BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL MENDÈS FRANCE
GÉRALD TENENBAUM

Systèmes de points, diviseurs et structure fractale

Bulletin de la S. M. F., tome 121, nº 2 (1993), p. 197-225
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_2_197_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 197–225.

SYSTÈMES DE POINTS, DIVISEURS ET STRUCTURE FRACTALE

PAR

MICHEL MENDÈS FRANCE ET GÉRALD TENENBAUM (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons deux définitions naturelles de la dimension d'un « système de points » (i.e. une suite de suites finies croissant strictement de 0 à 1), l'une dans l'esprit de la mesure de Hausdorff, l'autre dans la ligne des idées de Mandelbrot sur la structure fractale. Nous montrons que, pour ces deux notions, l'ensemble des diviseurs d'un entier normal peut être considéré comme un objet de dimension log 2.

ABSTRACT. — We give two natural definitions of the dimension of a « system of points » (i.e. a sequence of finite sequences strictly increasing from 0 to 1), one in the spirit of Hausdorff's measure, the other following Mandelbrot's ideas on fractal structures. We show that, for both notions, the set of divisors of a normal integer may be seen as an object of dimension log 2.

1. Introduction

A l'origine de ce travail, se trouve le désir de décrire quantitativement la nature fractale de l'ensemble des diviseurs d'un entier « normal ».

L'entreprise peut surprendre. Chaque entier naturel ne possède qu'un nombre fini de diviseurs et la théorie fractale, pour générale qu'elle soit, ne semble pas s'appliquer à de tels ensembles discrets. Cependant, plusieurs résultats assez récents [1], [4]–[6], [8], [12], [13] fournissent une description relativement fine de la structure d'ordre des diviseurs d'un entier normal. Il en ressort un schéma général que l'on peut *grosso modo* interpréter de la façon suivante. Les diviseurs sont agglutinés au voisinage d'un petit nombre d'entre eux. De plus, lorsqu'on concentre son attention sur un

(*) Texte reçu le 27 juin 1991, révisé le 21 avril 1992.
M. MENDÈS-FRANCE, Département de Mathématiques, Université de Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence cedex.
G. TENENBAUM, Département de Mathématiques, Université de Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre cedex.
Classification AMS : 11 N 37, 28 A 80, 28 A 78.

seul de ces grumeaux, on retrouve, après agrandissement convenable, une structure macroscopique de même nature, caractérisée par une condensation autour de quelques éléments attracteurs. On peut même quantifier cette auto-similarité, en adaptant le rapport d'agrandissement au nombre total des points restant à étudier — de manière à éviter de «trivialiser» la situation par une discrétisation abusive.

Une situation analogue se produit lorsqu'on considère, pour n grand, l'ensemble des points-frontière à la n-ième étape de la trisection de Cantor. Cela nous a conduit à définir la *dimension d'un système de points* et à attacher à chaque système une fonction — que nous appelons *fonction de résolution* — dont la constance dans certains sous-intervalles atteste de la nature fractale du système. On peut ainsi assigner à l'ensemble triadique de Cantor une dimension fractale $\log 2/\log 3$, et à l'ensemble des diviseurs d'un entier normal une dimension fractale $\log 2$. Ces idées s'insèrent dans la ligne des travaux de MANDELBROT [10].

Bien qu'enseignant dans des universités distantes l'une de l'autre (Bordeaux et Nancy), nous avons pu nous rencontrer épisodiquement pour mettre nos idées en commun. Nous tenons, à ce propos, à remercier K. NAGASAKA, d'une part, T. COCHRANE et R. DRESSLER de l'autre, pour nous avoir donné l'occasion d'échanger nos points de vue sur les notions à la base de ce travail à Tokyo, en octobre 1988, et à Manhattan (Kansas), en mai 1990. Par ailleurs, nous exprimons notre gratitude à M. BALAZARD qui, par ses remarques aiguës et pertinentes, nous a permis d'améliorer certains points du présent texte.

2. Systèmes de points, loupes, dimensions

Nous définissons un *système (dynamique) de points* X comme la donnée d'une suite d'états
$$X_n := \{x_j^{(n)} : 0 \le j \le k_n\}$$
satisfaisant à :

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} k_n = +\infty. \tag{2.1}$$

Une *loupe* est une suite positive $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n\ge 1}$ telle que $\lim \varepsilon_n = 0$. Chaque loupe possède, relativement à un système donné X, un *pouvoir séparateur* :

$$s(\boldsymbol{\varepsilon}) = s(\boldsymbol{\varepsilon}, X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(1/\varepsilon_n)}{\log k_n}. \tag{2.2}$$

Parmi les loupes de pouvoir séparateur $\alpha > 0$ relativement à X, un rôle privilégié est joué par la suite :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha) = \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha, X) := (k_n^{-\alpha})_{n\ge 1}. \tag{2.3}$$

Pour décrire la capacité d'une loupe à séparer les points d'un système, il est naturel de considérer le nombre des intervalles de longueur ε_n nécessaires pour recouvrir X_n. Ce nombre est essentiellement μ_n/ε_n, avec

$$(2.4)\quad \mu_n = \mu_n(\varepsilon_n) := \operatorname{mes}\Big\{ \bigcup_{0\le j\le k_n} \Big[x_j^{(n)} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n,\, x_j^{(n)} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_n\Big] \cap [0,1]\Big\},$$

où mes A désigne la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

La capacité de résolution de la loupe $\boldsymbol{\varepsilon}$ relativement au système X peut être évaluée en comparant μ_n/ε_n soit à k_n soit à $1/\varepsilon_n$. Nous définissons donc, d'une part, le *degré de résolution* de X par $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$(2.5)\qquad g(\boldsymbol{\varepsilon}, X) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mu_n/\varepsilon_n)}{\log k_n}$$

et, d'autre part, la *puissance de résolution*

$$(2.6)\qquad \pi(\boldsymbol{\varepsilon}, X) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mu_n/\varepsilon_n)}{\log(1/\varepsilon_n)}\cdot$$

Lorsque $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)$, le rapport g/π est égal à α, et une seule quantité suffit à décrire la situation : c'est la *fonction de résolution* définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$(2.7)\qquad \rho(\alpha) = \rho(\alpha, X) = \pi\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha), X\big) = \alpha^{-1} g\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha), X\big).$$

On a en toute circonstance $\mu_n \le \min(1, \varepsilon_n k_n)$, donc

$$(2.8)\qquad g(\boldsymbol{\varepsilon}, X) \le \min\big(1, s(\boldsymbol{\varepsilon})\big), \quad \rho(\alpha, X) \le \min(1, \alpha^{-1}) \qquad (\alpha > 0)$$

pour tout système de points X. Lorsque $g(\boldsymbol{\varepsilon}, X) = 1$, il faut $k_n^{1+o(1)}$ intervalles de longueur ε_n pour recouvrir X_n pour une infinité d'entiers n. Cela signifie qu'en un certain sens, pour ces valeurs de n, ε_n est assez petit pour que « presque tous » les $x_j^{(n)}$ soient ε_n-isolés. Nous disons alors que *la loupe $\boldsymbol{\varepsilon}$ résoud le système X.*

Avant d'aller plus loin, explicitons quelques situations types dans lesquelles on peut visualiser les comportements des diverses notions introduites jusqu'ici.

Systèmes réguliers. — Soit β un nombre positif fixé et $(k_n)_{n\ge1}$ une suite tendant vers $+\infty$. Nous appelons *régulier* le système de points $R(\beta)$ correspondant au choix :

$$x_j^{(n)} = \Big(\frac{j}{k_n}\Big)^{\beta} \qquad (n \ge 1,\ 0 \le j \le k_n).$$

Lorsque $\varepsilon_n := k_n^{-\alpha}$, on vérifie aisément que l'ensemble des indices j tels que $x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)} > \varepsilon_n$ est du type $\{j : 0 \le j \le J_n\}$ ou $\{j : J_n < j \le k_n\}$ pour un $J_n = J_n(\alpha, \beta)$ convenable. Une estimation de J_n conduit alors à la formule suivante pour la fonction de résolution :

$$\rho\big(\alpha, R(\beta)\big) = \min(1, \alpha^{-1}) \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{2.9}$$

Ainsi, un système régulier possède-t-il, au vu de (2.8), une fonction de résolution maximale.

Systèmes essentiellement discrets. — On dit que X est essentiellement discret si l'ensemble des points d'accumulation de $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ est fini. C'est le cas des systèmes $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$ définis, pour $n \ge 1$, par :

$$Z_n^{(1)} := \big\{j\,\mathrm{e}^{-n} : 0 \le j \le n\big\} \cup \{1\},$$

$$Z_n^{(2)} := \Big\{\frac{j}{n \log 2n} : 0 \le j \le n\Big\} \cup \{1\}.$$

On a :

$$\rho(\alpha, Z^{(1)}) = 0, \quad \rho(\alpha, Z^{(2)}) = \min(1, \alpha^{-1}) \qquad (\alpha > 0).$$

Plus généralement, toute fonction de résolution peut être obtenue à partir d'un système essentiellement discret.

