récurrence sur le nombre d'équations qui définissent  $V$ , on se ramène à montrer que si l'assertion est vraie pour  $V$ , elle l'est pour une section  $W$  de  $V$  par une hypersurface de degré  $r$ . Or on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V(k-r) \rightarrow \mathcal{O}_V(k) \rightarrow \mathcal{O}_W(k) \rightarrow 0.$$

La suite exacte de cohomologie associée donne le résultat.

Exemple VIII.10 : Surfaces de Kummer.

Soit  $A$  une surface abélienne ; supposons choisie une origine, et donc une structure de groupe sur  $A$ . Soit  $\tau$  l'involution  $a \mapsto -a$  de  $A$ . Ses points fixes sont les points d'ordre 2 du groupe  $A$ , isomorphe (comme groupe) à  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^4$  ; il y a donc 16 points d'ordre deux  $p_1, \dots, p_{16}$ . Notons  $\varepsilon : \hat{A} \rightarrow A$  l'éclatement de ces 16 points,  $E_i$  le diviseur exceptionnel  $\varepsilon^{-1}(p_i)$ . L'involution  $\tau$  se prolonge en une involution  $\sigma$  de  $\hat{A}$  ; on note  $X$  le quotient de  $\hat{A}$  par le groupe  $\{1, \sigma\}$ , et  $\pi : \hat{A} \rightarrow X$  la projection.

Proposition VIII.11 : La variété  $X = \hat{A}/\sigma$  est une surface  $K3$  ,  
appelée "surface de Kummer" associée à  $A$  .

Démonstration : Montrons d'abord que  $X$  est lisse. Comme  $\pi$  est étale en dehors des  $E_i$  , il suffit de le vérifier aux points  $\pi(q)$  pour  $q \in E_i$  ,  $1 \leq i \leq 16$  . En écrivant  $A$  sous la forme  $V/\Gamma$  (V.11), on obtient des coordonnées locales  $(x,y)$  sur  $A$  au voisinage de  $p_i$  telles que :  
$$\tau^* x = -x \quad \tau^* y = -y .$$
 Posons  $x' = \varepsilon^* x$  ,  $y' = \varepsilon^* y$  . On peut supposer que  $x'$  et  $t = \frac{y'}{x'}$  forment un système de coordonnées locales sur  $\hat{A}$  en  $q$  . On a  $\sigma^* x' = -x'$  et  $\sigma^* t = \frac{-y'}{-x'} = t$  , de sorte que  $t$  et  $u = x'^2$  forment un système de coordonnées locales sur  $X$  en  $\pi(q)$  : par suite  $X$  est lisse.

Calculons le diviseur canonique de  $X$  . Il existe une 2-forme holomorphe  $\omega$  partout  $\neq 0$  sur  $A$  ; si  $A = V/\Gamma$  et si  $x,y$  sont des coordonnées sur  $V$  , on a à un facteur constant près  $\omega = dx \wedge dy$  , d'où  $\tau^* \omega = \omega$  . La 2-forme  $\varepsilon^* \omega$  est donc stable par  $\sigma$  ; il résulte alors du lemme VI.11 que l'on a  $\varepsilon^* \omega = \pi^* \alpha$  , où  $\alpha$  est une 2-forme méromorphe sur  $X$  . Il est clair que le diviseur de  $\alpha$  est concentré sur les  $E_i$  . Soit  $q$  un point de  $E_i$  ; avec les notations précédentes, on obtient au voisinage de  $q$  :

$$\varepsilon^* \omega = dx' \wedge dy' = dx' \wedge d(tx') = x' dx' \wedge dt = \frac{1}{2} du \wedge dt .$$

Par suite  $\alpha$  est holomorphe  $\neq 0$  en  $q$  , ce qui montre que  $\text{div}(\alpha) = 0$  d'où  $K_X \equiv 0$  .

Enfin s'il existait une 1-forme holomorphe  $\neq 0$  sur  $X$  , on en déduirait une 1-forme sur  $\hat{A}$  invariante par  $\sigma$  . Comme  $\varepsilon^* : H^0(A, \Omega_A^1) \rightarrow H^0(\hat{A}, \Omega_{\hat{A}}^1)$  est un isomorphisme (III.20), on en déduirait encore une 1-forme  $\neq 0$  sur  $A$  invariante par  $\tau$  , ce qui est impossible puisque  $H^0(A, \Omega_A^1)$  admet pour base  $dx, dy$  . Ainsi  $q(X) = 0$  et  $X$  est une surface  $K3$  .

Remarques VIII.12 :

1) On peut considérer aussi la surface singulière  $X' = A/\tau$  ; elle admet 16 points doubles ordinaires  $r_i$ , qui sont les images des  $p_i$ . On déduit de  $\epsilon$  un morphisme  $X \rightarrow X'$ , qui est un isomorphisme en dehors des  $E_i$  et contracte  $E_i$  sur  $r_i$ .

2) Supposons que  $A$  soit la jacobienne d'une courbe  $C$  de genre 2. Il existe alors un plongement de  $C$  dans  $A$  tel que  $\tau(C) = C$  (si  $r$  est un point de Weierstrass de  $C$ , i.e.  $2r \equiv K_C$ , on peut prendre le morphisme  $x \mapsto [x] - [r]$ ). On montre facilement (exercice 4) que le système  $|2C|$  définit un morphisme  $k: A \rightarrow \mathbb{P}^3$ , qui passe au quotient par  $\tau$  et définit un plongement de  $X'$  dans  $\mathbb{P}^3$ . Comme  $(2C)^2 = 8$ , l'image est une surface de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3$  admettant 16 points doubles ordinaires. C'est cette surface qu'on appelle classiquement la surface de Kummer (cf. exercices 4 à 9).

3) Les  $E_i$  ( $1 \ll i \ll 16$ ) forment un système orthogonal dans  $\text{Pic}(X) = \text{NS}(X)$  ; comme  $\text{Pic}(X)$  contient de plus la classe d'une section hyperplane, on voit que le rang (sur  $\mathbb{Z}$ ) du groupe  $\text{Pic}(X)$  est  $\gg 17$ . On peut montrer que le rang du groupe de Picard de n'importe quelle surface K3 est  $\ll 20$ .

Nous allons maintenant étudier les systèmes linéaires sur une surface K3 et les morphismes dans des espaces projectifs qu'ils définissent.

Proposition VIII.13 : Soient  $S$  une surface K3,  $C$  une courbe lisse de genre  $g$  sur  $S$ .

(i) On a  $C^2 = 2g - 2$  et  $h^0(C) = g + 1$ .

(ii) Si  $g \gg 1$ , le système  $|C|$  est sans points bases, donc définit un morphisme  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^g$ . La restriction de  $\varphi$  à  $C$  est le morphisme canonique  $C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  (défini par le système canonique sur  $C$ ).

(iii) Si  $g = 2$ ,  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$  est un morphisme de degré 2, dont le lieu de ramification est une sextique dans  $\mathbb{P}^2$ .

(iv) Supposons  $g \gg 3$  . Alors :

- ou bien  $\varphi$  est un morphisme birationnel, et une courbe générique de  
 $|C|$  n'est pas hyperelliptique ;

- ou bien  $\varphi$  est un morphisme de degré 2 sur une surface rationnelle  
(non nécessairement lisse) de degré  $(g-1)$  dans  $\mathbb{P}^g$  . Une courbe générique de  
 $|C|$  est alors hyperelliptique.

(v) Si  $g \gg 3$  (resp.  $g=2$ ), le morphisme  $\varphi'$  défini par le  
système  $|2C|$  (resp.  $|3C|$ ) est birationnel.

Démonstration : (i) La formule du genre donne  $C^2 = 2g-2$  ; compte tenu de Riemann-Roch, la seconde égalité équivaut à  $h^1(C) = 0$  , ou encore à  $h^1(-C) = 0$  puisque  $K \equiv 0$  . Mais ceci résulte aussitôt de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0 .$$

(ii) Comme  $K \equiv 0$  et  $\mathcal{O}_S(K+C)|_C \cong \omega_C$  (I.16.2), on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \rightarrow \omega_C \rightarrow 0$$

qui montre que le système  $|C|$  découpe sur  $C$  le système complet  $|\omega_C|$  .

Comme celui-ci est sans points bases sur  $C$  , on en déduit que  $|C|$  n'a pas de points bases. La dernière assertion de (ii) est claire.

(iii) Si  $g=2$  , on a  $C^2=2$  donc  $\varphi$  est de degré 2. Notons  $\Delta$  la courbe de ramification de  $\varphi$  , n son degré. On a  $C = \varphi^{-1}(\ell)$ , où  $\ell = \varphi(C)$  est une droite de  $\mathbb{P}^2$  ;  $C$  est donc un revêtement double de  $\ell$  , ramifié le long des  $n$  points d'intersection de  $\ell \cap \Delta$  . Comme  $g(C) = 2$  , on a  $n=6$  .

(iv) Si  $C$  n'est pas hyperelliptique, la restriction de  $\varphi$  à  $C$  est un plongement ; comme  $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C$  , ceci implique que  $\varphi$  est birationnel.

Si  $\varphi$  n'est pas birationnel, toute courbe lisse de  $|C|$  est donc hyperelliptique ; il en résulte que  $\varphi^{-1}(x)$  se compose de 2 points pour  $x$  générique dans  $S$ , donc que  $\varphi$  est de degré 2. Comme  $C^2 = 2g-2$ , l'image de  $\varphi$  est une surface  $\Sigma$  de degré  $(g-1)$  dans  $\mathbb{P}^g$ , non nécessairement lisse, dont les sections hyperplanes sont les courbes rationnelles  $\varphi(C)$  ; cela entraîne aussitôt que  $\Sigma$  est rationnelle.

(v) La restriction de  $\varphi'$  à  $C$  est le morphisme bicanonique (resp. tricanonique), qui est un plongement ; cela entraîne comme précédemment que  $\varphi'$  est birationnel.

Le lecteur savant remarquera que la démonstration marche tout aussi bien lorsqu'on suppose simplement  $C$  irréductible, en appliquant la dualité pour les courbes singulières.

Exemples VIII.14 : Nous nous bornerons au cas où  $\varphi$  est birationnel ; nous renvoyons à l'exercice 10 pour le cas hyperelliptique.

- Si  $g=3$ ,  $\varphi(S)$  est une quartique dans  $\mathbb{P}^3$ .
- Si  $g=4$ ,  $\varphi(S)$  est une surface de degré 6 dans  $\mathbb{P}^4$ . Comme  $h^0(S, \mathcal{O}_S(2C)) = 14$  par (i) et que  $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)) = 15$ ,  $\varphi(S)$  est contenue dans une quadrique ; comme  $h^0(S, \mathcal{O}_S(3C)) = 29$  et  $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(3)) = 35$ , on conclut que  $\varphi(S)$  est une intersection complète  $S_{2,3}$ .
- Si  $g=5$ ,  $\varphi(S)$  est une surface de degré 8 dans  $\mathbb{P}^4$ , contenue dans 3 quadriques linéairement indépendantes. On montre (exercice 11) que dans la situation générique  $\varphi(S)$  est intersection complète de ces 3 quadriques.

Nous n'avons pas précisé la nature du morphisme birationnel  $\varphi$  ; on peut montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme en dehors de certains diviseurs, et qu'il contracte ces diviseurs sur des points singuliers de  $\varphi(S)$  d'un type très particulier, appelés singularités rationnelles.