Systèmes de Cantor. — Soit $\theta > 2$. Le système de Cantor $C(\theta)$ a pour état d'indice n l'ensemble $C_n = \partial I_n$, où I_n est une réunion finie d'intervalles ouverts, définie inductivement de la façon suivante : $I_0 =]0, 1[$ et I_{n+1} est obtenu en retirant de chaque composante connexe de I_n l'intervalle médian ouvert de longueur $\theta^{-n}(1 - 2/\theta)$. Il est clair que $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout $n \ge 0$ et que $|C_n| = 2^{n+1}$. Les différences $x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}$ sont du type $\theta^{-k}(1 - 2/\theta)^v$ où $0 \le k \le n$ et

$$v = v(k, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 \le k \le n-1, \\ 0 & \text{si } \ k = n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Soit $\varepsilon_n := (1 - 2/\theta)\theta^{-m}$, où m est un paramètre entier, $1 \le m \le n$. D'après ce qui précède, les points de C_m sont ε_n-espacés, donc :

$$\mu_n(\varepsilon_n) \ge |C_m|\varepsilon_n = 2^{m+1}\varepsilon_n. \tag{2.11}$$

De plus, $C_n \setminus C_m$ est composé exclusivement de points du type $x_j^{(k)}$ avec $m < k \leq n$, qui sont donc à une distance au plus θ^{-m} de C_m. Cela implique que

$$C_n \subset \bigcup_{0 \leq j < 2^{m+1}} \left]x_j^{(m)} - \theta^{-m}, x_j^{(m)} + \theta^{-m}\right[$$

et donc

$$\mu_n(2\theta^{-m}) \leq |C_m| \cdot 2\,\theta^{-m} = 2^{m+2}\theta^{-m}. \tag{2.12}$$

Considérons alors un nombre réel α de $]0,1]$. En faisant tendre m et n vers $+\infty$ dans (2.11) et (2.12) de façon que $\theta^m \asymp 2^{\alpha n}$, on obtient :

$$\rho\big(\alpha, C(\theta)\big) = \frac{\log 2}{\log \theta} \qquad \Big(\alpha \leq \frac{\log \theta}{\log 2}\Big).$$

Par ailleurs, nous avons vu que les points de C_n sont ε_n-espacés pour $\varepsilon_n = (1-2/\theta)\theta^{-n}$. Ils sont donc *a fortiori* $2^{-\alpha(n+1)}$-espacés dès que $2^\alpha > \theta$. Cela implique

$$\mu_n\big(2^{-\alpha(n+1)}\big) \geq 2^{(1-\alpha)(n+1)}$$

et donc $\rho\big(\alpha, C(\theta)\big) = \alpha^{-1}$ pour ces valeurs de α.

Finalement, nous pouvons énoncer que l'on a :

$$\rho\big(\alpha, C(\theta)\big) = \min\Big(\frac{\log 2}{\log \theta}, \frac{1}{\alpha}\Big) \qquad (\alpha > 0). \tag{2.13}$$

Dans tous nos exemples, la fonction $\rho(\alpha)$ est constante sur un intervalle $]0, \alpha_0]$. Cela traduit une propriété d'auto-similarité : le nombre d'intervalles de longueur $k_n^{-\alpha}$ nécessaires pour recouvrir X_n est une puissance de k_n^α essentiellement indépendante de α. Lorsque cette puissance vaut 0 ou 1, cela signifie simplement que X_n est trop « maigre » ou trop « dense ». Dans le cas contraire, on peut interpréter la situation comme un phénomène fractal. Nous appelons *dimension fractale* de X et nous notons $\operatorname{dimf} X$ la valeur de $\rho(\alpha)$ pour $0 < \alpha \leq \alpha_0$. D'après (2.8), on a donc pour tout système X :

$$0 \leq \operatorname{dimf} X \leq 1.$$

Parallèlement, on peut introduire une dimension différente, liée à l'idéologie qui sous-tend le concept de mesure de Hausdorff. Pour $\alpha \in [0,1]$, posons :

$$H(\alpha, X_n) := \sum_{0 \leq j < k_n} \Big(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}\Big)^\alpha. \tag{2.14}$$

Nous définissons la *dimension de Hausdorff* de X par la formule :

$$\dim X = \inf\Big\{\alpha \geq 0 : \limsup_{n\to\infty} \frac{\log H(\alpha, X_n)}{\log k_n} = 0\Big\}. \tag{2.15}$$

Puisque $H(1, X_n) = 1$, on a en toute circonstance :

$$0 \leq \dim X \leq 1.$$

Il est incidemment à noter que l'on n'obtient pas une notion plus fine en remplaçant dans (2.14) la fonction $x \mapsto x^\alpha$ par une fonction $x \mapsto \varphi(x)$ concave, et croissant au sens large de 0 à 1. La dimension « généralisée » obtenue en remplaçant parallèlement α dans (2.15) par $\limsup_{x\to 0+} (\log \varphi(x))/\log x$ est en effet inchangée.

Notre premier résultat consiste à dégager un lien entre le degré de résolution (2.5) et la dimension de Hausdorff (2.15).

THÉORÈME 1. — *Pour tout système de points X et toute loupe $\boldsymbol{\varepsilon}$, on a :*

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}, X) \leq s(\boldsymbol{\varepsilon}, X) \dim X. \tag{2.16}$$

De plus,

$$\sup_{\alpha>0} \rho(\alpha, X) = \dim X. \tag{2.17}$$

COROLLAIRE. — *Si la loupe $\boldsymbol{\varepsilon}$ résoud le système X, alors on a :*

$$s(\boldsymbol{\varepsilon}, X) \dim X \geq 1. \tag{2.18}$$

En particulier, un système de dimension nulle n'est résolu par aucune loupe de pouvoir séparateur fini.

D'après (2.17), on voit que si X est fractal au sens introduit plus haut, sa dimension fractale n'excède pas sa dimension de Hausdorff. Dans tous les exemples que nous avons décrit, le calcul direct de $\dim X$ est facile. Nous donnons maintenant les détails correspondant au système de Cantor $C(\theta)$, soit

$$\dim C(\theta) = \frac{\log 2}{\log \theta}\cdot \tag{2.19}$$

Pour établir cela, désignons par α_{kn} le nombre des différences

$$x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}$$

égales à $\theta^{-k}(1-2/\theta)^{v(k,n)}$, où $v(k,n)$ est défini par (2.10). La construction de C_{n+1} à partir de C_n fournit immédiatement les relations de récurrence

$$\alpha_{k,n+1} = \alpha_{kn} \quad (0 \le k \le n), \qquad \alpha_{n+1,n+1} = 2\,\alpha_{nn},$$

d'où

$$\alpha_{kn} = 2^k \qquad (0 \le k \le n). \tag{2.20}$$

Il suit $H(\alpha, C_n) = (1-2/\theta)^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (2\theta^{-\alpha})^k + (2\theta^{-\alpha})^n$ et

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log H(\alpha, C_n) = 0 \iff \alpha \ge \frac{\log 2}{\log \theta}. \tag{2.21}$$

Cela implique bien (2.19).

3. Systèmes divisoriels

Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, la terminologie introduite à la section précédente est largement motivée par le désir de disposer de concepts effectifs pour décrire la structure des diviseurs d'un entier normal.

Considérons la suite d'états :

$$D_n := \left\{ \frac{\log d}{\log n} : d \mid n \right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{3.1}$$

Nous disons qu'un système de points D est *divisoriel* si la suite de ses états est une sous-suite $\{D_n : n \in \mathcal{A}\}$ de (3.1). Nous posons alors :

$$D = D(\mathcal{A}). \tag{3.2}$$

THÉORÈME 2. — *Il existe une suite d'entiers $\mathcal{A}$ de densité unité telle que l'on ait pour tout $\alpha > 0$:*

$$\rho\big(\alpha, D(\mathcal{A})\big) = \min(\log 2, \alpha^{-1}). \tag{3.3}$$

COROLLAIRE. — *Il existe une suite d'entiers $\mathcal{A}$ de densité unité telle que l'on ait :*

$$\dim D(\mathcal{A}) = \log 2. \tag{3.4}$$

Nous obtenons en fait une estimation quantitative plus fine que (3.3), à savoir — cf. (5.30) — avec la notation (2.4),

$$(3.5)\quad \mu_n\big(\tau(n)^{-\alpha}\big) = \tau(n)^{-\alpha+\min(\alpha\log 2,\,1)} \exp\Big\{O\big(\sqrt{\log\tau(n)\log_3\tau(n)}\big)\Big\}.$$

(Ici et dans tout l'article, $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme.) Dans le même esprit, il est intéressant de déterminer avec précision le comportement normal de

$$(3.6)\qquad F_\alpha(n) := H(\alpha, D_n) = \sum_{1\le i<\tau(n)} \Big(\frac{\log(d_{i+1}/d_i)}{\log n}\Big)^\alpha$$

où $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{\tau(n)} = n$ désigne la suite croissante des diviseurs de n. Les THÉORÈMES 1 et 2 impliquent immédiatement que, pour presque tout n, la fonction $F_\alpha(n)$ tend vers l'infini comme une puissance de $\tau(n)$ si $\alpha < \log 2$, alors que l'on a $F_\alpha(n) = \tau(n)^{o(1)}$ si $\alpha \ge \log 2$. Nous pouvons affiner cela dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3. — *Soient $\alpha_0 > \log 2$ et $\xi(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$. Il existe une suite d'entiers $\mathcal{A}$ de densité unité telle que l'on ait uniformément pour tout $n \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$:*

$$(3.7)\qquad F_\alpha(n)\begin{cases} = \tau(n)^{\max(0,\,1-\alpha/\log 2)} \exp\Big\{O\big(\sqrt{\log\tau(n)\log_3\tau(n)}\big)\Big\} & \textit{si } 0<\alpha\le\alpha_0,\\ < \xi(n) & \textit{si } \alpha_0<\alpha\le 1.\end{cases}$$