Nous avons donc obtenu la structure des surfaces K3 de degré  $2g-2$  dans  $\mathbb{P}^g$ , pour  $g=3,4,5$ ; il existe de telles surfaces pour  $g$  arbitraire, comme le montre la proposition suivante :

Proposition VIII.15 : Pour tout  $g \geq 3$ , il existe des surfaces K3 de degré  $(2g-2)$  dans  $\mathbb{P}^g$ .

Démonstration : Compte tenu de VIII.13 (i), il suffit de construire des surfaces K3  $S$  contenant un diviseur très ample  $D$  avec  $D^2 = 2g-2$  (un diviseur  $D$  est dit très ample si le système  $|D|$  définit un plongement de la surface  $S$  dans  $|D|^\vee$ ). Remarquons que si  $H$  est une section hyperplane de  $S$  et  $|E|$  un système linéaire sans point base, le diviseur  $H+E$  est très ample : en effet si  $x$  et  $y$  sont deux points distincts de  $S$ , il existe un diviseur  $E_0 \in |E|$  ne passant ni par  $x$  ni par  $y$ , et  $H_0 \in |H|$  passant par  $x$  et non par  $y$ . Ainsi le système linéaire  $|H+E|$  sépare les points, et le même raisonnement montre qu'il sépare les tangentes.

Distinguons maintenant 3 cas :

- Si  $g = 3k$  ( $k \geq 1$ ), prenons pour  $S$  une quartique contenant une droite  $\ell$ , et pour  $|E|$  le pinceau de courbes elliptiques  $|H-\ell|$ ; le diviseur  $D_k = H + (k-1)E$  est très ample et vérifie :

$$D_k^2 = 4 + 6(k-1) = 2g-2.$$

- Si  $g = 3k+1$  ( $k \geq 1$ ), soit  $Q$  une quadrique de  $\mathbb{P}^4$  admettant un point double ordinaire (i.e. un cône sur une quadrique non-singulière de  $\mathbb{P}^3$ ), et soit  $V$  une cubique dans  $\mathbb{P}^4$  telle que  $S = Q \cap V$  soit lisse de dimension 2. Considérons un des deux pinceaux de plans contenus dans  $Q$ ; il découpe sur  $V$  un pinceau de courbes elliptiques  $|E|$ . Le diviseur  $D_k = H + (k-1)E$  sur  $S$  est très ample et vérifie :

$$D_k^2 = 6 + 6(k-1) = 2g-2.$$

- Si  $g = 3k + 2$  ( $k \geq 1$ ), on considère une quartique lisse dans  $\mathbb{P}^3$  contenant une droite  $\ell$  et une cubique gauche  $t$  disjointes (par exemple la quartique d'équation :  $Y^3(X+T) + Z^3(T-X) - XT(X^2+T^2) = 0$  est lisse et contient la droite  $X=T=0$  ainsi que la cubique gauche d'équations paramétriques  $X=U^3$ ,  $Y=U^2V$ ,  $Z=UV^2$ ,  $T=V^3$ ). On pose  $E=H-\ell$  et  $H'=2H-t$ . Comme  $H'^2=2$ , le système  $|H'|$  définit un morphisme  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ , de degré 2 (VIII.13 iii) ; pour  $u \in \mathbb{P}^2$ , les points de  $\pi^{-1}(u)$  sont la trace sur  $S$  de l'intersection résiduelle de deux quadriques contenant  $t$ , c'est-à-dire d'une bisécante à  $t$  : les couples de points identifiés par  $\pi$  sont donc les couples  $(x,y)$  tels que la droite  $\langle x,y \rangle$  soit bisécante à  $t$ . Pour montrer que le diviseur  $H'+E$  est très ample, il suffit de vérifier qu'il n'existe pas de diviseur  $E_0$  du pinceau  $|E|$  contenant un tel couple. Mais dans ce cas la droite  $\langle x,y \rangle$  recouperait  $S$  en deux points situés sur  $t$ , donc aussi sur  $E_0$  ; par suite si  $x,y \in E_0$ , la droite  $\langle x,y \rangle$  devrait être contenue dans  $E_0$ , donc dans  $S$ . Or on vérifie par le calcul que ceci ne peut se produire dans l'exemple donné.

Ainsi le diviseur  $D_k = H' + kE$  est très ample pour  $k \geq 1$  ; on a :

$$D_k^2 = 2 + 6k = 2g - 2,$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

Remarque VIII.16 : Pour  $g = 3, 4, 5$ , nous avons vu que les surfaces  $K3$  de degré  $2g-2$  dans  $\mathbb{P}^g$  forment une famille irréductible, c'est-à-dire paramétrée par une variété  $T_g$  irréductible : par exemple  $T_3$  est un ouvert de l'espace projectif  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|$ . Pour de plus grandes valeurs de  $g$  on peut avoir plusieurs familles irréductibles.

Il est instructif de "compter les modules" des surfaces  $K3$  dans  $\mathbb{P}^g$ , de la manière tout-à-fait heuristique suivante : le groupe projectif  $PGL(g+1)$  opère sur  $T_g$  ; on peut montrer que le stabilisateur d'un point est fini (cf. exercice 3, chapitre V). Il est donc naturel de prendre comme nombre de modules le nombre

$m_g = \dim(T_g) - \dim(PGL(g+1))$ . Pour  $g=2$ , les surfaces qu'on obtient sont les revêtements doubles de  $\mathbb{P}^2$  ramifiés le long d'une sextique ; comme les sextiques de  $\mathbb{P}^2$  dépendent de 27 paramètres, on trouve  $m_2 = 19$ . Pour  $g=3$ , on aura  $m_3 = \binom{4+3}{3} - 1 - 15 = 19$  ; on obtient de manière analogue  $m_4 = m_5 = 19$ .

Ce calcul heuristique se justifie par la théorie des déformations. Nous nous contenterons ici d'une brève indication, renvoyant par exemple au chapitre 9 de [Ch 2] pour des précisions et des démonstrations. Toute variété analytique compacte  $X$  admet un "espace de modules local" qui paramètre les petites déformations de la variété. Si  $H^2(X, T_X) = (0)$ , cet espace est lisse, de dimension  $h^1(T_X)$ .

Dans le cas d'une surface  $K3$ , on a  $H^2(X, T_X) \cong H^0(X, \Omega_X^1)^\vee$  par dualité, et  $h^1(T_X) = h^1(\Omega_X^1) = b_2 - 2p_g = 20$  (par théorie de Hodge). L'espace des modules local de  $X$  est donc de dimension 20. La différence avec le calcul géométrique provient du fait qu'une surface obtenue par déformation d'une surface  $K3$  algébrique n'est plus en général algébrique. L'espace des modules local de  $X$  se présente donc comme un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^{20}$  contenant une infinité dénombrable de diviseurs - correspondant aux surfaces  $K3$  algébriques ; la réunion de ces diviseurs est dense dans  $U$ .

Surfaces d'Enriques.

Rappelons d'abord que si  $X$  est une variété et  $L$  un fibré inversible d'ordre 2 dans  $\text{Pic}(X)$  (i.e. tel qu'il existe un isomorphisme  $\alpha : L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$ ), on associe à  $L$  un revêtement étale double  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , caractérisé par le fait que  $\pi^* L \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ . On peut prendre :

$$\tilde{X} = \{s \in L, \alpha(s^{\otimes 2}) = 1\},$$

le revêtement  $\pi$  étant défini par la projection de  $L$  sur  $X$ . En associant au point  $s$  de  $\tilde{X} \subset L$  le point  $(s, s)$  de  $\tilde{X} \times_X L = \pi^* L$  on définit une section partout non nulle de  $\pi^* L$ , qui est donc trivial.

Proposition VIII.17 : Soient  $S$  une surface d'Enriques,  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  le revêtement étale double associé au fibré d'ordre deux  $\mathcal{O}_S(K)$ . Alors  $\tilde{S}$  est une surface  $K3$ .

Inversement, le quotient d'une surface  $K3$  par une involution sans points fixes est une surface d'Enriques.

Démonstration : On a  $K_{\tilde{S}} \equiv \pi^* K_S \equiv 0$  d'après ce qui précède. Comme  $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2$  (VI.3), on obtient  $q(\tilde{S}) = 0$ , donc  $\tilde{S}$  est une surface  $K3$ .

Inversement soit  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  un revêtement étale double,  $\tilde{S}$  étant une surface  $K3$ . Comme  $\pi^* K_S \equiv K_{\tilde{S}} \equiv 0$ , on voit que  $2K_S \equiv \pi_* \pi^* K_S \equiv 0$ ; on a de plus  $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ , ce qui suffit à montrer que  $S$  est une surface d'Enriques (théorème VIII.2).

Les surfaces d'Enriques correspondent donc de manière bijective aux surfaces  $K3$  munies d'une involution sans points fixes. Voici quelques exemples de telles involutions.

Exemple VIII.18 Considérons dans  $\mathbb{P}^5$  la variété  $X$  définie par les trois équations :

$$Q_i(X_0, X_1, X_2) + Q'_i(X_3, X_4, X_5) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

les  $Q_i$  et  $Q'_i$  étant des formes quadratiques en 3 variables.

Nous supposons que  $X$  est une surface lisse - c'est le cas pour un choix générique des  $Q_i, Q'_i$ . Alors  $X$  est une surface K3 (VIII.8). L'involution  $\sigma$  de  $\mathbb{P}^5$  définie par  $\sigma(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (X_0, X_1, X_2, -X_3, -X_4, -X_5)$  préserve  $X$ ; ses points fixes forment les deux plans  $X_0 = X_1 = X_2 = 0, X_3 = X_4 = X_5 = 0$ . On supposera que les 3 coniques  $Q_1, Q_2, Q_3$  (resp.  $Q'_1, Q'_2, Q'_3$ ) n'ont pas de point commun - ce qui est le cas génériquement. Dans ces conditions  $\sigma$  opère sur  $X$  sans point fixe, et le quotient  $X/\sigma$  est donc une surface d'Enriques. On peut montrer qu'on obtient ainsi la surface d'Enriques la plus générale.

Exemple VIII.19 (congruence de Reye).

Soit  $P$  un système linéaire de dimension (projective) 3 de quadriques de  $\mathbb{P}^3$ . Nous faisons sur  $P$  les deux hypothèses suivantes, qui sont vérifiées lorsque  $P$  est assez général :

$$H_1) \bigcap_{Q \in P} Q = \emptyset.$$

$H_2)$  Si  $\ell$  est une droite singulière pour une quadrique  $Q$  de  $P$ ,  $Q$  est la seule quadrique de  $P$  contenant  $\ell$ .

Une droite de  $\mathbb{P}^3$  impose en général 3 conditions linéaires à une quadrique pour la contenir; elle est donc contenue (en général) dans une seule quadrique de  $P$ . On note  $S$  la variété des droites de  $\mathbb{P}^3$  qui sont contenues dans un pinceau de quadriques de  $P$ .

Proposition VIII.19 :  $S$  est une surface d'Enriques.

Démonstration : Notons  $X$  la sous-variété de  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$  formée des couples  $(x, y)$  tels que  $x$  et  $y$  soient conjugués par rapport à toutes les quadriques de  $P$ . Si  $(x, y) \in X$  on a  $x \neq y$ , sans quoi  $x$  appartiendrait à toutes les quadriques de  $P$ . Par suite l'involution  $\sigma$  de  $X$  définie par  $\sigma(x, y) = (y, x)$  ne fixe aucun point de  $X$ .

Si  $(x, y) \in X$ , les quadriques de  $P$  passant par  $x$  et  $y$  contiennent la droite  $\langle x, y \rangle$ ; celle-ci appartient donc à  $S$ . Inversement soit  $\ell$  une droite de  $S$ ; le système  $P$  induit sur  $\ell$  un pinceau de quadriques (de dimension zéro), et il y a exactement un couple de points conjugués par rapport à toutes les quadriques de ce pinceau. Par suite l'application  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  induit un isomorphisme de  $X/\sigma$  sur  $S$ . Il suffit donc de démontrer que  $X$  est une surface K3.

Soient  $Q_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) quatre quadriques engendrant  $P$ ,  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) les formes bilinéaires associées. La variété  $X$  est définie dans  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$  par les 4 équations  $\varphi_i(x, y) = 0$ . On vérifie aussitôt par le critère jacobien que  $X$  est lisse de dimension 2 au point  $(x, y)$  si et seulement si la droite  $\langle x, y \rangle$  n'est pas droite singulière d'une quadrique de  $P$ ; or cette éventualité est exclue par l'hypothèse  $H_2$ . Donc  $X$  est une surface, intersection complète dans  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$  de quatre diviseurs de bidegré  $(1, 1)$ . On voit alors que  $X$  est une surface K3 comme dans le cas des intersections complètes ordinaires: l'argument de IV.11 montre que  $K_X \equiv 0$ , et celui de VIII.9 que  $q(X) = 0$ .

Les surfaces d'Enriques construites de cette façon ne sont pas les plus générales (cf. exercice 13).

Mentionnons enfin (sans démonstration, cf. exercice 15) l'exemple original d'Enriques: soit  $S$  une surface de degré 6 dans  $\mathbb{P}^3$ , admettant comme droites doubles les 6 arêtes d'un tétraèdre (et n'ayant pas d'autres singularités). Alors la normalisée de  $S$  est une surface d'Enriques.

Note historique

Le théorème VIII.2 est contenu dans l'article d'Enriques déjà cité ([E4], 1914). Le fait que certaines surfaces de degré  $(2g-2)$  dans  $\mathbb{P}^g$  vérifient  $K \equiv 0$ ,  $q=0$ , et admettent par conséquent pour sections hyperplanes des courbes canoniques de genre  $g$ , est remarqué dès les débuts de la géométrie birationnelle (cf. par exemple [E6], III.6) ; Enriques ([E5]) montre plus tard que de telles surfaces existent pour tout  $g$  et qu'elles dépendent au moins de 19 "modules" ; Severi indique peu après que le nombre de modules est précisément 19 ([Se3]). La théorie des modules des surfaces  $K3$  a été considérablement clarifiée (et approfondie) récemment, en particulier par le "théorème de Torelli" ([Ch-P]).

C'est pour donner un exemple de surface non rationnelle avec  $p_g=q=0$  qu'Enriques introduit la sextique passant doublement par les 6 arêtes d'un tétraèdre (1894, cf. [C2]). Il revient en 1906 à ces surfaces et en donne une étude très complète ([E7]) ; il démontre que toute surface avec  $P_2=1$ ,  $P_3=q=0$  est isomorphe à une surface du type précédent, et aussi qu'elle contient un pinceau de courbes elliptiques.

Exercices

1) Soit  $S$  une surface minimale avec  $p_g = 1$ ,  $q = 2$ , telle qu'il existe un morphisme surjectif de  $S$  sur une courbe de genre  $\geq 1$ .

Montrer que :

- ou bien  $S$  est une surface abélienne ;
- ou bien  $P_2 > 1$ .

(On a  $S = (B \times F)/G$  par l'exercice 4 du chapitre VI, avec  $B$  elliptique ; traiter les 2 cas  $B/G$  elliptique,  $B/G$  rationnelle).

2) Soit  $S$  une surface minimale avec  $P_2 = 1$ ,  $q = 2$ . Montrer que  $S$  est une surface abélienne.

(Il résulte du théorème 4 du chapitre X que ces conditions entraînent  $p_g = 1$ ,  $K^2 = \chi_{\text{top}} = 0$ . En reprenant la démonstration VIII.6, montrer que si  $S$  n'est pas abélienne, il existe un morphisme surjectif de  $S$  sur une courbe de genre  $\geq 1$  ; conclure avec l'exercice 1).

3) Soit  $S$  une surface minimale. En reprenant la démonstration du théorème VIII.2, vérifier les assertions suivantes :

- $p_g = 0$ ,  $q = 0$ ,  $P_6 = 1 \implies S$  est une surface d'Enriques.
- $p_g = 0$ ,  $q = 1$ ,  $P_{12} = 1 \implies S$  est une surface bielliptique  
(cf. exercice 3, chapitre VI).
- $p_g = 1$ ,  $q = 0$ ,  $P_2 = 1 \implies S$  est une surface  $K3$ .
- $p_g = 1$ ,  $q = 1$ ,  $P_2 = 1$  impossible.
- $p_g = 1$ ,  $q = 2$ ,  $P_2 = 1 \implies S$  est une surface abélienne  
(exercice 2).

En conclure que la condition  $\chi = 0$  équivaut à  $P_{12} = 1$ .

4) Soient  $C$  une courbe de genre 2,  $J_C$  sa jacobienne. Si  $r$  est un point de Weierstrass de  $C$ , on pose  $\Theta = \{[x] - [r], x \in C\} \subset J_C$



(cf. 12.2). Montrer que le système  $|2\Theta|$  définit un morphisme de degré 2 de  $JC$  dans  $\mathbb{P}^3$ , qui donne par passage au quotient un isomorphisme de  $JC/\pi$  sur une quartique  $S \subset \mathbb{P}^3$  admettant 16 points doubles ordinaires. Montrer que  $r\Theta$  est très ample pour  $r \gg 3$ .

(On rappelle que l'application  $\theta$  de  $JC$  dans  $\text{Pic}^0(JC)$  - groupe des classes de diviseur algébriquement équivalents à zéro sur  $JC$  -, définie par  $\theta(a) = \Theta_a - \Theta$ , avec  $\Theta_a = a + \Theta$ , est un isomorphisme de groupes ; en particulier on a  $\Theta_a + \Theta_{-a} \equiv 2\Theta$  pour tout  $a \in JC$ ).

Dans les exercices qui suivent, on appelle surface de Kummer la quartique  $S \subset \mathbb{P}^3$  qui vient d'être construite.

5) Montrer qu'il existe 16 plans coupant  $S$  suivant une conique double. Chaque conique contient 6 des points doubles de  $S$ , et chaque point double est situé sur 6 des coniques. Le revêtement double d'une quelconque des 16 coniques, ramifié le long des 6 points doubles de  $S$  qu'elle contient, est isomorphe à  $C$ .

(On pourra remarquer que si l'on désigne par  $JC_2$  le groupe des points d'ordre 2 de  $JC$ , et par  $q$  la fonction égale à 0 sur  $JC_2 \cap \Theta$  et à 1 sur  $JC_2 - \Theta$ , alors  $q$  est une forme quadratique sur  $JC_2$ ).

6) En projetant la surface de Kummer  $S \subset \mathbb{P}^3$  depuis un de ses points doubles, on obtient un revêtement double (ramifié) de  $\mathbb{P}^2$ . Montrer que le lieu de ramification est réunion de 6 droites tangentes à une même conique  $Q$ ; le revêtement double de  $Q$  ramifié le long des 6 points de contact est isomorphe à  $C$ . En déduire que toute surface de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3$  admettant 16 points doubles ordinaires est une surface de Kummer.

7) Soient  $p_1, \dots, p_6$  six points de  $\mathbb{P}^3$ , tels que le système  $P$  des quadriques passant par  $p_1, \dots, p_6$  soit de dimension 3. On considère les variétés suivantes :

$$\Delta = \{\text{quadriques de } P \text{ singulières}\} \subset P$$

$$W = \{x \in \mathbb{P}^3, \exists Q \in P, x \in \text{Sing}(Q)\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Montrer que  $\Delta$  est la surface de Kummer associée à une jacobienne  $J_C$ , et que  $W$  est birationnellement isomorphe à  $\Delta$ . Il existe une unique cubique gauche  $t$  passant par  $p_1, \dots, p_6$ ; montrer que le revêtement double de  $t$  ramifié aux  $p_i$  est isomorphe à  $C$ .

(Les 16 points doubles de  $\Delta$  correspondent aux 10 quadriques de rang 2 et aux 6 quadriques ayant pour point singulier  $p_1, \dots, p_6$ . Remarquer que ces 6 quadriques appartiennent au système (de dimension 2) des quadriques de  $P$  contenant  $t$ ).

8) Si l'on représente une droite de  $\mathbb{P}^3$  par ses coordonnées plückeriennes  $A, B, C, L, M, N$ , la variété des droites de  $\mathbb{P}^3$  s'identifie à la quadrique  $G$  dans  $\mathbb{P}^5$  d'équation  $AL + BM + CN = 0$ . Soit  $Q$  une autre quadrique de  $\mathbb{P}^5$ , telle que  $Q \cap G$  soit lisse; on dit que  $Q \cap G \subset G$  est un complexe quadratique de droites. A tout point  $x \in \mathbb{P}^3$  on associe le cône  $C_x$  des droites du complexe passant par  $x$ ; soit  $S = \{x \in \mathbb{P}^3, \text{rg}(C_x) \leq 2\}$ . Montrer que  $S$  est une surface de Kummer. En déduire que la variété des droites contenues dans une intersection complète lisse de 2 quadriques de  $\mathbb{P}^5$  est la jacobienne d'une courbe de genre 2.

(On peut - à la suite de F. Klein - raisonner dans la direction indiquée; il est peut-être plus simple de prouver d'abord la seconde assertion).

9) On note  $\varepsilon: \hat{A} \rightarrow J_C$  l'éclatement des 16 points d'ordre 2 de  $J_C$ ,  $E_1, \dots, E_{16}$  les diviseurs exceptionnels,  $D = 4\varepsilon^* \Theta - \sum_{i=1}^{16} E_i$ . Montrer que le système  $|D|$  définit un morphisme de  $\hat{A}$  dans  $\mathbb{P}^5$ , qui donne par passage au quotient un plongement de  $X = \hat{A}/\sigma$  dans  $\mathbb{P}^5$ ; la surface  $X$  est intersection complète de 3 quadriques dans  $\mathbb{P}^5$ . Notons  $P$  le système linéaire (de dimension 2) des quadriques de  $\mathbb{P}^5$  contenant  $X$ ,

et  $\Delta \subset \mathbb{P}^2$  le lieu des quadriques singulières ; alors  $\Delta$  est réunion de 6 droites tangentes à une même conique, et le revêtement double de cette conique ramifié aux 6 points de contact est isomorphe à  $C$ .

(Remarquer que  $|D|$  contient certains diviseurs de la forme  $\sum_{i=1}^4 \alpha_i$ , avec  $\alpha_i \in \text{JC}_2$ ,  $\sum_i \alpha_i = 0$ ).

10) Montrer que pour tout  $g \geq 2$ , il existe une surface K3  $S$  et une courbe  $C$  sur  $S$  tel que le morphisme défini par  $|C|$  soit un morphisme de degré 2 sur une surface rationnelle dans  $\mathbb{P}^g$ .

(Pour  $g = 2k+1$ , considérer un revêtement double  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ramifié le long d'une courbe lisse de bidegré  $(4,4)$  et prendre  $C \equiv \pi^*(\mathbb{P}^1 \times \{0\}) + k \cdot \pi^*(\{0\} \times \mathbb{P}^1)$ . Pour  $g = 2k$ , considérer de même un revêtement double ramifié de  $\mathbb{P}^2$  éclaté en un point).