La seconde estimation (3.7) est optimale. Ainsi que nous le verrons à la section 6, on a pour *toute* suite $\mathcal{A}$ de densité 1 :

$$(3.8)\qquad \limsup_{n\in\mathcal{A}} F_\alpha(n) = +\infty \qquad (\alpha < 1).$$

Cela pourrait être interprété comme une déficience de notre définition de la dimension de Hausdorff : si l'on remplaçait, en effet, dans (2.15) la condition

$$\limsup \log H(\alpha, X_n)/\log k_n = 0$$

par $\limsup H(\alpha, X_n) < \infty$, on aurait $\dim D(\mathcal{A}) = 1$ pour toute suite de densité 1. Cependant cela ne refléterait pas le comportement normal des entiers : le membre de gauche de (3.8) est fini pour tout $\alpha > \log 2$ pour des suites $\mathcal{A}$ de densité inférieure arbitrairement proche de 1 — cf. section 6.

Il découle en particulier de (3.3) et (3.4) que

$$(3.9)\qquad \operatorname{dimf} D(\mathcal{A}) = \dim D(\mathcal{A}) = \log 2$$

pour une suite convenable $\mathcal{A}$ de densité unité. Pour appréhender ce qu'elles révèlent de la nature fractale de la répartition des diviseurs, il faut mettre ces formules en perspective, à la lumière des modèles de base de la théorie.

Désignons par $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers de n, comptés sans multiplicité. Un théorème classique d'ERDŐS [3] — voir aussi [8, chap. 1] — énonce, sous une forme quantitative, que le j-ième facteur premier, $p_j(n)$, d'un entier normal n satisfait à

$$\log_2 p_j(n) \sim j \tag{3.10}$$

uniformément pour $\xi(n) \leq j \leq \omega(n)$, où $\xi(n)$ tend vers $+\infty$ arbitrairement lentement. Il n'est pas très difficile de déduire de (3.10) une évaluation de la croissance normale de la suite ordonnée $\{d_j(n) : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$ des diviseurs de n — cf. [8, p. 22–26]. On obtient, pour presque tout entier n,

$$\log d_j(n) = j^{\beta+o(1)} \qquad \big(\xi(n) \leq j \leq \tau(n)\big) \tag{3.11}$$

avec $\beta = 1/\log 2$. Si l'on néglige le terme d'erreur de (3.11), on obtient pour $D(\mathcal{A})$ le modèle heuristique $\Delta(\mathcal{A}) = (\Delta_n)_{n\in\mathcal{A}}$, avec

$$\Delta_n := \big\{\big(j/\tau(n)\big)^{\beta} : 0 \leq j \leq \tau(n)\big\}. \tag{3.12}$$

Un tel système est régulier, au sens introduit à la section 2, et l'on a

$$\operatorname{dimf} \Delta(\mathcal{A}) = \dim \Delta(\mathcal{A}) = 1, \tag{3.13}$$

ce qui met en évidence les limites d'une interprétation heuristique de (3.11).

On peut expliquer ce phénomène par le fait que le terme résiduel de (3.11) est relativement grand *même si l'on néglige celui de* (3.10). Dans cette dernière hypothèse, en effet, les diviseurs de n peuvent être assimilés (en omettant les facteurs carrés, ce que l'on peut montrer être acceptable) aux $2^{\omega(n)}$ nombres d donnés par :

$$\log d = \sum_{j=1}^{\omega(n)} \varepsilon_j e^j \qquad (\varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1). \tag{3.14}$$

Cette suite satisfait bien (3.11), mais sa structure locale est beaucoup moins régulière que celle de (3.12). Le modèle heuristique pour $D(\mathcal{A})$ correspondant à (3.14) est essentiellement le système de Cantor $C(e)$, pour lequel les relations (3.3) et (3.4) sont bien vérifiées.

Les THÉORÈMES 2 et 3 peuvent ainsi être considérés comme des pièces supplémentaires à verser au dossier du modèle (3.14) de la structure multiplicative des entiers. On sait que le terme d'erreur implicite dans (3.10) est relativement grand — $\Omega \pm \left(\sqrt{j}\log_2 j\right)$ — et l'utilisation de (3.10) ou (3.14) est toujours délicate, même comme soutien heuristique de conjectures. Par exemple, (3.14) implique que les diviseurs sont ordonnés lexicographiquement, ce que l'on sait être très éloigné de la réalité — cf., entres autres, BOVEY [2]. De même, il découle certainement de (3.14), même en admettant de fortes perturbations pour les petites valeurs de j, que l'on a pour presque tout n

$$\min_{1 \le j < \tau(n)} \log\left(d_{j+1}/d_j\right) > \eta(n) \tag{3.15}$$

pour toute fonction $\eta(n) \to 0$, alors que le membre de gauche est en réalité $(\log n)^{1-\log 3+o(1)}$ — cf. MAIER-TENENBAUM [9]. Nos résultats montrent cependant que, malgré des fluctuations relativement importantes autour de la tendance générale reflétée par (3.14), ce modèle fournit une description acceptable de structure fractale de l'ensemble des diviseurs.

4. Preuve du théorème 1

Notre démontration repose sur les deux lemmes suivants qui peuvent posséder un intérêt propre.

LEMME 4.1. — *Soit $\{x_j : 0 \le j \le k\}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs ou nuls et $\varphi : [0, x_k] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $\varphi(0) = 0$ et telle que φ' soit à variation bornée sur $[0, x_k]$. On pose :*

$$\chi(v,w) := \begin{cases} 1 & \textit{s'il existe } j \in [0,k] \textit{ tel que } v < x_j \le w, \\ 0 & \textit{dans le cas contraire.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Alors on a :

$$\sum_{0 \le j < k} \varphi(x_{j+1} - x_j) = \varphi(x_k) - \varphi(x_0) + \int_0^{x_k} \int_{0-}^{w} \chi(v,w)\,\mathrm{d}\varphi'(w-v)\,\mathrm{d}w. \tag{4.2}$$

Démonstration. — Lorsque $x_j \le w < x_{j+1}$, (avec $0 \le j < k$), on a $\chi(v,w) = 1$ si, et seulement si, $v < x_j$. Le membre de droite de (4.2) vaut donc :

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_k) - \varphi(x_0) + \sum_{0\le j<k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{0-}^{x_j-} \mathrm{d}\varphi'(w-v)\,\mathrm{d}w \\
&= \varphi(x_k) - \varphi(x_0) + \sum_{0\le j<k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \big\{\varphi'(w-x_j) - \varphi'(w)\big\}\,\mathrm{d}w \\
&= \varphi(x_k) - \varphi(x_0) \\
&\qquad + \sum_{0\le j<k} \big\{\varphi(x_{j+1}-x_j) - \varphi(x_{j+1}) + \varphi(x_j)\big\} \\
&= \sum_{0\le j<k} \varphi(x_{j+1}-x_j).
\end{aligned}
$$

LEMME 4.2. — *Soit $\{x_j : 0 \le j \le k\}$ une suite finie de nombres réels telle que :*

$$
0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1. \tag{4.3}
$$

Pour chaque z, $0 < z < 1$, on pose :

$$
\mathcal{M}(z) := \bigcup_{0\le j\le k} \big[x_j - \tfrac12 z, x_j + \tfrac12 z\big], \quad \mu(z) := \operatorname{mes}\big\{[0,1] \cap \mathcal{M}(z)\big\}.
$$

Alors pour toute fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfaisant aux hypothèses du lemme 4.1, *on a :*

$$
\sum_{0\le j<k} \varphi(x_{j+1}-x_j) = \varphi'(1) - \int_0^1 \mu(z)\,\mathrm{d}\varphi'(z). \tag{4.4}
$$

Si de plus, φ est concave et telle que $\varphi'(1) \ge 0$, alors on a :

$$
\sum_{0\le j<k} \varphi(x_{j+1}-x_j) \ge \sup_{0<\varepsilon<1} \mu(\varepsilon)\varphi'(\varepsilon). \tag{4.5}
$$

Démonstration. — Pour chaque z de $[0,1]$, la fonction caractéristique de $\mathcal{M}(z)$ est $\chi(t-\frac12 z+0, t+\frac12 z)$. En effectuant le changement de variables

$$
v = t - \tfrac12 z, \quad w = t + \tfrac12 z
$$

dans (4.2), on obtient donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\le j<k} \varphi(x_{j+1}-x_j) \\
&= \varphi(1) - \int_0^1 \int_{z/2}^{1-z/2} \chi\big(t-\tfrac12 z,\, t+\tfrac12 z\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi'(z) \\
&= \varphi(1) - \int_0^1 \big(\mu(z) - z\big)\,\mathrm{d}\varphi'(z) = \varphi'(1) - \int_0^1 \mu(z)\,\mathrm{d}\varphi'(z).
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Cela établit (4.4). Lorsque $\varphi'(1) \geq 0$, la croissance de $\mu(z)$ et la décroissance de φ' nous permettent de minorer comme annoncé, pour tout $\varepsilon > 0$, cette expression par :

$$\begin{aligned}\varphi'(1) - \int_\varepsilon^1 \mu(z)\,\mathrm{d}\varphi'(z) &\geq \varphi'(1) - \int_\varepsilon^1 \mu(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varphi'(z)\\ &= \varphi'(1)\big(1-\mu(\varepsilon)\big) + \mu(\varepsilon)\varphi'(\varepsilon) \geq \mu(\varepsilon)\varphi'(\varepsilon).\end{aligned}$$

Fin de la démonstration du théorème 1. — Soit X un système de points, et $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une loupe. En appliquant (4.5) aux points de X_n avec $\varepsilon = \varepsilon_n$ et $\varphi(t) = t^\alpha$, on obtient pour $0 < \alpha \leq 1$

$$H(\alpha, X_n) \geq \alpha\,\varepsilon_n^{\alpha-1}\mu_n \tag{4.7}$$

où μ_n est défini par (2.4). D'où

$$\frac{\log H(\alpha, X_n)}{\log k_n} \geq \frac{\log(\mu_n/\varepsilon_n)}{\log k_n} - \alpha\,\frac{\log(1/\varepsilon_n)}{\log k_n} - \frac{\log(1/\alpha)}{\log k_n} \tag{4.8}$$

et finalement, avec les notations (2.2) et (2.5),

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log H(\alpha, X_n)}{\log k_n} \geq g(\boldsymbol{\varepsilon}, X) - \alpha\, s(\boldsymbol{\varepsilon}, X). \tag{4.9}$$

Comme le membre de gauche de (4.9) est nul pour tout $\alpha > \dim X$, on obtient bien l'inégalité (2.16).

Pour établir (2.17), il reste à montrer que $H(\alpha, X_n) = k_n^{\mathrm{o}(1)}$ dès que

$$\alpha > \rho := \sup_{\beta>0} \rho(\beta, X).$$

Par définition de ρ, on a pour tout $\beta > 0$ fixé

$$\mu_n(k_n^{-\beta}) \leq k_n^{(\rho-1)\beta+\mathrm{o}(1)} \qquad (n \to +\infty), \tag{4.10}$$

et la croissance de $z \mapsto \mu_n(z)$ permet de déduire que cette relation est satisfaite uniformément sur tout intervalle borné en β. En effectuant le changement de variables $z = k_n^{-\beta}$ dans (4.4), nous obtenons :

$$H(\alpha, X_n) = \alpha + \alpha(1-\alpha)\log k_n \int_0^{+\infty} \mu_n(k_n^{-\beta})k_n^{(1-\alpha)\beta}\,\mathrm{d}\beta. \tag{4.11}$$

La majoration triviale

$$\mu_n(k_n^{-\beta}) \leq k_n^{1-\beta}$$

permet de disposer de la contribution de la demi-droite $\beta > 1/\alpha$. Le résultat souhaité découle donc alors de (4.10).

5. Preuve du théorème 2

Avant d'aborder la partie technique de la démonstration, il n'est pas inutile de souligner que l'intérêt du THÉORÈME 2 provient en grande partie de l'ordre des quantificateurs apparaissant dans son énoncé. En effet, l'évaluation de $\rho\big(\alpha, D(\mathcal{A})\big)$ ne peut donner de renseignement sur la nature fractale — et en particulier l'auto-similarité — de la répartition des $\log d/\log n$ (où $d \mid n$) pour $n \in \mathcal{A}$ que si l'on peut faire varier α indépendamment de n, c'est-à-dire de $\mathcal{A}$. La préservation de cette uniformité rend la preuve que nous allons développer maintenant plus délicate qu'on ne pourrait l'imaginer au prime abord.

Nous utilisons les notations suivantes, dont certaines serviront également à la section suivante.

$$\Omega(n;y,z) := \sum_{\substack{p^\nu \| n \\ y<p\le z}} \nu \qquad (n\ge 1,\ 0<y\le z)\,; \tag{5.1}$$

$$\tau(n;y,z) := \sum_{\substack{d\mid n \\ y<d\le z}} 1 \qquad (n\ge 1,\ 0<y\le z)\,; \tag{5.2}$$

$$\chi(n;y,z) := \min\big(1,\tau(n;y,z)\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists\, d\mid n,\ y<d\le z, \\ 0 & \text{dans le cas contraire}\,; \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\tau(n,\theta) := \sum_{d\mid n} d^{i\theta} \qquad (n\ge 1,\ \theta\in\mathbb{R})\,; \tag{5.4}$$

$$n(y) := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p\le y}} p^\nu \qquad (n\ge 1,\ y\ge 1)\,; \tag{5.5}$$

$$y_j := \exp\exp j \qquad (j=-1,0,1,2,\ldots). \tag{5.6}$$

Nous employons indifféremment la notation $f = O(g)$ de Landau et celle de Vinogradov $f \ll g$. Enfin, nous introduisons la mention p.p. (presque partout) pour signifier qu'une relation est satisfaite pour tous les entiers d'une suite convenable de densité unité.

LEMME 5.0. — *Soient λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 > 0$ et $0 < \lambda_2 < 2$. Pour toute fonction multiplicative f satisfaisant à*

$$0 \le f(p^\nu) \le \lambda_1 \lambda_2^{\nu-1} \qquad (p\ge 2,\ \nu = 1,2,\ldots)$$

on a uniformément pour $x \ge 2$:

$$\sum_{n\le x} f(n) \ll_{\lambda_1,\lambda_2} x \prod_{p\le x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu)p^{-\nu}. \tag{5.7}$$

Ce résultat est une version affaiblie d'un théorème de HALBERSTAM et RICHERT [7].

LEMME 5.1. — *On a uniformément pour $x \geq 1$ et $2 \leq y \leq z$:*

$$|\{n \leq x : n(y) > z\}| \ll x \exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{\log z}{\log y}\Big\}. \tag{5.8}$$

Démonstration. — Le théorème 07 de [8] donne la majoration annoncée avec une constante c_0 non précisée à la place de $\frac{1}{2}$ dans l'exponentielle. La démonstration proposée dans [8] fournit en fait le résultat indiqué pour un choix convenable des paramètres. Les détails sont essentiellement fournis dans [14, p. 396 et 437].

LEMME 5.2. — *On a :*

$$\max_{1 \leq y \leq n} n(y) y^{-6\log_3 n} \leq 1 \quad \text{p.p.} \tag{5.9}$$

Démonstration. — Soit x un nombre réel assez grand. Si un entier n tel que $\sqrt{x} < n \leq x$ contrevient à la majoration de (5.9), considérons une valeur de y réalisant le maximum de (5.9). On a $y \geq 2$. Il existe donc un j, avec $-1 \leq j \leq \log_2 x$, tel que $y_j < y \leq y_{j+1}$ et l'on a :

$$n(y_{j+1}) > y_j^{6\log_3 \sqrt{x}}.$$

D'après (5.8) le nombre des entiers exceptionnels $\leq x$ est donc

$$\begin{aligned} &\ll \sqrt{x} + x \sum_{-1 \leq j \leq \log_2 x} \exp\Big\{-\frac{3\log_3 \sqrt{x} \cdot \log y_j}{\log y_{j+1}}\Big\} \\ &\ll x\big(\log_2 x\big)^{1-3/e} = \mathrm{o}(x). \end{aligned}$$

LEMME 5.3. — *On a :*

$$\max_{3/2 \leq z \leq n} \Big|\Omega(n; z, n) - \log\Big(\frac{\log n}{\log z}\Big)\Big| < 2\sqrt{\log_2 n \log_4 n} \quad \text{p.p.} \tag{5.10}$$

Démonstration. — Cela découle immédiatement du théorème 11 de [8] et du théorème de Hardy-Ramanujan, compte tenu de la majoration bien connue

$$\sum_{p^\nu \| n} (\nu - 1) < \xi(n) \quad \text{p.p.} \tag{5.11}$$

valable pour toute fonction $\xi(n) \to \infty$.