11) Soit  $S$  une surface K3 de degré 8 dans  $\mathbb{P}^5$ , qui n'est pas intersection complète de 3 quadriques. Montrer qu'il existe 6 formes linéaires  $A_i, B_j$  sur  $\mathbb{P}^5$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) telle que toute quadrique contenant  $S$  soit donnée par l'équation :  $\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} = 0$ , pour  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ . Montrer qu'il existe 3 formes quadratiques  $P, Q, R$  sur  $\mathbb{P}^5$  telles que  $S$  ait pour équations :

$$A_i B_j - A_j B_i = 0 \quad (1 \leq i < j \leq 3) \quad A_1 P + A_2 Q + A_3 R = 0 \quad B_1 P + B_2 Q + B_3 R = 0 .$$

En déduire que la surface  $S$  est spécialisation d'une intersection complète de 3 quadriques dans  $\mathbb{P}^5$ . Soit  $C$  une section lisse de  $S$  par un hyperplan ; montrer qu'il existe sur  $C$  un  $g_3^1$ , c'est-à-dire un faisceau inversible  $L$  avec  $\deg(L) = 3$ ,  $h^0(L) = 2$ . Inversement si une section hyperplane lisse  $C$  d'une surface K3  $S$  de degré 8 dans  $\mathbb{P}^5$  admet un  $g_3^1$ ,  $S$  n'est pas intersection complète de 3 quadriques.

12) Soit  $S$  une surface K3. Montrer que  $H_1(S, \mathbb{Z}) = H^2(S, \mathbb{Z})_{\text{tors}} = (0)$ . Soit  $X$  une surface d'Enriques. Montrer que

$H_1(X, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$  est le groupe à 2 éléments engendré par  $[K]$ .

13) Construire une variété irréductible  $T$  (resp.  $T'$ ) et un morphisme lisse  $X \rightarrow T$  (resp.  $X' \rightarrow T'$ ) dont les fibres sont des surfaces d'Enriques du type de l'exemple VIII.18 (resp. VIII.19), de façon que toute surface du type considéré soit isomorphe à un nombre fini non nul de fibres. Montrer que  $\dim(T) = 10$ ,  $\dim(T') = 9$ .

14) Avec les notations de l'exemple VIII.19, on considère les variétés :

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\text{quadriques de } P \text{ singulières}\} \subset P \\ W &= \{x \in \mathbb{P}^3, \exists Q \in P, x \in \text{Sing}(Q)\} \subset \mathbb{P}^3. \end{aligned}$$

Montrer que  $\Delta$  est une quartique avec 10 points doubles ordinaires, et que  $W$  est birationnellement isomorphe à  $\Delta$ . Montrer que la projection de  $X \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$  sur chacun des facteurs définit un morphisme birationnel de  $X$  sur  $W$ , qui est un isomorphisme lorsque le système  $P$  est assez général.

15) Soient  $S'$  une surface de degré 6 passant doublement par les 6 arêtes d'un tétraèdre (et lisse en dehors de ces arêtes),  $\pi : S \rightarrow S'$  la normalisation de  $S'$ . Montrer que  $S$  est une surface d'Enriques.

(On montrera que pour une surface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^3$  ayant des singularités ordinaires - i.e. une courbe double  $C$  et des points triples sur  $C$  -, les diviseurs canoniques de la normalisée sont découpés par les surfaces de degré  $(d-4)$  passant par  $C$ . En déduire  $p_g(S) = 0$ ,  $2K_S \equiv 0$ ; si  $\ell_1, \ell_2$  sont deux arêtes opposées du tétraèdre, et  $\tilde{\ell}_1 = \pi^{-1}(\ell_1)$ , montrer que  $\tilde{\ell}_1$  est une courbe elliptique et que  $\tilde{\ell}_1 - \tilde{\ell}_2 \equiv K$ . Pour trouver  $q(S)$ , on peut montrer que  $b_2 \gg 3$  (si  $\ell, \ell', \ell''$  sont les 3 arêtes d'une face du tétraèdre, prouver que  $\tilde{\ell}, \tilde{\ell}', \tilde{\ell}''$  sont linéairement indépendants dans  $NS(S)$ ) et utiliser la formule de Noether).

Montrer que la surface  $S$  dépend de 10 modules.

## CHAPITRE VIII

16) Soient  $C$  une courbe lisse de degré 6 dans  $\mathbb{P}^2$ ,  $S$  le double revêtement de  $\mathbb{P}^2$  ramifié le long de  $C$ ,  $H$  l'image inverse sur  $S$  d'une droite de  $\mathbb{P}^2$ . Montrer qu'une courbe sur  $S$  qui n'appartient à aucun système  $|dH|$  se projette sur une courbe de degré  $n$  dans  $\mathbb{P}^2$  tangente à  $C$  en  $3n$  points. En déduire que pour  $C$  assez générale on a  $\text{Pic}(S) = \mathbb{Z} \cdot [H]$ .

## CHAPITRE IX

### SURFACES AVEC $\kappa = 1$ ET SURFACES ELLIPTIQUES

Lemme IX.1 : Soit S une surface minimale non réglée.

a) Si  $K^2 > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que  $\varphi_{nK}$  soit une application birationnelle de S sur son image pour  $n \gg n_0$ .

b) Si  $K^2 = 0$  et  $P_r \gg 2$ , écrivons  $rK \equiv Z + M$ , où Z est la partie fixe du système  $|rK|$  et M sa partie mobile. Alors :

$$K.Z = K.M = Z^2 = Z.M = M^2 = 0 .$$

Démonstration : a) Soit H une section hyperplane de S (dans un plongement arbitraire). Comme  $K^2 > 0$  le théorème de Riemann-Roch montre que :  $h^0(nK-H) + h^0(H+(1-n)K) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Puisque S est non réglée on a  $K.H > 0$  et donc  $(H+(1-n)K).H < 0$  pour n assez grand ; ceci entraîne que  $h^0(H+(1-n)K)$  est nul pour n grand. Par suite il existe  $n_0$  tel que  $h^0(nK-H) \gg 1$  pour  $n \gg n_0$ . Soit  $E \in |nK-H|$  ; il est clair que le système  $|nK| = |H+E|$  sépare les points de S-E et sépare les tangentes aux points de S-E. La restriction de  $\varphi_{nK}$  à S-E est donc un plongement, ce qui prouve a).

b) Comme  $rK^2 = K.Z + K.M = 0$  et que K.Z et K.M sont positifs, on voit que  $K.Z = K.M = 0$ . Puisque M est mobile, Z.M et  $M^2$  sont positifs ; comme  $rK.M = Z.M + M^2 = 0$ , on en déduit  $Z.M = M^2 = 0$ , et finalement  $Z^2 = (rK-M)^2 = 0$ .

Proposition IX.2 : Soit S une surface minimale avec  $\kappa = 1$ .

a) On a  $K^2 = 0$ .

b) Il existe une courbe lisse B et un morphisme surjectif  $p : S \rightarrow B$  dont la fibre générique est une courbe elliptique.

Démonstration : Le lemme IX.1.a) montre que  $K^2 \ll 0$  ; on a donc  $K^2 = 0$  sans quoi S serait réglée (VI.2). Soit r un entier tel que  $P_r \gg 2$ . Notons Z la partie fixe du système  $|rK|$ , M sa partie mobile, de sorte que  $rK \equiv Z + M$ . Le lemme IX.1.b) montre que  $M^2 = K.M = 0$ . Il en résulte que  $|M|$  définit un morphisme f de S dans  $\mathbb{P}^N$  dont l'image est une courbe C. Considérons la factorisation de Stein de f (V.17) :

$$f : S \xrightarrow{p} B \longrightarrow C \subset \mathbb{P}^N$$

où p est à fibres connexes. Soit F une fibre de p ; comme M est somme de fibres de p et que  $K.M = 0$ , on a nécessairement  $K.F = 0$ . Par suite  $g(F) = 1$ , de sorte que les fibres lisses de p sont des courbes elliptiques.

Une surface vérifiant l'assertion b) de la proposition est appelée surface elliptique ; la proposition montre donc que les surfaces avec  $\kappa = 1$  sont elliptiques. La réciproque est inexacte, mais on peut énoncer :

Proposition IX.3 : Soit S une surface elliptique minimale,  $p : S \rightarrow B$  la fibration elliptique ; pour  $b \in B$ , on pose  $F_b = p^*[b]$ .

a) On a  $K_S^2 = 0$ .

b) S est soit une surface réglée de base elliptique, soit une surface avec  $\kappa = 0$ , soit une surface avec  $\kappa = 1$ .

c) Si  $\kappa(S) = 1$ , il existe un entier  $d > 0$  tel que :

$$dK \equiv \sum_i n_i F_{b_i} \quad , \quad n_i \in \mathbb{N} \quad , \quad b_i \in B \quad .$$

Pour  $r$  assez grand, le système  $|rdK|$  est sans point base et définit un morphisme de  $S$  dans  $\mathbb{P}^N$  qui se factorise en  $f: S \xrightarrow{p} B \xrightarrow{j} \mathbb{P}^N$ , où  $j$  est un plongement de  $B$  dans  $\mathbb{P}^N$ .

Démonstration : Si  $S$  est une surface réglée de base  $C$ , les courbes elliptiques  $F_b$  doivent se projeter surjectivement sur  $C$ , donc  $C$  est elliptique ou rationnelle ; ceci entraîne  $K^2 \gg 0$  (III.21). Par suite on a  $K^2 \gg 0$  pour toute surface elliptique minimale (VI.2).

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que le système  $|nK|$  soit non vide ; soit  $D \in |nK|$ . Comme  $D.F_b = 0$  pour tout  $b$ , les composantes de  $D$  sont contenues dans des fibres de  $p$  ; comme  $K^2 \gg 0$ , le corollaire VIII.4 montre que  $D = \sum_i r_i F_{b_i}$ , avec  $r_i \in \mathbb{Q}$ ,  $r_i \gg 0$ . On en déduit que  $K^2 = D^2 = 0$  dans ce cas.

Soit maintenant  $X$  une surface elliptique minimale telle que  $K_X^2 \gg 0$ . D'après ce qui précède on doit avoir  $|nK_X| = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . Or le théorème de Riemann-Roch entraîne que  $h^0(nK_X) + h^0((1-n)K_X) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  ; on aboutit ainsi à une contradiction, ce qui prouve a).

Soit  $S$  une surface elliptique minimale. Comme  $K.F_b = 0$ , les applications  $\varphi_{nK}$  contractent les fibres  $F_b$  ; il en résulte que l'image de  $\varphi_{nK}$  est de dimension  $\ll 1$ , donc que  $\kappa = 0, 1$  ou  $-\infty$ . Ceci prouve b).

Enfin si  $\kappa = 1$ , choisissons un entier  $n$  tel que  $P_n \gg 1$ , et soit  $D \in |nK|$  ; on a  $D = \sum_i r_i F_{b_i}$ , avec  $r_i \in \mathbb{Q}$ ,  $r_i \gg 0$ . Ecrivons  $r_i = \frac{n_i}{m}$  (avec  $n_i, m \in \mathbb{N}$ ) et posons  $d = mr$  ; alors  $dK \equiv \sum_i n_i F_{b_i} = p^* A$ , avec  $A = \sum_i n_i [b_i]$ . Pour  $r$  assez grand, le système  $|rA|$  sur  $B$  n'a pas de point base et définit un plongement  $j$  de  $B$  dans  $\mathbb{P}^N$  ; il en résulte que le système  $|rdK| = p^* |rA|$  est sans point base et définit le morphisme  $f = j \circ p$  de  $S$  dans  $\mathbb{P}^N$ . Ceci prouve c).