LEMME 5.4. — *Pour $n \geq 1$ et $y \geq 1$, posons :*

$$F(n;y) := \frac{1}{\tau(m)} \sum_{\substack{d \mid m,\ d' \mid m \\ |\log(d'/d)| \leq \log y}} 1 \qquad \big(m = n/n(y)\big). \tag{5.12}$$

Alors on a :

$$\max_{y \geq 1} F(n;y) < (\log_2 n)^3 \quad \text{p.p.} \tag{5.13}$$

Démonstration. — Introduisant la fonction

$$w(t) = \Big(\frac{\sin t/2}{t/2}\Big)^2 = \int_{-1}^{1} \big(1 - |\theta|\big)\, \mathrm{e}^{it\theta}\, \mathrm{d}\theta,$$

nous pouvons écrire pour tout $y > 1$:

$$\begin{aligned} F(n;y) &\leq \frac{1}{w(1)\tau(m)} \sum_{d \mid m,\ d' \mid m} w\Big(\frac{\log d'/d}{\log y}\Big) \\ &= \frac{1}{w(1)\tau(m)} \int_{-1}^{1} \Big|\tau\Big(m, \frac{\theta}{\log y}\Big)\Big|^2 \big(1 - |\theta|\big)\, \mathrm{d}\theta \\ &\leq 2 \log y \int_{-1/\log y}^{1/\log y} \frac{\big|\tau(m,\theta)\big|^2}{\tau(m)}\, \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Considérons maintenant une valeur $y = y(n)$ réalisant le maximum dans (5.13). On peut supposer $y \geq \frac{3}{2} > y_{-1}$. Il existe donc un indice j tel que $-1 \leq j \leq \log_2 n$ et $y_j < y \leq y_{j+1}$. Posons $m_j = n/n(y_j)$. On a pour tout θ :

$$\begin{aligned} \frac{\big|\tau(m,\theta)\big|^2}{\tau(m)} &= \frac{\big|\tau(m_{j+1},\theta)\big|^2}{\tau(m_{j+1})} \frac{\big|\tau(m/m_{j+1},\theta)\big|^2}{\tau(m/m_{j+1})} \\ &\leq \frac{\big|\tau(m_{j+1},\theta)\big|^2}{\tau(m_{j+1})}\, \tau\Big(\frac{m_j}{m_{j+1}}\Big). \end{aligned}$$

Compte tenu de (5.14), il suit :

$$\max_{y \geq 1} F(n;y) \leq 2 \sum_{-1 \leq j \leq \log_2 n} \mathrm{e}^{j+1} \int_{-\mathrm{e}^{-j}}^{\mathrm{e}^{-j}} \frac{\big|\tau(m_{j+1},\theta)\big|^2}{\tau(m_{j+1})}\, \tau\Big(\frac{m_j}{m_{j+1}}\Big)\, \mathrm{d}\theta. \tag{5.15}$$

Désignons par $G_j(n)$ l'intégrale en θ de la majoration précédente. Le LEMME 5.0 nous permet d'écrire

$$\text{(5.16)}\quad \sum_{n\le x} G_j(n) \ll \int_0^{\mathrm{e}^{-j}} x\exp\Big\{\sum_{y_j<p\le y_{j+1}}\frac{1}{p}+\sum_{y_{j+1}<p\le x}\frac{\cos(\theta\log p)}{p}\Big\}\,\mathrm{d}\theta$$

où nous avons utilisé l'identité :

$$\frac{|\tau(p,\theta)|^2}{\tau(p)}-1=\tfrac{1}{2}|1+p^{i\theta}|^2-1=\cos(\theta\log p).$$

La première somme en p de (5.16) est uniformément bornée. Pour estimer la seconde, nous distinguons deux cas. Lorsque $\theta\le 1/\log x$, nous majorons trivialement $\cos(\theta\log p)$ par 1, d'où :

$$\sum_{y_{j+1}<p\le x}\frac{\cos(\theta\log p)}{p}\le \log(\mathrm{e}^{-j}\log x)+\mathrm{O}(1).$$

Lorsque $1/\log x<\theta\le \mathrm{e}^{-j}$, nous écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{y_{j+1}<p\le x}\frac{\cos(\theta\log p)}{p} &\le \sum_{y_{j+1}<p<\exp(\mathrm{e}/\theta)}\frac{1}{p}+\sum_{\exp(\mathrm{e}/\theta)<p\le x}\frac{\cos(\theta\log p)}{p}\\ &\le \log(\mathrm{e}^{-j}\theta^{-1})+\mathrm{O}(1),\end{aligned}$$

d'après le lemme 30.1 de [8]. Il suit

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}G_j(n) &\ll \int_0^{1/\log x} x\,\mathrm{e}^{-j}\log x\,\mathrm{d}\theta+\int_{1/\log x}^{\mathrm{e}^{-j}} x\,\mathrm{e}^{-j}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}\\ &\ll x\,\mathrm{e}^{-j}\log(1+\mathrm{e}^{-j}\log x)\end{aligned}$$

uniformément pour $-1\le j\le \log_2 x$.

En utilisant (5.15), on voit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\max_{y\ge 1}F(y;n) &\ll x\sum_{-1\le j\le \log_2 x}\log(1+\mathrm{e}^{-j}\log x)\\ &\ll x(\log_2 x)^2.\end{aligned}$$

Cela implique bien (5.13).

Fin de la démonstration du théorème 2. — Dans un premier temps, nous établissons la majoration

$$\rho\big(\alpha, D(\mathcal{A})\big) \le \min(\log 2, \alpha^{-1}) \qquad (\alpha > 0) \tag{5.17}$$

lorsque $\mathcal{A}$ est la suite (de densité unité) de tous les entiers n qui satisfont (5.9), (5.10), (5.11) (avec par exemple $\xi(n) = \log_3 n$) et (5.13).

Posant $I(n) := \bigcup_{d\,|\,n} \Big[\frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2}\tau(n)^{-\alpha}, \frac{\log d}{\log n} + \frac{1}{2}\tau(n)^{-\alpha}\Big]$ et $\mu_n := \operatorname{mes} I(n)$, il faut donc montrer que :

$$\limsup_{n\in\mathcal{A}} \frac{\log\big(\tau(n)^\alpha \mu_n\big)}{\alpha \log \tau(n)} \le \min(\log 2, \alpha^{-1}). \tag{5.18}$$

Lorsque $\alpha \ge 1/\log 2$, la majoration triviale

$$\mu_n \le \tau(n)^{1-\alpha}$$

implique clairement (5.18).

Lorsque $0 < \alpha < 1/\log 2$, nous décomposons chaque diviseur d de n sous la forme $d = ab$, avec $a = d(y)$ pour le choix :

$$y = \exp\big\{\tau(n)^{-\alpha} \log n\big\}. \tag{5.19}$$

Il suit :

$$I(n) \subset \bigcup_{\substack{b\,|\,n\\ p\,|\,b \Rightarrow p>y}} \Big[\frac{\log b}{\log n} - \frac{1}{2}\tau(n)^{-\alpha},\ \frac{\log b}{\log n} + \frac{\log n(y)}{\log n} + \frac{1}{2}\tau(n)^{-\alpha}\Big].$$

D'après le LEMME 5.2, on a pour $n \in \mathcal{A}$:

$$\frac{\log n(y)}{\log n} \le 6 \log_3 n \,\frac{\log y}{\log n} = 6\tau(n)^{-\alpha} \log_3 n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mu_n &\le \sum_{\substack{b\,|\,n\\ p\,|\,b \Rightarrow p>y}} (1 + 6\log_3 n)\tau(n)^{-\alpha} \ll 2^{\Omega(n;y,n)} \log_3 n \cdot \tau(n)^{-\alpha}\\
&\ll \Big(\frac{\log n}{\log y}\Big)^{\log 2} \tau(n)^{-\alpha} \exp\big\{3\sqrt{\log_2 n \log_4 n}\,\big\}\\
&= \tau(n)^{\alpha(-1+\log 2)} \exp\big\{3\sqrt{\log_2 n \log_4 n}\,\big\},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la condition (5.10). Nous pouvons donc écrire pour $n \in \mathcal{A}$

$$\frac{\log\big(\tau(n)^\alpha \mu_n\big)}{\alpha \log \tau(n)} \le \log 2 + \mathrm{O}\bigg(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\log_4 n}{\log_2 n}}\bigg), \tag{5.20}$$

puisque (5.10) et (5.11) garantissent que

$$\frac{\log \tau(n)}{\log_2 n} = \log 2 + \mathrm{O}\bigg(\sqrt{\frac{\log_4 n}{\log_2 n}}\bigg) \qquad (n \in \mathcal{A}). \tag{5.21}$$

Cela complète la preuve de (5.18).

Tournons maintenant notre attention vers la minoration :

$$\rho\big(\alpha, D(\mathcal{A})\big) \ge \min\big(\log 2, \alpha^{-1}\big). \tag{5.22}$$

Cela nécessite une minoration de μ_n. Le paramètre $y = y(n)$ étant toujours défini par (5.19), on a

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\big(n; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\big)\,\mathrm{d}u$$

avec la notation (5.3). A ce stade, on pourrait espérer une minoration convenable si l'on savait que

$$\tau(n; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}) \tag{5.23}$$

n'est pas trop souvent beaucoup plus grand que $\chi\big(n; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\big)$. Malheureusement, cela n'est pas le cas. Le LEMME 5.2 montre en effet que $n(y)$ est essentiellement de l'ordre d'une puissance de y, ce qui signifie qu'avec chaque diviseur d de n compté dans (5.23) sont également comptés presque tous ceux qui ont les mêmes facteurs premiers $> y$ que d. Cette analyse conduit à considérer la minoration :

$$\mu_n \ge \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\big(m; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\,\big)\,\mathrm{d}u \qquad \big(m = n/n(y)\big).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors :

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \tau\big(m; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\,\big)\,\mathrm{d}u\Big)^2 \le \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} \tau\big(m; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\,\big)^2\,\mathrm{d}u. \tag{5.24}$$

Le membre de gauche est aisément calculé. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau\big(m; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\big)\,\mathrm{d}u = \tau(m)\frac{\log y}{\log n} = \tau(m)\tau(n)^{-\alpha}. \tag{5.25}$$