Exemples IX.4 : Donnons d'abord des exemples de surfaces elliptiques avec  $\kappa \neq 1$  :

1) La surface réglée  $E \times \mathbb{P}^1$  est évidemment elliptique ; plus généralement, si  $G$  est un groupe de translations de  $E$  opérant sur  $\mathbb{P}^1$ , la surface réglée  $(E \times \mathbb{P}^1)/G$  est elliptique (cf. exercice 3).

2) Les surfaces bielliptiques sont évidemment elliptiques : elles admettent même deux fibrations elliptiques distinctes.

3) Une surface abélienne  $A$  est une surface elliptique si et seulement si il existe une suite exacte :  $0 \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow 0$ , où  $E$  et  $F$  sont des courbes elliptiques.

4) On a déjà vu au cours de la démonstration de VIII.15 des surfaces K3 elliptiques : quartiques contenant une droite, intersection complète  $(2,3) \subset \mathbb{P}^4$  dans le cas où la quadrique est singulière, etc... On peut montrer que dans la variété  $T_g$  qui paramètre l'ensemble des surfaces K3 de degré  $(2g-2)$  dans  $\mathbb{P}^g$ , le lieu des surfaces elliptiques est un diviseur (très réductible !).

5) Enriques a montré que toute surface d'Enriques est elliptique (exercice 7). Nous nous contenterons ici de montrer cette propriété sur un exemple.

Considérons la surface  $X/\sigma$ , où  $X$  est la surface K3 définie dans  $\mathbb{P}^5$  par les équations  $P_i = Q_i(X_0, X_1, X_2) + Q'_i(X_3, X_4, X_5) = 0$  ( $1 \leq i \leq 3$ ), et  $\sigma$  l'involution  $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mapsto (X_0, X_1, X_2, -X_3, -X_4, -X_5)$  (VIII.18). Il existe 9 points  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{P}^2$  tels que les coniques  $\lambda Q_1 + \mu Q_2 + \nu Q_3$  et  $\lambda Q'_1 + \mu Q'_2 + \nu Q'_3$  soient singulières ; les quadriques de  $\mathbb{P}^5$  correspondantes  $\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$  sont alors de rang 4, donc contiennent deux pincesaux de sous-espaces linéaires  $\mathbb{P}^3$ . Supposons par exemple que  $P_1$  soit une de ces quadriques de rang 4 ; choisissons un pinceau  $(L_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  de sous-espaces  $\mathbb{P}^3$  contenus dans  $P_1$ . Comme  $L_t \cap X = L_t \cap P_2 \cap P_3$ , le pinceau  $(L_t)$  découpe sur  $X$  un pinceau de

courbes  $(C_t)$  intersections complètes de 2 quadriques dans  $\mathbb{P}^3$  ; par suite la courbe  $C_t$  générique est une courbe elliptique. L'involution  $\sigma$  préserve les pincesaux  $L_t$  et  $C_t$  (i.e. on a  $\sigma(C_t) = C_t$ , avec  $t' \in \mathbb{P}^1$ ) ; il en résulte que la projection des  $C_t$  sur la surface d'Enriques  $X/\sigma$  définit un pinceau de courbes elliptiques sur cette surface.

Il est très facile de construire des surfaces avec  $\kappa = 1$  ; donnons-en un exemple pour terminer :

Exemple IX.5 : Soient  $B$  une courbe lisse,  $p, q$  les deux projections de  $B \times \mathbb{P}^2$  sur  $B$  et  $\mathbb{P}^2$ ,  $|D|$  un système linéaire sans point base sur  $B$ . Un diviseur générique  $S \in |p^* \mathcal{O}_B(D) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|$  est non-singulier ; la restriction  $p: S \rightarrow B$  est une fibration en cubiques planes, donc en courbes elliptiques. On a  $K_S \cong p^*(K_B + D)$ , de sorte que  $\kappa(S) = 1$  dès que  $\deg(D) > 2 - 2g(B)$ .

#### Note historique

M. Noether remarque très tôt que le système canonique d'une surface peut être composé d'un pinceau, qui est alors nécessairement elliptique ([N1]). Une étude détaillée des surfaces elliptiques se trouve dans [E7] ; nous n'en avons pas exposé ici les principaux résultats - l'existence de la fibration jacobienne associée et la structure du diviseur canonique - car leur justification rigoureuse est assez délicate. La théorie a été mise au point par Kodaira ([K]).

Signalons que l'étude des surfaces elliptiques peut être à la base de la classification des surfaces : c'est le point de vue adopté - en caractéristique  $p$  - par Bombieri et Mumford ([B-M]).

Exercices

1) Soit  $p: S \rightarrow B$  une fibration elliptique,  $P: \text{Alb}(S) \rightarrow \text{JB}$  le morphisme correspondant. Montrer que :

- ou bien  $P$  est un isomorphisme ;

- ou bien toutes les fibres lisses de  $p$  sont isomorphes à une même courbe  $E$ , et on a une suite exacte :  $0 \rightarrow E \rightarrow \text{Alb}(S) \rightarrow \text{JB} \rightarrow 0$ .

En particulier on a  $q(S) = g(B)$  ou  $g(B) + 1$ .

(Remarquer que l'image de  $F_b$  dans  $\text{Alb}(S)$  est indépendante de  $b$ ).

2) Soit  $S$  une surface elliptique,  $p: S \rightarrow B$  la fibration correspondante,  $F = \sum n_i C_i$  une fibre réductible de  $p$ . On note  $M'$  le sous-groupe de  $\text{Pic}(S)$  engendré par les  $C_i$  et on munit  $M = M'/\mathbb{Z} \cdot F$  de la forme quadratique induite par la forme d'intersection. Montrer que les éléments de carré  $-2$  forment un système de racines dans  $M$ , de type  $A_n$ ,  $D_n$  ou  $E_n$ , dont les  $C_i$  sont les racines simples (cf. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Ch. VI). En déduire les configurations possibles pour  $F$ .

3) Soit  $S$  une surface réglée de base une courbe elliptique  $E$ ; on suppose que  $S$  est aussi une surface elliptique. Montrer que  $S = (E \times \mathbb{P}^1)/G$ , où  $G$  est un groupe de translations de  $E$  opérant sur  $\mathbb{P}^1$ .

4) Soient  $S$  une surface d'Enriques,  $E$  une courbe elliptique sur  $S$ . Montrer que :

- ou bien  $h^0(E) = 1$ ; alors  $|2E|$  est un pinceau de courbes elliptiques sans point base ;

- ou bien  $|E|$  est un pinceau de courbes elliptiques sans point base ; la fibration correspondante admet exactement deux fibres

multiples  $E_1$  et  $E_2$ , et on a  $E \equiv 2E_1 \equiv 2E_2$  et  $E_2 - E_1 \equiv K$ .  
 (Remarquer que  $|K+E| \neq \emptyset$  par Riemann-Roch ; si  $h^0(E) = 1$  et si  $E' \in |K+E|$ , on a  $E \cap E' = \emptyset$  d'où  $h^1(-E-E') \gg 1$  et  $h^0(2E) \gg 2$  par Riemann-Roch. Utiliser par ailleurs l'exercice 12 du chapitre VIII).

5) Soit  $S$  la surface d'Enriques associée à une congruence de Reye (exemple VIII.19). Montrer que  $S$  est une surface elliptique.  
 (Montrer que le système de quadriques  $P$  contient 10 quadriques de rang 2. Une telle quadrique est réunion de 2 plans  $L_1, L_2$ ; le système  $P$  induit sur  $L_1$  un réseau de coniques. Montrer que la variété des droites contenues dans une conique de ce réseau est une courbe elliptique, plongée naturellement dans  $S$ ; utiliser l'exercice 4).

6) Soit  $S$  une surface  $K3$ . Montrer que si un diviseur  $D$  sur  $S$  vérifie  $D^2 = 0$  et  $D.C \gg 0$  pour toute courbe rationnelle lisse  $C$ , on a  $D \equiv kE$  où  $E$  est une courbe elliptique (et  $k \gg 1$ ). En déduire qu'une surface  $K3$  est elliptique si et seulement si son groupe de Picard contient un élément non nul de carré nul.

(Si  $D \equiv Z + M$ , où  $Z$  est la partie fixe de  $|D|$ , montrer que  $D.Z = Z.M = M^2 = 0$ , d'où  $Z^2 = 0$  et par suite  $Z = 0$ . Si  $C$  est une courbe rationnelle lisse, on note  $s_C$  la symétrie de Pic(S) définie par  $s_C(D) = D + (C.D)C$ ; soit  $W$  le groupe engendré par les  $s_C$ . Montrer que pour tout diviseur  $D$  vérifiant  $D^2 = 0$ , il existe  $w \in W$  tel que  $C.w(D) \gg 0$  pour toute courbe rationnelle lisse  $C$ ).

7) Montrer que toute surface d'Enriques  $S$  est elliptique.

(En utilisant les propriétés des formes quadratiques, montrer qu'il existe un diviseur  $D$  sur  $S$  tel que  $D^2 = 0$ . Déduire alors de l'exercice 6 que le revêtement double canonique de  $S$  est une surface  $K3$  elliptique ; en conclure que  $S$  est elliptique).

## CHAPITRE X

### SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

Proposition X.1 : Soit  $S$  une surface minimale. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $\kappa(S) = 2$  ;

b)  $K_S^2 > 0$  et  $S$  n'est pas rationnelle ;

c) Il existe un entier  $n_0$  tel que  $\varphi_{nK}$  soit une application birationnelle de  $S$  sur son image pour  $n \geq n_0$ .

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que  $S$  est une surface de type général.

Démonstration : Il est clair que  $c \implies a$ . Soit  $S$  une surface avec  $K^2 = 0$  ; pour tout  $n \geq 1$  la partie mobile  $M$  du système  $|nK|$  vérifie  $M^2 = 0$  (lemme IX.1.b), ce qui entraîne  $\dim \varphi_{nK}(S) \ll 1$  : par suite  $a \implies b$ . Enfin une surface non rationnelle avec  $K^2 > 0$  est non réglée (III.21) ; le lemme IX.1.a montre donc que  $b \implies c$ .

Remarque X.2 : L'assertion c) peut être notablement améliorée. Le système  $|nK|$  est en fait sans point base dès que  $n \geq 4$  ; dès que  $n \geq 5$ , le morphisme  $\varphi_{nK}$  est un isomorphisme en dehors de certaines courbes rationnelles, qui sont contractées sur des points singuliers d'un type très simple ("singularités rationnelles"). On renvoie à [B] pour une étude détaillée de la situation.

Exemples X.3 : On n'a ici que l'embarras du choix :

1) Toutes les surfaces intersections complètes, sauf les  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_{2,2}$ ,  $S_{2,3}$ ,  $S_{2,2,2}$ , sont de type général (VII.5).

2) Tout produit de courbes de genre  $\geq 2$  (plus généralement, toute surface fibrée sur une courbe de genre  $\geq 2$ , avec fibre générique de genre  $\geq 2$ ) est de type général (VII.4).

3) Si  $f: S' \rightarrow S$  est un morphisme surjectif de surfaces, et si  $S$  est de type général, alors  $S'$  est de type général. Cela résulte aussitôt du fait que  $K_{S'} \cong \Delta + f^* K_S$ , avec  $\Delta \geq 0$ .

4) Il est intéressant de noter qu'il existe des surfaces de type général avec  $p_g = q = 0$ . En voici un exemple ("surface de Godeaux") :

Soit  $S'$  la surface dans  $\mathbb{P}^3$  d'équation  $X^5 + Y^5 + Z^5 + T^5 = 0$ , et soit  $\sigma$  l'automorphisme d'ordre 5 de  $S'$  défini par :  $\sigma(X, Y, Z, T) = (X, \zeta Y, \zeta^2 Z, \zeta^3 T)$ , où  $\zeta$  est une racine cinquième primitive de l'unité. Notons  $G$  le groupe cyclique d'ordre 5 engendré par  $\sigma$ . Comme  $\sigma$  ne fixe aucun point de  $S'$ , la surface  $S = S'/G$  est lisse. On a  $q(S') = 0$  et  $K_{S'} \cong H$  (VIII.9 et IV.11), d'où  $p_g(S') = 4$  et  $K_{S'}^2 = 5$ . On en déduit  $q(S) = 0$  et  $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{5} \chi(\mathcal{O}_{S'}) = 1$  (VI.3), d'où  $p_g(S) = 0$ ; de plus on a  $K_S^2 = \frac{1}{5} K_{S'}^2 = 1$ , de sorte que  $S$  est une surface de type général avec  $p_g = q = 0$ ,  $K^2 = 1$ .

Pour d'autres exemples de ce type, cf. exercices 3 et 4.

La diversité de ces exemples indique qu'il n'est pas question de décrire complètement les surfaces de type général. Les questions qui se posent naturellement sont d'un caractère beaucoup plus général : par exemple, trouver quels sont les invariants numériques possibles pour une telle surface. Ce problème est loin d'être résolu ; nous terminerons ce cours avec une inégalité importante, due à Castelnuovo :

Théorème X.4 : Soit S une surface non réglée. On a  $\chi_{\text{top}}(S) \gg 0$  et  $\chi(\mathcal{O}_S) \gg 0$  ; si de plus S est de type général, on a  $\chi(\mathcal{O}_S) \gg 1$  .

Les inégalités sur  $\chi(\mathcal{O}_S)$  résultent bien sûr de la première inégalité et de la formule de Noether. On peut remarquer (nous n'en aurons pas besoin) que le théorème résulte aussitôt de la classification pour les surfaces avec  $\kappa = 0$  , et de la proposition X.10 ci-dessous pour les surfaces elliptiques, de sorte qu'il s'agit bien d'un théorème sur les surfaces de type général.

Nous aurons à utiliser les deux propriétés suivantes :

Rappel X.5 : Soit S une surface.

(i) On a  $b_2 \gg 2p_g$  .

(ii) Si  $\omega$  est une 1-forme holomorphe sur S , on a  $d\omega = 0$  .

La première assertion résulte de la théorie de Hodge, qui donne l'égalité plus précise :  $b_2 = 2p_g + \dim H^1(S, \Omega_S^1)$ . La seconde est beaucoup plus élémentaire : la formule de Stokes montre que :

$$\int_S d\omega \wedge \overline{d\omega} = \int_S d(\omega \wedge \overline{d\omega}) = 0 .$$

Comme  $d\omega$  est une forme de type  $(2,0)$ , ceci entraîne  $d\omega = 0$  .

Lemme X.6 : Soit S une surface vérifiant  $\chi_{\text{top}}(S) \ll 0$  ; il existe un revêtement étale  $S' \rightarrow S$  tel que  $p_g(S') \ll 2q(S') - 4$  .

Démonstration : L'inégalité  $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 4q + b_2 \ll 0$  entraîne  $q(S) \gg 1$  ; il existe donc un revêtement étale connexe  $S' \rightarrow S$  de degré  $m$  arbitraire (cf. V.14.5). Prenons  $m \gg 6$  ; alors  $\chi_{\text{top}}(S') \ll -6$  , d'où compte tenu de X.5 (i) :

$$2 - 4q + 2p_g \ll -6 \quad , \quad \text{i.e.} \quad p_g \ll 2q - 4 .$$

Lemme X.7 : Soient V, W deux espaces vectoriels complexes de dimension finie,  $\varphi : \Lambda^2 V \rightarrow W$  un homomorphisme. Si  $\dim(W) \ll 2 \dim(V) - 4$  ,

il existe deux vecteurs  $v, v'$  de  $V$ , linéairement indépendants, tels que  $\varphi(v \wedge v') = 0$ .

Démonstration : Notons  $C$  le cône dans  $\Lambda^2 V$  formé des vecteurs de la forme  $v \wedge v'$ , et soit  $\tilde{C}$  l'image de  $C$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ . Considérons d'autre part la grassmannienne  $G_2(V)$  des 2-plans de  $V$  ; en associant à un 2-plan  $P$  la droite  $\Lambda^2 P \subset \Lambda^2 V$  on obtient un morphisme  $f$  de  $G_2(V)$  dans  $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ , dont l'image est précisément  $\tilde{C}$ . On vérifie très facilement que  $f$  est un plongement (le "plongement de Plücker"), et que  $\dim G_2(V) = 2(\dim(V)-2)$ . Par suite on a  $\dim(C) = 2\dim(V)-3$ . La conclusion de l'énoncé s'écrit encore  $C \cap \text{Ker}(\varphi) \neq (0)$  ; or la formule des dimensions d'intersection donne :  $\dim(C \cap \text{Ker}(\varphi)) \geq \dim(C) - \text{codim}(\text{Ker}(\varphi)) \geq 2\dim(V) - 3 - \dim(W)$ . L'hypothèse entraîne donc  $\dim(C \cap \text{Ker}(\varphi)) \geq 1$ , d'où le lemme.

Le lemme s'applique à une surface  $S$  en posant  $V = H^0(S, \Omega_S^1)$ ,  $W = H^0(S, \Omega_S^2)$ ,  $\varphi$  étant défini par le cup-produit ; on obtient aussitôt :

Corollaire X.8 : Soit  $S$  une surface telle que  $p_g \leq 2q-4$ . Il existe deux 1-formes  $\omega_1, \omega_2$ , linéairement indépendantes dans  $H^0(S, \Omega_S^1)$ , telles que la 2-forme  $\omega_1 \wedge \omega_2$  soit nulle.

Voici maintenant le point essentiel de la démonstration, dû à Castelnuovo et De Franchis.

Proposition X.9 : Soit  $S$  une surface sur laquelle existent deux 1-formes  $\omega_1, \omega_2$ , linéairement indépendantes dans  $H^0(S, \Omega_S^1)$ , telles que  $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ . Alors il existe une courbe lisse  $B$ , de genre  $\geq 2$ , un morphisme surjectif  $p : S \rightarrow B$ , à fibres connexes, et deux formes  $\alpha_1, \alpha_2 \in H^0(B, \Omega_B^1)$  de façon que  $\omega_i = p^* \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ).



Démonstration : Notons  $K(S)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $S$ . Comme  $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ , on peut écrire  $\omega_2 = g\omega_1$ , avec  $g \in K(S)$ . Ecrivant que  $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$  (X.5 (ii)), on obtient :  $\omega_1 \wedge dg = 0$ , d'où  $\omega_1 = f dg$ , avec  $f \in K(S)$ . La nullité de  $d\omega_1$  donne alors  $df \wedge dg = 0$ , ce qui signifie que les deux éléments  $f, g$  de  $K(S)$  sont algébriquement liés : il existe un polynôme à deux variables  $P$  tel que  $P(f, g) = 0$ . Considérons la courbe  $C$  définie dans  $\mathbb{P}^2$  par l'équation  $P(x, y) = 0$  (rendue homogène). Les fonctions  $f, g$  définissent une application rationnelle  $\varphi : S \dashrightarrow C$ ; par le théorème d'élimination des indéterminations, il existe un morphisme  $\varepsilon : \hat{S} \rightarrow S$ , composé d'éclatements, tel que  $h = \varphi \circ \varepsilon$  soit un morphisme. Considérons la factorisation de Stein de  $h$  (V.17) :

$$h : \hat{S} \xrightarrow{q} B \xrightarrow{u} C$$

la courbe  $B$  est lisse, et les fibres de  $q$  sont connexes. Posons  $\alpha_1 = u^*(xdy)$ ,  $\alpha_2 = u^*(xydy)$ . Ce sont des formes méromorphes sur  $B$ , qui vérifient par construction :  $q^* \alpha_i = \varepsilon^* \omega_i$  ( $i = 1, 2$ ); comme  $q^* \operatorname{div}(\alpha_i) = \operatorname{div}(\varepsilon^* \omega_i)$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont en fait des formes holomorphes sur  $B$ . Comme elles ne peuvent être proportionnelles, on en déduit  $g(B) \gg 2$ . Mais alors les diviseurs exceptionnels sur  $\hat{S}$  contractés par  $\varepsilon$ , qui sont formés de courbes rationnelles, sont contractés par  $q$ ; ceci entraîne que  $q \circ \varepsilon^{-1} = p$  est un morphisme de  $S$  sur  $B$ , qui possède toutes les propriétés de l'énoncé.

Proposition X.10 : Soient  $S$  une surface,  $p : S \rightarrow B$  un morphisme surjectif de  $S$  sur une courbe lisse, à fibres connexes,  $F_\eta$  la fibre générique. Alors  $\chi_{\text{top}}(S) \gg \chi_{\text{top}}(B) \cdot \chi_{\text{top}}(F_\eta)$ .

Démonstration : Rappelons (lemme VI.4) qu'on a l'égalité :

$$\chi_{\text{top}}(S) = \chi_{\text{top}}(B) \cdot \chi_{\text{top}}(F_\eta) + \sum_{s \in \Sigma} (\chi_{\text{top}}(F_s) - \chi_{\text{top}}(F_\eta))$$

où  $\Sigma$  désigne l'ensemble des points de  $B$  au-dessus desquels  $p$

n'est pas lisse. Il suffit donc de montrer que  $\chi_{\text{top}}(F_s) \gg \chi_{\text{top}}(F_\eta)$  pour  $s \in \Sigma$ . Remarquons que puisque  $\chi_{\text{top}}$  augmente par éclatement, on peut supposer que les fibres de  $p$  ne contiennent pas de droite exceptionnelle.

Supposons d'abord  $F_s$  irréductible :  $F_s = nC$ ,  $n \gg 1$ . En utilisant l'inégalité  $\chi_{\text{top}}(C) \gg 2\chi(\mathcal{O}_C)$  (lemme VI.5), on trouve :

$$\chi_{\text{top}}(F_s) = \chi_{\text{top}}(C) \gg -C.K = -\frac{1}{n} F.K = \frac{1}{n} \chi_{\text{top}}(F_\eta) .$$

Si  $g(F_\eta) \gg 1$ , on obtient bien  $\chi_{\text{top}}(F_s) \gg \chi_{\text{top}}(F_\eta)$ ; si  $F_\eta$  est rationnelle, on obtient  $C.K = -\frac{2}{n}$  et  $C^2 = 0$ , d'où nécessairement  $n=1$  et  $\chi_{\text{top}}(F_s) = \chi_{\text{top}}(F_\eta)$ .