De même

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} & \tau\big(m; n^u/\sqrt{y},\, n^u\sqrt{y}\big)^2\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{\substack{d\,|\,m,\ d'\,|\,m \\ |\log(d'/d)|\le \log y}} \frac{\log y - |\log(d'/d)|}{\log n} \\ &\le \frac{\log y}{\log n}\tau(m)F(n;y) = \tau(m)\tau(n)^{-\alpha}F(n;y)\end{aligned}$$

avec la notation (5.12). On déduit donc de (5.13), (5.24) et (5.25) que l'on a

$$\mu_n > \tau(m)\tau(n)^{-\alpha}(\log_2 n)^{-3} \qquad (n \in \mathcal{A})$$

et donc :

$$\frac{\log(\tau(n)^\alpha \mu_n)}{\alpha \log \tau(n)} \ge \frac{\log \tau(m)}{\alpha \log \tau(n)} + \mathrm{O}\Big(\frac{\log_3 n}{\alpha \log_2 n}\Big) \qquad (n \in \mathcal{A}). \tag{5.26}$$

Lorsque $\alpha \ge 1/\log 2$, on a, grâce à (5.21) :

$$\log y \le \log n \cdot \tau(n)^{-1/\log 2} \le \exp\big\{\mathrm{O}\big(\sqrt{\log_2 n \log_4 n}\,\big)\big\}.$$

D'où, par (5.10) et (5.21) :

$$\tau(m) \ge \tau(n)\exp\big\{-\mathrm{O}\big(\sqrt{\log_2 n \log_4 n}\,\big)\big\} \quad (\alpha \ \ge 1/\log 2). \tag{5.27}$$

Lorsque $0 < \alpha < 1/\log 2$, la relation (5.21) montre que $y \to \infty$ avec n dans $\mathcal{A}$. On peut donc utiliser (5.10) avec $z = y$ pour évaluer $\tau(m)$. Il vient :

$$\tau(m) \ge \tau(n)^{\alpha \log 2}\exp\big\{-\mathrm{O}\big(\sqrt{\log_2 n \log_4 n}\,\big)\big\} \qquad (0 < \alpha < 1/\log 2). \tag{5.28}$$

En reportant (5.27) et (5.28) dans (5.26), on obtient donc, uniformément pour $\alpha > 0$:

$$\frac{\log\big(\tau(n)^\alpha \mu_n\big)}{\alpha \log \tau(n)} \ge \min(\log 2, \alpha^{-1}) + \mathrm{O}\Bigg(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\log_4 n}{\log_2 n}}\Bigg) \quad (n \in \mathcal{A}). \tag{5.29}$$

Cela établit bien (5.22) et achève ainsi la démonstration du THÉORÈME 2.

REMARQUE. — Nous avons en fait montré que l'estimation effective

$$\frac{\log\left(\tau(n)^\alpha\mu_n\right)}{\alpha\log\tau(n)} = \min(\log 2, \alpha^{-1}) + O\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\log_3\tau(n)}{\log\tau(n)}}\right), \tag{5.30}$$

est valable uniformément pour $\alpha > 0$, $n \in \mathcal{A}$. Cela nous servira dans la démonstration du THÉORÈME 3.

6. Preuve du théorème 3

Rappelons la définition

$$F_\alpha(n) := H(\alpha, D_n) = \sum_{1\le i<\tau(n)} \Big(\frac{\log(d_{i+1}/d_i)}{\log n}\Big)^\alpha \qquad (n > 1,\ \alpha > 0) \tag{6.1}$$

où $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{\tau(n)} = n$ désigne la suite croissante des diviseurs de n. Par (5.30) et (4.11), il existe une suite $\mathcal{A}$ de densité 1 telle que l'on ait uniformément pour $n \in \mathcal{A}$ et $0 < \alpha \le 1$

$$\begin{aligned} F_\alpha(n) &= \alpha + \alpha(1-\alpha)\log\tau(n)\int_0^{+\infty} \tau(n)^{\min(\beta\log 2,\,1)-\alpha\beta+O(\theta(n))}\,\mathrm{d}\beta \\ &= \tau(n)^{\max(0,\,1-\alpha/\log 2)+O(\theta(n))} \end{aligned}$$

avec

$$\theta(n) := \sqrt{\frac{\log_3\tau(n)}{\log\tau(n)}}.$$

Cela fournit la première des deux estimations (3.7). Pour établir la seconde, nous allons montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $\alpha > \log 2$, il existe une suite $\mathcal{A}_\varepsilon$ de densité inférieure excédant $(1-\varepsilon)$ telle que :

$$F_\alpha(n) \ll_{\alpha,\varepsilon} 1 \qquad (n \in \mathcal{A}_\varepsilon). \tag{6.2}$$

Cela implique pleinement qu'étant donnée une fonction arbitraire $\xi(n) \to \infty$ la suite $\mathcal{A}_0$ des entiers n satisfaisant à

$$F_\alpha(n) < \xi(n) \tag{6.3}$$

est de densité unité.

Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, la relation (6.3) est optimale, au sens où $F_\alpha(n)$ n'est borné pour aucun $\alpha < 1$ sur une suite de densité 1. La construction suivante, dont nous nous contentons d'indiquer les points-clefs, permet d'établir cela. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, $k := [\log(1/\varepsilon)/\log 2] - 2$. On constate sans peine que, pour chaque $\varepsilon > 0$, la suite des entiers n qui peuvent s'écrire sous la forme

$$n = mp_0 \cdots p_k p$$

avec les conditions

$$1 \leq m \leq n^{\varepsilon^2}, \quad n^{\varepsilon 2^j} < p_j \leq n^{\varepsilon 2^j + \varepsilon^2} \qquad (0 \leq j \leq k)$$

est de densité inférieure positive, et partant possède une infinité d'éléments dans toute suite de densité 1. Or, si nous désignons par t_s (pour $0 \leq s < 2^{k+1}$) les diviseurs de $p_0 \cdots p_k$, il est clair que :

$$t_s = n^{\varepsilon s + O(k\varepsilon^2)} \qquad (0 \leq s < 2^{k+1}). \tag{6.4}$$

Maintenant, pour chaque valeur de $s \geq 1$, mt_s est un certain diviseur d_j de n. Pour ε assez petit, $t_{s+1} > d_j$ d'après (6.4) et on a en fait $d_{j+1} = t_{s+1}$ puisque tous les diviseurs de la forme $m't_r$ avec $m' \mid m$, $r \leq s$ sont $\leq d_j$. On a donc $\log(d_{j+1}/d_j) > \frac{1}{2}\varepsilon \log n$ pour au moins $2^k \gg 1/\varepsilon$ valeurs de j. D'où :

$$F_\alpha(n) \gg \varepsilon^{\alpha - 1}.$$

Comme ε est arbitrairement petit, cela implique bien que

$$\limsup F_\alpha(n) = +\infty$$

pour toute suite de densité 1.

Nous allons maintenant établir (6.2). Dans toute la suite de cette section, nous convenons que les paramètres y, z, u d'une part, Y, Z, U d'autre part, sont liés par les relations :

$$y = z^{1-u}, \quad Y = Z^{1-U}. \tag{6.5}$$

LEMME 6.1. — *Soient* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *et* $\lambda > 0$. *Alors on a*

$$\max_{2 \leq z \leq x} \left\{ \Omega(n; 1, z) - (1+\varepsilon)\log_2 z \right\} \leq \lambda \tag{6.6}$$

pour tous les entiers $n \leq x$ *sauf au plus* $\ll \varepsilon^{-2}(1+\varepsilon)^{-\lambda} x$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 50.1 de [8].

LEMME 6.2. — *Soient* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *et* $\lambda > 0$. *Le nombre des entiers* $n \leq x$ *ne satisfaisant pas à*

$$\max_{\substack{2 \leq 2Y \leq Z \leq x \\ \log Z \geq U^{10} \log x}} \Big\{ \Omega\Big(n; \frac{Z}{Y}, Z\Big) - (1+\varepsilon) \log \frac{1}{U} \Big\} \leq \lambda \tag{6.7}$$

est $\ll \varepsilon^{-4}(1+\varepsilon)^{-\lambda} x$.

Démonstration. — Introduisons les points-tests :

$$t_j := \exp\left\{ \mathrm{e}^{-j} \log x \right\} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si n ne satisfait pas (6.7) et si Y, Z réalisent le maximum du membre de gauche, il existe deux indices j, h avec $0 \leq j \leq h \leq 1 + \log_2 x$, tels que :

$$\begin{cases} t_{j+1} < Z \leq t_j, \quad t_{h+1} < Z/Y \leq t_h, \\ \Omega(n; t_{h+1}, t_j) > (1+\varepsilon) \log \dfrac{1}{U} + \lambda. \end{cases} \tag{6.8}$$

De plus $h - j - 1 \leq \log \dfrac{1}{U} \leq h - j + 1$, de sorte que :

$$\Omega(n; t_{h+1}, t_j) > (1+\varepsilon)(h - j - 1) + \lambda. \tag{6.9}$$

Par ailleurs, la condition $\log Z \geq U^{10} \log x$ implique

$$j \leq \log \Big(\frac{\log x}{\log Z} \Big) \leq 10 \log \frac{1}{U} \leq 10(h - j + 1)$$

d'où

$$h \geq \frac{11}{10} j - 1.$$

Le nombre des exceptions à (6.7) est donc

$$\leq \sum_{n \leq x} \sum_{j \leq 1 + \log_2 x} \sum_{11j/10 - 1 \leq h \leq 1 + \log_2 x} (1+\varepsilon)^{\Omega(n; t_{h+1}, t_j) - (1+\varepsilon)(h-j-1) - \lambda}$$

$$\ll x \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{h \geq 11j/10 - 1} (1+\varepsilon)^{-\lambda} \mathrm{e}^{-Q(1+\varepsilon)(h-j)} \ll x(1+\varepsilon)^{-\lambda} Q(1+\varepsilon)^{-2}$$

où la somme en n a été estimée grâce au LEMME 5.0 et où l'on a posé

$$Q(t) := t \log t - t + 1.$$

On obtient le résultat annoncé en observant que

$$Q(1+\varepsilon) \gg \varepsilon^2 \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Nous désignons dans la suite par $\mathcal{A}(x;\varepsilon,\lambda)$ l'ensemble des entiers $n \le x$ satisfaisant (6.6) et (6.7). On a donc

$$\big|\mathcal{A}(x;\varepsilon,\lambda)\big| \ge x\left\{1 - c_1\varepsilon^{-4}(1+\varepsilon)^{-\lambda}\right\} \tag{6.10}$$

pour une constante positive convenable c_1. Le lemme suivant fournit une majoration du nombre $H(x,y,z;\varepsilon,\lambda)$ des entiers n de $\mathcal{A}(x;\varepsilon,\lambda)$ qui possèdent au moins un diviseur dans $]y,z]$, soit, avec la notation (5.3) :

$$H(x,y,z;\varepsilon,\lambda) := \sum_{n\in\mathcal{A}(x;\varepsilon,\lambda)} \chi(n;y,z). \tag{6.11}$$

LEMME 6.3. — *On a pour* $2 \le y < z \le \sqrt{x}$:

$$H(x,y,z;\varepsilon,\lambda) \ll_{\varepsilon,\lambda} xu^{1-\log 2-\varepsilon} \qquad \big(\log 2/\log z \le u \le (\log z/\log x)^{1/10}\big), \tag{6.12}$$

$$H(x,y,z;\varepsilon,\lambda) \ll_{\varepsilon,\lambda} x(\log z)^{\log 2+\varepsilon} u \log\Big(\frac{1}{u\log z}\Big) \qquad \big(\tfrac12 z < y \le z-1\big). \tag{6.13}$$

Démonstration. — Posons $t := \log(1/u)$. Nous décomposons chaque entier compté dans (6.11) sous la forme $n = ab$ avec $a = n(z^u)$. D'après le LEMME 5.1, on a

$$a \le z^{2ut} \tag{6.14}$$

sauf pour au plus $O(ux)$ entiers $n \le x$. Cette estimation est compatible avec les bornes de (6.12) et (6.13). Nous pouvons donc nous restreindre aux entiers n satisfaisant (6.14). Nous désignons par H_1 la sous-somme correspondante de (6.11).

Si n est compté dans H_1, la relation $\chi(n;y,z) = 1$ implique que $b = n/a$ possède au moins un diviseur d tel que

$$z^{1-us} < d \le z$$

où l'on a posé $s := 2t + 1$. On peut donc écrire :

$$H_1 \le \sum_{n\in\mathcal{A}(x;\varepsilon,\lambda)} \tau(b; z^{1-us}, z). \tag{6.15}$$

Lorsque y, z, x satisfont la condition de validité indiquée pour (6.12), nous utilisons le fait que les entiers n de $\mathcal{A}(x;\varepsilon,\lambda)$ satisfont (6.7), et en particulier :

$$\Omega(n; z^u, z) \leq (1+\varepsilon)t + \lambda. \tag{6.16}$$

On déduit donc de (6.15) et (6.16) que l'on a pour toute valeur du paramètre v tel que $0 < v \leq 1$:

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \sum_{n\leq x} v^{\Omega(n;z^u,z)-(1+\varepsilon)t-\lambda}\,\tau(b; z^{1-us}, z) \\ &\leq v^{-\lambda}\,u^{(1+\varepsilon)\log v} \sum_{\substack{z^{1-us}<d\leq z \\ p\,|\,d \Rightarrow p>z^u}} v^{\Omega(d)} \sum_{m\leq x/d} v^{\Omega(m;z^u,z)}. \end{aligned}$$

La somme en m est $\ll (x/d)u^{1-v}$ d'après le LEMME 5.0. La somme en d apparaissant alors peut être traitée par sommation d'Abel à partir de l'évaluation

$$\sum_{\substack{d\leq D \\ p\,|\,d \Rightarrow p>z^u}} v^{\Omega(d)} \ll \frac{Du^{-v}}{\log z} \qquad (z^{1-us} < D \leq z)$$

qui découle elle-même du LEMME 5.0. On obtient ainsi :

$$H_1 \ll xv^{-\lambda} s u^{2-2v+(1+\varepsilon)\log v}. \tag{6.17}$$

En choisissant alors $v = \frac{1}{2}$, on obtient (6.12).

Lorsque $\frac{1}{2}z < y \leq z - 1$, nous utilisons (6.6). Il suit comme précédemment, pour tout v tel que $0 < v \leq 1$:

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \sum_{n\leq x} v^{\Omega(n;1,z)-(1+\varepsilon)\log_2 z-\lambda}\tau(n; y, z) \\ &\ll v^{-\lambda}(\log z)^{-(1+\varepsilon)\log v} \sum_{y<d\leq z} v^{\Omega(d)} \sum_{m\leq x/d} v^{\Omega(m;1,z)} \\ &\ll v^{-\lambda}x(\log z)^{v-1-(1+\varepsilon)\log v} \sum_{y<d\leq z} \frac{v^{\Omega(d)}}{d}. \end{aligned}$$

La somme en d a été évaluée dans [8, formule (2.39), p. 39] en utilisant le théorème de Shiu [11] pour les sommes «courtes» de fonctions multiplicatives. Elle est

$$\ll \frac{z-y}{z}(\log z)^{v-1}\log\Big(\frac{z}{z-y}\Big) \ll \log\Big(\frac{z}{y}\Big)(\log z)^{v-1}\log\Big(\frac{1}{\log z/y}\Big)$$

d'où :

$$H_1 \ll v^{-\lambda} x\, u(\log z)^{2v-1-(1+\varepsilon)\log v} \log\Big(\frac{1}{u\log z}\Big).$$

Choisissant ici encore $v=\frac12$, on obtient (6.13).

Fin de la démonstration du théorème 3. — Soit $\alpha > \log 2$. Nous posons, pour $\varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$,

$$\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha) = \mathcal{A}\big(x;\varepsilon,(6/\varepsilon)\log(1/\varepsilon)\big),$$

de sorte que (6.10) implique, quitte à modifier la valeur de $\varepsilon_0(\alpha)$,

$$\big|\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha)\big| \geq x\big(1-\tfrac12\varepsilon\big) \qquad \big(x > x_0(\varepsilon)\big). \tag{6.18}$$

Nous allons montrer que pour une constante convenable $K(\varepsilon,\alpha)$ on a :

$$\sum_{n\in\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha)} F_\alpha(n) \leq K(\varepsilon,\alpha)x. \tag{6.19}$$

On en déduit que

$$F_\alpha(n) \leq 2\varepsilon^{-1}K(\varepsilon,\alpha)$$

pour tous les entiers $n\leq x$ sauf au plus pour εx d'entre eux — c'est-à-dire (6.2).

Pour $n>1$, $k := \big[\frac12\,\tau(n)\big]$, la symétrie

$$\frac{d_{j+1}}{d_j} = \frac{d_{\tau(n)-j+1}}{d_{\tau(n)-j}}$$

des diviseurs de n permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j<\tau(n)} \big(\log(d_{j+1}/d_j)\big)^\alpha \\ = 2\sum_{1\leq j<k} \big(\log(d_{j+1}/d_j)\big)^\alpha + \gamma_n\big(\log(\sqrt{n}/d_k)\big)^\alpha\end{aligned} \tag{6.20}$$

où γ_n vaut 2 si n est un carré, et 2^α dans le cas contraire. D'après le LEMME 4.1, la somme du second membre vaut :

$$(\log d_k)^\alpha + \alpha(1-\alpha)\int_0^{\log d_k}\int_0^w \chi(n;\mathrm{e}^v,\mathrm{e}^w)(w-v)^{\alpha-2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{6.21}$$

En effectuant le changement de variables $\mathrm{e}^w = z$, $\mathrm{e}^v = z^{1-u}$, on déduit donc de (6.20) et (6.21) :

$$(6.22)\quad F_\alpha(n) \le \frac{1}{(\log n)^\alpha}\int_1^{\sqrt{n}} (\log z)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}z}{z}\int_0^1 \chi(n; z^{1-u}, z)u^{\alpha-2}\,\mathrm{d}u + 3.$$

Désignons par $J(n)$ l'intégrale double apparaissant dans cette majoration. Nous pouvons nous restreindre à établir que :

$$(6.23)\qquad \sum_{n\in\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha)} J(n) \ll_{\varepsilon,\alpha} x(\log x)^\alpha.$$

Le résultat souhaité découle ensuite d'une sommation d'Abel.