Supposons maintenant  $F_s$  réductible,  $F_s = \sum n_i C_i$ ; alors :

$$\chi_{\text{top}}(F_s) = \chi_{\text{top}}(\sum C_i) \gg -(\sum C_i)^2 - (\sum C_i).K .$$

Le corollaire VIII.4 montre que  $(\sum C_i)^2 \ll 0$ , et  $C_i^2 \ll 0$  pour tout  $i$ ; comme  $C_i$  n'est pas exceptionnelle, on en déduit  $C_i.K \gg 0$ , et par suite :

$$\chi_{\text{top}}(F_s) \gg -\sum n_i (C_i.K) = -F_s.K = -F_\eta.K = \chi_{\text{top}}(F_\eta)$$

d'où le résultat.

Fin de la démonstration du théorème X.4 : Soit  $S$  une surface vérifiant  $\chi_{\text{top}}(S) \ll 0$ ; le lemme X.6 montre l'existence d'un revêtement étale  $S' \rightarrow S$  avec  $\chi_{\text{top}}(S') \ll 0$ ,  $p_g(S') \ll 2q(S') - 4$ . Le corollaire X.8 et la proposition X.9 montrent qu'il existe un morphisme surjectif à fibres connexes  $p: S' \rightarrow B$ , avec  $g(B) \gg 2$ . Si  $S'$  était réglée  $S$  le serait également, ce qui est exclu par hypothèse; donc  $g(F_\eta) \gg 1$ . La proposition X.10 donne alors  $\chi_{\text{top}}(S') \gg 0$ , d'où contradiction.

Remarque X.11 : Compte tenu de la formule de Noether, la positivité de  $\chi_{\text{top}}(S)$  équivaut à l'inégalité  $K_S^2 \ll 12 \chi(\mathcal{O}_S)$ . On a en fait l'inégalité  $K^2 \ll 9 \chi(\mathcal{O}_S)$  (pour une surface non réglée) ; ce résultat beaucoup plus profond a été démontré récemment par Bogomolov-Miyaoka, et indépendamment par Yau.

Note historique

Comme on l'a indiqué, les résultats - aussi bien classiques que récents - sur les surfaces de type général sont bien moins complets que ceux qui concernent les surfaces avec  $\kappa \ll 1$ . Parmi les résultats classiques figure l'inégalité de Castelnuovo ([C3]) et celle de Noether ([N1] - cf. exercice 1) ; la structure des applications  $\varphi_{nK}$  est abordée par Enriques dans [E8]. Il montre notamment (en se bornant aux surfaces régulières) que  $\varphi_{2K}$  a pour image une surface (si  $p_g \gg 1$  - cf. exercice 6) et que  $\varphi_{3K}$  est birationnel sauf pour quelques surfaces exceptionnelles ; la démonstration de ce dernier point est toutefois incomplète.

La question est résolue définitivement par Bombieri ([B]), du moins en ce qui concerne les applications pluricanoniques ; le problème de la structure de  $\varphi_K$  reste entier. Parmi les résultats récents il faut encore citer les travaux de Bogomolov sur le fibré  $\Omega^1$  (cf. les notes du CIME 1977) et l'inégalité  $K^2 \ll 9\chi(\mathcal{O})$  (X.11), qui y est reliée.

Exercices

1) Soit  $S$  une surface minimale de type général. Démontrer l'inégalité  $K^2 \geq 2p_g - 4$ .

(Distinguer deux cas suivant que l'image de  $\varphi_K$  est une courbe ou une surface ; dans ce dernier cas, appliquer le lemme de Clifford aux courbes canoniques (cf. exercice VI.2).

2) Soit  $S$  une surface de type général (minimale) avec  $p_g = q = 0$ ,  $K^2 = 1$ . Montrer que  $\text{Card}(H_1(S, \mathbb{Z})) \leq 5$  ; s'il y a égalité,  $S$  est le quotient d'une quintique dans  $\mathbb{P}^3$  par le groupe  $\mathbb{Z}/(5)$ .

(Si  $S^{\text{ab}}$  est le revêtement abélien universel de  $S$  - de groupe  $H_1(S, \mathbb{Z})$  -, montrer en utilisant l'exercice 1 que l'ordre du revêtement  $S^{\text{ab}} \rightarrow S$  est  $\leq 5$ . S'il y a égalité, montrer que  $\varphi_K$  est un morphisme birationnel de  $S^{\text{ab}}$  sur une quintique dans  $\mathbb{P}^3$ ).

3) Soit  $G = (\mathbb{Z}/2)^3$ . Trouver une action de  $G$  sur  $\mathbb{P}^6$  et une surface  $S'$  intersection de 4 quadriques dans  $\mathbb{P}^6$ , stable par  $G$ , de façon que  $G$  opère librement sur  $S'$ . Montrer que la surface  $S = S'/G$  vérifie  $p_g = q = 0$ ,  $K^2 = 2$ .

4) Le groupe  $G = (\mathbb{Z}/5)^2$  opère sur la courbe  $C \subset \mathbb{P}^2$  d'équation  $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$ , par  $(a, b) \cdot (X, Y, Z) = (\zeta^a X, \zeta^b Y, Z)$ . Montrer qu'il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $G$  telle que l'action de  $G$  sur  $C \times C$ , définie par  $g \cdot (x, y) = (gx, \varphi(g) \cdot y)$ , soit sans points fixes. La surface  $S = (C \times C)/G$  vérifie  $p_g = q = 0$ ,  $K^2 = 8$ . Donner d'autres exemples analogues.

5) Soit  $S$  une surface minimale de type général avec  $K^2 = 1$ . Montrer que  $q = 0$ ,  $p_g \leq 2$ . Donner des exemples avec  $p_g = 0, 1, 2$ . (Utiliser l'exercice 1).

CHAPITRE X

6) Soit  $S$  une surface de type général avec  $q=0$ ,  $p_g \gg 1$ .  
Montrer que l'image de  $\varphi_{2K}$  est une surface.

(Si  $2K \equiv Z+aF$ , où  $Z$  est la partie fixe de  $|2K|$ , remarquer que  $|K+F|$  induit sur  $F$  le système canonique complet).

## APPENDICE : caractéristique $p$

La classification des surfaces a été étendue au cas d'un corps de base algébriquement clos quelconque par Bombieri et Mumford (certains résultats avaient déjà été obtenus par Zariski). Il résulte de leur étude que la classification des surfaces en caractéristique  $\neq 2,3$  est identique à celle qu'on a obtenue sur  $\mathbb{C}$  ; quelques surfaces "non classiques" s'introduisent en caractéristique 2 et 3. On va se contenter ici d'énoncer les résultats, renvoyant pour les démonstrations à [B-M].

1) Tous les théorèmes sur les surfaces réglées et rationnelles (Noether-Enriques, Castelnuovo, structure des modèles minimaux...) sont vrais en toute caractéristique. En particulier les surfaces réglées sont caractérisées par la condition  $P_{12} = 0$ , ou par l'extinction de l'adjonction, ou par l'inégalité  $C.K < 0$  pour une courbe  $C$ .

2) La liste des surfaces avec  $\kappa = 0$  comprend :

- des surfaces avec  $K \equiv 0$ ,  $q = 0$  ( $q = h^1(\mathcal{O}_S)$ ), appelées surfaces  $K3$  ; ces surfaces ont les mêmes propriétés qu'en caractéristique 0 (VIII.8 à VIII.15). Deligne a d'ailleurs montré que ces surfaces proviennent par réduction modulo  $p$  de surfaces  $K3$  en caractéristique nulle ;
- des surfaces abéliennes ;
- des surfaces avec  $2K \equiv 0$ ,  $p_g = q = 0$ , appelées surfaces d'Enriques (classiques). En caractéristique  $\neq 2$ , elles sont encore quotients de  $K3$  par une involution sans point fixe, et possèdent toutes les propriétés des surfaces d'Enriques sur  $\mathbb{C}$  ; en particulier elles sont elliptiques. En caractéristique 2 le revêtement double canonique devient

radiciel, de groupe  $\mu_2$  ; les surfaces d'Enriques sont elliptiques ou quasi-elliptiques (on dit qu'une surface  $S$  est quasi-elliptique s'il existe un morphisme de  $S$  sur une courbe lisse tel que la fibre générale soit une cubique à point de rebroussement) ;

- des surfaces bielliptiques, de la forme  $(E \times F)/G$  . En caractéristique  $\neq 2, 3$  , on obtient tous les types 1 à 7 de la liste VI.20 ; en caractéristique 3, le type 6 ( $G = (\mathbb{Z}/3)^2$ ) n'existe pas ; en caractéristique 2, le type 4 ( $G = \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ ) n'existe pas, et dans le type 2 on doit écrire  $G = \mathbb{Z}/2 \times \mu_2$  ;

- en caractéristique 2, des surfaces avec  $K \equiv 0$  ,  $q = 1$  , appelées surfaces d'Enriques non classiques. Elles se répartissent en "singulières" (si l'action de Frobenius sur  $H^1(\mathcal{O}_S)$  est bijective) et "supersingulières" (si elle est nulle). Les premières sont quotient d'une  $K3$  par une involution sans point fixe ; pour les autres il existe un revêtement canonique radiciel, de groupe  $\alpha_2$  . Toutes ces surfaces sont elliptiques ou quasi-elliptiques ;

- en caractéristique 2 ou 3 , des surfaces "quasi-bielliptiques" de la forme  $(E \times C)/G$  , où  $E$  est une courbe elliptique,  $C$  une cubique à point de rebroussement,  $G$  un groupe de translations de  $E$  opérant sur  $C$  . On peut dresser une liste, analogue à VI.20, de tous les cas possibles. Ces surfaces vérifient  $4K \equiv 0$  ou  $6K \equiv 0$  .

3) Les surfaces avec  $\kappa = 1$  sont elliptiques ou éventuellement, en caractéristique 2 ou 3, quasi-elliptiques.

4) Les surfaces avec  $\kappa = 2$  sont caractérisées, parmi les surfaces non rationnelles, par  $K^2 > 0$  . La structure des applications  $\varphi_{nK}$  est beaucoup moins bien connue qu'en caractéristique 0 ; l'inégalité de Castelnuovo n'est pas toujours vérifiée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] A. ANDREOTTI.- "On the Complex structures of a class of simply-connected manifolds". In Algebraic Geometry and Topology (a symposium in honour of S. Lefschetz), Princeton University Press (1957).
- [B] E. BOMBIERI.- "Canonical models of surfaces of general type". Publ. Math. IHES n° 42 (1973).
- [B-DF] G. BAGNERA et M. de FRANCHIS.- "Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe 4<sup>ente</sup> periodiche di 2 parametri". Rendiconti Acc. dei Lincei 16 (1<sup>e</sup> sem. 1907).
- [B-M] E. BOMBIERI et D. MUMFORD.- "Enriques' classification of surfaces in char. p". I in Global Analysis, Princeton Univ. Press (1969) ; II in Complex Analysis and algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press (1977) ; III Inventiones Math. 35 (1976).
- [C1] G. CASTELNUOVO.- "Sulla razionalità delle involuzioni piane". Math. Annalen, vol. 44 (1894).
- [C2] G. CASTELNUOVO.- "Sulle superficie di genere zero". Memorie della Società dei XL, s. III, t. 10 (1894-96).
- [C3] G. CASTELNUOVO.- "Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo". Rendiconti di Palermo, t. 20 (1905).
- [C-E] G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES.- "Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche". Annali di Mat. pura ed app., s.3<sup>a</sup>, t. 6 (1901).
- [C-G] C.H. CLEMENS et P. GRIFFITHS.- "The intermediate Jacobian of the cubic threefold". Ann. of Math. 95 (1972).
- [Ch 1] I. CHAFAREVITCH.- "Basic algebraic geometry". Springer-Verlag (1974).
- [Ch 2] I. CHAFAREVITCH et al.- "Algebraic Surfaces". Proc. of the Steklov Institute, 75 (1965).
- [Ch-P] I. CHAFAREVITCH et I. PIATECHKI-CHAPIRO.- "A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3". Math. USSR (Izvestia) vol. 5 n° 3 (1971).
- [DP] P. DEL PEZZO.- "Sulle superficie dell' n<sup>mo</sup> ordine immerse nello spazio a n dimensioni". Rendiconti di Palermo, t. I (1887).



- [E1] F. ENRIQUES.- "Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche". Memorie della Società dei XL, s. 3<sup>a</sup>, t. 10 (1896).
- [E2] F. ENRIQUES.- "Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali". Rend. Acc. Lincei, s. 5<sup>a</sup>, vol. 7 (1898).
- [E3] F. ENRIQUES.- "Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero". Rendiconti di Palermo, t. 20 (1905).
- [E4] F. ENRIQUES.- "Sulla classificazione delle superficie algebriche...". Rend. Acc. Lincei, s. 5<sup>a</sup>, vol. 23 (1914).
- [E5] F. ENRIQUES.- "Le superficie di genere uno". Rend. Acc. di Bologna, vol. 13 (1909).
- [E6] F. ENRIQUES.- "Ricerche di geometria sulle superficie algebriche". Memorie Acc. Torino, s. 2<sup>a</sup>, t. 44 (1893).
- [E7] F. ENRIQUES.- "Sopra le superficie algebriche di bigenere uno". Memorie della Società dei XL, s. 3<sup>a</sup>, t. 14 (1906).
- [E8] F. ENRIQUES.- "Le superficie algebriche". Zanichelli (1949).
- [EGA] A. GROTHENDIECK.- "Eléments de géométrie algébrique". Publ. Math. IHES.
- [FAC] J.-P. SERRE.- "Faisceaux algébriques cohérents". Annals of Math. 61 (1955).
- [GAGA] J.-P. SERRE.- "Géométrie algébrique et géométrie analytique". Ann. Inst. Fourier 6 (1955-56).
- [G] A. GROTHENDIECK, exposés 7-8-16-17 dans Séminaire Cartan 13 (1960/61).- "Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique".
- [Gr] P. GRIFFITHS.- "Variations on a theorem of Abel". Inventiones Math. 35 (1976).
- [H] F. HIRZEBRUCH.- "Topological methods in algebraic topology". Springer-Verlag (1956).
- [I-M] V.A. ISKOVSKI et Y. MANIN.- "Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem". Mat. Sbornik 86, n° 1 (1971).
- [K] K. KODAIRA.- "On compact complex analytic surfaces II". Ann. of Math. 77 (1963).
- [M1] D. MUMFORD.- "Lectures on curves on an algebraic surface". Princeton Univ. Press (1966).
- [M2] D. MUMFORD.- "Geometric Invariant theory". Springer-Verlag (1965).
- [M3] D. MUMFORD.- "Abelian varieties". Oxford Univ. Press (1970).
- [N1] M. NOETHER.- "Zur theorie des eindeutigen Entsprechends algebraischer Gebilde". Math. Annalen 2 (1870) et 8 (1875).

- [N2] M. NOETHER.- "Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques". C. R. Acad. des Sciences (Paris), v. 103 (1886).
- [N3] M. NOETHER.- "Über Flächen, welche Schaaren rationaler Kurven besitzen". Math. Annalen 3 (1870).
- [R] M. RAYNAUD.- "Familles de fibrés vectoriels sur une surface de Riemann". Sémin. Bourbaki n° 316 (1966).
- [S1] J.-P. SERRE.- "Un théorème de dualité". Commentarii Mat. Helvetici 29 (1955).
- [S2] J.-P. SERRE.- "Critère de rationalité pour les surfaces algébriques". Sémin. Bourbaki n° 146 (1956-57).
- [Se 1] F. SEVERI.- "Sulla classificazione delle rigate algebriche". Rendiconti di Matematica, s. 5, vol. II n° 1 (1941).
- [Se 2] F. SEVERI.- "Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a 4 dimensioni e a suoi punti tripli apparenti". Rendiconti di Palermo, 15 (1901).
- [Se 3] F. SEVERI.- "Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero". Atti del Ist. Veneto, 68 (1909).
- [Sg 1] C. SEGRE.- "Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques". Math. Annalen 30 (1887) et 34 (1889).
- [Sg 2] C. SEGRE.- "Etude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double...". Math. Annalen 24 (1884).
- [V] VERONESE.- "La superficie omaloide normale a 2 dimensioni e del 4° ordine dello spazio a 5 dimensioni...". Memorie della R. Acc. dei Lincei, s. III, vol. 19 (1884).
- [Va] G. VACCARO.- "Le superficie razionali prive di curve eccezionali di 1° specie". Rend. Lincei, s. 8<sup>a</sup>, 4 (1948).
- [W] A. WEIL.- "Variétés kählériennes". Hermann (1958).
- [X] Séminaire 76-77 de l'école Polytechnique.- "Sur les singularités des surfaces". Springer-Verlag, Lecture Notes n°777(1980)
- [Z1] O. ZARISKI.- "Reduction of singularities of algebraic 3-dimensional varieties". Ann. of Math. 45 (1944).
- [Z2] O. ZARISKI.- "The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces". Amer. J. of Math. 80 (1958).
- [Z3] O. ZARISKI.- "On Castelnuovo's criterion of rationality  $p_a = P_2 = 0$  of an algebraic surface". Illinois J. of Math. vol. 2 n° 3 (1958).

Arnaud BEAUVILLE  
 Département de Mathématiques  
 Faculté des Sciences  
 Boulevard Lavoisier  
 49045 ANGERS CEDEX



## INDEX

(Les expressions sont classées par ordre alphabétique, telles qu'elles s'écrivent : ainsi "surface d'Enriques" figure à "surface").

	pages	références
Applications rationnelles	18	II.4
Automorphismes birationnels des surfaces réglées	51	exer. 4
Automorphismes des courbes elliptiques	111	VI.16
Bitangentes à une quartique	72	exer. 14
Caractérisation des surfaces réglées	112	VI.18
Congruence de Reye	136	VIII.19
Courbes exceptionnelles	27	
Courbes exceptionnelles de 2e espèce	33	exer. 3
Dimension de Kodaira	116	VII.1
Double-six	72	exer. 12
Eclatements	15	II.1
Factorisation de Stein	85	V.17
Fibration d'Albanese	85	
Fibrés projectifs $\mathbb{P}_C(E)$	{ 34 45	III.2.b III.17
Fibrés vectoriels sur une courbe	43	III.15
Formule de Noether	12	I.14

Formule du genre	12	I.15
Groupe de Néron-Severi	10	
Groupe de Picard	3	I.1
Inégalité de Castelnuovo	154	X.4
Inégalité de Miyaoka-Yau	158	X.11
Inégalité de Noether	159	exer. 1
Invariants numériques	48	
Invariants numériques des surfaces réglées	49	III.27
Multiplicité d'intersection	4	I.2
Nombre d'intersection	5	I.3
Points proches, points infiniment voisins	33	exer. 2
Projection de centre $p$	{ 25 56	II.14.1 IV.4, IV.5
Projections de la surface de Veronese	57-58	
Quartique dans $\mathbb{P}^3$ contenant une droite double	73	exer. 18
Quartique dans $\mathbb{P}^3$ contenant une conique double	72	exer. 15
Quartique dans $\mathbb{P}^3$ contenant deux droites doubles	52	exer. 9
Surface abélienne	121	VIII.2
Surface avec $p_g = 0, q \gg 1$	107	VI.13
Surface bielliptique	112-113	VI.19, VI.20
Surface cubique avec une droite double	59	IV.8

Surface cubique lisse	64	IV.13
Surface de Bordiga	73	exer. 20
Surface de Del Pezzo	60	IV.9
Surface d'Enriques	{ 121 135	VIII.2
Surface de Godeaux	153	X.3.4
Surface de Kummer	{ 127 140	VIII.10 exer. 4 à 9
Surface de Steiner	{ 58 71	exer. 7,8
Surfaces de type général	152	X.1
Surface de Veronese	57	
Surfaces elliptiques	146	
Surface $F_n$	{ 53 69	IV.1 exer. 1,2
Surface géométriquement réglée	34	III.3
Surface intersection complète	117	VII.5
Surface intersection de 2 quadriques	67	IV.16
Surface $K3$	127	
Surface minimale	26	II.15
Surface produit de 2 courbes	117	VII.4
Surface rationnelle	34	
Surface rationnelle minimale	79	V.10
Surface réglée	34	III.1
Surface réglée cubique dans $\mathbb{P}^4$	58	
Surface réglée minimale	40	III.10
Système linéaire	19	II.5
Théorème de Bezout	8	I.9.a
Théorème de Castelnuovo	74	V.1
Théorème de dualité de Serre	11	I.11
Théorème d'élimination des indéterminations	20	II.7

Théorème d'Enriques	111	VI.7
Théorème de Lüroth	74	V.4
Théorème de Noether-Enriques	35	III.4
Théorème de Riemann-Roch	11	I.12
Tores complexes	81	V.11
Transformation élémentaire	51-52	exer. 1 à 7
Transformation quadratique	25	II.14.3
Variété d'Albanese	82	V.13
Variété rationnelle	74	V.3
Variété unirationnelle	74	V.3

## ABSTRACT

The aim of these lectures is to give an elementary presentation of Enriques' classification of surfaces (over  $\mathbb{C}$ ). By elementary we mean accessible to a student with some knowledge of basic algebraic geometry (divisors, differential forms...) and sheaf theory.

The two first chapters introduce the basic tools for the study of surfaces : the intersection form on the Picard group, with the Riemann-Roch theorem and the genus formula (chapter I) ; and the structure of birational maps (chapter II).

The classification starts in chapter III with ruled surfaces, whose minimal models are determined (except for rational surfaces). Chapter IV is devoted to examples of rational surfaces : Veronese surface, Del Pezzo surfaces...

The two next chapters contain what is perhaps the key point of the classification, namely the characterization of ruled surfaces by the vanishing of the "plurigenera"  $P_n$ . Surfaces with  $q=0$  are dealt with in chapter V through Castelnuovo's theorem : a surface with  $q=P_2=0$  is rational. Two important consequences are the structure of minimal rational surfaces and the unicity of the minimal model for a non-ruled surface. Chapter VI deals with surfaces satisfying  $q > 0$ . We prove that a surface with  $p_g=0$ ,  $q \geq 2$  is ruled ; it remains therefore to study non-ruled surfaces with  $p_g=0$ ,  $q=1$ . According to an idea of Enriques one can classify completely these surfaces, and prove that they verify  $P_{12} > 0$ . Hence a surface is ruled if and only if  $P_{12}=0$  (Enriques's theorem).



Chapter VII introduces the Kodaira dimension  $\kappa$ . Surfaces with  $\kappa=0$  are studied in chapter VIII. They divide into 4 classes : K3 surfaces, Enriques' surfaces, abelian surfaces and bielliptic surfaces. Numerous examples of K3 and Enriques' surfaces are given.

In chapter IX we prove that surfaces with  $\kappa=1$  admit a (not necessarily rational) pencil of elliptic curves ; conversely we study surfaces with such a pencil.

Surfaces with  $\kappa=2$  are dealt with in the last chapter, where we give some examples and prove Castelnuovo's inequality  $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$ .