Le traitement de la somme (6.23) est assez complexe, et il est nécessaire d'opérer quelques réductions préalables. Nous observons d'abord que la contribution du domaine $\frac{1}{2} \le u \le 1$ est $\mathrm{O}\big((\log n)^\alpha\big)$, donc acceptable. Par ailleurs, une majoration grossière de la contribution complémentaire est obtenue en remplaçant $\chi(n; z^{1-u}, z)$ par $\tau(n; z^{1-u}, z)$. Une interversion des signes d'intégration fournit alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} u^{\alpha-2}\,\mathrm{d}u\int_1^{\sqrt{n}}\tau(n; z^{1-u}, z)(\log z)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}z}{z}&\\ \le \sum_{d\mid n}\int_0^{\frac{1}{2}} u^{\alpha-2}\,\mathrm{d}u\int_d^{d^{1/(1-u)}}&(\log z)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}z}{z}\\ \ll \sum_{d\mid n}(\log d)^\alpha \ll \tau(n)&(\log n)^\alpha.\end{aligned}$$

Cela montre que l'on peut imposer la condition supplémentaire $n > \sqrt{x}$ dans la sommation (6.23).

Considérons alors la partition du domaine d'intégration

$$\{1 \le z \le \sqrt{n},\quad 0 \le u \le \tfrac{1}{2}\}$$

induite par les conditions

$(\mathcal{D}_1)\qquad z \le n^{2u}$;

$(\mathcal{D}_2)\qquad z > n^{2u},\ z^u \ge 2$;

$(\mathcal{D}_3)\qquad z > n^{2u},\ \dfrac{z}{z-1} < z^u < 2,\ z > 2$;

$(\mathcal{D}_4)\qquad z > n^{2u},\ 1 < z^u \le \dfrac{z}{z-1},\ z > 2$;

$(\mathcal{D}_5)\qquad z > n^{2u},\ 1 \le z \le 2$;

et désignons par $J_k(n)$ la contribution du domaine $(\mathcal{D}_k)$ à l'intégrale double $J(n)$. Nous allons montrer que l'on a :

$$(6.24) \qquad \sum_{\substack{n\in\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha)\\ n>\sqrt{x}}} J_k(n) \ll_{\varepsilon,\alpha} x(\log x)^\alpha \qquad (1\le k\le 5).$$

Nous estimons $J_1(n)$ en majorant trivialement $\chi(n;z^{1-u},z)$ par 1. Après interversion de sommations, nous obtenons :

$$J_1(n) \le \alpha^{-1}\int_0^1 u^{\alpha-2}(2u\log n)^\alpha \,\mathrm{d}u \ll (\log n)^\alpha.$$

La relation (6.23) est donc bien satisfaite pour $k=1$.

Les conditions $(\mathcal{D}_2)$ impliquent $\dfrac{\log 2}{\log z}\le u\le \dfrac{\log z}{\log x}$ lorsque $n>\sqrt{x}$. On a donc grâce à (6.12), avec $\lambda=(6/\varepsilon)\log(1/\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha)\\ n>\sqrt{x}}} J_2(n) &\le \int_1^{\sqrt{x}}(\log z)^{\alpha-1}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\int_{\log 2/\log z}^{\log z/\log x} H(x,z^{1-u},z;\varepsilon,\lambda)u^{\alpha-2}\,\mathrm{d}u\\ &\ll_\varepsilon x\int_1^{\sqrt{x}}(\log z)^{\alpha-1}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\int_0^1 u^{\alpha-\log 2-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}u\\ &\ll_{\varepsilon,\alpha} x(\log x)^\alpha.\end{aligned}$$

Cela implique (6.23) pour $k=2$.

Semblablement, on déduit de (6.13) que

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathcal{A}_1(x;\varepsilon,\alpha)} J_3(n)\\ &\qquad\ll x\int_1^{\sqrt{x}}(\log z)^{\alpha+\log 2-1+\varepsilon}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\int_0^{1/\log z} u^{\alpha-1}\log\Big(\frac{1}{u\log z}\Big)\,\mathrm{d}u\\ &\qquad\ll_{\alpha,\varepsilon} x(\log x)^{\log 2+2\varepsilon}\ll_{\alpha,\varepsilon} x(\log x)^\alpha,\end{aligned}$$

d'où (6.23) pour $k=3$.

Enfin, on estime $J_4(n)$ et $J_5(n)$ en majorant

$$\chi(n;z^{1-u},z) \quad\text{par}\quad \tau(n;z^{1-u},z).$$

On obtient ainsi :

$$J_4(n) \leq \int_2^{\sqrt{n}} (\log z)^{\alpha-1} \sum_{\substack{d \mid n \\ z-1<d\leq z}} \int_{\log(z/d)/\log z}^{\log\left(z/(z-1)\right)/\log z} u^{\alpha-2}\, \mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}z}{z}$$
$$\ll \int_2^{\sqrt{n}} \sum_{\substack{d \mid n \\ z-1<d\leq z}} (\log z)^{\alpha-1} \Big(\frac{1}{d\log d}\Big)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \ll \sum_{d \mid n} d^{-\alpha}\,;$$

$$J_5(n) \ll \int_0^{1/2} u^{\alpha-2} \int_1^2 \tau(n; z^{1-u}, z)(\log z)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}z}{z}\, \mathrm{d}u$$
$$\leq \sum_{\substack{d \mid n \\ d\leq 2}} (\log d)^{\alpha} \ll 1.$$

On a donc $\sum_{n\leq x} J_k(n) \ll_\alpha x$ pour $k = 4, 5$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Nous avons établi la seconde estimation (3.7) en majorant la valeur moyenne de $F_\alpha(n)$ sur un sous-ensemble de $\{n : n \leq x\}$ de densité voisine de 1. Il est légitime, ainsi que l'a fait M. Balazard, de se demander si le résultat annoncé ne découle pas, plus simplement, de la majoration :

$$\sum_{n\leq x} F_\alpha(n) \ll_\alpha x \qquad (\alpha > \log 2). \tag{6.25}$$

Un tel résultat n'a en fait pas lieu. En remarquant que l'on a pour tout $n > 1$

$$F_\alpha(n) \geq \Big(\frac{\log 2}{\log n}\Big)^{\alpha} \sum_{\substack{1\leq j<\tau(n) \\ d_j \mid d_{j+1}}} 1,$$

et en appliquant le théorème 2 de [13], on obtient en effet

$$\sum_{n\leq x} F_\alpha(n) \gg x(\log x)^{1-\delta-\alpha+o(1)}$$

avec $\delta = 1 - (1 + \log_2 2)/\log 2 = 0,086071\ldots$, ce qui infirme (6.25) pour $\log 2 < \alpha < 1 - \delta$. Par ailleurs, pour $1 - \delta \leq \alpha \leq 1$, on peut effectivement établir (6.25) : grâce à (6.22), le théorème 21 de [8] fournit immédiatement

$$\sum_{n\leq x} F_\alpha(n) \ll_\alpha x(\log x)^{\max(0,\, 1-\delta-\alpha)} \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Balog (A.), Erdős (P.) and Tenenbaum (G.). — *On arithmetic functions involving consecutive divisors*, in *Analytic Number Theory*, Urbana, 1989, B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand eds., Prog. Math. **85**, p. 77–90 Birkhäuser, 1990.

[2] Bovey (J.D.). — *On the size of prime factors of integers*, Acta Arith., t. **33**, 1977, p. 65–80.

[3] Erdős (P.). — *On the distribution function of additive functions*, Ann. of Math., t. **47**, 1946, p. 1–20.

[4] Erdős (P.) et Tenenbaum (G.). — *Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier*, Ann. Inst. Fourier, t. **31**, 1981, p. 17–37.

[5] Erdős (P.) et Tenenbaum (G.). — *Sur les diviseurs consécutifs d'un entier*, Bull. Soc. Math. France, t. **111**, 1983, p. 125–145.

[6] Erdős (P.) et Tenenbaum (G.). — *Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs*, J. Number Theory, t. **31**, 1989, p. 285–311.

[7] Halberstam (H.) and Richert (H.-E.). — *On a result of R.R. Hall*, J. Number Theory (1), t. **11**, 1979, p. 76–89.

[8] Hall (R.R.) and Tenenbaum (G.). — *Divisors.* — Cambridge University Press, 1988.

[9] Maier (H.) and Tenenbaum (G.). — *On the set of divisors of an integer*, Invent. Math., t. **76**, 1984, p. 121–128.

[10] Mandelbrot (B.B.). — *Les objets fractals : forme, hasard et dimension.* — Flammarion, Paris 1975 ; 3e édition, 1989.

[11] Shiu (P.). — *A Brun-Titchmarsh Theorem for Multiplicative Functions*, J. Reine Angew. Math., t. **313**, 1980, p. 161–170.

[12] Tenenbaum (G.). — *Lois de répartition des diviseurs 4*, Ann. Inst. Fourier, t. **29**, 1979, p. 1–15.

[13] Tenenbaum (G.). — *Un problème de probabilité conditionnelle en arithmétique*, Acta Arith., t. **49**, 1987, p. 165–187.

[14] Tenenbaum (G.). — *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* — Publications de l'Institut Élie Cartan, Université de Nancy I, 1990.